Eléments de correction du DS

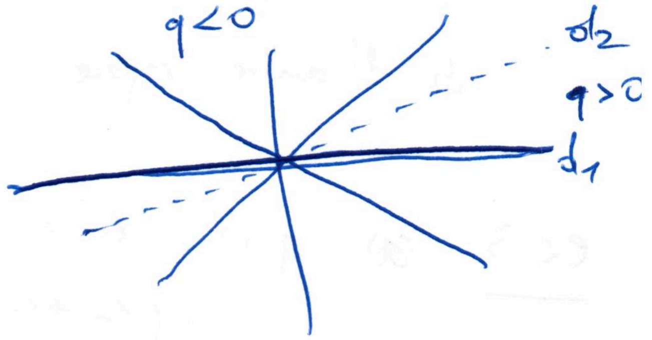
ex 1 1) Développer $q(x \pm y) = b(x \pm y, x \pm y)$

2) (a) VRAI. Sinon q est de signature (p, p') avec $p > 0$, $p' > 0$ et s'écrit dans une base adéquate

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+p'}^2$$

on voit que $(1, \dots 0, 1, 0 \dots 0)$ est isotrope.

(b) FAUX. $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ admet 2 droites supplémentaires où elle est définie positive, mais n'est pas déf. positive



ex 2 (1) $M = M(b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(2) cours: $F^\perp = v^\perp = \{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, {}^tX \cdot M \cdot v = 0 \}$

avec $M \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^tX \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ conduit à $\{ x_1 + x_2 = 0$

d'où $v^\perp = \text{vect} \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

$F^\perp \supset N$: $x \in N \iff b(x,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow b(x,y) = 0 \quad \forall y \in F$

$\Rightarrow x \in F^\perp$.

(3) . $x \in F^{\perp\perp} \iff x \in \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}^\perp \cap \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp$

$\iff {}^tX . M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = {}^tX . M . \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On trouve $F^{\perp\perp} = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

. $N = \ker M = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

$F + N = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ en vérifiant que chaque vecteur est combinaison linéaire des vecteurs de l'autre espace.

---

ex 3 (a) $q(x) = x_1^2 + 2x_1(-2x_2 + 3x_3) + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 10x_2x_3$

$= (x_1 + (-2x_2 + 3x_3))^2 - (4x_2^2 - 12x_2x_3 + 9x_3^2) + 3x_2^2 + 8x_3^2 - 10x_2x_3$

$= (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$

$= (x_1 - 2x_2 + 3x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2$

Sign $= (1,1)$.

On pose $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, d'où $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 + 2x'_3 - x'_3 \\ x'_2 + x'_3 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

d'où $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ est q_1-orthogonale.

(b) $q_2(x) = (x_1 + 2x_3)(x_2 + 6x_3) - 12 x_3^2$

$= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 8x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - 4x_3)^2 - 12 x_3^2$

$\text{sign} = (1, 2)$

<u>ex 4</u> 1) évident

2) $b(P,P) = 0 = \int_0^1 \underbrace{P'(t)^2}_{\geq 0 \text{ continu}} dt = 0 \iff P' = 0$ sur $[0,1]$ $\iff P' = 0$ car polynôme

$\to I(q) = \{\text{constante}\} = \mathbb{R}.1$.

3) Puisque q est positive, elle est de signature $(p,0)$ et de la forme $q(x) \overset{(*)}{=} x_1^2 + \dots + x_p^2$ dans une base adéquate $\mathcal{E}$, et de matrice

$M(b)_{\mathcal{E}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{N}$ $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \dots \varepsilon_{n+1}\}$

⚠ $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$.

on a $N = \text{vect}\{E_{p+1}, \dots E_{n+1}\} = I(q)$ via $(*)$

Formule du rang : $\dim N + rg(b) = n+1 \Rightarrow \boxed{rg(b) = n}$

4) ℓ forme linéaire : évident.

$q_1(P) = q(P) - \ell(P)^2$ est la forme quadratique

associée à $b_1(P, Q) = b(P, Q) - \ell(P)\ell(Q)$

qui est clairement bilinéaire symétrique.

5) On a $\displaystyle\int_0^1 (P'(t) - \ell(P))^2 dt = \int_0^1 P'^2 - 2P'\ell(P) + \ell(P)^2 \, dt$

$\displaystyle = \int_0^1 P'^2 \, dt - 2\ell(P)\int_0^1 P' \, dt + \ell(P)^2 \int_0^1 1 . dt$

$= q(P) - 2\ell(P)^2 + \ell(P)^2$

$= q_1(P)$.

6) On a donc $\displaystyle q_1(P) = \int_0^1 \underbrace{(P' - \ell(P))^2}_{\geq 0} dt \geq 0$, d'où

$\text{sign}(q_1) = (r, 0)$ où $r = rg(q_1)$.

L'argument vu en 3) donne $I(q_1) = N(q_1)$

$P \in I(q_1) \Leftrightarrow P' - \ell(P) = 0$ sur $[0,1] \Leftrightarrow P' = \ell(P)$ $(P \in \mathbb{R}[X])$

$\Leftrightarrow P'$ est une constante $\Leftrightarrow P(X) = a + bX$

$\Rightarrow \dim N(q_1) = 2 \Rightarrow rg(q_1) = n+1-2 = n-1$.