Université de Bordeaux
Mathématiques

Algèbre 4 – Licence 3
Année 2016 – 2017

FEUILLE D'EXERCICES n° 4

Polynômes symétriques

Exercice 1 –

1) soit A un anneau commutatif. Exprimer en fonctions de $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, les polynômes de $A[X_1, X_2, X_3]$ suivants :

(1) $(X_1 + X_2)(X_1 + X_3)(X_2 + X_3)$;

(2) $X_1^3 X_2 + X_1^3 X_3 + X_2^3 X_1 + X_2^3 X_3 + X_3^3 X_1 + X_3^3 X_2$;

(3) $X_1^3 X_2^2 + X_1^3 X_3^2 + X_2^3 X_1^2 + X_2^3 X_3^2 + X_3^3 X_1^2 + X_3^3 X_2^2$.

2) Soient x_1, x_2, x_3 les racines de $X^3 + X + 3$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer un polynôme unitaire de degré 3 admettant comme racines x_1^2, x_2^2, x_3^2.

3) Déterminer $x, y, z \in (\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^\times$ tels que $x + y + z = 1$, $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 1$, $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = -1$.

4) Soient trois complexes x, y, z vérifiant $x + y + z = 0$. Montrer que

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \times \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}.$$

5) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P(X) = X^4 + aX^3 + (a^2 + 1)X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P(X)$ ne peut pas avoir quatre racines réelles.

6) On note a, b, c, d les racines complexes de $X^4 - X^3 + X^2 + 2X - 4$. Calculer $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

Exercice 2 –

1) Soient M un réel > 0 et $n > 0$ un entier. On note $E_{n,M}$ l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaires de degré n dont toutes les racines dans $\mathbb{C}$ sont de module $< M$. Montrer que $E_{n,M}$ est un ensemble fini.

2) Quel est le cardinal de $E_{n,1}$?

3) On note E_n l'ensemble des polynômes $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaires de degré n dont toutes les racines dans $\mathbb{C}$ sont de module $\leqslant 1$, qui est donc fini, car par exemple inclus dans $E_{n,2}$. Montrer que si $P(X) \in E_n$, ses racines non nulles dans $\mathbb{C}$ (s'il y en a) sont de module 1.

4) Donner des exemples de polynômes de E_n n'ayant pas 0 comme racine. Donner un exemple de polynôme de E_n ayant n racines complexes non nulles distinctes.

5) Montrer que l'ensemble des racines complexes des éléments de E_n est fini.

6) Soit m un entier $\geqslant 1$. Si $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i) \in E_n$, montrer que $Q(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i^m) \in E_n$.

7) En déduire que quel que soit $P(X) \in E_n$, ses racines dans $\mathbb{C}$, si elles ne sont pas nulles, sont des racines de l'unité, i.e. si $\alpha \in \mathbb{C}$ vérifie $P(\alpha) = 0$, soit $\alpha = 0$, soit il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $\alpha^k = 1$ (théorème de Kronecker).

Exercice 3 – Soient A un anneau (commutatif) et $n \geqslant 2$. Pour tout $k \geqslant 0$ on pose $S_k = \sum_{i=1}^n X_i^k \in A[X_1, \ldots, X_n]$, avec la convention $S_0 = n$.

1) Déterminer les coefficients de $G(X) = \prod_{i=1}^n (X - X_i) \in A[X_1, \ldots, X_n][X]$ en fonction des Σ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

2) Soient B un anneau (commutatif), $b \in B$, $H(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in B[X]$. Expliciter le quotient et le reste de la division euclidienne de $H(X)$ par $X - b$.

3) Exprimer $G(X)/(X - X_j) = \prod_{i \neq j} (X - X_i)$ en fonction des Σ_i.

4) En exprimant de deux façons différentes $G'(X)$ le polynôme dérivé de $G(X)$ par rapport à X, démontrer que

$$S_k + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \Sigma_i S_{k-i} + (-1)^k k \Sigma_k = 0 \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

5) Supposons $k \geqslant n$. En évaluant $X^{k-n} G(X)$ en X_i montrer que

$$S_k + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \Sigma_i S_{k-i} = 0 \quad (k \geqslant n).$$

Ces formules sont appelées les identités de Newton ou encore les formules de Newton-Girard.