Université de Bordeaux
Mathématiques

Algèbre 4 – Licence 3
Année 2016 – 2017

FEUILLE D'EXERCICES n° 5

Polynômes, idéaux premiers, maximaux (2)

Dans ce qui suit, les anneaux considérés sont commutatifs unitaires.

Exercice 1 – Soit A un anneau. On considère le polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ de $A[X]$.

1) Montrer que $P(X)$ est nilpotent dans $A[X]$ si et seulement si tous les a_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ sont nilpotents dans A.

2) Dans cette question on supposera $n \geqslant 1$. Soit $Q(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ un polynôme de $A[X]$. Montrer que si $P(X)Q(X) = 1$, alors $a_n^{i+1} b_{m-i} = 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant m$ et a_n est nilpotent.

3) En déduire que $P(X) \in A[X]^\times$ si et seulement si $a_0 \in A^\times$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont nilpotents.

Exercice 2 – Soit A un anneau.

1) Montrer que pour tout $P(X,Y) \in A[X,Y]$ il existe un unique couple $(Q(X,Y), R(X)) \in A[X,Y] \times A[X]$ tels que $P(X,Y) = (Y - X)Q(X,Y) + R(X)$.

2) Montrer que l'idéal $I = \langle Y - X \rangle$ est premier si et seulement si A est intègre. Peut-il être maximal ?

3) On suppose que A est un corps. Montrer que l'anneau $A[X,Y]/I$ est principal. Exhiber un idéal maximal de $A[X,Y]$ contenant I.

Exercice 3 – Soit $I = \{P \in \mathbb{R}[X,Y];\ P(n, \sqrt{n^3 + n + 1}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

1) Montrer que I est un idéal de $\mathbb{R}[X,Y]$.

2) Montrer que $I = \langle Y^2 - X^3 - X - 1 \rangle$.

3) Prouver que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $P(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ il existe $A(X,Y), B(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ tels que $P(X,Y) = (X-a)A(X,Y) + (Y-b)B(X,Y) + P(a,b)$. En déduire que $\langle X - a, Y - b \rangle$ est maximal dans $\mathbb{R}[X,Y]$.

4) Montrer que I est premier non maximal.

Exercice 4 – Soit K un corps.

1) Soit $\alpha \in K$. Montrer, en considérant $\varphi : K[X] \to K$ qui à $P(X)$ associe $P(\alpha)$, que $I = \langle X - \alpha \rangle$ est maximal dans $K[X]$.

2) Supposons que K soit algébriquement clos, i.e. tel que tout polynôme de $K[X]$ de degré $\geqslant 1$ admette au moins une racine dans K. Montrer que si I est un idéal maximal de $K[X]$ il existe $\alpha \in K$ unique tel que $I = \langle X - \alpha \rangle$.

3) Soit $n \geqslant 2$. Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$. Montrer que $I = \langle X_1 - \alpha_1, X_2 - \alpha_2, \dots, X_n - \alpha_n \rangle$ est un idéal maximal de $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$. On peut aussi généraliser la question 2). Il s'agit du Nullstellensatz (théorème des zéros) faible de Hilbert. Nous ne le ferons pas ici.

Exercice 5 – Soit A un anneau. On considère le morphisme d'anneaux $f \ : A[X,Y,Z] \to A[T]$ vérifiant $f(a) = a$ pour tout $a \in A$, $f(X) = T$, $f(Y) = T^2$ et $f(Z) = T^3$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \langle Y - X^2, Z - XY \rangle$.

2) Établir que $A[X,Y,Z]/\langle Y - X^2, Z - XY \rangle \simeq A[T]$.

3) À quelle condition $\langle Y - X^2, Z - XY \rangle$ est-il premier ?

4) Trouver un idéal maximal contenant strictement $\langle Y - X^2, Z - XY \rangle$ quand $A = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$.

Exercice 6 – Soit $A = \mathbb{Q}[X,Y]/\langle X^2 + Y^2 - 1 \rangle$. On note x, y les classes de X, Y dans A et on pose $B = \mathbb{Q}[Y]$.

1) Montrer que $X^2 + Y^2 - 1$ est irréductible dans $B[X]$ et que A est intègre.

2) Montrer que pour tout $a \in A$ il existe un unique couple $(P(Y), Q(Y)) \in B \times B$ tel que $a = P(y) + xQ(y)$.

3) Montrer que $A/\langle x \rangle \simeq \mathbb{Q}[Y]/\langle Y^2 - 1 \rangle$.

4) Montrer que $\langle x \rangle$ n'est pas un idéal premier de A.

5) Prouver que x est irréductible.

6) L'anneau A est-il factoriel ?

Exercice 7 –

1) Rappeler pourquoi dans un anneau intègre si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors a et b sont associés.

Soit K un corps et $A = K[X,Y,Z]/\langle X(1 - YZ) \rangle$. On note x, y, z les classes de X, Y, Z dans A.

2) Montrer que A n'est pas intègre.

3) Montrer que $x \mid xy$ et $xy \mid x$.

4) Montrer que x et xy ne sont pas associés.