UNIVERSITÉ BORDEAUX 1 Sciences Technologies	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013** **SESSION 2 PRINTEMPS** **Licence de Mathématiques** **Examen de Géométrie et Topologie (N1MA6014)** **Date : 18/06/2013** **Heure : 14h00** **Durée : 3h00** Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée Epreuve de Mr : Bessières. Longueur du sujet : 2 pages	Département DL Licence

Exercice 1. **(Questions de cours)**

(1) Soit M un ensemble, m un entier > 0. Donner la définition d'un atlas de classe C^0 de dimension m sur M. De quelle structure topologique est alors munie M ?

(2) Donner la définition d'un revêtement $p : E \to B$, où E, B sont deux espaces topologiques et p une application.

Exercice 2. On dit qu'un espace topologique X est localement connexe par arc (lcpa) en $x \in X$ si pour chaque voisinage V de x, il existe un voisinage connexe par arc (cpa) U de x tel que $x \in U \subset V$. L'espace X est dit lcpa s'il est lcpa en chacun des ses points.

(1) Montrer que X est lcpa si et seulement si pour tout ouvert U de X, chaque composante cpa de U est ouverte dans X.

(2) Montrer que chaque composante cpa de X est contenue dans une composante connexe de X.

(3) On suppose que X est lcpa. Montrer que les composantes connexes et les composantes cpa de X sont les mêmes.

Exercice 3. Quelles sont les surfaces définies par les symboles suivants :

(a) $abcabc$

(b) $abca^{-1}bc$

(c) $abca^{-1}b^{-1}c$

(d) $abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$

(e) $abcbac$

(f) $abcb^{-1}ac$

(g) $abcb^{-1}a^{-1}c$

(h) $abcb^{-1}a^{-1}c^{-1}$.

Exercice 4. L'exercice comporte 2 parties A et B. On pourra admettre les résultats de la partie A pour traiter la partie B.

On rappelle que l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement. Pour tout chemin continu $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$, on définit l'indice $Ind(\gamma)$ de γ comme suit : soit $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ un relevé de γ (c-a-d un chemin continu satisfaisant $\exp(\tilde{\gamma}) = \gamma$), alors

$$Ind(\gamma) = \frac{1}{2\pi i}(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)).$$

A. (1) Démontrer que $Ind(\gamma) \in \mathbb{Z}$ et ne dépend pas du choix de relevé de γ.

(2) Montrer que si γ_1 et γ_2 sont homotopes en tant qu'applications de S^1 vers $\mathbb{C}^*$ alors $Ind(\gamma_1) = Ind(\gamma_2)$.

(3) Quel est l'indice du lacet $[0,1] \ni t \mapsto e^{2i\pi nt}$, $n \in \mathbb{Z}$?

B. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. On veut montrer que P a une racine dans $\mathbb{C}$. Supposons que ce ne soit pas le cas. On considère les applications définies de S^1 dans $\mathbb{C}$ par

$$P_t(z) = P(tz) \quad \text{et} \quad f_t(z) = t^n z^n,$$

où t est un paramètre réel.

(1) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, P_t est une application de S^1 dans $\mathbb{C}^*$, homotope à l'application constante égale à $P(0)$. Que vaut l'indice $Ind(P_t)$?

(2) Montrer que, pour tout $t > 0$, f_t est un lacet dans $\mathbb{C}^*$, homotope au lacet f_1. Que vaut $Ind(f_t)$?

(3) Montrer que pour $t \geq 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|$, on a $|f_t(z) - P_t(z)| < t^n$ pour tout $z \in S^1$.

(4) En déduire que, pour t assez grand, les lacets P_t et f_t sont homotopes et conclure.