

Exercice 4 –

- 1) Que vaut $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$? Donner une base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ vu comme \mathbb{Q} -espace vectoriel.
- 2) Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur \mathbb{Q} ?
- 3) En déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Exercice 5 – Soient K un corps de caractéristique différente de 2 et $P(X) \in K[X]$ unitaire de degré 2. Soit L/K une extension de degré 2.

- 1) Montrer qu'il existe $a, b \in K$ tels que $P(X) = (X - a)^2 - b$.
- 2) Montrer qu'il existe $x \in L \setminus \{0\}$ tel que $x^2 \in K$ et $L = K(x)$.
- 3) Soit $y \in L$ tel que $y^2 \in K$ et $L = K(y)$. Montrer que $y/x \in K$.
- 4) Soient p et q deux nombres premiers distincts. Que vaut $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}]$?
- 5) Soit $z \in \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ tel que $z^2 \in \mathbb{Q}$. Montrer que l'un des quatre éléments suivants appartient à \mathbb{Q} : $z, z/\sqrt{p}, z/\sqrt{q}, z/\sqrt{pq}$.
- 6) En déduire la liste des extensions de \mathbb{Q} incluses dans $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$.
- 7) Quelles sont les extensions de \mathbb{Q} incluses dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$?

Exercice 6 – Soit a une racine de $X^3 + X + 1$ dans \mathbb{C} . Quel est le degré d de l'extension $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$? Soit $b = a^5 + a^2 + 1$. Montrer que b est non nul et exprimer son inverse sous la forme $b^{-1} = P(a)$, où $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ est de degré au plus $d - 1$.