

**FEUILLE D'EXERCICES n° 2**

**Idéaux premiers, maximaux**

Dans ce qui suit les anneaux considérés sont commutatifs.

**Exercice 1** –

- 1) Montrer que dans  $\mathbb{Z}[X]$ , l'idéal  $\langle X \rangle$  est premier mais non maximal.
- 2) Soit  $A$  un anneau principal. Montrer que tout idéal premier non nul de  $A$  est maximal.
- 3) L'anneau  $\mathbb{Z}[X]$  est-il principal ?

**Exercice 2** – Soit  $A$  un anneau non nul dans lequel tout idéal propre ( $\neq A$ ) est premier. Montrer que  $A$  est intègre puis que  $A$  est un corps.

**Exercice 3** – Cet exercice complète l'exercice 6 de la feuille 1. Soient un morphisme d'anneaux  $f : A \rightarrow B$ ,  $I$  un idéal de  $A$  et  $J$  un idéal de  $B$ .

- 1) Montrer que si  $f$  est surjectif et si  $J$  est maximal,  $f^{-1}(J)$  est un idéal maximal de  $A$ .
- 2) Est-ce encore vrai si on supprime l'hypothèse de surjectivité ?
- 3) Montrer que si  $J$  est premier,  $f^{-1}(J)$  l'est aussi.
- 4) Montrer que si  $f$  est surjectif,  $I$  maximal et  $f(I) \neq B$ ,  $f(I)$  est alors maximal.
- 5) Montrer, toujours en supposant  $f$  surjectif et  $f(I) \neq B$ , que si  $I$  est premier  $f(I)$  ne l'est pas forcément.

**Exercice 4** – Dans cet exercice on admettra le théorème de Krull qui dit que dans un anneau  $A$  tout idéal propre  $I \subsetneq A$  est contenu dans un idéal maximal. On appelle anneau local un anneau qui possède un unique idéal maximal.

- 1) Montrer que si  $A$  est local, alors son unique idéal maximal  $\mathfrak{m}$  est l'ensemble des éléments non inversibles de  $A$ , i.e.  $\mathfrak{m} = A \setminus A^\times$ .
- 2) Montrer que  $A$  est local si et seulement si pour tout  $x \in A$ , alors  $x$  est inversible ou  $1 - x$  est inversible.
- 3) Montrer que  $A$  est local si et seulement si la somme de deux éléments non inversibles de  $A$  est non inversible.

**Exercice 5** – Soit  $A$  un anneau.

- 1) Montrer que pour tout  $P(X, Y) \in A[X, Y]$  il existe un unique couple  $(Q(X, Y), R(X)) \in A[X, Y] \times A[X]$  tels que  $P(X, Y) = (Y - X)Q(X, Y) + R(X)$ .
- 2) Montrer que l'idéal  $I = \langle Y - X \rangle$  est premier si et seulement si  $A$  est intègre. Peut-il être maximal ?
- 3) On suppose que  $A$  est un corps. Montrer que l'anneau  $A[X, Y]/I$  est principal. Exhiber un idéal maximal de  $A[X, Y]$  contenant  $I$ .

**Exercice 6** – Soit  $I = \{P \in \mathbb{R}[X, Y]; P(n, \sqrt{n^3 + n + 1}) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ .

- 1) Montrer que  $I$  est un idéal de  $\mathbb{R}[X, Y]$ .
- 2) Montrer que  $I = \langle Y^2 - X^3 - X - 1 \rangle$ .
- 3) Prouver que pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et tout  $P(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$  il existe  $A(X, Y), B(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$  tels que  $P(X, Y) = (X - a)A(X, Y) + (Y - b)B(X, Y) + P(a, b)$ . En déduire que  $\langle X - a, Y - b \rangle$  est maximal dans  $\mathbb{R}[X, Y]$ .
- 4) Montrer que  $I$  est premier non maximal.

**Exercice 7** – Soit  $K$  un corps.

- 1) Soit  $\alpha \in K$ . Montrer, en considérant  $\varphi : K[X] \rightarrow K$  qui à  $P(X)$  associe  $P(\alpha)$ , que  $I = \langle X - \alpha \rangle$  est maximal dans  $K[X]$ .
- 2) Supposons que  $K$  soit algébriquement clos, i.e. tel que tout polynôme de  $K[X]$  de degré  $\geq 1$  admette au moins une racine dans  $K$ . Montrer que si  $I$  est un idéal maximal de  $K[X]$  il existe  $\alpha \in K$  unique tel que  $I = \langle X - \alpha \rangle$ .
- 3) Soit  $n \geq 2$ . Soit  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$ . Montrer que  $I = \langle X_1 - \alpha_1, X_2 - \alpha_2, \dots, X_n - \alpha_n \rangle$  est un idéal maximal de  $K[X_1, X_2, \dots, X_n]$ . On peut aussi généraliser la question 2). Il s'agit du Nullstellensatz (théorème des zéros) faible de Hilbert. Nous ne le ferons pas ici.

**Exercice 8** – Soit  $A$  un anneau. On considère le morphisme d'anneaux  $f : A[X, Y, Z] \rightarrow A[T]$  vérifiant  $f(a) = a$  pour tout  $a \in A$ ,  $f(X) = T$ ,  $f(Y) = T^2$  et  $f(Z) = T^3$ .

- 1) Montrer que  $\text{Ker } f = \langle Y - X^2, Z - XY \rangle$ .
- 2) Établir que  $A[X, Y, Z]/\langle Y - X^2, Z - XY \rangle \simeq A[T]$ .
- 3) À quelle condition  $\langle Y - X^2, Z - XY \rangle$  est-il premier ?
- 4) Trouver un idéal maximal contenant strictement  $\langle Y - X^2, Z - XY \rangle$  quand  $A = \mathbb{Q}$ ,  $A = \mathbb{Z}$ .