ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013
SESSION 2 PRINTEMPS
Licence de Mathématiques
Examen de Systèmes dynamiques (K1MA6021)
Date : 25/06/2013 Heure : 14h00 Durée : 3h00
Documents : Non autorisés. Calculette homologuée : autorisée
Epreuve de Mr : Bessières. Longueur du sujet : 2 pages

**Exercice 1.** **(Autour du cours)**

(1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = P^{-1}AP$ où $P$ est une matrice inversible.
   (a) Quelle relation y a t'il entre les solutions du système $X' = AX$ et celles du système $X' = BX$ ?
   (b) Démontrer là.

(2) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ admettant une valeur propre complexe $\lambda$ associé à un vecteur propre complexe $W$.
   (a) Démontrer que $Z(t) = e^{\lambda t}W$ est une solution (à valeurs complexes) du système $X' = AX$.
   (b) Déduire de $Z(t)$ deux solutions réelles du système $X' = AX$.

**Exercice 2.** Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ telle que $\phi(0) = 0$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\phi'(t)| \leq C + M|\phi(t)|$$

où $C, M > 0$ sont des constantes données. On veut démontrer le résultat suivant (une version du lemme de Gronwall) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\phi(t)| \leq \frac{C}{M}\left(e^{Mt} - 1\right) \tag{2.1}$$

(1) Soit $t \geq 0$, montrer que $|\phi(t)| \leq U(t)$ où $U(t) = Ct + M\int_0^t |\phi(s)|\, ds$.

(2) En utilisant la fonction $f$, définie par $f(t) = e^{-Mt}U(t)$ pour $t \geq 0$, montrer que $(2.1)$ est vraie pour tout $t \geq 0$.

(3) Montrer que $(2.1)$ est vraie pour tout $t \leq 0$.

**Exercice 3.** On considère les matrices

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad (c)\ A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chaque système $X' = AX$ associé,

i. Déterminez les valeurs propres et les vecteurs propres de $A$ (éventuellement complexes).

ii. Déterminez une matrice $P$ telle que $P^{-1}AP$ soit de Jordan.

iii. Déterminez le portrait de phase de $Y' = P^{-1}APY$ puis de $X' = AX$, en précisant soigneusement les axes utilisés.

**Exercice 4.** On considère le système différentiel dans $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} x' &= 2y(z-1) \\ y' &= -x(z-1) \\ z' &= -z^3 \end{cases}$$

qu'on écrit $X' = f(X)$.

(1) Montrer que $X_* = (0,0,0)$ est l'unique point d'équilibre du système.

(2) (a) Calculer le linéarisé du système en $X_*$.

(b) Déterminer les valeurs propres du linéarisé et dresser succintement son portrait de phase.

(c) Que peut-on en déduire quand au type du point d'équilibre $X_*$ pour le système $X' = f(X)$ ?

(3) On pose $V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, où $a, b, c > 0$ sont des constantes.

(a) Montrer qu'il existe des valeurs $a, b, c$ pour lesquelles $V$ est une fonction de Lyapounov de $X' = f(X)$ en $X_*$.

(b) En déduire la nature du point d'équilibre $X_*$.