Feuille d'exercices n° 1

Anneaux, idéaux, généralités

Tous les anneaux considérés sont supposés unitaires.

Exercice 1. On note $S^1 \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des complexes de module 1, et $\cdot$ la multiplication complexe.

1) Montrer que $(S^1, \cdot)$ est un groupe commutatif.

2) Montrer que $(S^1, \cdot)$ est isomorphe au groupe quotient $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$. *Indication* : considérer l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{2i\pi t} \in S^1$.

Exercice 2. Soient m et n deux entiers strictements positifs.

1) Montrer qu'il existe un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si et seulement si m divise n et que dans ce cas, ce morphisme est unique.

2) On suppose que m divise n. Calculer le noyau du morphisme ci-dessus et en déduire qu'il y a un isomorphisme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Exercice 3. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément x de A est dit *nilpotent* s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $x^n = 0_A$. Si $x \in A$ est nilpotent, le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $x^n = 0_A$ est appelé l'*indice de nilpotence* de x.

1) Soient $a, b \in A$ tels que ab soit nilpotent d'indice de nilpotence n. Montrer que ba est nilpotent. Que peut-on dire de son indice de nilpotence m ? *Indication* : on montrera que $|m - n| \leqslant 1$ mais qu'on n'a pas forcément $m = n$.

2) Soient a et b deux éléments nilpotents de A. On suppose qu'ils commutent i.e. $ab = ba$. Montrer que $a + b$ et ab sont nilpotents. Que peut-on dire de leurs indices de nilpotence (en fonction de ceux de a et b) ? *Indication* : on montrera que si k et l sont les indices de nilpotence de a et b, celui de $a + b$ est inférieur ou égal à $k + l - 1$ et que l'on peut avoir égalité ou non. De même on montrera que celui de ab est inférieur ou égal à $\min(k, l)$ et qu'ici encore on peut avoir égalité ou non.

3) Le but de cette question est de montrer que si a et b ne commutent pas (donc si A est non commutatif), cette propriété peut être fausse. Trouver un anneau non commutatif A et deux éléments de A nilpotents dont la somme et le produit ne sont pas nilpotents.

4) Soit $a \in A$ nilpotent. Montrer que $1_A - a$ est inversible et exprimer son inverse sous forme de polynôme en a.

5) Soient $a, b \in A$ tels que $1_A - ab$ soit inversible. Montrer que $1_A - ba$ est aussi inversible et exprimer son inverse en fonction de celui de $1_A - ab$. *Indication* : on pourra commencer par supposer ab nilpotent.

Exercice 4.

1) Déterminer les morphismes d'anneaux de $(\mathbb{Z}, +, \times)$ dans lui-même.

2) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ (muni des lois usuelles).

3) Quels sont les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans lui-même ? Sont-ce des automorphismes ?

4) Existe-t-il des morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$?

5) Soit f un morphisme de l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$ dans lui-même.

(a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{Q}$ on a $f(x) = x$.

(b) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $f(x) \geqslant 0$ et en déduire que f est croissante.

(c) Déterminer f.

Exercice 5. Soient A un anneau commutatif et I et J deux idéaux de A. On note $I + J$ l'ensemble des $i + j$ où $i \in I$ et $j \in J$, et IJ l'ensemble des sommes finies d'éléments de la forme ij où $i \in I$ et $j \in J$.

1) Montrer que $I + J$ et IJ sont des idéaux de A.

2) Montrer que

$$I \cup J \text{ est un idéal de } A \Leftrightarrow I \subseteq J \text{ ou } J \subseteq I \Leftrightarrow I \cup J = I + J.$$

3) Montrer que $IJ \subseteq I \cap J$ et donner un exemple dans lequel cette inclusion est stricte.

4) Montrer que si $I + J = A$ alors $IJ = I \cap J$.

5) Supposons encore que $I + J = A$. Soient p_I et p_J les projections canoniques de A sur A/I et A/J. Soit $f : A \longrightarrow A/I \times A/J$ l'application qui à $x \in A$ associe $(p_I(x), p_J(x))$. Montrer que f est un morphisme d'anneaux qui induit un isomorphisme

$$\frac{A}{IJ} \simeq \frac{A}{I} \times \frac{A}{J}.$$

6) Ce résultat est une généralisation d'un théorème bien connu. Lequel ? Énoncer une généralisation au produit de n idéaux ($n \geqslant 2$) et la prouver.

Exercice 6. Soient A un anneau commutatif et $\mathcal{N}(A)$ l'ensemble de ses éléments nilpotents.

1) Montrer que $\mathcal{N}(A)$ est un idéal de A. On l'appelle le *nilradical* de A.

2) Soit I un idéal de A. On pose

$$\sqrt{I} = \Big\{x \in A;\ \exists\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ tel que } x^n \in I\Big\}.$$

Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I et $\mathcal{N}(A)$. On appelle $\sqrt{I}$ le *radical* de I.

3) Soient I et J deux idéaux de A. Montrer :

(a) $\sqrt{A} = A$ et $\sqrt{\{0\}} = \mathcal{N}(A)$;

(b) $I \subseteq J \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$;

(c) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$;

(d) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$;

(e) $\sqrt{I} + \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$;

(f) $\sqrt{\mathcal{N}(A)} = \mathcal{N}(A)$.

4) Soit p_I la projection canonique de A sur A/I. Montrer que $\mathcal{N}(A/I) = p_I(\sqrt{I})$ et en déduire que $\mathcal{N}(A/\mathcal{N}(A)) = \{0\}$.

5) Soit un entier $n > 1$. Déterminer $\sqrt{n\mathbb{Z}}$ et $\mathcal{N}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Exercice 7. Soient A, B deux anneaux commutatifs, f un morphisme d'anneaux surjectif de A dans B et I un idéal de A.

1) Une proposition du cours montre que $f(I)$ est un idéal de B. Trouver un exemple dans lequel f n'est pas surjectif et $f(I)$ n'est pas un idéal de B.

2) Soit J un idéal de B. Une proposition du cours montre que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A (vrai même si f n'est pas surjectif). Montrer que l'on a un isomorphisme d'anneaux

$$\frac{A}{f^{-1}(J)} \simeq \frac{B}{J}.$$

3) Soit p_I la projection canonique de A sur A/I. Montrer que les idéaux de A/I sont les $p_I(J)$ où J décrit l'ensemble des idéaux de A contenant I.

4) Montrer que si A est principal, les idéaux de A/I sont principaux.

5) Soient I et J deux idéaux de A vérifiant $I \subseteq J$. Montrer que $p_I(J)$ est un idéal de A/I et que $(A/I)/p_I(J)$ est isomorphe à A/J.

Exercice 8. Soit A un anneau commutatif. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est un corps ;

(ii) $A \neq \{0\}$ et les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A ;

(iii) $A \neq \{0\}$ et tout morphisme d'anneaux de A dans un anneau non nul est injectif.