

FEUILLE D'EXERCICES n° 6

Extensions de corps (2)

Exercice 1 – Soient p un nombre premier et $\zeta_p \in \mathbb{C}$ une racine p -ième de l'unité différente de 1. Que vaut $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}]$?

Exercice 2 –

- 1) Rappeler pourquoi $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ est factoriel.
- 2) Montrer que 3 est un élément irréductible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
- 3) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de $X^4 + 3X + 3$. Montrer que $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \alpha) : \mathbb{Q}] = 8$.

Exercice 3 – Soit $P(X) = X^4 - 2X^2 + 9 \in \mathbb{Q}[X]$.

- 1) Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- 2) Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ est un corps de rupture sur \mathbb{Q} de $P(X)$.

Exercice 4 – Soit $j = e^{2i\pi/3} \in \mathbb{C}$.

- 1) Montrer que $X^3 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- 2) Prouver que les corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}j)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}j^2)$ sont isomorphes et deux à deux distincts.
- 3) Établir que $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i\sqrt{3})$ est le corps de décomposition sur \mathbb{Q} de $X^3 - 2$ inclus dans \mathbb{C} .

Exercice 5 – Soit $P(X) = X^4 - 4X^2 + 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

- 1) Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- 2) Prouver que $\mathbb{Q}(\sqrt{2 + \sqrt{2}})$ est le corps de décomposition sur \mathbb{Q} de $P(X)$ inclus dans \mathbb{C} .

Exercice 6 –

- 1) Soit α le réel $\sqrt{1 + \sqrt{7}}$. Trouver le polynôme minimal $P(X)$ de α sur \mathbb{Q} . Que vaut $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$?
- 2) Montrer que $K = \mathbb{Q}(\alpha, i\sqrt{6})$ est le corps de décomposition sur \mathbb{Q} de $P(X)$ inclus dans \mathbb{C} .
- 3) Déterminer le degré et une base de K sur \mathbb{Q} .
- 4) Soit $\beta = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$. Déterminer le corps de décomposition sur \mathbb{Q} du polynôme minimal de β sur \mathbb{Q} inclus dans \mathbb{C} .

Exercice 7 – Soient une extension finie L/K et un polynôme $P(X) \in K[X]$ de degré n , irréductible sur K . Montrer que si $[L : K]$ et n sont premiers entre eux, $P(X)$ est irréductible sur L . *Indication* : considérer $Q(X)$ un facteur irréductible de $P(X)$ dans $L[X]$ et $L' = L(\alpha)$ un corps de rupture sur L de $Q(X)$ où α est une racine de $Q(X)$, puis observer $[L' : K]$ en utilisant $K(\alpha)$.

Exercice 8 – [THÉORÈME DE L'ÉLÉMENT PRIMITIF]

Soit K un corps de caractéristique nulle.

1) Soient $P(X) \in K[X]$ irréductible et L un corps de décomposition de $P(X)$. Montrer que $P(X)$ n'a que des racines simples dans L .

2) Soit L/K une extension finie. On suppose que $L = K(x, y)$ et on note $P(X)$ et $Q(X)$ les polynômes minimaux de x et y sur K , de degrés respectifs m et n . Soit M un corps de décomposition de $P(X)Q(X)$ sur K contenant x et y . Dans M on a

$$P(X) = (X - x) \prod_{i=2}^m (X - x_i) \quad \text{et} \quad Q(X) = (X - y) \prod_{j=2}^n (X - y_j).$$

Montrer qu'il existe $t \in K \setminus \{0\}$ tel que pour tout $i \geq 2$ et tout $j \geq 2$, $z = x + ty \neq x_i + ty_j$. On pose alors $N = K(z)$ et $R(X) = P(z - tX)$.

3) Montrer que $R(X) \in N[X]$ et que $\text{pgcd}(R(X), Q(X)) = X - y$.

4) En déduire que $y \in N$ et que $L = N$.

5) Montrer par récurrence que toute extension finie de K est simple (ou monogène).

6) En s'inspirant de la méthode précédemment utilisée trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, i) = \mathbb{Q}(\alpha)$.