Université de Bordeaux **L3 – Structures algébriques 2**
Mathématiques Année 2016 – 2017

FEUILLE D'EXERCICES n° 2

Anneaux, idéaux, anneaux quotients

Important : dans tout ce qui suit, les anneaux considérés sont commutatifs.

Exercice 1 – Soient A un anneau et I et J deux idéaux de A.

1) Montrer que

$$I \cup J \text{ est un idéal de } A \Leftrightarrow I \subseteq J \text{ ou } J \subseteq I \Leftrightarrow I \cup J = I + J.$$

2) Soient I, J, K des idéaux de A. Montrer que $(I + J)K = IK + JK$.

3) Montrer que $IJ \subseteq I \cap J$ et donner un exemple dans lequel cette inclusion est stricte.

4) Montrer que si $I + J = A$ alors $IJ = I \cap J$.

5) Supposons encore que $I + J = A$. Soient p_I et p_J les projections canoniques de A sur A/I et A/J. Soit $f \; : \; A \longrightarrow A/I \times A/J$ l'application qui à $x \in A$ associe $(p_I(x), p_J(x))$. Montrer que f est un morphisme d'anneaux qui induit un isomorphisme

$$\frac{A}{IJ} \simeq \frac{A}{I} \times \frac{A}{J}.$$

6) Ce résultat est une généralisation d'un théorème bien connu. Lequel ? Énoncer une généralisation au produit de n idéaux ($n \geqslant 2$) et la prouver.

Exercice 2 – Soit A un anneau et $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble de ses éléments nilpotents.

1) Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A. On l'appelle le *nilradical* de A.

2) Soit I in idéal de A. On pose

$$\sqrt{I} = \Big\{ x \in A ; \; \exists \, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, x^n \in I \Big\}.$$

Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I et $\mathcal{N}(A)$. On appelle $\sqrt{I}$ le *radical* de I.

3) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer :

(i) $\sqrt{A} = A$ et $\sqrt{\{0\}} = \mathcal{N}(A)$;

(ii) $I \subseteq J \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$;

(iii) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;

(iv) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$;

(v) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$;

(vi) $\sqrt{\mathcal{N}(A)} = \mathcal{N}(A)$.

4) Soit p_I est la projection canonique de A sur A/I. Montrer que $\mathcal{N}(A/I) = p_I(\sqrt{I})$ et en déduire que $\mathcal{N}(A/\mathcal{N}(A)) = \{0\}$.
5) Soit un entier $n > 1$. Déterminer $\sqrt{n\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 3 – Soient A, B deux anneaux et f un morphisme d'anneaux surjectif de A dans B.
1) Soit I un idéal de A. Montrer que $f(I)$ est un idéal de B.
2) Trouver un exemple dans lequel f n'est pas surjectif et $f(I)$ n'est pas un idéal.
3) Soit J un idéal de B. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A (cette propriété étant vraie même si f est non surjectif) et que l'on a un isomorphisme d'anneaux
$$\frac{A}{f^{-1}(J)} \simeq \frac{B}{J}.$$
4) Soient I un idéal de A et J un idéal de B. Comparer $f^{-1}(f(I))$ et $I + \mathrm{Ker} f$ ainsi que $f(f^{-1}(J))$ et J.
5) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f^{-1}(f(I)) = I$.
6) Montrer qu'il existe une bijection entre l'ensemble des idéaux de A contenant $\mathrm{Ker} f$ et l'ensemble des idéaux de B.
7) Quels sont les idéaux de A/I ? Application : déterminer les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n > 1$).
8) Montrer que si A est principal, les idéaux de A/I sont principaux.
9) Soient $I \subseteq J$ deux idéaux de A. On note encore p_I la projection canonique de A sur A/I. Montrer que $p_I(J)$ est un idéal de A/I et que $(A/I)/p_I(J)$ est isomorphe à A/J.

Exercice 4 – Soit A un anneau. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un corps ;
(ii) $A \neq \{0\}$ et les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A ;
(iii) $A \neq \{0\}$ et tout morphisme d'anneaux de A dans un anneau non nul est injectif.