Université Bordeaux
Mathématiques

L3, Structures algébriques 2
Année 2016 – 2017

FEUILLE D'EXERCICES n° 1

Anneaux, généralités

Conformément aux usages du cours, tous les anneaux considérés sont unitaires (il existe dans A un élément neutre pour $\times$ noté 1_A). De plus on peut avoir $1_A = 0_A$ (où 0_A est le neutre pour $+$), auquel cas $A = \{0_A\}$. Un sous-anneau d'un anneau A contient 1_A et un morphisme d'anneaux $f : A \to B$ est supposé vérifier $f(1_A) = 1_B$.

Exercice 1 – Un anneau $(A, +, \times)$ est dit de Boole si tout $x \in A$ est *idempotent* i.e. vérifie $x^2 = x$.

Exemple d'anneau de Boole : si E est un ensemble, $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole (on ne demande pas de le démontrer).

1) Soit A un anneau de Boole. Montrer que pour tout $x \in A$ on a $x + x = 0_A$.

2) En déduire qu'un anneau de Boole est commutatif.

3) Montrer qu'un anneau de Boole intègre n'a que 2 éléments et est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$.

4) Un anneau de Boole peut-il avoir 3 éléments ?

5) Montrer qu'il existe, à isomorphisme près un unique anneau de Boole à 4 éléments : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \times)$.

6) Soit $(A, +, \times)$ un anneau dont tout élément vérifie $x^6 = x$. Montrer que A est un anneau de Boole. *Indication* : on pourra d'abord montrer que pour tout x, on a $x + x = 0_A$ puis calculer $(1_A + x)^6$.

7) On se propose de montrer qu'un anneau de Boole $(A, +, \times)$ fini a pour cardinal une puissance de 2.

a) Montrer que si B est un sous-groupe propre de $(A, +)$ et si $a \notin B$, alors $B \cup (a + B)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ de cardinal $2|B|$.

b) En déduire le résultat annoncé.

Exercice 2 – Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément x de A est dit *nilpotent* s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^n = 0_A$. Si $x \in A$ est nilpotent, le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $x^n = 0_A$ est appelé l'*indice de nilpotence* de x.

1) Soient $a, b \in A$ tels que ab soit nilpotent d'indice de nilpotence n. Montrer que ba est nilpotent. Que peut-on dire de son indice de nilpotence ?

2) Soient a et b deux éléments nilpotents de A. On suppose qu'ils commutent i.e. $ab = ba$. Montrer que $a + b$ et ab sont nilpotents. Que peut-on dire de leurs indices de nilpotence (en fonction de ceux de a et b) ?

3) Le but de cette question est de montrer que si a et b ne commutent pas (donc si A est non commutatif), cette propriété peut être fausse. Soient K un corps (commutatif) et $A = M_2(K)$ muni de l'addition et du produit standards. Montrer que A est un anneau non commutatif et trouver deux éléments de A nilpotents dont la somme et le produit ne sont pas nilpotents.

4) Soit $a \in A$ nilpotent. Montrer que $1_A - a$ est inversible et exprimer son inverse sous forme de polynôme en a.

5) Soient $a, b \in A$ tels que $1_A - ab$ soit inversible. Montrer que $1_A - ba$ est aussi inversible et exprimer son inverse en fonction de celui de $1_A - ab$. *Indication* : on pourra commencer par supposer ab nilpotent.

Exercice 3 –

1) Déterminer les morphismes d'anneaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dans lui-même.

2) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ (muni des lois usuelles).

3) Quels sont les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même ? Sont-ce des automorphismes ?

4) Existe-t-il des morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$?

5) Soit f un morphisme de l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$ dans lui-même.
 a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{Q}$ on a $f(x) = x$.
 b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $f(x) \geqslant 0$ et en déduire que f est croissante.
 c) Déterminer f.

Exercice 4 – Dans ce qui suit A est un anneau commutatif. Si n est un entier $\geqslant 1$, on note $n \cdot 1_A$ l'élément $1_A + 1_A + \cdots + 1_A$ (n fois).

1) Supposons A fini. Posons $E = \{n \geqslant 1;\ n \cdot 1_A = 0_A\}$. Montrer que $E \neq \emptyset$.

2) Sous les mêmes hypothèses on appelle caractéristique de A et on note $\mathrm{Car}(A)$ le plus petit élément de E. Montrer que si A est intègre, $\mathrm{Car}(A)$ est premier. Est-ce encore vrai si on ne suppose pas A intègre ?

3) Supposons que A soit intègre et ait quatre éléments. Quelle est la caractéristique de A ?

4) Montrer qu'il existe, à isomorphisme près, un seul anneau commutatif intègre à quatre éléments.

5) Supposons que A soit fini et intègre. Montrer que A est un corps. *Indication* : si $a \in A \setminus \{0_A\}$, considérer l'application $f : A \to A$ définie par $f(x) = ax$. Vérifier que l'anneau de la question précédente est bien un corps.