# Feuille d'exercices n° 4

## Anneaux factoriels (2), irréductibilité

**Exercice 1.**

**1)** Dresser la liste des polynômes irréductibles de degré $\leqslant 3$ de $\mathbb{F}_2[X]$.

**2)** Le polynôme $X^6 + X + 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$ ?

**3)** Que dire du polynôme $X^6 - 2019X + 2001$ dans $\mathbb{Z}[X]$ ? Dans $\mathbb{Q}[X]$ ?

**Exercice 2.**

**1)** Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe dans $\mathbb{Z}[X]$ des polynômes irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$ de degré $n$.

**2)** Soit $p$ un nombre premier. Montrer que $R(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$.

**3)** Supposons $p \geqslant 4$ non premier. Montrer que $R(X)$ n'est irréductible ni dans $\mathbb{Z}[X]$ ni dans $\mathbb{Q}[X]$.

**4)** Soit $p$ un nombre premier. Pour quelles valeurs de $p$ le polynôme $X^p + pX + p - 1$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ ? Dans $\mathbb{Q}[X]$ ?

**5)** Soit $P(X, Y) = X^2Y^3 + X^2Y^2 - 2XY^2 + X + Y^3 + Y^2 - 1$. Montrer que $P(X, Y)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X, Y]$.

**Exercice 3.**

**1)** Soient $P(X)$, $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $P(X)$ et $Q(X)$ ont le même pgcd dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

**2)** Soit $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que $P(X)$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

**3)** Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des complexes deux à deux distincts ($n \geqslant 1$). Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des entiers $\geqslant 1$. Montrer que si $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i)^{m_i} \in \mathbb{Q}[X]$ alors $Q(X) = \prod_{i=1}^n (X - x_i) \in \mathbb{Q}[X]$.

**Exercice 4.** Soit $p$ un nombre premier impair.

**1)** On note $G$ l'ensemble des carrés non nuls de $\mathbb{F}_p$. Quel est le cardinal de $G$ ?

**2)** On note $H$ l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$ qui ne sont pas des carrés. Quel est le cardinal de $H$ ?

**3)** Soit $\alpha$ un élément de $H$. Montrer que $\alpha G = H$.

**4)** En déduire que si $(\alpha, \beta) \in H \times H$, alors $\alpha\beta \in G$.

**5)** Soit $P(X) = X^4 - 10X^2 + 1$. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et dans $\mathbb{Q}[X]$.

**6)** Montrer que pour tout premier $q$, $P(X)$ est réductible dans $\mathbb{F}_q[X]$. Lorsque $q > 2$, on pourra commencer par supposer que 2 est un carré modulo $q$, puis que 3 est un carré modulo $q$. Enfin on traitera le cas où ni 2 ni 3 ne sont des carrés dans $\mathbb{F}_q$ à l'aide de la question 4.

**7)** De même, montrer que $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais réductible dans $\mathbb{F}_q[X]$ quel que soit $q$ premier.

**Exercice 5.** Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{a + b\,i\sqrt{3};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$, qui muni des lois usuelles est un anneau commutatif unitaire intègre. Soit $P(X) = X^2 - X + 1 \in A[X]$.

**1)** Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $A[X]$.

**2)** Soit $K$ le corps des fractions de $A$. Montrer que dans $K[X]$, $P(X)$ n'est pas irréductible.

**3)** Comment expliquer ce phénomène ?