Courbure de Ricci : flot et rigidité différentielle

(soutenance - HDR)

Laurent Bessières

Institut Fourier,
http://www.fourier.ujf-grenoble.fr/~lbessier

10 décembre 2010

Richard Hamilton '82 : $t \mapsto g(t)$ sur M^n solution de

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}$$

avec $g(0) = g_0$ donnée

Si $\mathrm{Ric}_{g_0} = \lambda g_0$,

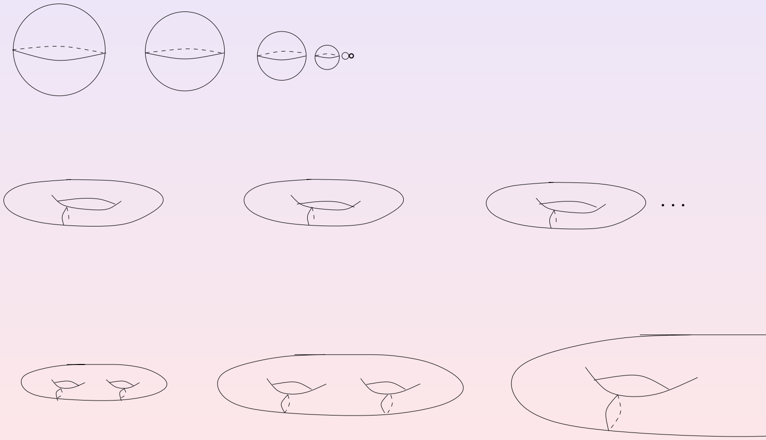
$$g(t) = (1 - 2\lambda t) g_0$$

$g(t) = (1 - 2\lambda t)g_0$

$\lambda > 0$

$\lambda = 0$ ...

$\lambda < 0$



- g_0 quelconque : $g(t)$ existe sur $[0, T_{\max})$,

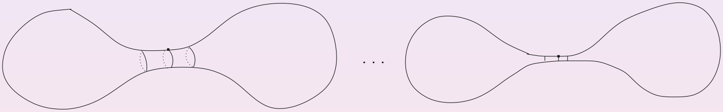
$$T_{\max} < +\infty \implies |\,\mathrm{sect}_{g(t)}\,|_\infty \underset{t \to T_{\max}}{\longrightarrow} \infty$$

- (n=3) $\mathrm{Ric}_{g_0} > 0$: $T_{\max} < +\infty$

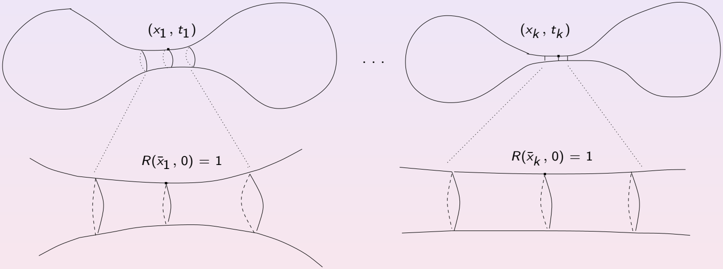
$$\tilde{g}(t) \underset{t \to T_{\max}}{\longrightarrow} g(T)$$

où $\mathrm{sect}_{g(T)} = \mathrm{const} > 0 \Rightarrow M$ est sphérique (difféo à un quotient de S^3)

$T_{\max} < +\infty$, formation de singularité

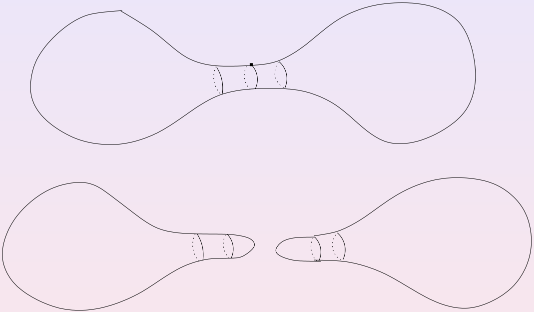


Etude des singularités



Dilatation parabolique : $\bar{g}_i(t) = Q_i g(t_i + t/Q_i)$

Chirurgie



$$\frac{\partial}{\partial t} g = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}$$

Grisha Perelman (Arxiv 2002-2003) :

Flot de Ricci avec chirurgie - elliptisation, géométrisation

- infinité de chirurgies
- pas de borne globale de courbure

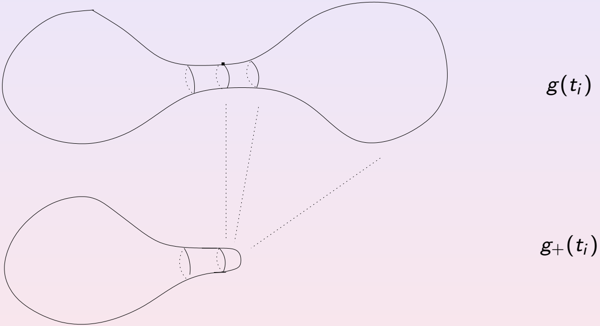
Flot de Ricci à bulles

On suppose M irréductible, i.e. toute $S^2 \subset M$ borde $B^3 \subset M$.

Une définition

Flot de Ricci à bulles : $t \mapsto g(t)$ sur M, C^∞ par morceaux,

- $$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\,\mathrm{Ric}_{g(t)}$$
  sur les intervalles réguliers
- temps singuliers $\{t_i\}$ discret dans $\mathbf{R}$
- $\forall t_i$, $t \mapsto g(t)$ continue à gauche, a une limite $g_+(t_i)$ à droite :
  - $g_+(t_i) \leqslant g(t_i)$
  - $R_{\min}(g_+(t_i)) \geqslant R_{\min}(g(t_i))$


$g(t_i)$
$g_+(t_i)$

Un théorème d'existence - elliptisation

Théorème Soit g_0 sur M. Alors
(1) M est sphérique, ou
(2) $g(t)$ existe sur $[0, +\infty)$ avec $g(0) = g_0$

Un théorème d'existence - elliptisation

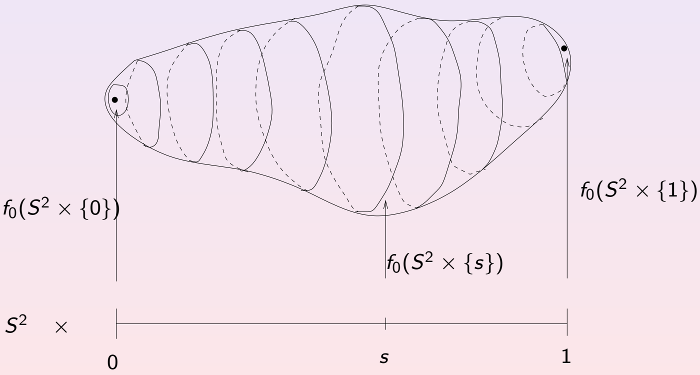
Théorème Soit g_0 sur M. Alors
(1) M est sphérique, ou
(2) $g(t)$ existe sur $[0, +\infty)$ avec $g(0) = g_0$

Théorème (Colding-Minicozzi) Soit g_0 sur M.
Si $|\pi_1(M)| < +\infty$, il existe $T(g_0) < +\infty$:
$\forall g(t)$ sur $[0, T)$ avec $g(0) = g_0$, $T \leqslant T(g_0)$

Corollaire Si $|\pi_1(M)| < +\infty$, alors (1) : M est sphérique.

Idée de la preuve de CM

$|\pi_1(M)| < +\infty \Longrightarrow \exists f_0 : S^2 \times [0,1] \to M$, constante aux extrémités, homotopiquement non triviale



la *largeur* de (M, g) :

$$W(g) := \inf_{f \in [f_0]} \max_{s \in [0,1]} \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla_x f(x,s)|_g^2 \, dx > 0$$

la *largeur* de (M, g) :

$$W(g) := \inf_{f \in [f_0]} \max_{s \in [0,1]} \frac{1}{2} \int_{S^2} |\nabla_x f(x,s)|_g^2 \, dx > 0$$

$t \mapsto W(g(t))$ est continue et

$$\begin{aligned} \frac{d^+}{dt} W(g(t)) &\leqslant -4\pi - \frac{1}{2} R_{\min}(t) W(g(t)) && (1) \\ &\leqslant -4\pi - \frac{1}{2} \frac{R_{\min}(0)}{1 - \frac{2R_{\min}(0)}{3} t} W(g(t)) && (2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow W(g(t))$ atteind 0 si $t \geqslant T(g_0)$.

Construction du flot de Ricci à bulles

On suppose M irréductible et *non sphérique*

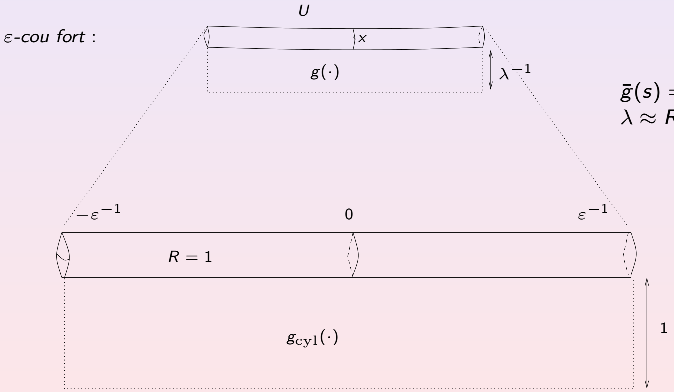
Construction sur $[0, T]$, $T > 0$ quelconque, et itération.

$\varepsilon > 0$. $U \subset M$ ouvert, $x \in U$.
$t \mapsto g(t)$ sur M.

Déf : U est un *ε-VC centré en* (x, t) dans les deux cas suivants :

Voisinages canoniques

U *ε-cou fort* : $\exists \lambda > 0$, $(U, \bar{g}(\cdot))$ est ε-proche de $(S^2 \times (-\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{-1}), g_{\mathrm{cyl}}(\cdot))$ sur $[-1, 0]$,



$\bar{g}(s) = \lambda g(t + \frac{s}{\lambda})$
$\lambda \approx R(x, t)$

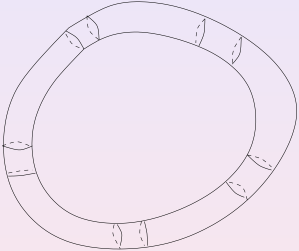
Voisinages canoniques

U *ε-capuchon* : $\approx$ boule B^3 dont un voisinage du bord est un ε-cou de $g(t)$

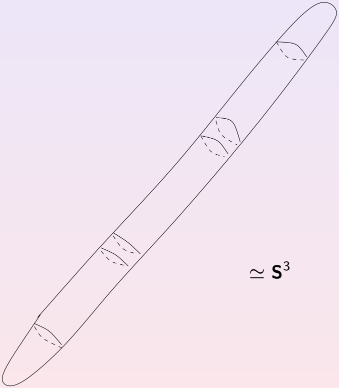
ε-capuchon :

On demande aussi en (x, t) : $|\nabla R| < CR^{3/2}, \quad |\partial_t R| < CR^2$

Rem : $VC_r \Rightarrow R_{\min}(t) < r^{-2}$, sinon $(M, g(t)) \subset$ union de ε-VC



$\simeq \mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$



$\simeq \mathbf{S}^3$

Paramètres de chirurgie

Proposition

$r > 0, \;\; 0 < \delta << 1, \; g(\cdot)$ FRb

$$VC_r \Rightarrow \exists h, \Theta > 0 \;\; (r, \delta)$$

tel que

$$\mathcal{L} := \{R(\cdot, t_0) \geqslant \Theta/2\} \subset \mathcal{B}$$

union de boules, bordées de sphères médianes de δ-cous forts de courbure $\approx h^{-2}$

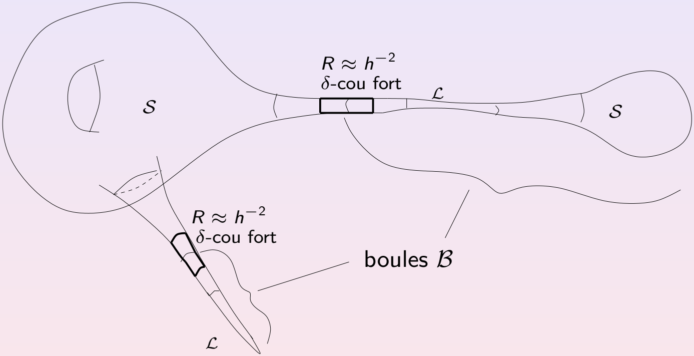
$$r^{-2} \quad << \quad h^{-2} \quad << \quad \Theta$$

échelle des ε-VC

échelle des chirurgies

seuil déclencheur

$\mathcal{L} : R(\cdot, t_0) \geqslant \Theta/2,$



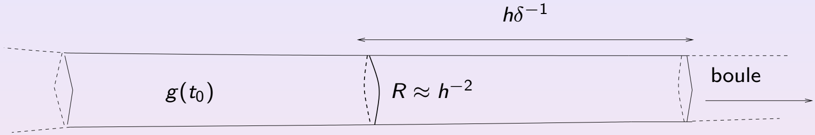
$\mathcal{S} : R(\cdot, t_0) < r^{-2}$ $\qquad r^{-2} << h^{-2} << \Theta$

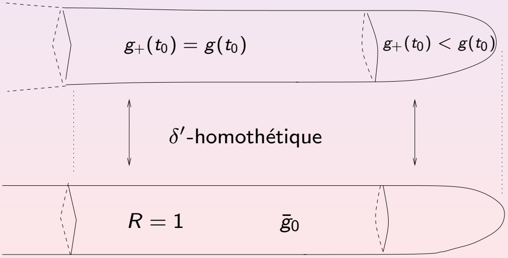
Premier t_0 tel que $R_{\max}(t_0) = \Theta$

Dans $\mathcal{B}$, on remplace $g(t_0)$ par $g_+(t_0)$:

- $g_+(t_0) < g(t_0)$
- préserve le pincement de Hamilton-Ivey
- δ'-capuchon standard

Chirurgie métrique (thm)

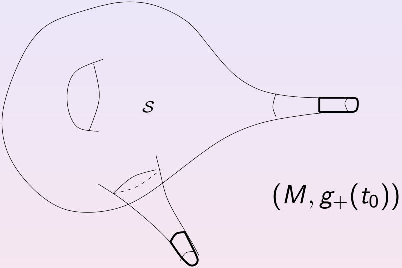




- préserve H-I
- δ'-capuchon standard

métrique initiale standard

(r,δ)-chirurgie



$R_{\min}(g_+(t_0)) \geqslant R_{\min}(t_0)$
$R_{\max}(g_+(t_0)) \leqslant \frac{\Theta}{2}$

$$\Rightarrow t_1 - t_0 \geqslant \frac{1}{C\Theta}$$

si $R_{\max}(t_1) = \Theta$

Préservation de VC_r

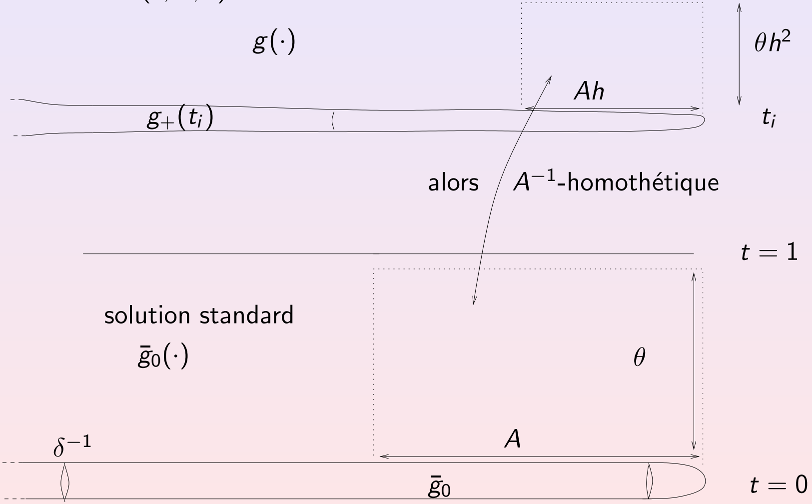
Prop $\exists r, \delta(T) > 0$ tel que si $g(\cdot)$ est un flot de Ricci à bulles sur $[0, t] \subset [0, T]$ avec $g(0)$ normalisé, de paramètres (r, δ) sur $[0, t)$, alors il satisfait VC_r sur $[0, t]$.

Par contradiction

$r_i \searrow 0$, $\delta_i \searrow 0$
$(M_i, g_i(\cdot))$ flots de Ricci à bulles de paramètres (r_i, δ_i) sur $[0, t_i)$
$Q_i = R(x_i, t_i) \geqslant {r_i}^{-2} \to +\infty$
mais $(x_i, t_i) \notin \varepsilon$-VC
$\bar{g}_i(t) := Q_i g(t_i + \frac{t}{Q_i})$
$(M_i, \bar{g}_i(\cdot), (x_i, 0)) \longrightarrow (M_\infty, g_\infty(\cdot), (x_\infty, 0))$?

Persistence du capuchon standard

Si $\delta < \bar{\delta}(r, A, \theta)$



Théorème d'existence à paramètres

On obtient :

Théorème Soit $T > 0$, $\exists r, \delta, \kappa > 0$ tel que si g_0 normalisée, $\exists$ (r, δ, κ)-flot de Ricci à bulles $g(\cdot)$ sur $[0, T]$ avec $g(0) = g_0$.

Corollaire

- $|\,\mathrm{sect}\,| < C(T)$
- $\mathrm{inj} > i_0(T) > 0$

En itérant on obtient $g(\cdot)$ sur $[0, +\infty)$, de paramètres $(r_i, \delta_i, \kappa_i)$ sur $[i, i+1)$.

Géométrisation

à montrer :

Théorème Soit M irréductible, atoroïdale, $|\pi_1(M)| = +\infty$. Alors M est hyperbolique ou de Seifert.

Atoroïdale : pas de tores incompressibles (i.e. où $\pi_1(T^2)$ s'injecte dans $\pi_1(M)$)

Seifert : a une partition en cercles, chaque cercle a un voisinage saturé

Décomposition mince-épaisse

Déf. $w > 0$, $x \in (M, g)$ *w-épais* si $\forall \rho \in (0, 1]$:

$$\mathrm{sect} \geqslant -\rho^{-2} \text{ sur } B(x, \rho) \Longrightarrow \mathrm{vol}\ B(x, \rho) \geqslant w\rho^3$$

Sinon x *w-mince.*
Soit $t_n \to \infty$, $g_n = \frac{1}{t_n} g(t_n)$, $M_n = (M, g_n)$

Théorème

- $\mathrm{vol}(g_n) < C$, et si $x_n \in M_n^+(w)$, (M_n, x_n) (sous)-converge vers (H, x_∞) hyperbolique complète
- g_n a courbure localement contrôlée

Le cas d'effondrement (au sens de Perelman)

Dichotomie :

- $\exists w > 0,\ M_n^+(w) \neq \emptyset,\ \forall n$ grand
- $\exists w_n \searrow 0,\ M_n^+(w_n) = \emptyset,\ \forall n$ (effondrement)

à montrer (cas d'effondrement) :

$$M \text{ est de Seifert}$$

Arguments de recouvrement

- hyp. effondrement $\Rightarrow M_n$ recouverte par (U_i), $U_i \approx$ boule métrique $\subset$ espace à courbure $\geqslant 0$, virt. abélien, volume $<<$ (rayon)^3
- $\exists (U_i)$ de dimension $\leqslant 2$
- (Thm d'annulation, Gromov) $||M|| = 0$
- Si $M = H \cup G$ (géométrisable),

$$||M|| = \frac{\mathrm{vol}(H)}{v_3} = 0 \Leftrightarrow M = G \text{ est graphée}$$

- Astuce : $\exists U$, $M \setminus U$ irréductible (autre argument de recouvrement), à bord donc Haken (géométrisées, Thurston), $||\bar{M}|| = 0 \Rightarrow M \setminus U$ graphée, puis M.

Cas général

Rem : si $\mathrm{vol}(H) < V_0(M) := \inf \mathrm{vol}(M \setminus L)$, $L \subset M$ entrelacs hyperbolique ($\forall H$), alors M aussi de Seifert

Géométrisation : M non hyperbolique $\Rightarrow$ Seifert.
$V_0(M) = \mathrm{vol}(M \setminus L_0)$, $L_0 \neq \emptyset$.
$\exists g_0$ sur M avec $R_{g_0} \geqslant -6$ et $\mathrm{vol}_{g_0}(M) < V_0(M)$.
$g(t)$ tel que $g(0) = g_0$. On montre :

$$\mathrm{vol}(H) \leqslant \lim \mathrm{vol}(M_n) \leqslant \mathrm{vol}_{g_0}(M) < V_0(M)$$

Conclusion avec la remarque.

3-variétés non compactes

M_0 3-variété connexe orientée, g_0 normalisée.

Théorème $\forall T > 0$, $\exists r, \delta, \kappa(T) > 0$, $\exists (r, \delta, \kappa)$-solution chirurgicale $(M(\cdot), g(\cdot))$ sur $[0, T]$ telle que $(M(0), g(0)) = (M_0, g_0)$

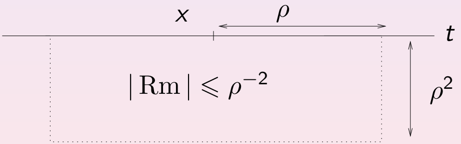
($M(t)$ peut-être non connexe, ou vide)

Corollaire Si $R_{\min}(g_0) > 0$, $\exists$ collection finie $\mathcal{F}$ de variétés sphériques tq M_0 est une somme connexe (éventuellement infinie) de copies de membres de $\mathcal{F}$ et de $S^2 \times S^1$.

Questions du jury

Non effondrement local

Théorème (Perelman I)
$\forall T > 0, \exists \kappa = \kappa(T) > 0$, tout flot de Ricci $g(\cdot)$, avec $g(0)$ normalisé, est κ-non effondré à l'échelle 1, c-à-d
$\forall (x,t)$, $\forall \rho \in (0,1]$, si $|\,\mathrm{Rm}\,| \leqslant \rho^{-2}$ sur $P(x,t,\rho,-\rho^2)$ alors
$\mathrm{vol}\ B(x,t,\rho) \geqslant \kappa\rho^3$



alors

$\mathrm{vol}\ B(x,t,\rho) \geqslant \kappa\rho^3$