Université Bordeaux
Mathématiques

L3, Structures algébriques 2
Année 2016 – 2017

FEUILLE D'EXERCICES n° 7

Relations racines-coefficients

Diviseurs et multiples dans un anneau commutatif

Exercice 1 – Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $a_0 \neq 0$. On note $r_1, \ldots, r_n$ les racines de $P(X)$ dans $\mathbb{C}$.

1) Donner un polynôme de degré n dont les racines sont les $1/r_i$.

2) Soit

$$\rho = \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} |r_i|.$$

Montrer que si $a_m \neq 0$, alors

$$\rho^m \leqslant \binom{n}{m} \left| \frac{a_0}{a_m} \right|.$$

3) Soit m tel que $a_m \neq 0$. On note

$$R_m = \left(\binom{n}{m} \left| \frac{a_0}{a_m} \right| \right)^{1/m}.$$

Montrer que le polynôme $P(X)$ a au moins une racine dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R_m.

Exercice 2 – On considère le polynôme $X^3 - (2+\sqrt{2})X^2 + 2(\sqrt{2}+1)X - 2\sqrt{2}$ de racines r_1, r_2 et r_3 dans $\mathbb{C}$.

1) Déterminer le polynôme unitaire de degré 3 de racines r_1^2, r_2^2 et r_3^2.

2) En déduire les valeurs de r_1, r_2 et r_3.

Exercice 3 –

1) Déterminer trois éléments a, b, c de $\mathbb{C}$, non tous réels, tels que $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$ et $a^3+b^3+c^3$ soient trois réels.

2) Montrer que si a, b, c sont trois complexes de modules deux à deux distincts et que si $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2$ et $a^3+b^3+c^3$ sont trois réels, alors a, b et c sont trois réels.

Exercice 4 – Soit A un anneau commutatif et soient $a_1, \ldots, a_m$ des éléments de A ($m \geqslant 2$).

1) Montrer que $a_1, \ldots, a_m$ admettent un ppcm si et seulement si l'idéal $< a_1 > \cap \cdots \cap < a_m >$ est principal.

2) Montrer que si l'idéal $< a_1, \ldots, a_m >$ est principal, alors les éléments $a_1, \ldots, a_m$ admettent un pgcd, auquel ils sont liés par une relation de Bézout.

3) Soit K un corps. Montrer que dans $K[X,Y]$, le pgcd de X et Y est égal à 1. Montrer que l'idéal $< X, Y >$ n'est pas principal.

4) Montrer que les éléments $a_1, \ldots, a_m$ admettent un pgcd si et seulement si l'ensemble des idéaux principaux contenant $< a_1, \ldots, a_m >$ admet un plus petit élément pour l'inclusion.

5) Montrer que dans un anneau principal, le pgcd et le ppcm existent toujours, et qu'il existe une relation de Bézout pour le pgcd.

Exercice 5 – Soit A un anneau commutatif intègre et soient $a_1, \ldots, a_m$ des éléments de A ($m \geqslant 2$).

1) Soit $a \in A \setminus \{0\}$. Montrer que $a_1, \ldots, a_m$ admettent un ppcm si et seulement si $aa_1, \ldots, aa_m$ en admettent un. Donner une relation entre ces deux ppcm.

2) Montrer que si $aa_1, \ldots, aa_m$ admettent un pgcd, alors $a_1, \ldots, a_m$ en admettent un aussi et donner une relation entre ces deux pgcd. La réciproque est-elle vraie ?