Université de Bordeaux | **Algèbre 4 – Licence 3**
Mathématiques | Année 2016 – 2017

FEUILLE D'EXERCICES n° 3

Anneaux euclidiens, principaux, nœthériens, idéaux premiers, maximaux (1)

Dans ce qui suit les anneaux considérés sont commutatifs.

Exercice 1 –

1) Soit n un entier $\geqslant 2$. Les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont-ils principaux ?

2) Condition sur $m \in \mathbb{Z}$ pour que l'idéal $\langle m, X \rangle$ soit principal dans $\mathbb{Z}[X]$?

3) Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et du produit standards. Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un anneau. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $I_a = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R});\ f(a) = 0\}$. Montrer que I_a est un idéal de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Est-il principal ?

4) Même question en remplaçant $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 –

1) Dans $\mathbb{C}$, on pose $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Vérifier que $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, munis des lois induites par celles de $\mathbb{C}$, est un anneau euclidien donc principal. On pourra comme pour $\mathbb{Z}[i]$ se servir du stathme f défini par $f(z) = z\bar{z} = |z|^2$.

2) Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, muni des lois induites par celles de $\mathbb{R}$, est un anneau euclidien donc principal. On pourra fabriquer le stathme f à partir des deux seuls morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même rencontrés dans l'exercice 3 de la feuille 1.

3) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a+bi\sqrt{5};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, muni des lois induites par celles de $\mathbb{C}$, est un anneau qui n'est pas principal. On pourra considérer l'idéal $\langle 2, 1+i\sqrt{5} \rangle$.

4) Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{Z}^2, +)$ est engendré par au plus deux éléments. *Indication* : si G est le sous-groupe considéré, on pourra utiliser $p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ définie par $p(a, b) = a$ et observer $p(G)$ ainsi que $\operatorname{Ker} p \cap G$.

5) En déduire que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est nœthérien.

Exercice 3 – Soit A un anneau intègre. Montrer que

$$A[X] \text{ euclidien } \Leftrightarrow A[X] \text{ principal} \Leftrightarrow A \text{ corps.}$$

Indication : pour montrer ($A[X]$ principal $\Rightarrow$ A corps), on considérera l'idéal engendré par a et X dans $A[X]$ (où $a \in A \setminus \{0\}$).

Exercice 4 –

1) Soit A un anneau intègre. Montrer que si toute suite décroissante d'idéaux de A est stationnaire, alors A est un corps.

2) Soit A un anneau nœthérien et soit $f : A \to A$ un morphisme surjectif. Montrer que f est un isomorphisme. Indication : poser $I_n = \mathrm{Ker}(f^n)$.

3) Soit A un anneau nœthérien et I un idéal de A. Montrer que A/I est nœthérien. *Indication* : se rappeler l'exercice 3 de la feuille 2.

4) Soit A un anneau. On suppose qu'il existe un idéal maximal M de A tel que tout idéal contenu dans M soit de type fini. Montrer que si I est un idéal de A, il existe $x \in I$ tel que $I = xA + I \cap M$. En déduire que A est nœthérien.

Exercice 5 –

1) Démontrer que dans un anneau tout idéal maximal est premier.

2) Montrer que dans $\mathbb{Z}[X]$, l'idéal $\langle X \rangle$ est premier mais non maximal.

3) Soit A un anneau principal. Montrer que tout idéal premier non nul de A est maximal.

Exercice 6 – Soit A un anneau non nul dans lequel tout idéal propre ($\neq A$) est premier. Montrer que A est intègre puis que A est un corps.

Exercice 7 – Cet exercice complète l'exercice 3 de la feuille 2. Soient un morphisme d'anneaux $f : A \to B$, I un idéal de A et J un idéal de B.

1) Montrer que si f est surjectif et si J est maximal, $f^{-1}(J)$ est un idéal maximal de A.

2) Est-ce encore vrai si on supprime l'hypothèse de surjectivité ?

3) Montrer que si J est premier, $f^{-1}(J)$ l'est aussi.

4) Montrer que si f est surjectif , I maximal et $f(I) \neq B$, $f(I)$ est alors maximal.

5) Montrer, toujours en supposant f surjectif et $f(I) \neq B$, que si I est premier $f(I)$ ne l'est pas forcément.

Exercice 8 – Dans cet exercice on admettra le théorème de Krull qui dit que dans un anneau A tout idéal propre $I \subsetneq A$ est contenu dans un idéal maximal. On appelle anneau local un anneau qui possède un unique idéal maximal.

1) Montrer que si A est local, alors son unique idéal maximal $\mathfrak{m}$ est l'ensemble des éléments non inversibles de A, i.e. $\mathfrak{m} = A \setminus A^\times$.

2) Montrer que A est local si et seulement si pour tout $x \in A$, alors x est inversible ou $1 - x$ est inversible.

3) Montrer que A est local si et seulement si la somme de deux éléments non inversibles de A est non inversible.