N° d'ordre : 111

THÈSE

PRÉSENTÉE A

L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR

PAR

Qing LIU

OUVERTS ANALYTIQUES D'UNE COURBE PROJECTIVE SUR UN CORPS VALUÉ COMPLET, ULTRAMÉTRIQUE, ALGÉBRIQUEMENT CLOS.

Soutenue le 11 mars 1987 *devant la Commission d'Examen :*

MM.	Pierrette CASSOU-NOGUÈS	*Président*
	Philippe CASSOU-NOGUÈS	*Examinateurs*
	Jean FRESNEL	
	Marc REVERSAT	

— 1987 —

à mon père

Je voudrais tout d'abord remercier Jean FRESNEL qui a dirigé cette thèse. Sa constante disponibilité et son soutien tout au long de ce travail m'ont été précieux, et en plus de connaissances mathématiques, il m'a beaucoup appris par son souci de clarté et de rigueur.

Je remercie Marius van der PUT qui s'est intéressé à cette thèse. Ses idées m'ont beaucoup aidé au fil de ce travail qui constitue un prolongement partiel de ses recherches.

Je remercie Michel MATIGNON et Marc REVERSAT en qui j'ai toujours trouvé des interlocuteurs attentifs. Les discussions que nous avons eues m'ont été très instructives.

Je remercie Pierrette CASSOU-NOGUÈS d'avoir bien voulu présider le jury de soutenance. Mes remerciements vont aussi à Philippe CASSOU-NOGUÈS, membre du jury, j'ai gardé un bon souvenir des années où je fus son élève.

Je remercie Bernard ROUSSEAU qui m'a apporté un grand soutien moral durant ces années. Je le remercie pour ses aides scientifiques et non-scientifiques.

Je remercie le C.I.M.P.A. (Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées), présidé par le Professeur HOGBÉ-NLEND, de m'avoir accordé une bourse d'étude pendant les deux premières années de la préparation de cette thèse.

Je remercie Mlles Sylvie BRUGUES et Caroline PERRIER qui ont assuré la tâche ingrate de la frappe du manuscrit avec compétence et patience.

Je remercie Mme Mauricette JAUBERT et M. Louis POUPIN qui ont imprimé ce travail avec beaucoup de gentillesse.

-*-*-*-

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Le présent travail concerne la description des espaces analytiques réduits, irréductibles, séparés, de dimension 1 sur un corps k valué complet, ultramétrique et algébriquement clos. On trouve une étude détaillée des espaces affinoïdes de dimension 1 et plus généralement des espaces analytiques quasi-compacts, séparés de dimension 1 dans les articles [B,L],[F,M], [P1] et [P2]. On montre qu'un tel espace est ouvert analytique d'une variété projective réduite de dimension 1 ([F,M], [P2]) et qu'il admet une réduction préstable (modulo une extension finie du corps de base) s'il est en plus géométriquement régulier. Nous nous proposons de généraliser ces résultats à certains espaces analytiques.

Nous introduisons d'abord le genre d'un espace analytique de dimension 1 (voir définition ci-après). Si Z est une variété projective réduite de dimension 1 sur k, le genre de Z^{an} (l'analytification de Z) est égal au genre arithmétique de Z (i.e $\dim_k H^1(Z,\mathcal{O}_Z)$). En particulier tout ouvert analytique de Z^{an} est de genre fini (et séparé). Nous restreignons donc notre étude aux espaces analytiques de genre fini. Un début de cette étude se trouve dans le livre de L. Gerritzen et M. van der Put "Schottky groups and Mumford curves" ([G,P]) dans lequel ils essaient de caractériser les espaces analytiques qui sont ouverts analytiques de la droite projective (donc de genre 0).

Au §1, nous donnons la définition du genre d'un espace analytique de dimension 1, elle est comme suit : soit R un espace affinoïde de dimension 1, la réduction canonique $\overline{R}^c$ de R est une variété affine de dimension 1 sur $\overline{k}$ (le corps résiduel de k), soit Y le complété projectif de $\overline{R}^c$ (c'est la variété projective telle que $\overline{R}^c$ soit un ouvert dense de Y et que les points de $Y-\overline{R}^c$ soient réguliers), on dit que le genre de R est le genre arithmétique de Y (i.e. $\dim_{\overline{k}} H^1(Y,\mathcal{O}_Y)$). Pour un espace analytique X de dimension 1, le genre n'est autre chose que la borne supérieure des genres de ses ouverts affinoïdes. On dit que X est de genre fini si cette borne supérieure est finie.

On termine le §1 par une formule (analogue au cas de la géométrie algébrique) qui donne le genre d'un espace affinoïde réduit de dimension 1 en fonction du genre de sa normalisation, du nombre de ses composantes irréductibles et de la nature de ses points singuliers (proposition 1.9).

Au §2, on s'intéresse aux fonctions holomorphes sur un ouvert affinoïde R de $\mathbb{P}_k^1$ qui induisent une immersion injective ouverte de R dans $\mathbb{B}_k^1$. Plus précisément, soit $f \in \mathcal{O}(R)^0$ (i.e. de norme bornée par 1), alors l'homomorphisme $\psi : k\langle T\rangle \to \mathcal{O}(R)$ défini par $\psi(T)=f$ induit un morphisme $\varphi_f : R \to \mathbb{B}_k^1$. On dit que f induit une immersion injective ouverte de R dans $\mathbb{B}_k^1$ si φ_f est une immersion injective ouverte. On donne une caractérisation des éléments f de $\mathcal{O}(R)^0$ qui induisent une immersion injective ouverte de R dans $\mathbb{B}_k^1$ en fonction de leurs coefficients dans une écriture standard (proposition 2.3).

Le (minuscule) §3 est consacré à une étude rapide des espaces analytiques connexes, réguliers, séparés, de dimension 1 et de genre 0. On montre notamment qu'un tel espace admet un recouvrement admissible affinoïde au plus dénombrable (proposition 3.3) et une réduction préstable (proposition 3.4).

Au §4 on étudie la structure des espaces analytiques réduits, irréductibles, séparés, de dimension 1 et de genre fini. On montre qu'un tel espace analytique X admet une réduction $\overline{X}$ préstable en dehors d'un ouvert affine V de $\overline{X}$ (théorème 1), ceci veut dire que $\overline{X}$-V est un schéma de dimension 1, réduit, localement de type fini sur $\overline{k}$ dont les composantes irréductibles sont des variétés algébriques régulières, que celles-ci sont en nombre au plus dénombrables et que les points singuliers de $\overline{X}$-V sont des points doubles ordinaires. Il suit de cela qu'un espace analytique X de dimension 1, réduit, irréductible, séparé, de genre fini qui n'est pas projectif est un espace de Stein, et donc pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on a $H^q(X,\mathcal{F})=0$ pour tout $q \geq 1$ et $\mathcal{F}$ est engendré par ses sections globales (corollaire 1.2 et proposition 4.5).

A la fin du §4, on étudie l'intersection de deux ouverts analytiques connexes d'un espace analytique X de dimension 1, connexe, régulier, séparé, de genre fini. Si Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts analytiques connexes de X qui se rencontrent, alors le nombre de composantes connexes de $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est majoré par $g(X)+1-\max\{g(\Omega_1),g(\Omega_2)\}$ (proposition 4.6).

Enfin le §5 étudie la possibilité de plonger un espace analytique de genre fini dans une courbe algébrique. D'abord un ouvert analytique X de genre g d'une courbe projective (analytifiée) est ouvert analytique d'une courbe projective de genre g (théorème 2). Si le corps de base k est maximalement complet, un espace analytique réduit, irréductible, séparé, de dimension 1 et de genre fini est ouvert analytique d'une courbe projective analytifiée (théorème 3). Si k n'est pas maximalement complet, il existe un espace analytique X connexe, régulier, séparé, de dimension 1 et de genre 0 qui n'est pas ouvert analytique d'une courbe projective (proposition 5.5). Enfin pour un espace analytique X réduit, séparé, de dimension 1 et de genre fini, on a les équivalences suivantes :

i) L'espace X est ouvert analytique d'une courbe projective C^{an} et C^{an}-X est une partie compacte pour la topologie ordinaire de C^{an} ;

ii) L'espace X est irréductible et les fonctions holomorphes bornées sur X sont des fonctions constantes ;

iii) L'espace X est irréductible et pour toute réduction $r:X \to \overline{X}$ préstable en dehors d'un ouvert affine de $\overline{X}$, le produit des valeurs absolues des angles de toute demi-droite infinie de $\overline{X}$ est nul et les composantes irréductibles de $\overline{X}$ sont complètes. (théorème 4).

CONVENTIONS.

Dans tout ce travail, k désigne un corps valué complet pour une valeur absolue ultramétrique, k^0 son anneau de valuation, k^{00} l'idéal de valuation, $\overline{k}=k^0/k^{00}$ le corps résiduel. Si A est une k-algèbre affinoïde réduite, on note $\| \ \|_{sp}$ la norme spectrale sur A, $A^0=\{f\in A \mid \|f\|_{sp}\leq 1\}$, $A^{00}=\{f\in A \mid \|f\|_{sp}<1\}$ et $\overline{A}=A^0/A^{00}$. Si $f\in A^0$, on note $\overline{f}$ l'image de f dans $\overline{A}$. Un k-espace analytique est un k-espace analytique rigide. Une *variété algébrique* sur un corps K est un schéma de type fini sur K. Une *courbe algébrique* sur K est une variété algébrique séparée, intègre, de dimension 1 sur K. Par *point* d'une variété algébrique, on entendra toujours point fermé. Le signe $\dot{\cup}$ veut dire que l'on prend la réunion d'ensembles deux à deux disjoints. La notation a_i^j veut dire a_i à la puissance j. On note par $k\langle T_1,\ldots,T_n\rangle$ l'ensemble des séries formelles à n variables qui convergent sur $(k^0)^n$.

§1. GENRE D'UN ESPACE ANALYTIQUE REDUIT DE DIMENSION 1.

Dans ce paragraphe, nous donnons les définitions d'ouverts analytiques, du genre d'un espace analytique réduit de dimension 1, et quelques résultats autour de la notion de "genre".

PROPRIETE et DEFINITION 1.1. Soient $(\Omega, \mathcal{O}_\Omega, \mathcal{G})$ un espace analytique rigide, X un ouvert de Ω (pour la topologie ordinaire de Ω), $\mathcal{G}_X$ la topologie de Grothendieck sur X définie de la façon suivante :

1) La topologie (ordinaire) sur X est induite par celle de Ω.

2) Un ouvert W de X est admissible pour $\mathcal{G}_X$ si et seulement si W=X ou si W est admissible pour $\mathcal{G}$.

3) Soit W un ouvert $\mathcal{G}_X$-admissible, un recouvrement $\{W_i\}_i$ de W est admissible pour $\mathcal{G}_X$ si et seulement si pour tout U, $\mathcal{G}_X$-admissible tel que $U \subset W$ et $U \neq X$, $\{W_i \cap U\}_i$ est un recouvrement $\mathcal{G}$-admissible de U.

Soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau sur $(X, \mathcal{G}_X)$ défini par : $\mathcal{O}_X(W) = \mathcal{O}_\Omega(W)$ si W est $\mathcal{G}$-admissible et différent de X ; $\mathcal{O}_X(X) = \varprojlim \mathcal{O}_\Omega(U)$, où la limite projective est prise sur l'ensemble des $U \subset X$, $\mathcal{G}$-admissibles.

Alors $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{G}_X)$ est un espace analytique rigide. On appelle ***ouvert analytique*** de Ω tout ouvert X de Ω muni de la structure d'espace analytique $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{G}_X)$, et on appelle ***ouvert affinoïde*** de Ω tout ouvert analytique de Ω qui est un espace affinoïde.

Preuve. Il suffit de montrer que $(X, \mathcal{G}_X)$ a un recouvrement admissible affinoïde. Soit $\{\Omega_i\}_{i \in I}$ un recouvrement admissible affinoïde de Ω, considérons $\mathcal{U} = \{R \cap \Omega_i \mid i \in I,\ R \text{ affinoïde admissible de } \Omega,\ R \subset X\}$. Soit W un $\mathcal{G}$-admissible contenu dans X, $W \cap \Omega_i$ est un $\mathcal{G}$-admissible affinoïde contenu dans X, donc $W \cap \Omega_i = (W \cap \Omega_i) \cap \Omega_i$ est un élément de $\mathcal{U}$, donc $\{W \cap \Omega_i\} \cap \mathcal{U}$ est un recouvrement $\mathcal{G}$-admissible de $W \cap \Omega_i$. Comme $\{W \cap \Omega_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement $\mathcal{G}$-admissible de W, il en est de même pour $\{W\} \cap \mathcal{U}$, donc $\mathcal{U}$ est un recouvrement $\mathcal{G}_X$-admissible affinoïde de X.

DEFINITION 1.2. On dit qu'un espace analytique X est ***connexe*** s'il n'a pas de recouvrement admissible $\{X_i\}_{i \in I}$ tel que $I = I_1 \dot{\cup} I_2$ (réunion disjointe), $\left(\bigcup_{i \in I_1} X_i\right) \cap \left(\bigcup_{i \in I_2} X_i\right) = \emptyset$, $\bigcup_{i \in I_1} X_i \neq \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I_2} X_i \neq \emptyset$.

Il est clair que X est connexe si et seulement si les seuls éléments idempotents de $\mathcal{O}(X)$ sont 0 et 1.

PROPOSITION 1.1. *Soient Ω un espace analytique, $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'ouverts analytiques connexes de Ω telle que $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$. Alors l'ouvert analytique $\bigcup_{i\in I} X_i$ est connexe.*

Preuve. Soit $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, soit e un élément idempotent de $\mathcal{O}(X)$. L'image $e|_{X_i}$ de e par l'application canonique $\mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X_i)$ est un élément idempotent de $\mathcal{O}(X_i)$, donc $e|_{X_i}=0$ ou 1. Comme $\bigcap_i X_i \neq \emptyset$, $e|_{X_i}$ prend la même valeur pour tout $i\in I$, donc $e=0$ ou $e=1$, donc X est connexe.

PROPOSITION et DEFINITION 1.2. *Soient X un espace analytique, $x\in X$, V_x la réunion des ouverts analytiques connexes de X contenant x. Alors l'ouvert analytique V_x est connexe. La famille $\{V_x\}_{x\in X}$ vérifie $X=\bigcup_{x\in X} V_x$, $V_x=V_y$ si $V_x \cap V_y \neq \emptyset$, et tout ouvert analytique connexe de X est contenu dans un V_x.*

Les V_x s'appellent les *composantes connexes* de X.

Preuve. Pour tout $x\in X$, x est contenu dans un admissible affinoïde connexe ([B,G,R] p 346), donc $V_x \neq \emptyset$. D'après la proposition 1.1, V_x est connexe. Si $V_x \cap V_y \neq \emptyset$, $V_x \cup V_y$ est connexe, donc $V_x = V_x \cup V_y = V_y$.

PROPOSITION 1.3. ([B.G.R.]). *Tout espace affinoïde X a un nombre fini de composantes connexes, elles sont des parties rationnelles de X.*

Preuve. Voir [B.G.R.] p 345-346.

DEFINITION 1.3. On dit qu'un espace analytique X est *quasi-compact* si de tout recouvrement admissible de X on peut extraire un sous-recouvrement fini. Ainsi tout espace affinoïde est quasi-compact.

PROPOSITION 1.4. *Soient Ω un espace analytique connexe, X un ouvert analytique quasi-compact de Ω. Alors X est contenu dans un ouvert analytique quasi-compact connexe de Ω.*

Preuve. L'ouvert X est réunion finie d'admissibles affinoïdes connexes de Ω (proposition 1.3), il a donc un nombre fini de composantes connexes $X_1,\ldots,X_s$ qui sont aussi quasi-compactes. Soient $i\leqslant s$, $\mathcal{U}_i$ l'ensemble des ouverts analytiques quasi-compacts connexes de Ω contenant X_i, $U_i = \bigcup_{V\in\mathcal{U}_i} V$ et $W=\Omega - \bigcup_{1\leqslant i\leqslant s} U_i$. Montrons que $U_1=\ldots=U_s=\Omega$.

Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe $V_i \in \mathcal{U}_i$, $V_j \in \mathcal{U}_j$ tels que $V_i \cap V_j \neq \emptyset$, donc pour tout $V \in \mathcal{U}_i$, $V \cup V_i \cup V_j$ est un ouvert analytique quasi-compact connexe contenant X_j, donc $V \cup V_i \cup V_j \in \mathcal{U}_j$ et $V \subseteq V \cup V_i \cup V_j \subseteq U_j$, par conséquent $U_i \subseteq U_j$, de même on a $U_j \subseteq U_i$, d'où $U_i = U_j$.

On peut supposer que $\{U_i \mid 1 \leqslant i \leqslant s\} = \{U_i \mid 1 \leqslant i \leqslant t\}$, et que pour $i,j \leqslant t$ on a $U_i \cap U_j = \emptyset$. Soit $\{R_\ell\}_{\ell \in L}$ un recouvrement admissible de Ω par des affinoïdes connexes, on pose $L_0 = \{\ell \in L \mid R_\ell \subset W\}$ et $L_i = \{\ell \in L \mid R_\ell \subset U_i\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant t$. On a $L = L_0 \uplus L_1 \uplus \ldots \uplus L_t$, $(\bigcup_{\ell \in L_i} R_\ell) \cap (\bigcup_{\ell \in L_j} R_\ell) = \emptyset$ si $i \neq j$.

Comme Ω est connexe et $U_i \neq \emptyset$, on a $\Omega = U_1 = \ldots = U_t = U_{t+1} = \ldots = U_s$. Pour tout $i \leqslant s$, soit $V_i \in \mathcal{U}_i$ tel que $V_i \cap X_1 \neq \emptyset$, alors l'ouvert analytique $X_1 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_s$ est quasi-compact, connexe et contient X.

Sur un espace analytique séparé, on peut mettre une topologie de Grothendieck assez commode à utiliser, elle est définie par la proposition suivante.

PROPOSITION 1.5. *Soit $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{G})$ un espace analytique séparé. Alors on a une topologie de Grothendieck $\mathcal{G}'$ sur X définie par :*

1) *Un ouvert de X est $\mathcal{G}'$-admissible si c'est X ou un ouvert affinoïde $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{G})$.*

2) *Soit W un ouvert $\mathcal{G}'$-admissible, un recouvrement $\{W_i\}_i$ de W est $\mathcal{G}'$-admissible si les W_i sont $\mathcal{G}'$-admissibles et si tout ouvert affinoïde de $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{G})$, contenu dans W, est contenu dans une réunion finie de W_i.*

Soit $\mathcal{O}'_X$ le faisceau défini de façon naturelle sur $(X, \mathcal{G}')$ à partir de $\mathcal{O}_X$, alors $Id_X : X \to X$ induit un isomorphisme d'espaces analytiques entre $(X, \mathcal{O}_X, \mathcal{G})$ et $(X, \mathcal{O}'_X, \mathcal{G}')$.

Preuve. Evident.

Dans la suite tout espace analytique séparé sera muni de cette topologie de Grothendieck (pour laquelle tout ouvert affinoïde est admissible). On rappelle que tout espace affinoïde est séparé et que l'analytification d'une variété algébrique séparée est un espace analytique séparé ([B] p 7, [F] p 282[4]).

Nous définissons maintenant le genre d'un espace analytique de dimension 1.

DEFINITION 1.4. Soit Y une variété algébrique réduite, séparée, de dimension 1, définie sur un corps algébriquement clos K. On appelle ***complété projectif*** de Y l'unique variété projective (à isomorphisme près) $\hat{Y}$, définie sur K, telle que Y soit ouvert dense de $\hat{Y}$ et que les points de $\hat{Y}-Y$ soient réguliers. On appelle ***genre de*** Y et on le note $g(Y)$, le genre arithmétique de $\hat{Y}$, i.e. $\dim_K H^1(\hat{Y}, \mathcal{O}_{\hat{Y}})$.

DEFINITION 1.5. Soit k un corps valué, complet, algébriquement clos, soit R un k-espace affinoïde de dimension 1. On appelle ***genre de*** R et on le note $g(R)$, le genre de $\overline{R}^c$ (la réduction canonique de R).

Cette définition est motivée par les théorèmes suivants :

THEOREME 0.1. (van der Put). *Soit* k *un corps valué, complet, algébriquement clos, soient* X *un* k*-espace analytique réduit, séparé, de dimension* 1 *et quasi-compact,* $r:X\to\overline{X}$ *la réduction de* X *selon un recouvrement pur fini* $\mathcal{U}$ *de* X. *Alors il existe une variété projective réduite (analytifiée)* $\hat{X}$, *un recouvrement pur* $\mathcal{V}$ *de* $\hat{X}$ *tels que* $(X,\mathcal{U})$

soit un ouvert analytique formel de $(\hat{X},\mathcal{V})$ *et que* $\overline{\overline{X}}_{\mathcal{V}}$, *la réduction de* $\hat{X}$ *selon* $\mathcal{V}$, *soit isomorphe au complété projectif de* $\overline{X}$. *Si* X *est irréductible,* $\hat{X}$ *l'est aussi.*

Preuve. Voir [P2] Théorème 1.1. et [F,M] § 2.6 théorème 6.

THEOREME 0.2. (Bosch, Gerritzen, van der Put). *Soient* k *un corps valué, complet, algébriquement clos,* Z *une variété projective réduite de dimension* 1 *sur* k, Z^{an} *l'analytification de* Z, $\overline{Z}$ *une réduction analytique de* Z^{an}. *Alors*

$$\dim_k H^1(Z^{an},\mathcal{O}_{Z^{an}})=\dim_{\overline{k}} H^1(\overline{Z},\mathcal{O}_{\overline{Z}})$$

Preuve. Voir [B1] théorème 2.8, [G,P] théorème p 139.

REMARQUE. Pour toute variété projective Z sur k, on a

$$\dim_k H^1(Z^{an},\mathcal{O}_{Z^{an}})=\dim_k H^1(Z,\mathcal{O}_Z)$$

(théorème GAGA, voir [Kö],[S]). Donc en vertu des deux théorèmes ci-dessus, ***tout espace affinoïde*** R ***réduit, de dimension*** 1 ***sur*** k, ***est ouvert affinoïde de l'analytification d'une variété projective réduite de dimension*** 1 ***et de genre arithmétique égal à*** $g(R)$.

Nous rappelons aussi deux résultats de Fresnel et Matignon qui seront utilisés à plusieurs reprises.

THEOREME 0.3. (Fresnel, Matignon). *Soient* k *un corps valué complet,* Z *une variété projective réduite de dimension* 1 *sur* k, R *un ouvert affinoïde de* Z^{an}. *Alors il existe une fonction rationnelle* $f\in\mathcal{R}(Z)$ *telle que*

$$R=\{x\in Z \mid f\in\mathcal{O}_{Z,x},\ |f(x)|\leqslant 1\}.$$

Preuve. Voir [F,M] § 1.4 théorème 1.

THEOREME 0.4. (Fresnel, Matignon). *Soient* k *un corps valué complet,* X *un espace analytique séparé quasi-compact, pur de dimension* 1, $U\subset X$ *une réunion finie d'admissibles affinoïdes de* X. *On suppose que pour toute composante irréductible* Y *de* X *qui est projective on a* $U\cap Y\neq Y$. *Alors* U *est un ouvert affinoïde de* X *(une composante irréductible* Y *de* X *est dite projective, si munie de la structure analytique induite réduite c'est l'analytification d'un espace projectif).*

Preuve. Voir [F,M] corollaire du théorème 2.

PROPOSITION 1.6. *Soient* k *un corps valué complet,* Z *une variété projective réduite, de dimension* 1 *sur* k, R *un ouvert affinoïde de* Z^{an} *qui rencontre toutes les composantes irréductibles de* Z. *Alors il existe un ouvert affinoïde* R_0 *de* Z^{an} *tel que* $\mathcal{U}=\{R,R_0\}$ *soit un recouvrement pur de* Z^{an}, *et que* $\overline{R}^c$ *soit dense dans* $\overline{Z}_{\mathcal{U}}$. *En plus* $R\cap R_0$ *est régulier.*

Preuve. Soit $\varphi:Z'\to Z$ la normalisation de Z, $\varphi^{-1}(R)$ est un ouvert affinoïde de $(Z')^{an}$ car φ^{an} est un morphisme fini, $\varphi^{-1}(R)$ rencontre toutes les composantes connexes de Z'. Il existe, d'après le théorème 0.3, une fonction rationnelle $g_1\in\mathcal{R}(Z')$ telle que

$$\varphi^{-1}(R)=\{x\in Z' \mid g_1\in\mathcal{O}_{Z';x}, |f(x)|\leqslant 1\}.$$

Soient S l'ensemble des points singuliers de Z (c'est aussi l'ensemble des points singuliers de Z^{an}), $\varphi^{-1}(S)\cap\varphi^{-1}(R)=\{s_1,\ldots,s_n\}$,

$g=\prod_{1\leqslant i\leqslant n}(g_1-g_1(s_i))^N$, où N est un entier assez grand tel que

$g_{s_i}\in\mathcal{O}_{Z,\varphi(s_i)}$ pour tout $i\leqslant n$ ([F] lemme 3, p 360). On a $g\in\mathcal{R}(Z')$,

$\varphi^{-1}(R)=\{x\in Z' \mid g\in\mathcal{O}_{Z';x}, |g(x)|\leqslant 1\}$ et $g(x)=0$ pour tout $x\in\varphi^{-1}(S)\cap\varphi^{-1}(R)$. Considérons $W=\{x\in Z' \mid g^{-1}\in\mathcal{O}_{Z';x}, |g^{-1}(x)|\leqslant 1\}$, c'est un ouvert affinoïde de Z' car son intersection avec chaque composante connexe de Z' est affinoïde.

α) *Montrons que* $\varphi(W)$ *est un ouvert affinoïde de* Z^{an} *et* $\varphi(W)\cap S\cap R=\emptyset$.

Soit $x\in\varphi^{-1}(\varphi(W))$, montrons que $x\in W$. Si $x\notin\varphi^{-1}(S)$, comme $\varphi|_{Z'-\varphi^{-1}(S)}$ est injective, on a $x\in W$. Si $x\in\varphi^{-1}(S)$, soit $y\in W$ tel que $\varphi(x)=\varphi(y)$, on a $x\notin\varphi^{-1}(R)$ car sinon $y\in W\cap\varphi^{-1}(\varphi(x))\subset W\cap\varphi^{-1}(S)\cap\varphi^{-1}(R)$, ce dernier étant vide puisque $g(z)=0$ pour tout $z\in\varphi^{-1}(S)\cap\varphi^{-1}(R)$, c'est absurde, donc $x\notin\varphi^{-1}(R)$, donc $x\in W$. Par conséquent, $\varphi^{-1}(\varphi(W))=W$ et il suit que $\varphi(W)\cap S\cap R=\emptyset$. Il existe un ouvert affinoïde U de Z tel que $S\cap\varphi(W)\subset U$ et $U\cap R=\emptyset$. Il existe un ouvert affinoïde V de Z' tel que $W=\varphi^{-1}(U)\cup V$ et $V\cap\varphi^{-1}(S)=\emptyset$, $\varphi(V)$ est un ouvert affinoïde de Z, donc $\varphi(W)=U\cup\varphi(V)$ est quasi-compact. La normalisation $\varphi(W)'$ de $\varphi(W)$ est isomorphe à $\varphi^{-1}(\varphi(W))=W$, comme W est affinoïde, $\varphi(W)$ aussi ([F,M] § 2.1.3, prop. 4).

β) *Posons* $R_0=\varphi(W)$, *alors* $\mathcal{U}=\{R,R_0\}$ *est un recouvrement pur de* Z^{an} *et* $R\cap R_0$ *est régulier.*

Pour tout $x\in\varphi^{-1}(R)$, on a $g_x\in\mathcal{O}_{Z,\varphi(x)}\subset\mathcal{O}_{Z^{an},\varphi(x)}$, donc $g\in\mathcal{O}(R)^0$ ([F] p 239 et p 248), par suite $R\cap R_0=\{x\in R \mid |g(x)|=1\}$ et c'est une partie pure de R.

Considérons $h=\prod(g^{-1}-g^{-1}(s))^{N'}\in\mathcal{R}(Z')$, le produit étant fait sur l'ensemble des $s\in\varphi^{-1}(S)\cap W-\varphi^{-1}(R)$, on prend N' assez grand, de sorte que $h_x\in\mathcal{O}_{Z,\varphi(x)}$ pour tout $x\in\varphi^{-1}(S)\cap W-\varphi^{-1}(R)=\varphi^{-1}(S)\cap W$, il suit que $h\in\mathcal{O}(R_0)^0$. Comme $|g^{-1}(x)|<1$ pour tout $x\in\varphi^{-1}(S)\cap W-\varphi^{-1}(R)$, on a $R\cap R_0=\{x\in R_0 \mid |h(x)|=1\}$, c'est donc une partie pure de R_0. Alors $\mathcal{U}=\{R_0,R\}$ est bien un recouvrement pur de $R_0\cup R=Z$.

Enfin comme $R\cap R_0\cap S=\emptyset$, on a bien $R\cap R_0$ régulier.

γ) *Montrons que* $\overline{R}^c$ *est dense dans* $\overline{Z}_{\mathcal{U}}$.

Il suffit de montrer que $\overline{Z}_{\mathcal{U}}-\overline{R}^c$ est fini. L'homomorphisme $H : k(T)=\mathcal{R}(\mathbb{P}^1_k)\to\mathcal{R}(Z')$ défini par $H(T)=h$ induit un morphisme fini $\theta:Z'\to\mathbb{P}^1_k$, pour tout $x\in Z'$, on a $\theta(x)=h(x)$. Comme θ^{an} est un morphisme fini et que $W=\{x\in Z' \mid h\in\mathcal{O}_{Z',x}, |h(x)|\leqslant 1\}$, H induit un homomorphisme fini $\Gamma_0:k\langle T\rangle\to\mathcal{O}(W)$ avec $\Gamma_0(T)=h|_W$. Soit $f=h|_{R_0}\in\mathcal{O}(R_0)^0$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
k\langle T\rangle \arrow[r, "\Gamma_0"] \arrow[dr, "\Gamma"'] & \mathcal{O}(W) \\
 & \mathcal{O}(R_0) \arrow[u, "\varphi\#(R_0)"']
\end{tikzcd}$$

où Γ est défini par $\Gamma(T)=f$, donc Γ est fini, donc $\overline{\Gamma}:\overline{k}[\overline{T}]\to\overline{\mathcal{O}(R_0)}$ est fini aussi, il suit que $\overline{\mathcal{O}(R_0)}$ est fini sur $\overline{k}[\overline{f}]$.

Montrons que le fermé de Zariski associé à $\overline{f}$, $V(\overline{f})\subset\overline{R}_0^c$ est fini. Soit Y une composante irréductible de $\overline{R}_0^c$. Si $Y\cap V(\overline{f})\neq Y$, $Y\cap V(\overline{f})$ est fini. Si $Y\cap V(\overline{f})=Y$, pour tout $\overline{a}\in\overline{\mathcal{O}(R_0)}$, il existe $\overline{b}_0,\ldots,\overline{b}_n\in\overline{k}[\overline{f}]$ tels que

$$\overline{a}^n+\overline{b}_{n-1}\overline{a}^{n-1}+\ldots+\overline{b}_0=0,$$

donc $\overline{a}|_Y$ est algébrique sur $\overline{k}$ puisque $\overline{b}_i|_Y\in\overline{k}$, donc $\mathcal{O}(Y)$ est algébrique sur $\overline{k}$, d'où $\dim Y=0$, Y est fini, donc $V(\overline{f})$ est fini.

Enfin comme $R\cap R_0=\{x\in R_0 \mid |f(x)|=1\}$, on a $\overline{Z}_{\mathcal{U}}-\overline{R}^c=V(\overline{f})\subset\overline{R}_0^c$, donc $\overline{Z}_{\mathcal{U}}-\overline{R}^c$ est fini.

COROLLAIRE 1.6.1. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* C *une courbe projective sur* k, R *un ouvert affinoïde irréductible de* C^{an}, *de même genre que* C^{an}, $s:R\to\overline{R}$ *la réduction de* R *selon un recouvrement pur* $\mathcal{U}$ *de* R. *Alors* C^{an} *admet un recouvrement pur* $\mathcal{V}$

tel que $(R,\mathcal{U})$ soit un ouvert formel de $(C^{an},\mathcal{V})$ et que $\overline{C}$, la réduction de C^{an} selon le recouvrement pur $\mathcal{V}$, soit isomorphe au complété projectif de $\overline{R}$. En particulier, $g(\overline{R})=g(R)$.

Preuve. Soit $r:R\to\overline{R}^c$ la réduction canonique. D'après la proposition 1.6, on a une réduction analytique $\hat{r}:C^{an}\to Z$ de C^{an} telle que $\hat{r}|_R=r$ et que $\overline{R}^c$ soit dense dans Z.

Soit $\varphi:\overline{\overline{R}}\to\overline{R}^c$ le morphisme induit par le morphisme d'espaces analytiques formels $Id_R:(R,\mathcal{U})\to(R,\{R\})$, soit F la réunion des composantes irréductibles complètes de $\overline{\overline{R}}$. Alors $\varphi(F)$ est fini, $\varphi^{-1}(\varphi(F))=F$ et $\varphi:\overline{\overline{R}}-F\to\overline{R}^c-\varphi(F)$ est un isomorphisme ([Pl] prop 1.1. ou [F] p 345).

Posons $V=\overline{\overline{R}}-F$, c'est un ouvert affine de $\overline{\overline{R}}$, soient $V_1,\ldots,V_n$ des ouverts affines de $\overline{\overline{R}}$ tels que $V_i\neq V$ et $\overline{\overline{R}}=V\cup V_1\cup\ldots\cup V_n$, soit U un ouvert affine de Z tel que $U\cap\overline{R}^c\subseteq\varphi(V)$ et $Z-\overline{R}^c\subseteq U$. Alors le recouvrement

$$\mathcal{V}=\{\hat{r}^{-1}(U),r^{-1}(\varphi(V)),s^{-1}(V_i)\,|\,1\leq i\leq n\}$$

de C^{an} est un recouvrement pur de C^{an} car on a $r^{-1}(\varphi(V))=s^{-1}(V)$,

$$s^{-1}(V_i)\cap\hat{r}^{-1}(U)=s^{-1}(V_i)\cap s^{-1}(V)\cap\hat{r}^{-1}(U)=s^{-1}(U_i)\cap s^{-1}(\varphi^{-1}(\varphi(V)\cap U)),$$

$$s^{-1}(V_i)\cap\hat{r}^{-1}(U)=s^{-1}(V_i\cap V)\cap\hat{r}^{-1}(U)=\hat{r}^{-1}(U)\cap r^{-1}(\varphi(V_i\cap V)).$$

On a $g(C)=g(R)$, donc $g(Z)=g(\overline{R}^c)$, donc $Z-\overline{R}^c$ est un ensemble fini de points réguliers, il suit que le morphisme $\varphi:\overline{\overline{R}}\to\overline{R}^c$ se prolonge

en un morphisme $\hat{\varphi}:\hat{\overline{\overline{R}}}\to Z$ tel que $\hat{\varphi}:\hat{\overline{\overline{R}}}-F\to Z-\varphi(F)$ soit un isomorphisme. On voit alors que $\overline{C}$, la réduction de C^{an} selon le recouvrement pur

$\mathcal{V}$, est isomorphe à $\hat{\overline{\overline{R}}}$. Enfin, la construction de $\mathcal{V}$ montre que $(R,\mathcal{U})$ est un ouvert formel de $(C^{an},\mathcal{V})$.

COROLLAIRE 1.6.2. ***Soient*** k ***un corps valué complet, algébriquement clos,*** C ***une variété projective réduite, de dimension*** 1 ***sur*** k, R ***un ouvert affinoïde de*** C^{an}, S ***un ensemble fini de points de*** R. ***Alors il existe un ouvert affinoïde*** R_0 ***de*** C^{an} ***tel que*** $R\cup R_0=C^{an}$ ***et*** $S\cap R_0=\emptyset$.

Preuve. D'après la proposition 1.6, il existe un ouvert affinoïde W de C^{an} tel que $C^{an}=R\cup W$. Soit p un point de $W\cap S$. Montrons qu'il existe un ouvert affinoïde W_1 de C^{an} tel que $W_1\subset W$, $p\notin W_1$ et $C^{an}=R\cup W_1$. Soient $f_1,\ldots,f_n$ des fonctions de $\mathcal{O}(W)$ qui engendrent l'idéal maximal de $\mathcal{O}(W)$ correspondant au point p. Alors il existe $\pi\in k-\{0\}$ tel que $\{x\in W\,|\,|f_i(x)|\leq|\pi|,1\leq i\leq n\}$ soit contenu dans $R\cap W$ ([F] lemme 1, p 116). On pose $W_1=\bigcup_{1\leq i\leq n}\{x\in W\,|\,|f_i(x)|\geq|\pi|\}$, c'est un ouvert analytique compact de W, c'est donc un ouvert affinoïde (théorème 0.4).

On a clairement $C^{an}=R\cup W_1$, $p\notin W_1$ et $W_1\subset W$, comme $S\cap W$ est fini, au bout d'un nombre fini de telles opérations, on trouve un ouvert affinoïde R_0 qui répond à la question.

COROLLAIRE 1.6.3. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique quasi-compact, séparé, réduit de dimension* 1. *Alors* X *est ouvert analytique d'une variété projective (analytifiée) réduite de dimension* 1.

Preuve. Soient $X_1,\ldots,X_n$ les composantes irréductibles de X, elles sont quasi-compactes (on les munit de la structure analytique réduite induite). On sait que X_i est soit affinoïde, soit projectif. Donc X_i est ouvert analytique d'une courbe projective (analytifiée) C_i. Soit S l'ensemble des points singuliers de X, c'est un ensemble fini car X est quasi-compact et tout espace affinoïde réduit de dimension 1 n'a qu'un nombre fini de points singuliers (c'est une conséquence immédiate du théorème 0.1).

Soit R un ouvert affinoïde de X contenant S, soit R_i un ouvert affinoïde C_i tel que $R_i\cap(X_i\cap S)=\emptyset$ et $C_i= R_i\cup(R\cap C_i)$ (corollai-1.6.2). Comme $R_i\cap(S\cap X_i)=\emptyset$, $R_i\cap R$ est un ouvert affinoïde de R. On recolle les espaces affinoïdes $R,R_1,\ldots,R_n$ selon les isomorphismes

$$R\supset R\cap R_i \xrightarrow{Id} R_i\cap R\subset R_i$$

On obtient ainsi un espace analytique dont les composantes irréductibles sont $C_1,\ldots,C_n$, il est donc projectif ([F,M], proposition 11) et X est un ouvert analytique de cet espace analytique.

PROPOSITION 1.7. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* Z *une variété projective réduite de dimension* 1 *sur* k, R *et* W *deux ouverts affinoïdes de* Z^{an} *tels que* $W\subset R$. *Alors on a* $g(W)\leq g(R)\leq g(Z)$, *où* $g(Z)$ *est le genre arithmétique de* Z.

Preuve. Soient $Z_1,\ldots,Z_n$ les composantes irréductibles de Z qui ne rencontrent pas R, il existe des ouverts affinoïdes non-vides $R_1,\ldots,R_n$ de Z^{an} tels que $R_i\subset Z_i$, $R_i\cap R_j=\emptyset$ si $i\neq j$, $R'=R\cup R_1\cup\ldots\cup R_n$ est alors un ouvert affinoïde de Z qui rencontre toutes les composantes irréductibles de Z. D'après la proposition 1.6, on a une réduction analytique $\overline{Z}$ qui contient $\overline{R}'^c$ comme ouvert affine, donc $g(R')=g(\overline{R}'^c)\leq g(\overline{Z})$, où $g(\overline{Z})$ est le genre arithmétique de $\overline{Z}$ (voir [P1] prop 1.2.1), or $g(\overline{Z})=g(Z)$, on a donc $g(R')\leq g(Z)$. Enfin, $\overline{R}'^c=\overline{R}^c\cup\overline{R}_1^c\cup\ldots\cup\overline{R}_n^c$ entraîne $g(R)\leq g(R')\leq g(Z)$.

L'inégalité $g(W)\leq g(R)$ est une conséquence de la remarque qui suit le théorème 0.2 et de ce que l'on vient de démontrer.

REMARQUE. Le genre d'un k-espace affinoïde réduit, de dimension 1, est donc la borne inférieure des genres arithmétiques des variétés projectives, réduites de dimension 1, qui le contiennent comme ouvert affinoïde.

DEFINITION 1.6. Soient **k** un corps valué complet algébriquement clos, **X** un **k**-espace analytique réduit de dimension 1. On appelle *genre de* **X** et on le note $g(X)$, le nombre $\mathrm{Sup}\{g(R) \mid R$ ouvert affinoïde de $X\}$. Donc $g(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit que X *est de genre fini* si $g(X) \in \mathbb{N}$.

REMARQUE. D'après la proposition 1.7, cette définition coïncide avec la définition 1.5 lorsque X est affinoïde. Nous verrons (prop. 3.4) que notre définition d'espace de genre 0 est la même que celle donnée dans [G,P], p 138.

Les premiers exemples d'espaces analytiques de genre fini sont les ouverts analytiques d'une variété projective réduite de dimension 1 sur **k** (proposition 1.7). La proposition suivante donne un exemple de calcul effectif du genre d'un espace analytique.

PROPOSITION 1.8. *Soit* k *un corps valué complet algébriquement clos, soit* Z *une variété projective réduite de dimension* 1 *sur* k. *Alors* $g(Z^{an})$ *est égal à* $g(Z)$ *le genre arithmétique de* Z.

Preuve. D'après la proposition 1.7, on a $g(Z^{an}) \leqslant g(Z)$. Soit $r: Z^{an} \to \overline{Z}$ une réduction de Z^{an}, soit V un ouvert affine de $\overline{Z}$ tel que $\overline{Z}-V$ soit un ensemble fini de points réguliers, alors $r^{-1}(V)$ est un ouvert affinoïde de Z^{an}, $g(r^{-1}(V)) = g(V) = \dim_{\overline{k}} H^1(\overline{Z}, \mathcal{O}_{\overline{Z}}) = \dim_k H^1(Z, \mathcal{O}_Z)$, donc

$g(Z) = g(r^{-1}(V)) \leqslant g(Z^{an})$, d'où l'égalité.

Il existe des espaces analytiques réduits, séparés, de dimension 1, de genre infini, qui peuvent être construits de façon naturelle (comme fermés analytiques de $\mathrm{Spmk}[X,Y]$ par exemple), mais nous ne nous y intéresserons pas dans ce travail.

Nous terminons ce paragraphe par une formule liant le genre d'un espace affinoïde de dimension 1 au genre de sa normalisation.

PROPOSITION 1.9. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* R *un* k*-espace affinoïde connexe, réduit, de dimension* 1, R' *la normalisation de* R *et* S *l'ensemble des points singuliers de* R. *Alors on a*

$$g(R) = g(R') - c + 1 + \sum_{x \in S} \dim_k(\mathcal{O}'_{R,x}/\mathcal{O}_{R,x}),$$

où c *est le nombre de composantes irréductibles de* R, $\mathcal{O}'_{R,x}$ *est la clôture intégrale de* $\mathcal{O}_{R,x}$ *dans son anneau total de fractions.*

Preuve. α) *Soit Z une variété projective réduite, de dimension 1 sur k, telle que R soit un ouvert affinoïde de Z^{an}. Alors pour tout $x\in R$, on a $\dim_k(\mathcal{O}'_{R,x}/\mathcal{O}_{R,x})=\dim_k(\mathcal{O}'_{Z,x}/\mathcal{O}_{Z,x})$, où $\mathcal{O}'_{Z,x}$ est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{Z,x}$ dans son anneau total de fractions.*

Soit $\varphi:Z'\to Z$ le morphisme canonique de normalisation, soit $\mathcal{F}$ le faisceau quotient $\varphi_*\mathcal{O}_{Z'}/\mathcal{O}_Z$ sur Z. Par analytification de la suite exacte de faisceaux cohérents

$$0\to\mathcal{O}_Z\to\varphi_*\mathcal{O}_{Z'}\to\mathcal{F}\to 0\quad,$$

on obtient la suite exacte

$$0\to\mathcal{O}_{Z^{an}}\to(\varphi_*\mathcal{O}_{Z'})^{an}\to\mathcal{F}^{an}\to 0.$$

Comme $(\varphi_*\mathcal{O}_{Z'})^{an}=\varphi_*^{an}\mathcal{O}_{(Z')^{an}}=\varphi_*^{an}\mathcal{O}_{(Z^{an})'}$, (où $(Z^{an})'$ est la normalisation de Z^{an}), on a

$$(*)\qquad \mathcal{F}^{an}_x=\mathcal{O}'_{Z^{an},x}/\mathcal{O}_{Z^{an},x}=\mathcal{O}'_{R,x}/\mathcal{O}_{R,x}.$$

Le $\mathcal{O}_{Z,x}$-module $\mathcal{F}_x=\mathcal{O}'_{Z,x}/\mathcal{O}_{Z,x}$ est de type fini, c'est aussi un $(\mathcal{O}_{Z,x}/m_x)$-espace vectoriel de dimension finie (m_x est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Z,x}$). Par une simple application du lemme de Nakayama, on voit qu'il existe $N\geq 1$ tel que $m_x^N\mathcal{F}_x=0$. Donc

$$\mathcal{F}^{an}_x=\mathcal{F}_x\otimes_A\mathcal{O}_{Z^{an},x}\simeq\mathcal{F}_x\otimes_A(\mathcal{O}_{Z^{an},x}/m_x^N\mathcal{O}_{Z^{an},x})$$

en tant que $\mathcal{O}_{Z,x}$-modules (on a posé $A=\mathcal{O}_{Z,x}$). Or

$$\mathcal{O}_{Z^{an},x}/m_x^N\mathcal{O}_{Z^{an},x}\simeq\mathcal{O}_{Z,x}/m_x^N\mathcal{O}_{Z,x}\quad([F]\ p\ 248),$$

donc

$$\mathcal{F}^{an}_x\simeq\mathcal{F}_x\otimes_A(\mathcal{O}_{Z,x}/m_x^N\mathcal{O}_{Z,x})\simeq\mathcal{F}_x\otimes_A\mathcal{O}_{Z,x}\simeq\mathcal{F}_x$$

où $A=\mathcal{O}_{Z,x}$, on a donc le résultat en utilisant l'égalité (*).

β) *Soit Z comme dans α), on suppose que R rencontre toutes les composantes irréductibles de Z et $g(R)=g(Z)$. Alors $g(R')=g(Z')$, où Z' est la normalisation de Z.*

D'après la proposition 1.6, Z^{an} a un recouvrement pur $\{R,.\}$ tel que la réduction associée $r:Z^{an}\to\overline{Z}$ vérifie $\overline{Z}-\overline{R}^c$ fini. Comme $g(\overline{Z})=g(Z)=g(R)=g(\overline{R}^c)$, les points de $\overline{Z}-\overline{R}^c$ sont réguliers. Soit V un ouvert affine régulier de $\overline{Z}$ tel que $V\cup\overline{R}^c=\overline{Z}$, alors $\{R',r^{-1}(V)\}$ est un recouvrement pur de Z', le morphisme canonique $\varphi:Z'\to Z$ induit un morphisme fini $\overline{\varphi}:\overline{Z}'\to\overline{Z}$, où $\overline{Z}'$ est la réduction de Z' selon le recouvrement pur $\{R', r^{-1}(V)\}$. Donc $\overline{Z}'-\overline{R}'^c\subset\overline{\varphi}^{-1}(\overline{Z}-\overline{R}^c)$ est un ensemble fini de points, comme il est contenu dans $\overline{r^{-1}(V)^c}=V$, ces points sont réguliers, par conséquent $g(R')=g(\overline{Z'})=g(Z')$.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition. En utilisant le théorème 0.1, on voit que R est ouvert affinoïde d'une variété projective réduite Z telle que $g(R)=g(Z)$, R rencontre toutes les composantes irréductibles de Z et qu'ils ont le même nombre de composantes irréductibles. Soit S l'ensemble des points singuliers de Z (donc de Z^{an}), comme $g(Z)=g(R)$, S est aussi l'ensemble des points singuliers de R. On a

$$g(Z)=g(Z')-c+1+\sum_{x\in Z} \dim_k(\mathcal{O}'_{Z,x}/\mathcal{O}_{Z,x})$$

Il suffit maintenant d'appliquer α) et β) pour conclure.

§2. IMMERSION INJECTIVE OUVERTE DANS $\mathbb{B}^1_k$

Soit **k** un corps valué complet algébriquement clos, soient $\mathbb{P}^1_k$ la droite projective sur k, k(T) le corps des fractions rationnelles de $\mathbb{P}^1_k$. On identifie k à l'ouvert de $\mathbb{P}^1_k$ où T est régulier et on note ∞ le pôle de T. Pour tout $z\in k$, on a donc $T(z)=z$ et $T^{-1}(\infty)=0$. On note encore par $\mathbb{P}^1_k$ l'analytification de $\mathbb{P}^1_k$, soient $a,\pi\in k$, on note $B(a,\pi)$ le disque ouvert, $\{z\in k \mid |z-a|<|\pi|\}$ et $D(a,\pi)$ le disque fermé, $\{z\in k \mid |z-a|\leqslant|\pi|\}$, $D(a,\pi)$ est un ouvert affinoïde de $\mathbb{P}^1_k$ égal à $\mathrm{Spm}\,k\langle\pi^{-1}T\rangle$.

On sait que tout ouvert affinoïde connexe de $\mathbb{P}^1_k$ est soit de la forme $\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup}_{1\leqslant i\leqslant n} B(a_i,\pi_i)$, soit de la forme $D(a_0,\pi_0)-\dot{\bigcup}_{1\leqslant i\leqslant n} B(a_i,\pi_i)$, avec $B(a_i,\pi_i)\subset D(a_0,\pi_0)$. Pour $R=\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup}_{1\leqslant i\leqslant n} B(a_i,\pi_i)$, tout $f\in\mathcal{O}(R)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$f=\alpha_0+\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\ \sum_{1\leqslant j<\infty} \alpha_{ij}\left(\frac{\pi_i}{T-a_i}\right)^j$$

où $\alpha_0\in k$, $\alpha_{ij}\in k$, $\lim_{j\to\infty}\alpha_{ij}=0$ et

$$\|f\|_{sp}=\max\{|\alpha_0|,|\alpha_{ij}| \mid 1\leqslant i\leqslant n,\ j\geqslant 1\}.$$

Pour un ouvert affinoïde W de la forme $W=D(a_0,\pi_0)-\dot{\bigcup}_{1\leqslant i\leqslant n} B(a_i,\pi_i)$, tout $f\in\mathcal{O}(W)$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$f=\alpha_0+\sum_{j\geq 1}\alpha_{0j}\left(\frac{T-a_0}{\pi_0}\right)^j+\sum_{1\leq i\leq n}\sum_{j\geq 1}\alpha_{ij}\left(\frac{\pi_i}{T-a_i}\right)^j$$

où $\alpha_0\in k$, $\alpha_{ij}\in k$, $\lim_{j\to\infty}\alpha_{ij}=0$ et

$$\|f\|_{sp}=\max\{|\alpha_0|,|\alpha_{ij}|\ \big|\ 0\leq i\leq n,\ j\geq 1\}.$$

Il suit que

$$\overline{\mathcal{O}(W)}=\overline{k}\oplus\overline{\left(\frac{T-a_0}{\pi_0}\right)}\overline{k}\left[\overline{\left(\frac{T-a_0}{\pi_0}\right)}\right]\oplus\bigoplus_{1\leq i\leq n}\overline{\left(\frac{\pi_i}{T-a_i}\right)}\overline{k}\left[\overline{\left(\frac{\pi_i}{T-a_i}\right)}\right].$$

On sait aussi qu'il existe une et une seule composante irréductible sur laquelle $\overline{\left(\frac{T-a_0}{\pi_0}\right)}$ n'est pas constante.

Pour ces résultats élémentaires, on peut consulter [F] p.363-366 et [G,P] p.78-91.

DEFINITION et NOTATION 2.1. Soit k un corps valué complet algébriquement clos, soient R un espace affinoïde sur k, $f\in\mathcal{O}(R)^0$. L'homomorphisme $\psi:k\langle T\rangle\to\mathcal{O}(R)$ défini par $\psi(T)=f$ induit un morphisme de R dans $\mathbb{B}^1_k$, on notera ce morphisme par φ_f. Pour tout $x\in R$, on a $\varphi_f(x)=f(x)\in k^0$. On dit que f *induit une immersion injective ouverte (de* R*) dans* $\mathbb{B}^1_k$ si le morphisme φ_f est une immersion injective ouverte de R dans $\mathbb{B}^1_k$.

Le but de ce paragraphe est de caractériser les $f\in\mathcal{O}(R)^0$ qui induisent une immersion injective ouverte dans $\mathbb{B}^1_k$.

PROPOSITION 2.1. *Soient* k *un corps valué complet algébriquement clos,* R *un* k*-espace affinoïde,* $f\in\mathcal{O}(R)^0$, $c\in k^0$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) f *induit une immersion injective ouverte,*

ii) f-c *induit une immersion injective ouverte,*

iii) si $|\lambda|=\|f\|_{sp}$, $\lambda^{-1}f$ *induit une immersion injective ouverte,*

iv) pour tout ouvert affinoïde R' *de* R, $f|_{R'}$ *induit une immersion injective ouverte de* R' *dans* $\mathbb{B}^1_k$.

Preuve. C'est évident.

PROPOSITION 2.2. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* $R=D(0,1)-\bigcup_{1\leq i\leq n} B(a_i,\pi_i)$, *où les* $B(a_i,\pi_i)$ *sont deux à deux disjoints et contenus dans* $D(0,1)$. *Soit* $f\in\mathcal{O}(R)^0$ *tel que*

$$f=T(\lambda+hT)+\sum_{n\geq i\geq 1}\ \sum_{j\geq 1} \alpha_{ij}\left(\frac{\pi_i}{T-a_i}\right)^j$$

où $\lambda\in k^0$, $h\in k^0\langle T\rangle$, $\alpha_{ij}\in k^0$ *et* $\|\lambda+hT\|_{sp}=1$.

On suppose que f *induit une immersion injective ouverte de* R *dans* $\mathbb{B}^1_k$. *Alors on a* $|\lambda|=1$, $\|h\|_{sp}<1$ *et* $|\alpha_{ij}|<|\pi_i|$ *pour tout* $i\leq n$ *et tout* $j\geq 1$.

Preuve. Elle se fait par récurrence et en plusieurs étapes. Pour simplifier les notations, on pose $f_i=\dfrac{\pi_i}{T-a_i}\in\mathcal{O}(R)^0$ pour tout $1\leq i\leq n$, $\varphi=\varphi_f$ le morphisme associé à f, $T_1=T|_R$, $T_2=T|_{\varphi(R)}$.

α) *On a* $\|h\|_{sp}<1$ *et* $|\alpha_{ij}|<1$ *pour tout* $i\leq 1$, $j\geq 1$.

Pour tout $c\in k^0$, on a $\|f-c\|_{sp}=1$, donc $\|T_2-c\|_{sp}=1$, donc $\varphi(R)$ est de la forme $\varphi(R)=D(0,1)-\bigcup_{j\leq m} B(b_j,r_j)$. Soit L_2 la composante irréductible de $\overline{\varphi(R)}^c$ telle que $\overline{T}_2|_{L_2}$ soit non-constante, alors $\overline{\varphi}^{-1}(L_2)$ est l'unique composante irréductible sur laquelle $\overline{f}$ ne soit pas constante. Soit L_1 la composante irréductible de $\overline{R}^c$ telle que $\overline{T}_1|_{L_1}$ soit non-constante, comme $\overline{f}=\overline{T}_1(\overline{\lambda}+\overline{T}_1\overline{h})+\sum_{i,j}\overline{\alpha}_{ij}\,\overline{f}_i^j$ et $\|\lambda+T_1h\|_{sp}=1$, on a $\overline{f}|_{L_1}$ non-constante, donc $L_1=\overline{\varphi}^{-1}(L_2)$. L'ouvert L_2 est un affine de $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$ car $g(L_2)\leq g(\overline{\varphi(R)}^c)=0$, $\mathcal{O}(L_2)=\overline{k}[\overline{T}_2]_{Q(\overline{T}_2)}$, où $Q(\overline{T}_2)\in\overline{k}[\overline{T}_2]$, de même $\mathcal{O}(L_1)=\overline{k}[\overline{T}_1]_{P(\overline{T}_1)}$, où $P(\overline{T}_1)\in\overline{k}[\overline{T}_1]$. L'homomorphisme $\overline{\varphi^{\#}(R)}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}(L_2)$ sur $\mathcal{O}(L_1)$, qui envoie $\overline{T}_2|_{L_2}$ sur $\overline{f}|_{L_1}$, on a donc $\overline{k}[\overline{T}_1]_{P(\overline{T}_1)}=\overline{k}[\overline{f}|_{L_1}]_{Q(\overline{f}|_{L_1})}$, ce qui implique que $\overline{f}|_{L_1}=\overline{\lambda}\ \overline{T}_1|_{L_1}$, d'où $\|h\|_{sp}<1$.

Soit $i_0\leq n$. Si $|\pi_{i_0}|<1$, considérons L une composante irréductible de $\overline{R}^c$ telle que $\overline{f}_{i_0}|_L$ soit non-constante, comme

$(\overline{T}_1-\overline{a}_{i_0})\overline{f}_{i_0}=\overline{\pi}_{i_0}=0$, on a $\overline{T}_1|_L=\overline{a}_{i_0}$, donc $L\neq L_1$, donc $\overline{f}|_L$ est constante, ce qui implique que $\overline{\alpha}_{i_0,j}=0$ pour tout $j\geq 1$, donc $|\alpha_{i_0,j}|<1$ pour tout $j\geq 1$. Si $|\pi_{i_0}|=1$, les égalités

$$\overline{f}_{i_0}|_{L_1}=\frac{\overline{\pi}_{i_0}}{\overline{T}_1|_{L_1}-\overline{a}_{i_0}}, \qquad \sum_{i,j}\overline{\alpha}_{ij}\,\overline{f}_i^j|_{L_1}=0$$

impliquent $\overline{\alpha}_{i_0,j}=0$ pour tout $j\geq 1$. On a donc $|\alpha_{i,j}|<1$ pour tout $i\leq n$ et $j\geq 1$.

β) *On fixe* $s\in\{1,2,\dots,n\}$, *on pose*

$$|r|=\max\{|a_i-a_s|,|\pi_s|\,\big|\,1\leq i\leq n,|a_i-a_s|<1\},$$

alors pour tout $j\geq 1$ *et tout* i *tel que* $|a_i-a_s|\leq|r|$, *on a* $|\alpha_{ij}|<|r|$.

D'après α), on peut supposer $|r|<1$. On pose $I=\{i\leq n\,\big|\,|a_i-a_s|\leq|r|\}$, $R^{\ell}=\{x\in R\,\big|\,|x-a_s|\leq|\ell|\}$ pour tout $\ell\in k$ tel que $1>|\ell|\geq|r|$. Soit $i\notin I$, on a $|a_s-a_i|=1$ et

$$\frac{\pi_i}{T-a_i}\Big|_{R^{\ell}}=\frac{\pi_i}{a_s-a_i}\,[1+\sum_{j\geq 1}\left(\frac{\ell}{a_i-a_s}\right)^j\left(\frac{T-a_s}{\ell}\right)^j],$$

donc $\dfrac{\pi_i}{T-a_i}\Big|_{R^{\ell}}\in k^0+\ell k^0\left\langle\dfrac{T-a_s}{\ell}\right\rangle$. Comme les α_{ij} sont dans k^{00}, on a

$$\sum_{j\geq 1}\alpha_{ij}\left(\frac{\pi_i}{T-a^i}\right)^j\Big|_{R^{\ell}}\in k^{00}+\ell k^{00}\left\langle\frac{T-a_s}{\ell}\right\rangle.$$

Il suit que

$$f\Big|_{R^{\ell}}=c+\ell'\cdot\frac{T-a_s}{\ell}\left(1+h_\ell\left(\frac{T-a_s}{\ell}\right)\right)+\sum_{i\in I,j\geq 1}\alpha_{ij}\left(\frac{\pi_i}{T-a_i}\right)^j$$

où $$c\in k^0,\quad |\ell'|=|\ell|,\quad h_\ell\in k^0\left\langle\frac{T-a_s}{\ell}\right\rangle.$$

Soit $|\alpha|=\max\{|\alpha_{ij}|\,\big|\,i\in I,j\geq 1\}$. Supposons $|\alpha|\geq|r|$. On applique les résultats de α) à l'affinoïde R^{α}, et la fonction $(f\big|_{R^{\alpha}}-c)\alpha^{-1}\in\mathcal{O}(R^{\alpha})^0$, on a donc, pour tout $i\in I$ et tout $j\geq 1$, $\dfrac{|\alpha_{ij}|}{|\alpha|}<1$, ce qui est absurde.

Donc $|\alpha|<|r|$, d'où le résultat.

γ) ***Pour tout*** $s\leqslant n$ ***et tout*** $j\geqslant 1$, ***on a*** $|\alpha_{sj}|<|\pi_s|$.

On va faire une récurrence sur l'entier n.

$\gamma 1$) Si $n=0$ ou $n=1$, c'est vrai d'après α) et β).

$\gamma 2$) On suppose le résultat vrai pour tout ouvert affinoïde de la forme $D(0,1)-\dot{\bigcup\limits_{i\leqslant m}} B(b_i,\varepsilon_i)$ avec $m\leqslant n-1$.

Considérons $r\in k$ défini dans β), $|r_1|=\max\{|a_i-a_s|,|\pi_s|\,\big|\,|a_i-a_s|<|r|\}$, $I_1=\{i\leqslant n\,\big|\,|a_i-a_s|\leqslant|r_1|\}$.

Si $|r|=|\pi_s|$, on a le résultat d'après β). On suppose donc $|r|>|\pi_s|$, donc $|r|>|r_1|$. Soit $\ell\in k$ tel que $|r|>|\ell|>|r_1|$ et $|\ell|\geqslant\max\{|\alpha_{ij}|\,\big|\,j\geqslant 1, i\in I\}$, où I est défini dans β), ℓ existe en vertu de β).

Soit $i\leqslant n, i\notin I_1$, alors $\left|\dfrac{\ell}{a_i-a_s}\right|\leqslant\dfrac{|\ell|}{|r|}<1$, et on a

$$\frac{\pi_i}{T-a_i}\Big|_{R^\ell}=\frac{\pi_i}{a_s-a_i}\Big[\sum_{j>0}\Big(\frac{\ell}{a_i-a_s}\Big)^j\Big(\frac{T-a_s}{\ell}\Big)^j\Big]\in k^0+\frac{\ell}{a_i-a_s}k^0\Big\langle\frac{T-a_s}{\ell}\Big\rangle$$

Si $|a_i-a_s|=1$, $|\alpha_{ij}|\cdot\left|\dfrac{\ell}{a_i-a_s}\right|<|\ell|$; si $|a_i-a_s|=|r|$,

$|\alpha_{i,j}|\cdot\left|\dfrac{\ell}{a_i-a_s}\right|<|r|\cdot\dfrac{|\ell|}{|r|}=|\ell|$. Donc pour tout $i\notin I_1$, on a

$|\alpha_{i,j}|\left|\dfrac{\ell}{a_i-a_s}\right|<|\ell|$, donc

$$f\Big|_{R^\ell}=c'+\ell''\,\frac{T-a_s}{\ell}(1+h'_\ell)+\sum_{i\in I_1,\, j\geqslant 1}\alpha_{i,j}\Big(\frac{\pi_i}{T-a_i}\Big)^j$$

avec $c'\in k^0$, $|\ell''|=|\ell|$, $h'_\ell\in\dfrac{T-a_s}{\ell}\,k^0\Big\langle\dfrac{T-a_s}{\ell}\Big\rangle$.

On applique l'hypothèse de récurrence à l'affinoïde R^ℓ et $j\geqslant 1$, $\dfrac{|\alpha_{i,j}|}{|\ell|}<\dfrac{|\pi_i|}{|\ell|}$, en particulier $|\alpha_{sj}|<|\pi_s|$. D'où la proposition.

On va donner une version plus "esthétique" de cette proposition.

PROPOSITION 2.3. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* $R=\mathbb{P}^1_k-\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}^{\cdot} B(a_i,\pi_i)$, $f=\alpha_0+\sum_{i\leqslant n,}\sum_{j\geqslant 1}\alpha_{ij}\left(\frac{\pi_i}{T-a_i}\right)^j\in\mathcal{O}(R)^0$. *Alors* f *induit une immersion injective ouverte de* R *dans* $\mathbb{B}^1_k$ *si et seulement il existe* $i_0\leqslant n$ *tel que*

$$|\alpha_{i,j}|<\begin{cases}|\alpha_{i_0,1}| & \text{si } i=i_0 \text{ et } j\geqslant 2\\ |\alpha_{i_0,1}|\cdot\left|\dfrac{\pi_i\,\pi_{i_0}}{(a_{i_0}-a_i)^2}\right| & \text{si } i\neq i_0 \text{ et } j\geqslant 1\end{cases}$$

Preuve. On peut supposer $\alpha_0=0$ et $1=\|f\|_{sp}=|\alpha_{1,j_0}|$.

Soit $\psi:k(T)\to k(T)$, l'automorphisme de $k(T)$ défini par $\psi(T)=\dfrac{\pi_1}{T-a_1}$.

Pour $i\geqslant 2$, on pose $b_i=\dfrac{\pi_1}{a_i-a_1}$, $r_i=\dfrac{\pi_i\pi_1}{(a_i-a_1)^2}$, on a $\psi\left(\dfrac{r_i}{T-b_i}\right)=-\dfrac{\pi_i}{T-a_i}+\dfrac{\pi_i}{a_1-a_i}$,

et ψ induit un automorphisme $\theta:\mathbb{P}^1_k\to\mathbb{P}^1_k$, dont l'application ensembliste est $\theta(z)=\dfrac{\pi_1}{z-a_1}$. On a $\theta(R)=\{z\in\mathbb{P}^1_k \,\big|\, |z|\leqslant 1, |z-b_i|\geqslant|r_i|, n\geqslant i\geqslant 2\}$,

et

$$\psi^{-1}(f)=\sum_{j\geqslant 1}\alpha_{1,j}T^j+\sum_{n\geqslant i\geqslant 2}\sum_{j\geqslant 1}\alpha_{ij}\left(\frac{\pi_i}{a_1-a_i}-\frac{r_i}{T-b_i}\right)^j.$$

Supposons que f induit une immersion injective ouverte, alors $\psi^{-1}(f)$ induit une immersion injective ouverte de $\theta(R)$ dans $\mathbb{B}^1_k$, d'après la proposition 2.2, on a $|\alpha_{1,1}|=1$, $|\alpha_{1,j}|<1$ pour tout $j\geqslant 2$ et pour $i\geqslant 2$, $i\leqslant n$

$$\sum_{j\geqslant 1}\alpha_{ij}\left(\frac{\pi_i}{a_1-a_i}-\frac{r_i}{T-b_i}\right)^j\in k^0+r_ik^{00}\left\langle\frac{r_i}{T-b_i}\right\rangle.$$

Soit Φ l'automorphisme de $k\left\langle\dfrac{r_i}{T-b_i}\right\rangle$ défini par $\Phi\left(\dfrac{r_i}{T-b_i}\right)=\dfrac{\pi_i}{a_1-a_i}-\dfrac{r_i}{T-b_i}$, on a

$$\sum_{j\geq 1} \alpha_{ij} \left(\frac{r_i}{T-b_i}\right)^j \in \Phi\left(k^0+r_i k^{00}\left\langle\frac{r_i}{T-b_i}\right\rangle\right)=k^0+r_i k^{00}\left\langle\frac{r_i}{T-b_i}\right\rangle,$$

donc $|\alpha_{ij}|<|r_i|=\left|\dfrac{\pi_i \pi_1}{(a_i-a_1)^2}\right|$.

Démontrons maintenant la réciproque. Supposons que les coefficients de f satisfont $|\alpha_{1,1}|=1$,

$$|\alpha_{ij}| < \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \text{ et } j\geq 2 \\ \left|\dfrac{\pi_i \pi_1}{(a_i-a_1)^2}\right| & \text{si } i\geq 2 \text{ et } j\geq 1. \end{cases}$$

Il suffit de montrer que $\psi^{-1}(f)$ induit une immersion injective ouverte de $\theta(R)$ dans $\mathbb{B}_k^1$ (ψ et θ sont définis précédemment). Soit $g=\psi^{-1}(f)=\sum_{j\geq 1}\alpha_{1j}T^j+\sum_{2\leq i\leq n}\sum_{j\geq 1}\beta_{ij}\left(\dfrac{r_i}{T-b_i}\right)^j$, les inégalités sur les α_{ij} impliquent $|\alpha_{1j}|<1$ si $j\geq 2$, $|\beta_{ij}|<|r_i|=\left|\dfrac{\pi_i \pi_1}{(a_i-a_1)^2}\right|$ si $i\geq 2$ et $j\geq 1$. Soit $\varphi=\varphi_g$ le morphisme $\theta(R)\to\mathbb{B}_k^1$ associé à g.

Montrons que φ est injective. Soient $z\in\theta(R)$, $z'\in\theta(R)$, $i\geq 2$ $j\geq 1$, on a

$$\left|\beta_{ij}\left(\frac{r_i}{z-b_i}\right)^j-\beta_{ij}\left(\frac{r_i}{z'-b_i}\right)^j\right| \leq |\beta_{ij}|\left|\frac{r_i}{z-b_i}-\frac{r_i}{z'-b_i}\right|$$

$$< |r_i|\frac{|r_i||z-z'|}{|r_i|^2}=|z-z'|,$$

pour $j\geq 2$, on a

$$|\alpha_{1j}z^j-\alpha_{1j}z'^j|<|z-z'|,$$

donc $|\varphi(z)-\varphi(z')|=|\alpha_{1,1}||z-z'|=|z-z'|$. Ce qui prouve que φ est une injection (ensembliste).

Soit $x\in\theta(R)$, soit $\pi\in k-\{0\}$ tel que $D(x,\pi)\subset\theta(R)$, pour tout $i\geqslant 2$ et tout $j\geqslant 1$, on a

$$\left(\frac{r_i}{T-b_i}\right)^j\Bigg|_{D(x,\pi)}=\left(\frac{r_i}{x-b_i}\right)^j\Big[1+\sum_{\ell\geqslant 1}\left(\frac{\pi}{b_i-x}\right)^\ell\left(\frac{T-x}{\pi}\right)^\ell\Big]^j$$

donc $$\left(\frac{r_i}{T-b_i}\right)^j\Bigg|_{D(x,\pi)}\in k^0+\frac{\pi}{b_i-x}\,k^0\left\langle\frac{T-x}{\pi}\right\rangle$$

donc $$\beta_{ij}\left(\frac{r_i}{T-b_i}\right)^j\Bigg|_{D(x,\pi)}\in k^0+\pi k^{00}\left\langle\frac{T-x}{\pi}\right\rangle.$$

On a aussi $$\sum_{j\geqslant 2}\alpha_{1j}\,T^j\Big|_{D(x,\pi)}\in k^0+\pi k^{00}\left\langle\frac{T-x}{\pi}\right\rangle,$$

par suite $$g\Big|_{D(x,\pi)}\in k^0+\pi\,\frac{T-x}{\pi}\left(\lambda+k^{00}\left\langle\frac{T-x}{\pi}\right\rangle\right),$$

avec $\lambda\in k^0-k^{00}$, donc φ_x est un isomorphisme de $\mathbb{B}^1_{k,g(x)}$ sur $\theta(R)_x$, φ est une immersion injective ouverte de $\theta(R)$ dans $\mathbb{B}^1_k$, donc φ_r est une immersion injective ouverte de R dans $\mathbb{B}^1_k$.

§3 - ESPACES ANALYTIQUES DE GENRE ZERO.

Nous étudions dans ce paragraphe les espaces analytiques connexes, réguliers, séparés, de dimension 1 et de genre 0. C'est essentiellement un travail de préparation au paragraphe suivant.

DEFINITION 3.1. Soient k un corps valué complet, algébriquement clos, R un k-espace affinoïde régulier, connexe, de dimension 1, de genre 0, $x_0 \in R$. Une partie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathcal{O}(R)^0$ est appelée une *x_0-base de* R s'il existe un isomorphisme φ, de R sur un ouvert affinoïde de $\mathbb{P}^1_k$ de la forme $\mathbb{P}^1_k - \dot{\bigcup}_{1\leqslant i\leqslant n} B(a_i, \pi_i)$, avec pour tout $i \leqslant n$,

$$e_i = \varphi^*(R)\left(\frac{\pi_i}{T-a_i}\right) \text{ et } \varphi(x_0) = \infty.$$

REMARQUE. Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout $x_0 \in R$, R admet une x_0-base. En effet, d'après les théorèmes 0.1 et 0.2, R est isomorphe à un ouvert affinoïde de $\mathbb{P}^1_k$, en composant éventuellement avec une transformation homographique de $\mathbb{P}^1_k$ (qui est un automorphisme de $\mathbb{P}^1_k$), on peut supposer que x_0 correspond à ∞.

PROPOSITION 3.1. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* R *un* k*-espace affinoïde connexe, régulier, de dimension* 1, *de genre* 0, $x_0 \in R$ *et* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *une* x_0*-base de* R. *Alors*

1) Tout $f \in \mathcal{O}(R)$ *s'écrit de façon unique sous la forme*

$$f = \alpha_0 + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j\geqslant 1} \alpha_{ij} e_i^j$$

où $\alpha_0 \in k$, $\alpha_{ij} \in k$, $\lim_{j\to\infty} \alpha_{ij} = 0$ *et*

$$\|f\|_{sp} = \max\{|\alpha_0|, |\alpha_{ij}| \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ j \geqslant 1\}$$

2) Si $\{d_1, \ldots, d_m\}$ *est une autre* x_0*-base de* R, *il existe une bijection* $\tau : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in k$ *tels que* $|\lambda_i| = 1$ *et* $e_i - \lambda_i d_{\tau(i)} \in \mathcal{O}(R)^{00}$.

Preuve. 1) C'est immédiat.
2) Soit $i \leqslant n$, $e_i \in \mathcal{O}(R)^0$ induit une immersion injective ouverte de R dans $\mathbb{B}^1_k$. D'après la proposition 2.3, e_i s'écrit sous la forme $e_i = \alpha_0 + \sum_{m\geqslant j\geqslant 1} \sum_{s\geqslant 1} \alpha_{js} d_j^s$, où $\alpha_0 \in k$, $\alpha_{js} \in k$ et pour un certain $i' \leqslant m$ on a $|\alpha_{js}| < |\alpha_{i',1}|$ si $(j,s) \neq (i',1)$. Comme $e_i(x_0) = d_j(x_0) = 0$, on a $\alpha_0 = 0$, d'autre part $\|e_i\|_{sp} = 1$ implique $|\alpha_{i',1}| = 1$, donc $e_i - \alpha_{i',1} d_{i'} \in \mathcal{O}(R)^{00}$. On pose alors $\tau(i) = i'$, $\lambda_i = \alpha_{i',1}$. Par symétrie, il existe $i'' \leqslant n$, $\mu_{i'} \in k^0 - k^{00}$ tels que $d_{i'} - \mu_{i'} e_{i''} \in \mathcal{O}(R)^{00}$, par suite $e_i - \lambda_i \mu_{i'} e_{i''} \in \mathcal{O}(R)^{00}$, donc $i'' = i$, donc τ est une bijection.

PROPOSITION 3.2. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension* 1 *sur* k *et non projectif (i.e.* X *n'est pas isomorphe à l'analytification d'une variété projective sur* k*). Alors tout ouvert analytique quasi-compact de* X *est affinoïde et est contenu dans un ouvert affinoïde connexe de* X.

Preuve. Soit U un ouvert analytique quasi-compact de X, soit U_1 une composante connexe de U (voir prop. et déf. 1.2), U_1 est quasi-compact. On sait que U_1 est soit affinoïde, soit projectif ([F,M] §2.2 prop.5). Supposons U_1 projectif, alors $U_1 \neq X$, il existe un ouvert analytique quasi-compact connexe V de X tel que $U_1 \subset V$ (prop. 1.4). On a deux cas :

α) V *projectif*. Il existe $f \in \mathcal{R}(V)-k$, sans pôle dans U_1, donc $f|_{U_1} \in \mathcal{O}(U_1)=k$. Ce qui implique que pour un certain $\lambda \in k$, $f-\lambda \in \mathcal{R}(V)$ a une infinité de zéros, c'est impossible.

β) V *affinoïde*. Pour tout $f \in \mathcal{O}(V)$, pour tout ouvert affinoïde R de U_1, on a $f|_R=(f|_{U_1})|_R \in k$, donc dimR=0, donc $\dim U_1=0$, c'est aussi impossible.

Par conséquent U_1 est affinoïde, les composantes connexes de U sont affinoïdes, il en est de même pour U. On peut conclure grâce à la proposition 1.4.

PROPOSITION 3.3. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension* 1 *et de genre* 0. *On suppose* X *non projectif. Alors* X *admet un recouvrement admissible* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *avec* $X_n \subset X_{n+1}$, X_n *affinoïde connexe.*

Preuve. Elle est inspirée par la démonstration de van der Put pour les ouverts analytiques connexes de $\mathbb{P}^1_k$.

On fixe un point $x_0 \in X$. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des ouverts affinoïdes connexes de X contenant x_0. Rappelons que la topologie de Grothendieck sur X est celle définie dans la proposition 1.5. Tout ouvert affinoïde de X est contenu dans un ouvert affinoïde contenant x_0 et, tout ouvert affinoïde contenant x_0 est contenu dans un ouvert affinoïde connexe contenant x_0 (prop.3.2), donc $\mathcal{F}$ est un recouvrement admissible de X.

Pour tout $R \in \mathcal{F}$, notons n(R) le cardinal d'une x_0-base de R. Le nombre n(R) ne dépend pas du choix de la x_0-base (prop.3.1).

Soit $\mathcal{F}^*$ l'ensemble des $R \in \mathcal{F}$ tels que pour tout $R' \in \mathcal{F}$ contenant R, $n(R') \geq n(R)$. Cette propriété équivaut à : pour tout isomorphisme $\varphi : R' \to \varphi(R') \subset \mathbb{P}^1_k$ avec $\varphi(x_0)=\infty$, on a $\varphi(R')= \mathbb{P}^1_k - \dot{\bigcup_i} B'_i$, $\varphi(R)= \mathbb{P}^1_k - \dot{\bigcup_j} B_j$, où chaque B_j contient au moins un B'_i.

Il est clair que $\mathscr{F}^*$ est un recouvrement admissible de X (il est défini par la propriété de minimalité de $n(R)$). On va montrer que l'on peut extraire de $\mathscr{F}^*$ un sous-recouvrement au plus dénombrable.

Soit $\mathscr{R}$ la relation binaire sur $\mathscr{F}^*$ définie par : $R_1\mathscr{R}R_2$ si et seulement si $n(R_1)=n(R_2)=n(R_1\cap R_2)$. Si $\varphi:R_1\cup R_2\to\varphi(R_1\cup R_2)\subset \mathbb{P}^1_k$ est un isomorphisme avec $\varphi(x_0)=\infty$, $\varphi(R_1)=\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup_i} B_{i,1}$, $\varphi(R_2)=\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup_j} B_{j,2}$,

comme R_1, $R_2\in\mathscr{F}$, on voit que $R_1\mathscr{R}R_2$ si et seulement si chaque $B_{i,1}$ rencontre un et un seul $B_{j,2}$. Par conséquent, $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{F}^*$.

α) Soient $R\in\mathscr{F}^*$, $[R]$ *sa classe d'équivalence pour* $\mathscr{R}$. *Alors il existe un sous-ensemble au plus dénombrable* $\mathscr{K}$ *de* $[R]$, *tel que tout élément de* $[R]$ *soit contenu dans un élément de* $\mathscr{K}$.

On fixe une x_0-base $\{e_1,\dots,e_n\}$ de R. Pour tout $R'\in[R]$ tel que $R'\supset R$ et toute x_0-base $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ de R', il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in k$, $h_1,\dots,h_n\in\mathscr{O}(R)^{00}$ tels que $|\lambda_i|=1$ et $e'_i|_R=\lambda_i(e_i+h_i)$ (aux numérotations près). On note $\tau(R')=(|\lambda_i|)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{R}^n$, $\tau(R')$ ne dépend pas du choix de la x_0-base $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ (prop.3.2) .

On voit facilement que si $R',R''\in[R]$, $R'\supset R$, $R''\supset R$, on a $R'\subset R''$ si et seulement si chaque coordonné de $\tau(R')$ est supérieure à la coordonnée correspondante de $\tau(R'')$. D'où l'existence de $\mathscr{K}$.

β) Montrons que $\mathscr{F}^*/\mathscr{R}$ *est au plus dénombrable.*

Pour tout $s\in\mathbb{N}$, on note $V_s=\{[R]\,|\,R\in\mathscr{F}^*,\ n(R)=s\}$. Considérons les notations sur $\mathscr{F}^*/\mathscr{R}$: $[R_1]\leq[R_2]$ s'il existe $R'_1\in[R_1]$, $R'_2\in[R_2]$ tels que $R'_1\subset R'_2$; $[R_1]<[R_2]$ si $[R_1]\leq[R_2]$ et $[R_1]\neq[R_2]$; $[R_1]<<[R_2]$ si $[R_1]<[R_2]$ et s'il n'existe pas de $[R_3]$ telle que $[R_1]<[R_3]<[R_2]$.

$β_1$) Pour $[R_0]$ *fixé, il y a au plus* $n=n(R_0)$ *classes* $[R]$ *telles que* $[R_0]<<[R]$.

Supposons qu'il existe $[R_1],[R_2],\dots,[R_{n+1}]$, n+1 classes distinctes telles que $[R_0]<<[R_i]$, $1\leq i\leq n+1$. On peut supposer $R_0\subset R_i$ pour tout $i\leq n+1$. Soit φ un isomorphisme de $\bigcup_{1\leq i\leq n+1} R_i$ sur un ouvert

affinoïde de $\mathbb{P}^1_k$ avec $\varphi(x_0)=\infty$. On a $\varphi(R_0)=\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup}_{1\leq j\leq n} B_j$ et pour $1\leq i\leq n+1$,

$\varphi(R_i)=\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup}_{1\leq j\leq n_i} B_{i,j}$. La relation $[R_0]<<[R_i]$ implique qu'il existe un

et un seul $j_i=\sigma(i)\leq n$ tel que $B_{\sigma(i)}$ contienne au moins deux disques ouverts $B_{i,j}$. On définit de cette façon une application σ de $\{1,2,\dots,n+1\}$ dans $\{1,2,\dots,n\}$. Soient $i\leq n+1$, $i'\leq n+1$, $i\neq i'$, on a $[R_0]\leq[R_i\cap R_{i'}]\leq[R_i]$ et $[R_0]\leq[R_i\cap R_{i'}]\leq[R_{i'}]$, comme $[R_i]\neq[R_{i'}]$, on a $[R_i\cap R_{i'}]<[R_i]$ ou $[R_i\cap R_{i'}]<[R_{i'}]$, or $[R_0]<<[R_i]$ et $[R_0]<<[R_{i'}]$, donc $[R_0]=[R_i\cap R_{i'}]$, donc $\sigma(i)\neq\sigma(i')$, σ est injective, c'est impossible.

β_2) *Soient* $s>1$, $[R]\in V_s$. *Alors il existe* $s'<s$, $[R']\in V_{s'}$ *tel que* $[R']<<[R]$.

En effet soit $[W_0]$ l'unique élément de V_1, on a $[W_0]<[R]$. Si l'on n'a pas $[W_0]<<[R]$, il existe $R''\in\mathscr{F}^*$ tel que $[W_0]<[R'']<[R]$, et on recommence avec R''. Comme $n(R)>n(R'')$, ce procédé doit s'arrêter au bout d'un nombre fini de fois, d'où le résultat.

On a card $V_1=1$. En utilisant β_1) et β_2), une simple récurrence montre que V_s est fini pour tout $s\geq 1$. Donc $\mathscr{F}^*/\mathscr{R}=\bigcup_{s\geq 1} V_s$ est au plus dénombrable.

Il résulte de α) et β) que X admet un recouvrement admissible affinoïde $\{W_n\}_{n\geq 1}$ avec W_n connexe et $x_0\in W_n$. Les ouverts affinoïdes $X_n=\bigcup_{1\leq i\leq n} W_i$ répondent à la question.

REMARQUE. Dans [Mo], on retrouve le même résultat pour les ouverts analytiques connexes de $\mathbb{P}^1_k$, mais la démonstration ne s'adapte pas au cas général.

DEFINITION 3.2. Soient X un espace analytique rigide, $r:X\to\overline{X}$ une réduction de X. On dit que $\overline{X}$ est *préstable* si les composantes irréductibles de $\overline{X}$ sont des courbes algébriques non-singulières, si elles sont en nombre au plus dénombrable et si les seules singularités de $\overline{X}$ sont des points doubles ordinaires.

PROPOSITION 3.4. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique de dimension* 1*, régulier, séparé, de genre* 0 *et connexe,* R_0 *un ouvert affinoïde connexe de* X. *Alors* X *admet un recouvrement pur* $\{R_n\}_{n\geq 0}$ *tel que la réduction associée* $\overline{X}$ *soit préstable, les composantes irréductibles de* $\overline{X}$ *sont des ouverts de* $\mathbb{P}^1_k$ *et le graphe d'intersection de* $\overline{X}$ *est un arbre.*

PREUVE. Dans [G,P] (théorème 1.4. p.130), on trouve une démonstration pour les ouverts analytiques connexes de $\mathbb{P}^1_k$. Comme tout ouvert affinoïde de X est isomorphe à un ouvert affinoïde de $\mathbb{P}^1_k$, compte tenu de la proposition 3.3, elle s'adapte sans difficulté à la situation présente.

§4 - STRUCTURE DES ESPACES ANALYTIQUES DE DIMENSION 1, REDUITS, IRREDUCTIBLES, SEPARES, DE GENRE FINI.

On entre dans le vif du sujet avec ce paragraphe. Soit X un espace analytique de dimension 1, de genre fini, soit R un ouvert affinoïde de X, de même genre que X. Alors X s'écrit comme $X=R \cup Y$, avec $g(Y)=0$, la structure de Y a été étudiée au paragraphe précédent (recouvrement admissible affinoïde dénombrable ; réduction préstable). La difficulté est de trouver un Y dont la structure analytique se prolonge bien à X, c'est à dire que Y admet un recouvrement admissible $\{Y_i\}_{i\in I}$ tel que $\{R,Y_i\}_{i\in I}$ soit un recouvrement admissible de X.

DEFINITION 4.1. Soit X un espace analytique, un sous-ensemble F de X est un *fermé analytique* si pour tout ouvert affinoïde R de X, $F\cap R$ est un fermé de Zariski de $R=\mathrm{Spm}\mathcal{O}(R)$. On dit que X est *irréductible* si X ne peut pas s'écrire comme réunion de deux fermés analytiques différents de X.

Soit R un espace affinoïde réduit. Alors R est irréductible si et seulement si $\mathcal{O}(R)$ est intègre.

PROPOSITION 4.1. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique réduit, irréductible, séparé, de dimension* 1*, non projectif. Alors tout ouvert analytique quasi-compact de* X *est affinoïde.*

PREUVE. Soient U un ouvert analytique quasi-compact de X, U' (resp.X') la normalisation de U (resp.X), U' est un ouvert analytique quasi-compact de X', X' est connexe, séparé, de dimension 1 et régulier, X' n'est pas projectif ([F,M] §4.3 prop.1.1). Donc d'après la proposition 3.2, U' est affinoïde, donc U est affinoïde ([F,M] §2.1 prop.4).

PROPOSITION 4.2. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique réduit, irréductible, séparé, de dimension* 1*, de genre fini,* R_0 *un ouvert affinoïde connexe de* X *de même genre que* X*. Alors tout ouvert affinoïde connexe de* X *contenant* R_0 *est irréductible et les points de* $X-R_0$ *sont réguliers.*

Preuve. α) *On suppose* X *projectif.*

On a $X=C^{an}$, où C est une courbe projective sur **k**. On sait que

$$g(C)=g(C')+\sum_{x\in C}\dim_k(\mathcal{O}'_{C,x}/\mathcal{O}_{C,x})$$

où C' est la normalisation de C, et g(C) (resp. g(C')) est le genre arithmétique de C (resp. C'), $\mathcal{O}'_{C,x}$ est la clôture intégrale de

$\mathcal{O}_{C,x}$ dans son corps de fractions. On a vu dans la démonstration de la proposition 1.9 que

$$\dim_k(\mathcal{O}'_{C,x}/\mathcal{O}_{C,x})=\dim_k(\mathcal{O}'_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x})$$

où $\mathcal{O}'_{X,x}$ est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans son anneau total de fractions. Il suit

$$(*)\qquad g(C)=g(C')+\sum_{x\in X}\dim_k(\mathcal{O}'_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x})$$

On a $(C')^{an}=(C^{an})'=X'\supset R'_0$, donc $g(R'_0)\leqslant g(C')$. On compare l'égalité (*) à la suivante (prop.1.9)

$$g(R_0)=g(R'_0)-n+1+\sum_{x\in R_0}\dim_k(\mathcal{O}'_{X,x}/\mathcal{O}_{X,x})$$

où n est le nombre de composantes irréductibles de R_0, comme $g(R_0)=g(C)$, on trouve $n=1$ et $X-R_0$ régulier.

β) On suppose X *non projectif.*

Soient $U_1,\ldots,U_n$ les composantes irréductibles de R_0. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des ouverts affinoïdes connexes de X contenant R_0. Tout $R\in\mathcal{F}$ a une unique composante irréductible F_R qui contient U_1. Si $R_1\in\mathcal{F}$, $R_2\in\mathcal{F}$ et $R_1\subset R_2$ alors $F_{R_1}\subset F_{R_2}$. Posons $F=\bigcup_{R\in\mathcal{F}}F_R$, montrons que F est un fermé analytique de X. Soient $R\in\mathcal{F}$, pour tout $R'\in\mathcal{F}$, on a $R\cap F_{R'}\subset R\cap F_{R\cup R'}$ ($R\cup R'$ est affinoïde), donc $R\cap F=\bigcup F_{R'}\cap R$, où la réunion est prise sur l'ensemble des $R'\in\mathcal{F}$ contenant R. Pour un tel R', $F_{R'}\cap R$ est une réunion de composantes irréuctibles de R. Donc $R\cap F$ est un fermé analytique de R. Comme $\mathcal{F}$ est un recouvrement admissible de X, F est un fermé analytique de X, donc F=X. Pour tout $i\leqslant n$, U_i est contenu dans un F_{R_i}, $R_i\in\mathcal{F}$. Soit $W=R_1\cup\ldots\cup R_n\in\mathcal{F}$, on a $R_0\subset F_W$. Soit Z une variété projective sur k, réduite, de dimension 1, telle que W soit ouvert affinoïde de Z^{an} et que $g(Z)=g(W)$, soit Z_1 la composante irréductible de Z qui contient F_W, alors R_0 est un ouvert affinoïde Z_1. Comme $g(Z_1)\leqslant g(Z)=g(W)=g(R_0)$, on a $g(R_0)=g(Z_1)$, donc d'après α), R_0 est irréductible.

Soit $x\in X-R_0$, alors il existe $R_1\in\mathcal{F}$ tel que $x\in R_1$. D'après ce que l'on vient de démontrer, R_1 est irréductible. Soit C_1 une courbe projective sur k telle que R_1 soit ouvert affinoïde de C_1^{an} et $g(R_1)=g(C_1)$, alors $x\in C_1-R_0$. D'après α), x est un point régulier.

Avant d'aborder le problème de réduction préstable nous faisons quelques études sur l'intersection d'un ouvert affinoïde avec la fibre formelle d'un point régulier ou double ordinaire.

PROPOSITION 4.3. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* C *une courbe projective sur* k, R_0 *un ouvert affinoïde de* C^{an}, *isomorphe à* $\mathbb{B}^1_k$=Spmk<T> *ou une couronne de rapport* $|\pi|$, $\{z\in k \mid |\pi|\leqslant|z|\leqslant 1\} \subseteq \mathbb{P}^1_k$, $r:R_0 \to \overline{R_0}^c$ *la réduction canonique de* R_0, R *un ouvert affinoïde connexe de* C^{an} *qui rencontre* R_0. *Alors ou bien il existe un ouvert affine non vide* V *de* $\overline{R_0}^c$ *tel que* $r^{-1}(V) \subset R$, *ou bien il existe* $p\in\overline{R_0}^c$ *tel que* $R \subset r^{-1}(p)$.

Preuve. Supposons $R_0=\{z\in k \mid |\pi|\leqslant|z|\leqslant 1\}\subseteq \mathbb{P}^1_k$, $\pi\in k$. Rappelons que les ouverts affinoïdes de R_0 sont de la forme $D-\dot{\bigcup}_{i\leqslant n} B_i$, où D est un disque fermé et les B_i des disques ouverts contenus dans D. Supposons que R ne contienne aucune partie formelle de R_0 (i.e. $R\not\supset r^{-1}(V)$ pour tout ouvert affine non vide V de $\overline{R_0}^c$), on voit alors facilement qu'il existe $p_1,\dots,p_n\in\overline{R_0}^c$, $R_1,\dots,R_n$ des ouverts affinoïdes de R_0 tels que $R\cap R_0\subseteq \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} R_i$ et $R_i\subseteq r^{-1}(p_i)$ pour tout $i\leqslant n$. Soient $\{R_0,\dots\}$ un recouvrement pur de C^{an} (voir prop.1.6), $\hat{r}:C^{an}\to\overline{C}$ la réduction associée à ce recouvrement, $W=\hat{r}^{-1}(\overline{C}-\{p_1,\dots,p_n\})$ est affinoïde ([G,P] p.139), on a donc

$$R=[\dot{\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}}(R_i\cap R\cap R_0)]\ \dot{\bigcup}\ [W\cap R]\ .$$

Comme R est connexe et $R\cap R_0\neq\emptyset$, il existe $i\leqslant n$ tel que $R=R_i\cap R\cap R_0$, d'où $R \subset r^{-1}(p_i)$.

Le cas où $R\simeq\mathbb{B}^1_k$ se traite de la même façon.

PROPOSITION 4.4. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* C *une variété projective réduite sur* k, *de dimension* 1, $r:C^{an}\to\overline{C}$ *une réduction analytique de* C^{an}, p *un point régulier de* $\overline{C}$, R *un ouvert affinoïde connexe de* C^{an} *tel que* $R\cap r^{-1}(p)\neq\emptyset$ *et* $R\not\subset r^{-1}(p)$. *Alors pour tout ouvert affine régulier connexe* V *de* $\overline{C}$, *contenant* p, *assez petit,* $f\in\mathcal{O}(r^{-1}(V))^0$ *tel que* $\overline{f}$ *soit un paramètre local en* p, *on a les propriétés suivantes:*

1) *Le morphisme* $\varphi_f:r^{-1}(V)\to\mathbb{B}^1_k$ *(voir déf.2.1) est un isormorphisme de* $r^{-1}(p)$ *sur* $\{z\in k^0 \mid |z|<1\}$.

2) *Il existe* $B_1,\dots,B_s$ *des disques ouverts de* $r^{-1}(p)$ *tels que* $R\cap r^{-1}(p)=r^{-1}(p)-\dot{\bigcup}_{1\leqslant i\leqslant s} B_i$. *En particulier, il existe* $\pi_0\in k^{00}$ *tel que* $\{x\in r^{-1}(p) \mid |f(x)|\geqslant|\pi_0|\} \subseteq R$.

3) *Il existe un ouvert affine non vide* U *de* V *tel que* $r^{-1}(U)\subset R$.

4) *Soit* $\pi\in k^{00}-\{0\}$, *alors* $W=\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|\geq|\pi|\}$ *est un ouvert affinoïde connexe de* $r^{-1}(V)$, $\overline{W}^c$ *a deux composantes irréductibles* Z_1, Z_2 *respectivement isomorphes à* V *et* $\mathbb{A}^1_{\bar{k}}=\mathrm{Spm}\bar{k}[T]$, $Z_1\cap Z_2$ *est réduit à un point double ordinaire de* $\overline{W}^c$.

Preuve. 1) Voir [B,L] proposition 2.2 ou [F] proposition 3, p.332.

2) Soit $(\pi_n)_{n\geq1}$ une suite d'éléments de k telle que pour tout $n\geq1$, $0<|\pi_n|<|\pi_{n+1}|<1$ et $\lim_{n\to\infty}|\pi_n|=1$. On pose

$D_n=\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|\leq|\pi_n|\}$. On peut supposer $R\cap D_1\neq\emptyset$ puisque

$R\cap r^{-1}(p)\neq\emptyset$. D'après la proposition 4.3, R contient une partie formelle de D_n, donc il existe des disques ouverts $B_{n,1},\ldots,B_{n,s_n}$

deux à deux disjoints, un ouvert affinoïde R_n de D_n tels que $R\cap D_n=[D_n-\dot{\bigcup}_{1\leq i\leq s_n} B_{n,i}]\ \dot{\bigcup}\ R_n$ (le signe $\dot{\bigcup}$ veut dire "réunion disjointe"). On a donc

$$R=[R\cap r^{-1}(\overline{C}-\{p\})]\bigcup[R\cap r^{-1}(V)]$$

$$=[R\cap r^{-1}(\overline{C}-\{p\})]\bigcup[R\cap\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|\geq|\pi_n|\}]\bigcup[R\cap D_n]$$

$$=[[R\cap r^{-1}(\overline{C}-\{p\})]\bigcup[R\cap\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|\geq|\pi_n|\}]\bigcup[D_n-\bigcup_i B_{n,i}]]\ \dot{\bigcup}\ R_n .$$

Comme $r^{-1}(\overline{C}-\{p\})$ est affinoïde ([G,P] p.139) et R est connexe, on a $R_n=\emptyset$, donc

$$R\cap D_n=D_n-\dot{\bigcup_{1\leq i\leq s_n}} B_{n,i}$$

Soient $a_{n,i}$, $\pi_{n,i}\in k^{00}$ tels que $B_{n,i}=\{x\in r^{-1}(p) \mid |f(x)-a_{n,i}|<|\pi_{n,i}|\}$. On considère $h_{n,i}=\dfrac{\pi_{n,i}}{f-a_{n,i}}$, comme $R\cap B_{n,i}=\emptyset$, $h_{n,i}\in\mathcal{O}(r^{-1}(V)\cap R)^0$ et $\overline{h}_{n,i}$ prend une infinité de valeurs dans $\bar{k}$ (comme fonction régulière sur $\overline{r^{-1}(V)\cap R^c}$), donc $\overline{h}_{n,i}$ est non-constante sur une composante irréductible $L_{n,i}$ de $\overline{r^{-1}(V)\cap R^c}$. Soient $m>n\geq1$, on a

$$h_{n,i}\,h_{m,j}+\frac{\pi_{n,i}}{a_{n,i}-a_{m,j}}\,h_{m,j}+\frac{\pi_{m,j}}{a_{m,j}-a_{n,i}}\,h_{n,i}=0 .$$

Si $B_{m,j}\cap D_n=\emptyset$, alors $\left|\dfrac{\pi_{n,i}}{a_{n,i}-a_{m,j}}\right|<1$, il résulte de l'égalité ci-dessus que

$$\left[\overline{\left(\frac{\pi_{m,j}}{a_{m,j}-a_{n,i}}\right)}+\overline{h}_{n,i}\right]\overline{h}_{m,j}=0$$

donc $L_{n,i}\neq L_{m,j}$. Comme $\overline{r^{-1}(V)\cap R^c}$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, il existe $n_0\geq 1$ tel que pour tout $m\geq 0$, pour tout $j\leq s_m$, on ait $D_{n_0}\cap B_{m,j}\neq\emptyset$, donc $D_m-(R\cap D_m)\subseteq D_{n_0}$, d'où

$$R\cap r^{-1}(p)=r^{-1}(p)-\bigcup_{1\leq i\leq s_{n_0}} B_{n_0,i}$$

3) Montrons d'abord que $r(R)\cap V$ n'est pas un nombre fini de points. Supposons le contraire, $r(R)\cap V=\{p_1,\dots,p_m\}$, donc $R\cap r^{-1}(p_i)\neq\emptyset$, $R\cap r^{-1}(V)\not\subset r^{-1}(p_i)$. On a $R\cap r^{-1}(V)=\bigcup_{1\leq i\leq m} R\cap r^{-1}(p_i)$ et la description de $R\cap r^{-1}(p_i)$ par 2) montre clairement que le membre à droite n'est pas affinoïde, comme $R\cap r^{-1}(V)$ est affinoïde, c'est impossible.

Comme $R\cap r^{-1}(V)$ est un ouvert affinoïde de $r^{-1}(V)$, on a $R\cap r^{-1}(V)=R_1\cup\dots\cup R_n$ où R_i est une partie rationnelle de $r^{-1}(V)$ ([B,G,R] corollaire 3, p.309). On peut supposer que $r(R_1)\cap V$ n'est pas un nombre fini de points. On a $R_1=\{x\in r^{-1}(V)\mid |f_i(x)|\leq|f_0(x)|,\ 0\leq i\leq t\}$ où $f_i\in\mathcal{O}(r^{-1}(V))$ et $\mathcal{O}(r^{-1}(V))=\sum_{0\leq i\leq t} f_i\mathcal{O}(r^{-1}(V))$.

Montrons que $\|f_0\|\geq\|f_i\|$. Supposons en effet qu'il existe $j\neq 0$ et $\|f_0\|<\|f_j\|$, alors $R_1\subset F=\{x\in r^{-1}(V)\mid |f_j(x)|<\|f_j\|\}$. Comme $f_j\neq 0$ et V est irréductible, il suit que $r(F)$ est un fermé de dimension zéro, ce qui contredit que $r(R_1)$ n'est pas un nombre fini de points.

On peut supposer que $\|f_0\|=1$, soit U l'ouvert prinicipal $D(\overline{f}_0)$ de V, on a $r^{-1}(U)\subset R_1\subset R$.

4) Posons $R_1=\{x\in W\mid |f(x)|=1\}$, $R_2=\{x\in W\mid |f(x)|=|\pi|\}$, ce sont des parties formelles de W et on a des isomorphismes naturels $\overline{R_1}^c\to V-\{p\}$, $\overline{R_2}^c\to\mathbb{A}^1_k-\{0\}$. Soit Z_1 (resp. Z_2) la composante irréductible de $\overline{W}^c$ qui contient $\overline{R_1}^c$ (resp. $\overline{R_2}^c$), montrons que $\overline{W}^c=Z_1\cup Z_2$. Supposons le contraire, il existe alors $g\in\mathcal{O}(W)^0$ tel que l'ouvert affine $D(\overline{g})=\{y\in\overline{W}^c\mid \overline{g}(y)\neq 0\}$ de $\overline{W}^c$ soit non vide et contenu dans $\overline{W}^c-(Z_1\cup Z_2)$, donc $r^{-1}(D(\overline{g}))$ est contenu dans $\{x\in r^{-1}(V)\mid 1>|f(x)|>|\pi|\}$ qui est isomorphe (par φ_f) à $\{z\in k\mid |1|>|z|>|\pi|\}\subseteq\mathbb{P}^1_k$. La fonction $g\in\mathcal{O}(W)^0$ est holomorphe sur $\{x\in r^{-1}(V)\mid 1>|f(x)|>|\pi|\}$ et $|g|$ atteint sa borne supérieure dans cet ensemble. Il suit de la description des fonctions holomorphes sur une couronne quelconque (voir début §2) que g est constante sur cet ensemble, donc $r^{-1}(D(\overline{g}))=\{x\in r^{-1}(p)\mid 1>|f(x)|>|\pi|\}$, c'est impossible car $r^{-1}(D(\overline{g}))$ est affinoïde. D'où $\overline{W}^c=Z_1\cup Z_2$.

Montrons que W est connexe. Soit W_0 une composante connexe de W qui rencontre $\{x\in r^{-1}(V) \mid 1>|f(x)|>|\pi|\}$, ce dernier étant un ouvert analytique connexe de W, W_0 le contient, il suit que $\|f|_{W_0}\|_{sp}=\|(\pi f^{-1})|_{W_0}\|_{sp}=1$, donc $W_0\cap R_1\neq\emptyset$, $W_0\cap R_2\neq\emptyset$ et $W=W_0\cup R_1\cup R_2$ est connexe. Il en résulte aussi que $\overline{W}^c$ est connexe.

On a l'égalité suivante (voir par exemple [G.P] p.158) :

$$g(\overline{W}^c)=g(Z_1')+g(Z_2')-1+\sum_{y\in Y}\dim_{k}(\mathcal{O}'_{Y,y}/\mathcal{O}_{Y,y})$$

où Z_i' est la normalisation de Z_i, $Y=\overline{W}^c$, $\mathcal{O}'_{Y,y}$ est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{Y,y}$ dans son anneau total de fractions. La courbe Z_1 contient un ouvert régulier $\overline{R_1}^c\simeq V-\{p\}$, donc $g(Z_1')=g(V-\{p\})=g(V)$, de même $g(Z_2')=g(\overline{R_2}^c)=0$. On a enfin $W\subset r^{-1}(V)$, donc $g(\overline{W}^c)\leqslant g(V)$.

Par conséquent, $\overline{W}^c$ a une seule singularité q, c'est un point double ordinaire et Z_1,Z_2 sont régulières. L'injection canonique $W\to r^{-1}(V)$ induit un morphisme $\theta : Z_1\to V$ qui envoie q sur p, $\theta|_{Z_1-\{q\}}$ est un isomorphe de $Z_1-\{q\}=\overline{R_1}^c$ sur $V-\{p\}$, donc θ est un isomorphisme. Enfin $Z_2=\overline{R_2}^c \,\dot{\cup}\, \{q\} \simeq \mathbb{A}^1_{k}$.

THEOREME 1. *Soient k un corps valué complet, algébriquement clos, X un espace analytique sur k, réduit, irréductible, séparé, de dimension 1 et de genre fini. Alors X admet une réduction analytique $X\to\overline{X}$ telle qu'il existe un ouvert affine V de $\overline{X}$ avec $\overline{X}-V$ préstable. Si en plus X est régulier, alors il admet une réduction préstable.*

Preuve. Si X est projectif et régulier, X admet une réduction préstable (voir [B,L] théorème 7.1, [P1] théorème 1.9). La démonstration étant de nature locale, on a le même résultat lorsque X est affinoïde et régulier. Dans la suite, on suppose X non projectif.

Soit R_0 un ouvert affinoïde connexe de X, de genre $g(X)$. En vertu de la proposition 4.2, tout ouvert affinoïde connexe de X contenant R_0 est irréductible. Soient $s_0:R_0\to\overline{R_0}$ la réduction de R_0 selon un recouvrement pur $\mathcal{U}_0=\{U_1,\ldots,U_\ell\}$, R un ouvert affinoïde connexe de X contenant R_0. Il existe une courbe projective C sur k de genre $g(X)$, un isomorphisme φ de R sur un ouvert affinoïde de C^{an}. Soit $r_0:\varphi(R_0)\to\overline{\varphi(R_0)}$ la réduction de $\varphi(R_0)$ selon le recouvrement pur $\varphi(\mathcal{U}_0)=\{\varphi(U_1),\ldots,\varphi(U_2)\}$, d'après le corollaire 1.6.1, C^{an} admet une réduction analytique $\hat{r}_0:C^{an}\to\overline{C}$ telle que $\overline{C}=\widehat{\overline{\varphi(R_0)}}$ et $\hat{r}_0|_{\varphi(R_0)}=r_0$.

α) Il existe un ouvert affinoïde connexe R_0 *de* X, *de genre* $g(X)$, *une réduction analytique* $s_0 : R_0 \to \overline{R_0}$ *tels que pour tout quadruplet* $(R, \varphi, C, \hat{r}_0)$ *décrit comme ci-dessus, les points de* $\hat{r}_0(\varphi(R)) - r_0(\varphi(R_0))$ *soient sur des composantes irréductibles rationnelles (i.e. birationnelles à* $\mathbb{P}^1_k$*) de* $\overline{C}$. *Si* R_0 *est régulier,* $s_0 : R_0 \to \overline{R_0}$ *est préstable.*

Soit (R_0, s_0) un couple qui ne vérifie pas cette propriété. Si R_0 est régulier, on peut supposer $s_0 : R_0 \to \overline{R_0}$ préstable. Soit $(R, \varphi, C, \hat{r}_0)$ un quadruplet tel qu'il existe $p \in [\hat{r}_0(\varphi(R)) - r_0(\varphi(R_0))] \cap Y_1$, où Y_1 est une composante irréductible non-rationnelle de $\hat{r}_0(C^{an})$. Le point p étant régulier, il existe un ouvert affine connexe régulier V de $\hat{r}_0(C)$, $f \in \mathcal{O}(r^{-1}(V))^0$ tels que $p \in V \subset Y_1$, $V - \{p\} \subset r_0(\varphi(R_0))$ et que $\overline{f}$ soit un paramètre local en p. D'après la proposition 4.4.2), il existe $\pi \in k^{00} - \{0\}$ tel que $W = \{x \in r^{-1}(V) \mid |f(x)| \geqslant |\pi|\}$ soit contenu dans $\varphi(R)$, donc $W_1 = \varphi(R_0) \cup W$ est un ouvert affinoïde de C^{an}, contenu dans $\varphi(R)$ et est connexe (W et $\varphi(R_0)$ sont connexes et $\varphi(R_0) \cap W \neq \emptyset$). Il suit que $R_1 = \varphi^{-1}(W_1)$ est un ouvert affinoïde connexe de X, de genre $g(X)$ car $R_1 \supset R_0$. Considérons le recouvrement pur $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_0 \cup \{\varphi^{-1}(W)\}$ de R_1, où $\mathcal{U}_0$ est un recouvrement pur qui définit la réduction $s_0 : R_0 \to \overline{R_0}$, si $\overline{R_0}$ est préstable, $s_1 : R_1 \to \overline{R_1}$ (la réduction selon le recouvrement pur $\mathcal{U}_1$) aussi.

A $\overline{R_0}$ on peut associer $n_{s_0}(R_0)$ le nombre de points de $\hat{\overline{R_0}} - \overline{R_0}$ qui sont sur des composantes irréductibles non rationnelles de $\hat{\overline{R_0}}$. On définit de la même façon le nombre $n_{s_1}(R_1)$. Il suit de la description de $\overline{W}^c$ par la proposition 4.4 que $n_{s_1}(R_1) = n_{s_0}(R_0) - 1$. Comme ces nombres sont positifs, au bout d'un nombre fini de telles opérations, on trouve un couple (R_0, s_0) qui vérifie les propriétés demandées. On le fixera dans la suite.

β) **Fin de la démonstration.**

Soient F l'ensemble des points de $\hat{\overline{R_0}} - \overline{R_0}$ qui sont sur les composantes irréductibles rationnelles $Z_1, \ldots, Z_m$ de $\hat{\overline{R_0}}$, et pour tout $i \leqslant m$, V_i un ouvert affine régulier connexe de $\hat{\overline{R_0}}$ tel que $F \cap Z_i \subset V_i \subset Z_i$. Pour tout quadruplet $(R, \varphi, C, \hat{r}_0)$ décrit au début de la démonstration, φ induit un isomorphisme $\Psi : \overline{R_0} \to \overline{\varphi(R_0)}$ tel que $\Psi \circ s_0 = r_0 \circ \varphi$, Ψ se prolonge en un isomorphisme $\hat{\Psi} : \hat{\overline{R_0}} \to \overline{C} = \hat{r}_0(C^{an})$. D'après le choix de (R_0, s_0) (voir α)),

$$\hat{r}_0(\varphi(R)) \subset \overline{\varphi(R_0)} \bigcup \hat{\Psi}(F) = \hat{\Psi}(\overline{R_0} \cup F),$$

donc

$$(*)\qquad R=R_0\cup[\bigcup_{1\leq i\leq m}\varphi^{-1}(\varphi(R)\cap\hat{r}_0^{-1}(\hat{\Psi}(V_i)))]$$

On pose $X_i=\bigcup\varphi^{-1}(\varphi(R)\cap\hat{r}_0^{-1}(\hat{\Psi}(V_i)))$ pour $i\leq m$, où la réunion est prise sur tous les quadruplets possibles $(R,\varphi,C,\hat{r}_0)$ décrits au début de la démonstration.

Si U est un ouvert affinoïde de X contenu dans X_i, il existe un ouvert affinoïde connexe R de X tel que $U\cup R_0\subset R$, on a alors $U\subset\varphi^{-1}(\varphi(R)\cap\hat{r}_0^{-1}(\hat{\Psi}(V_i)))$, donc les ouverts affinoïdes $\varphi^{-1}(\varphi(R)\cap\hat{r}_0^{-1}(\hat{\Psi}(V_i)))$ forment, lorsque $(R,\varphi,C,\hat{r}_0)$ varie, un recouvrement admissible de X_i. En plus, ils sont connexes (voir proposition 4.4), réguliers, de genre 0 et leur intersection est non vide (ils contiennent tous $s_0^{-1}(V_i-F\cap Z_i)$), donc X_i est connexe, régulier, de genre 0 et séparé car X est séparé. D'après la proposition 3.4, X_i admet un recouvrement pur $\mathcal{U}_i=\{R_{n,i}\}_{n\geq0}$ tel que la réduction associée soit préstable et que $R_{0,i}=s_0^{-1}(V_i-F\cap Z_i)$.

Soit $\mathcal{U}_0$ un recouvrement pur de R_0 qui définit la réduction $s_0 : R_0\to\overline{R_0}$, en utilisant l'égalité (*), on voit que $\mathcal{U}=\mathcal{U}_0\cup\mathcal{U}_1\cup..\mathcal{U}_m$ est un recouvrement admissible affinoïde de X. En plus, c'est un recouvrement pur de X car pour tout (i,j) avec $i\neq j$, on a $R_{n,i}\cap R_{n',j}=\emptyset$ pour tous $n,n'\geq0$ et $R_{n,i}\cap R_0=R_{n,i}\cap R_0\cap X_i=R_{n,i}\cap R_{0,i}$ est une partie formelle de $(R_0,\mathcal{U}_0)$ et de $(X_i,\mathcal{U}_i)$. Il est clair que la réduction de X selon le recouvrement pur $\mathcal{U}$ répond à la question.

COROLLAIRE 1.1. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* C *une courbe projective non-singulière sur* k. *Alors tout ouvert analytique connexe de* C^{an} *admet une réduction préstable.*

Preuve. En effet, tout ouvert analytique connexe de C^{an} est connexe et régulier, donc irréductible ([F] p.241), d'où le résultat.

COROLLAIRE 1.2. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique réduit, connexe, séparé, de dimension* 1 *et de genre fini. Alors* X *admet un recouvrement admissible affinoïde dénombrable.*

Preuve. α) Si X est irréductible, c'est une conséquence immédiate du théorème 1.

β) Cas général. Soient X_i, $i\in I$ les composantes irréductibles de X ([F], p.223).

β_1) *L'espace* X_i *est séparé, de genre fini.*

Comme X est séparé, ses fermés analytiques aussi, donc X_i est séparé. Soit U un ouvert affinoïde de X_i, alors U est fermé analytique d'un ouvert affinoïde R de X. Soit Z une variété projective réduite, de dimension 1 telle que R soit un ouvert affinoïde de Z^{an} et $g(R)=g(Z)$. Alors U est ouvert affinoïde d'un fermé (de Zariski) Z_1 de Z, donc $g(U)\leqslant g(Z_1)\leqslant g(Z)=g(R)\leqslant g(X)$, donc $g(X_i)\leqslant g(X)$, X_i est de genre fini.

β_2) ***L'espace X a au plus un nombre dénombrable de composantes irréductibles.***

Soit $i\in I$, X_i admet un recouvrement admissible affinoïde $\{X_{n,i}\}_{n>0}$. Il existe $R_{n,i}$ ouvert affinoïde de X tel que $X_{n,i}=R_{n,i}\cap X_i$. Les points de $X_{n,i}\cap \bigcup_{j\in I,\, j\neq i} X_j$ sont des points singuliers de $R_{n,i}$ donc en nombre fini, par suite X_i rencontre un nombre au plus dénombrable de composantes irréductibles de X.

Fixons $i_0\in I$. Soit $n\in\mathbb{N}$, on considère l'ensemble $\mathscr{D}_n$ des $i\in I$ tels qu'il existe $i_1,i_2,\dots,i_n\in I$ avec $X_{i_0}\cap X_{i_1}\neq\emptyset$, $X_{i_1}\cap X_{i_2}\neq\emptyset,\dots, X_{i_n}\cap X_i\neq\emptyset$. D'après ce que l'on vient de voir, $\mathscr{D}_n$ est au plus dénombrable. Montrons que $I=\bigcup_{n>0}\mathscr{D}_n$. Soit $i\in I$, il existe un ouvert affinoïde connexe R de X qui rencontre X_{i_0} et X_i, X_{i_0} (resp. X_i) contient une composante irréductible R_{i_0} (resp. R_i) de R. Comme R est connexe, il existe $R_{i_1}, R_{i_2},\dots,R_{i_n}$ des composantes irréductibles de R telles que $R_{i_0}\cap R_{i_1}\neq\emptyset$, $R_{i_1}\cap R_{i_2}\neq\emptyset,\dots, R_{i_n}\cap R_i\neq\emptyset$. Chaque R_{i_j} étant contenu dans une composante irréductible X_{i_s}, on a $i\in\mathscr{D}_n$. Donc I est au plus dénombrable.

β_3) ***L'espace analytique X a un recouvrement admissible affinoïde au plus dénombrable.***

Soit $\{R_j\}_{j\in J}$ un recouvrement admissible affinoïde de X. Pour tout $i\in I$, X_i a deux recouvrements admissibles affinoïdes : $\{R_j\cap X_i \mid j\in J\}$ et $\{X_{n,i} \mid n\geqslant 1\}$. Il existe donc $J_i\subset J$, au plus dénombrables tel que $\{R_j\cap X_i \mid j\in J_i\}$ soit un recouvrement admissible affinoïde de X_i (i.e. tout ouvert affinoïde de X_i est contenu dans une réunion finie de $R_j\cap X_i$, $j\in J_i$. Voir prop.1.5).

Soit $L=\bigcup_{i\in I} J_i$, c'est un ensemble au plus dénombrable. Montrons que $\{R_\ell\}_{\ell\in L}$ est un recouvrement admissible de X. Soit R un ouvert affinoïde de X, R est contenu dans la réunion d'un nombre fini de composantes irréductibles $X_{i_1},\dots,X_{i_n}$, et chaque $R\cap X_{i_j}$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini de R_ℓ, $\ell\in J_{i_j}$, donc R est contenu dans la réunion d'un nombre fini de R_ℓ, $\ell\in L$, donc $\{R_\ell\}_{\ell\in L}$ est un recouvrement admissible de X.

COROLLAIRE 1.3. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* Z *une variété algébrique sur* k*, réduite, séparée, de dimension* 1*. Alors tout ouvert analytique connexe de* Z^{an} *admet un recouvrement admissible affinoïde au plus dénombrable.*

Preuve. Soit $\hat{Z}$ le complété projectif de Z, alors X est un ouvert analytique connexe de $\hat{Z}^{an}$, donc X est de genre fini (prop.1.7), d'où le résultat d'après le corollaire précédent.

PROPOSITION 4.5. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique irréductible, réduit, séparé, de dimension* 1 *et de genre fini. On suppose* X *non-projectif. Alors* X *est un espace de Stein. En particulier, pour tout faisceau cohérent* $\mathcal{F}$ *sur* X*, on a*

a) $\mathcal{F}(X)\mathcal{O}_{X,x}=\mathcal{F}_x$ *pour tout* $x\in X$,

b) $H^q(X,\mathcal{F})=0$ *pour tout* $q\geq 1$.

Preuve. *a) Soit* R_0 *un ouvert affinoïde de* X*. Alors il existe un ouvert affinoïde connexe* R *de* X*, contenant* R_0*, tel que pour tout ouvert affinoïde connexe* W *de* X *qui le contient,* $\mathcal{O}(W)$ *soit dense dans* $\mathcal{O}(R)$.

Soit R un ouvert affinoïde connexe de X, de genre g(X), contenant R_0, choisi de sorte que le nombre de points de $\hat{\overline{R}}^c-\overline{R}^c$ soit minimal. Montrons que R répond à la question.

Soit W un ouvert affinoïde connexe de X qui contient R. On a $g(W)=g(R)=g(X)$, donc W est irréductible (prop.4.2). Il existe une courbe projective C sur k, de genre g(X), tel que W soit ouvert affinoïde de C^{an}. Soit $r : C^{an}\to\overline{C}$ une réduction analytique de C^{an} telle que $r|_R$ soit la réduction canonique de R et que $\overline{R}^c$ soit dense dans $\overline{C}$, soient $p_1,\dots,p_n$ les point de $\overline{C}-\overline{R}^c$, ils sont réguliers puisque $g(\overline{C})=g(\overline{R}^c)$. Pour tout $i\leq n$, on a $r^{-1}(p_i)\not\subset W$. En effet, supposons par exemple que $r^{-1}(p_1)\subset W$, alors $W_1=r^{-1}(\overline{C}-\{p_2,\dots,p_n\})$ est un ouvert affinoïde connexe de W, donc de X, et $g(W_1)=g(\overline{C})=g(X)$. Soit $s : C^{an}\to s(C)$ une réduction analytique de C^{an} telle que $s|_{W_1}$ soit la réduction canonique de W_1 et que $\overline{W_1}^c$ soit dense dans $s(C)$. Comme $g(W_1)=g(C)$, on a $s(C)$ isomorphe à $\hat{\overline{W_1}}^c$, d'après l'hypothèse sur R, on a $s(C)-\hat{\overline{W_1}}^c=\{q_1,\ldots,q_m\}$ avec $m\geqslant n$. On a l'égalité

$$\bigcup_{2\leqslant i\leqslant n}^{\cdot} r^{-1}(p_i) = \bigcup_{1\leqslant j\leqslant m}^{\cdot} s^{-1}(q_j) \qquad (=C-W_1),$$

or on voit facilement que $\dot\bigcup_{2\leqslant i\leqslant n} r^{-1}(p_i)$ a n-1 composantes connexes (qui sont les $r^{-1}(p_i)$, $2\leqslant i\leqslant n$) tandis que $\dot\bigcup_{1\leqslant j\leqslant m} s^{-1}(q_j)$ en a m (qui sont les $s^{-1}(q_j)$), ce qui est absurde puisque $m>n-1$. Donc $r^{-1}(p_i)\not\subset W$.

Pour tout $i\leqslant n$, soit q_i un point de $r^{-1}(p_i)-W$. On sait qu'il existe $f\in\mathcal{A}(C)$ tel que

$$R=\{x\in C \mid f\in\mathcal{O}_{X,x},\ |f(x)|\leqslant 1\}$$

([F,M] théorème 1). En fait, comme les points $p_1,\ldots,p_n$ sont réguliers, on peut supposer f régulière sur $C-\{q_1,\ldots,q_n\}$, donc $f|_W\in\mathcal{O}(W)$ et R est un domaine de Weierstrass de W ([B,G,R] déf.2, p.281), $\mathcal{O}(W)$ est donc dense dans $\mathcal{O}(R)$.

β) Les propriétés a) *et* b) *sont vraies.*

L'espace X admet un recouvrement admissible affinoïde $\{R_n\}_{n\geqslant 0}$ (corollaire 1.2). Soit X_0 un ouvert affinoïde connexe de X, contenant R_0, tel que pour tout ouvert affinoïde connexe W de X qui le contient, $\mathcal{O}(W)$ soit dense dans $\mathcal{O}(X_0)$ (voir α)), soit X_1 un ouvert affinoïde connexe de X contenant $X_0\cup R_0$ qui vérifie la même propriété que X_0, ainsi de suite, on construit une suite d'ouverts affinoïdes connexes $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de X telle que $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ soit un recouvrement admissible de X, $X_n\subseteq X_{n+1}$, et que $\mathcal{O}(X_{n+1})$ soit dense dans $\mathcal{O}(X_n)$. Il suit que X est un "quasi-espace de Stein" ([Ki] definition 2.3), d'où les propriétés a) et b)([Ki] Satz 2.4).

Dans un espace analytique, l'intersection de deux ouverts analytiques n'est pas connexe en général. Cependant, dans un espace analytique de dimension 1, de genre fini, séparé et régulier, on peut majorer le nombre de composantes connexes de l'intersection de deux ouverts analytiques connexes en fonction de leurs genres. C'est l'objet de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.6. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension* 1 *et de genre fini,* Ω_1, Ω_2 *deux ouverts analytiques connexes* *de X, d'intersection non vide. Alors* $\Omega_1 \cap \Omega_2$ *a un nombre fini de composantes connexes, il y en a au plus* $g(X)+1-\max\{g(\Omega_1),g(\Omega_2)\}$. *En particulier, si* $g(\Omega_1)=g(X)$, $\Omega_1 \cap \Omega_2$ *est connexe.*

Preuve. *α) On suppose X projectif,* Ω_1, Ω_2 *affinoides.*

Pour $i=1,2$, soit $\mathcal{U}_i$ un recouvrement pur de Ω_i tel que la réduction associée soit préstable, X admet un recouvrement pur $\mathcal{V}_i$ tel que $(\Omega_i,\mathcal{U}_i)$ soit un ouvert formel de $(X,\mathcal{V}_i)$ (voir corollaire 1.6.1). Soit $\mathcal{V}=\mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2$, c'est un recouvrement pur de X et la réduction associée $r : X\to Y=r(X)$ est préstable.

On pose $U=r(\Omega_1)$, $V=r(\Omega_2)$, ce sont des ouverts connexes de Y.

Soit W un ouvert quelconque de Y. On définit un graphe $G(W)$ de la façon suivante, l'ensemble des sommets $S(W)$ est formé des composantes irréductibles de Y qui rencontrent W, un arête a-b est un point d'intersection appartenant à W des composantes irréductibles a et b. On note $A(W)$ l'ensemble des arêtes de $G(W)$. Clairement l'ouvert W est connexe si et seulement si le graphe $G(W)$ est connexe. Si W_1 est un ouvert de W, alors $G(W_1)$ est un sous-graphe de $G(W)$. Si W est connexe, comme Y est préstable, on a

$$(*) \qquad g(W)-1=\sum_{Y_i\in S(W)}(g(Y_i)-1)+\mathrm{card}\ A(W)$$

Supposons d'abord $U\cup V$ dense dans Y, alors on a $S(Y)=S(U)\cup S(V)$. Soient $\ell=\mathrm{card}\ (S(Y)-S(U))$, c le nombre de composantes connexes de $U\cap V$. Considérons le sous-graphe $(S(V),A(U\cap V))$ de $G(V)$, il a $\ell+c$ composantes connexes. Comme $G(V)$ est connexe, il faut ajouter à $A(U\cap V)$ au moins $\ell+c-1$ arêtes pour retrouver $A(V)$, autrement dit on a $\mathrm{card}(A(V)-A(U\cap V))\geq\ell+c-1$, donc

$$\mathrm{card}(A(Y)-A(U)\geq\ell+c-1.$$

En écrivant la formule (*) pour Y et U, on trouve

$$(**) \qquad c\leq g(Y)+1-g(U).$$

Si $U\cup V$ n'est pas dense dans Y, soit Z son adhérence dans Y, Z est préstable. Comme $\Omega_1\cup\Omega_2$ est connexe, $U\cup V$ aussi, donc Z est connexe. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que $c\leq g(Z)+1-g(U)$, où c est le nombre de composantes connexes de $U\cap V$. Comme $g(Z)\leq g(Y)$, l'inégalité (**) reste vraie.

On a $g(\Omega_1)=g(U)$ (corollaire 1.6.1), $\Omega_1\cap\Omega_2$ a c composantes connexes et $g(X)=g(Y)$ (théorème 0.2), d'où $c\leq g(X)+1-g(\Omega_1)$. Par symétrie, on obtient

$$c\leq g(X)+1-\max\{g(\Omega_1),g(\Omega_2)\} .$$

β) Cas général.

On peut supposer $\Omega_1 \neq X$, $\Omega_2 \neq X$. Notons

$$n = g(X) + 1 - \max\{g(\Omega_1), g(\Omega_2)\}$$

et supposons que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ a au moins $n+1$ composantes connexes. Soient alors $L_1, \ldots, L_{n+1}$ $n+1$ composantes connexes de $\Omega_1 \cap \Omega_2$, soit R_i un ouvert affinoide connexe non vide de L_i. Il existe un ouvert analytique quasi-compact connexe S_1 de Ω_1 qui contient $R_1 \cup \ldots \cup R_{n+1}$ (proposition 1.4), et qui est de genre $g(\Omega_1)$. Si X est projectif, comme $S_1 \neq X$, S_1 est affinoide (théorème 0.4). Si X n'est pas projectif, S_1 est aussi affinoide (proposition 3.2). De même il existe un ouvert affinoide connexe S_2 de Ω_2, de genre $g(\Omega_2)$, qui contient $R_1 \cup \ldots \cup R_{n+1}$.

L'espace $S_1 \cup S_2$ est ouvert affinoide connexe d'une courbe projective non-singulière C de genre g avec $g \leq g(X)$. En effet, si X est projectif, il n'y a rien à démontrer, si X n'est pas projectif, $S_1 \cup S_2$ est un espace affinoïde de genre $g = g(S_1 \cup S_2) \leq g(X)$ (proposition 3.2) et on applique le théorème 0.1. D'après α), $S_1 \cap S_2$ a au plus $m = g+1-\max\{g(S_1), g(S_2)\}$ composantes connexes. Comme $g \leq g(X)$, $g(S_1) = g(\Omega_1)$, $g(S_2) = g(\Omega_2)$, ona $m \leq n$. Comme $R_1 \cup \ldots \cup R_{n+1} \subset S_1 \cap S_2$, on a par exemple R_1 et R_2 contenus dans une même composante connexe S_0 de $S_1 \cap S_2$, S_0 est un ouvert analytique connexe de $\Omega_1 \cap \Omega_2$ qui rencontre L_1 et L_2, donc $S_0 \subset L_1$ et $S_0 \subset L_2$, c'est absurde, d'où la proposition.

§5 - IMMERSION DANS UNE VARIETE PROJECTIVE DE DIMENSION 1.

Ce paragraphe traite le sujet principal de ce travail. On sait (proposition 1.7) que dans une variété projective réduite de dimension 1, tout ouvert analytique est séparé et de genre fini. On peut se demander si la réciproque est vraie. Le théorème 3 donne une réponse positive lorsque le corps de base est maximalement complet. Malheureusement ce résultat ne reste pas valable dans le cas général sans ajouter d'hypothèses supplémentaires (proposition 5.5). Un résultat sans hypothèse sur le corps de base est le théorème 4 qui caractérise les ouverts analytiques qui sont le complémentaire d'une partie compacte dans une courbe projective.

THEOREME 2. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* C *une courbe projective sur* k, X *un ouvert analytique irréductible de* C^{an}. *Alors* X *est isomorphe à un ouvert analytique d'une courbe projective (analytifiée) de genre arithmétique* $g(X)$.

Preuve. On peut supposer que les points de $C^{an}-X$ sont réguliers. En effet, $\mathcal{O}_{C^{an},x}$ régulier équivaut à $\mathcal{O}_{C,x}$ régulier ([B.G.R.] proposition 8, p 301 et [F] théorème 1, p 248), X est un ouvert analytique de C' (la normalisation de C aux points de $C_{sing}\cap(C-X)$), où C_{sing} est l'ensemble des points singuliers de C, les points de $(C')^{an}-X$ sont réguliers. On supposera donc $C^{an}-X$ régulier.

Soit R_0 un ouvert affinoïde connexe de X, de genre $g(X)$. Alors $X-R_0$ est régulier (proposition 4.2), donc $C^{an}-R_0$ est régulier. Il suit que C^{an} admet un recouvrement pur $\{R_0,S\}$ avec S régulier (proposition 1.6). L'espace affinoïde S admet un recouvrement pur $\mathcal{U}$ tel que la réduction associée soit préstable et que $\{R_0\}\cup\mathcal{U}$ soit un recouvrement pur de C^{an}. On note $r:C^{an}\to\overline{C}$ la réduction de C^{an} selon ce recouvrement pur.

α) *Soit* $q\in\overline{S}=r(S)$ *un point double ordinaire, on va construire une variété projective* Z_q *qui a une réduction analytique isomorphe à la normalisation de* $\overline{C}$ *au point* q *et qui "contient"* C *(voir la signification précise dans* α_3*)).*

Soit V un ouvert affine connexe de $\overline{S}$ qui contient q et tel que $V-\{q\}$ soit régulier, V a deux composantes irréductibles V_1,V_2. En prenant V assez petit, il existe $f\in\mathcal{O}(r^{-1}(V))^0,\pi\in k^{00}-\{0\}$ tels que $\|f\|_{sp}=\|\pi f^{-1}\|_{sp}=1$ et que l'homomorphisme $\psi:k\langle T\rangle\to\mathcal{O}(r^{-1}(V))$ défini par $\psi(T)=f$ induise un morphisme $\sigma:r^{-1}(V)\to\mathbb{B}^1_k$ qui est un isomorphisme de $r^{-1}(q)$ sur $\{z\in k^0\mid|\pi|<|z|<1\}$ ([B,L] proposition 2.3). On a $\sigma(x)=f(x)$ pour tout $x\in r^{-1}(V)$. Pour fixer les idées, on suppose $\overline{f}|_{V_1}\neq 0$.

$\alpha 1$) *Construction de* $Z_q=Z_q(\pi_1,\pi_2)$, *où* $\pi_1,\pi_2\in k$ *sont tels que* $|\pi|<|\pi_2|<|\pi_1|<1$.

On pose

$$D_1=\{z\in k \mid |z|\leqslant|\pi_1|\} \subset \mathbb{P}^1_k,$$

$$D_2=\{z\in k \mid |z|\geqslant|\pi_2|\}\cup\{\infty\} \subset \mathbb{P}^1_k,$$

$$W_0=r^{-1}(\overline{C}-\{q\})\cup\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|\geqslant|\pi_1| \text{ ou } |f(x)|\leqslant|\pi_2|\}.$$

L'ouvert analytique W_0 est quasi-compact, différent de C^{an}, donc affinoïde (théorème 0.4). On recolle les espaces affinoïdes W_0, D_1, D_2 par les isomorphismes

$$W_0\supset\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|=|\pi_1|\} \overset{g}{\simeq} \{z\in k \mid |z|=|\pi_1|\}\subset D_1,$$

$$W_0\supset\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|=|\pi_2|\} \overset{g}{\simeq} \{z\in k \mid |z|=|\pi_2|\}\subset D_2,$$

et on note Z_q l'espace analytique ainsi obtenu. On note $\psi_0:W_0 \to Z_q$, $\psi_1:D_1 \to Z_q$, $\psi_2:D_2 \to Z_q$ les morphismes injections canoniques.

α2) L'espace Z_q admet une réduction isomorphe à la normalisation de $\overline{C}$ en q et Z_q est projectif.

Soient $W_{0,1}=\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|\geqslant|\pi_1|\}$ et $W_1=\psi_0(W_0,1)\cup\psi_1(D_1)$ (Ψ_0,ψ_1,D_1 sont définis dans α1)), il existe $f_1\in\mathcal{O}(W_1)^0$ tel que

$$\psi_0^\#(\psi_0(W_{0,1}))(f_1|_{\psi_0(W_{0,1})})=f|_{W_{0,1}}$$

et

$$\psi_1^\#(\psi_1(D_1))(f_1|_{\psi_1(D_1)})=T$$

où $T\in\mathcal{O}(D_1)$ est tel que $\mathcal{O}(D_1)=k\langle\pi_1^{-1}T\rangle$. Il suit que

$$\psi_0(r^{-1}(V_1-\{q\}))=\{x\in W_1 \mid |f_1(x)|=1\}$$

et le morphisme $\varphi_{f_1}:W_1 \to \mathbb{B}^1_k$ (voir définition 2.1) induit un isomorphisme de $\{x\in W_1 \mid |f_1(x)|<1\}$ sur $\{z\in k^0 \mid |z|<1\}\subset\mathbb{B}^1_k$. Par conséquent

$$\overline{W}_1^c=\overline{\psi_0(r^{-1}(V_1-\{q\}))^c} \,\dot{\bigcup}\, \{q_1\}$$

avec q_1 régulier (la fibre formelle en q_1 est isomorphe à $\{z\in k^0 \mid |z|<1\}$, donc q_1 est régulier).

Soient $W_{0,1}=\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|\leqslant|\pi_2|\}$ et $W_2=\psi_0(W_{0,2})\cup\psi_2(D_2)$. Par le même raisonnement que pour W_1, on a

$$\overline{W}_2^c=\overline{\psi_0(r^{-1}(V_2-\{q\}))^c} \,\dot{\bigcup}\, \{q_2\}$$

avec q_2 régulier. Soient $U_1,\ldots, U_n$ des ouverts affines de $\overline{C}-\{q\}$

tels que $\overline{C}-\{q\}=U_1U...UU_n$. Alors $\{\psi_0(r^{-1}(U_i)),W_1,W_2 \mid 1\leq i\leq n\}$ est un recouvrement pur de Z_q. Soit $\overline{Z}_q$ la réduction de Z_q selon ce recouvrement pur, clairement $\overline{Z}_q-\{q_1,q_2\}$ est isomorphe à $\overline{C}-\{q\}$. Comme q_1,q_2 sont réguliers, cela prouve que $\overline{Z}_q$ est isomorphe à la normalisation de $\overline{C}$ en q. Il suit que $\overline{Z}_q$ est projective, donc Z_q est projectif ([G,P] théorème p 139).

α3) *Soient $\pi_1,\pi_2\in k$, $\lambda\in\mathbb{R}$ tels que $|\pi|<|\pi_1|<\lambda<|\pi_2|<1$. Alors on peut définir une application θ_λ: $C \to Z_q$ telle que pour tout ouvert affinoïde R de C^{an} vérifiant la propriété*

(*) *Il existe $\pi_1',\pi_2'\in k$, tels que $|\pi_2|<|\pi_2'|\leq\lambda<|\pi_1'|<|\pi_1|$ et* $R\cap\{x\in r^{-1}(V) \mid |\pi_2'|<|f(x)|<|\pi_1'|\}=\emptyset$,

θ_λ induise un isomorphisme de R sur $\theta_\lambda(R)$ et que pour tout ouvert affinoïde W de Z_q contenu dans $\theta_\lambda(C)$, $\theta_\lambda^{-1}(W)$ vérifie (*) pour un certain couple $(\pi_1',\pi_2')\in k^2$.

On définit θ_λ par

$$\theta_\lambda(x)=\begin{cases}\psi_0(x) & \text{si } x\in W_0\\ \psi_1(\sigma(x)) & \text{si } x\in r^{-1}(q) \text{ et } |\pi_1|>|f(x)|>\lambda\\ \psi_2(\sigma(x)) & \text{si } x\in r^{-1}(q) \text{ et } |\pi_2|<|f(x)|\leq\lambda.\end{cases}$$

Remarquons que pour tout $x\in r^{-1}(V)$ tel que $|f(x)|=|\pi_1|$ (resp. $|f(x)|=|\pi_2|$), on a $\theta_\lambda(x)=\psi_1(\sigma(x))$ (resp. $\theta_\lambda(x)=\psi_2(\sigma(x))$), θ_λ est clairement injective.

Soit R un ouvert affinoïde de C^{an} qui vérifie la propriété (*). Posons $R_1=R\cap W_0$, $R_2=R\cap\{x\in r^{-1}(V) \mid |\pi_1'|\leq|f(x)|\leq|\pi_1|\}$, $R_3=R\cap\{x\in r^{-1}(V) \mid |\pi_2|\leq|f(x)|\leq|\pi_2'|\}$. Le recouvrement affinoïde $\{R_1,R_2,R_3\}$ de R est un recouvrement admissible. Comme $\theta_\lambda|_{R_1}=\psi_0|_{R_1}$,

$\theta_\lambda|_{R_2}=\psi_1\circ\sigma|_{R_2}$, $\theta_\lambda|_{R_3}=\psi_2\circ\sigma|_{R_3}$, θ_λ induit un isomorphisme de R_1,R_2,R_3 sur leurs images respectives, donc θ_λ induit un isomorphisme de R sur $\theta_\lambda(R)$.

Inversement, si W est un ouvert affinoïde de Z_q contenu dans $\theta_\lambda(C)$, il existe π_1', $\pi_2'\in k$ tels que $|\pi_2|<|\pi_2'|\leq\lambda<|\pi_1'|<|\pi_1|$,

$$W\cap\psi_1(D_1)\subset\{z\in D_1 \mid |z|\geq|\pi_1'|\} \text{ et } W\cap\psi_2(D_2)\subset\{z\in D_2 \mid |z|\leq|\pi_2'|\}.$$

On a donc $\theta_\lambda^{-1}(W) \subset W_0\cup\{x\in r^{-1}(V) \mid |f(x)|\leq|\pi_2'| \text{ ou } |f(x)|\geq|\pi_1'|\}$, ce dernier étant un ouvert affinoïde vérifiant (*), θ_λ restreinte à cet affinoïde induit un isomorphisme, donc $\theta_\lambda^{-1}(W)$ est un ouvert affinoïde de C^{an} et il vérifie (*).

β) *Soit R un ouvert affinoïde connexe de C^{an} tel que $R_0\subset R$, $R\not\subset r^{-1}(q)$ et $R\cap r^{-1}(q)\neq\emptyset$. Alors R est de l'un des deux types suivants :*

I) Il existe un ouvert affine dense V' *de* V *tel que* $r^{-1}(V')\subset R$ *et* $R\cap r^{-1}(q)=r^{-1}(q)-\dot{\bigcup}_{1\leq i\leq m} B_i$ *où les* B_i *sont des disques ouverts de* $r^{-1}(q)$ *(identifié à* $\{z\in k^0 \mid |\pi|<|z|<1\}$ *par* σ*, voir* α*)).*

II) Il existe $\alpha,\beta\in k$ *tels que* $|\pi|\leq|\alpha|<|\beta|\leq 1$ *et* $R\cap r^{-1}(q)=\{z\in k^0 \mid |\beta|\leq|z|<1$ *ou* $|\pi|<|z|\leq|\alpha|\}-\dot{\bigcup}_{1\leq i\leq m} B_i$*, où les* B_i *sont des disques ouverts de* $r^{-1}(q)$*. On note dans ce cas* I_R *l'intervalle* $[|\alpha|,|\beta|]$ *dans* $\mathbb{R}$*.*

Supposons d'abord que pour tout $\alpha\in k$ tel que $|\pi|<|\alpha|<1$, on ait $R\cap\{z\in k^0 \mid |z|=|\alpha|\}=\emptyset$. Par un raisonnement analogue à celui de la proposition 4.4.2), on a $R\cap r^{-1}(q)=r^{-1}(q)-\dot{\bigcup}_{1\leq i\leq n} B_i$ où les B_i sont des disques ouverts de $r^{-1}(q)$ (identifié à $\{z\in k^0 \mid |\pi|<|z|<1\}$), il suit que $\|f|_{r^{-1}(V)\cap R}\|_{sp}=1$ (f est définie dans α)), donc $r^{-1}(V_1-\{q\})\cap R\neq\emptyset$, de même $r^{-1}(V_2-\{q\})\cap R\neq\emptyset$. D'après la proposition 4.4.3), il existe V_1' (resp. V_2') ouvert affine non vide de V_1 (resp. V_2) tel que $r^{-1}(V_1')\subset R$ (resp. $r^{-1}(V_2')\subset R$), l'ouvert affine $V'=V_1'\cup V_2'$ est dense dans V et on a $r^{-1}(V')\subset R$.

Supposons maintenant qu'il existe $\alpha_0\in k$ tel que $|\pi|<|\alpha_0|<1$ et $R\cap\{z\in k^0 \mid |z|=|\alpha_0|\}=\emptyset$. En regardant l'intersection de R avec $\{z\in k^0 \mid |\alpha'|\leq|z|\leq|\alpha_0|\}$ où $\alpha'\in k$ vérifie $|\pi|<|\alpha'|<|\alpha_0|$, on voit qu'il existe $\pi_2\in k$ tel que $|\pi|<|\pi_2|<|\alpha_0|$ et $R\cap\{z\in k \mid |\pi_2|<|z|\leq|\alpha_0|\}=\emptyset$. De même il existe $\pi_1\in k$ tel que $|\alpha_0|<|\pi_1|<1$ et $R\cap\{z\in k^0 \mid |\alpha_0|\leq|z|<|\pi_1|\}=\emptyset$. Il suit que

$$R\cap\{z\in k^0 \mid |\pi_2|<|z|<|\pi_1|\}=\emptyset.$$

Considérons alors la variété projective réduite $Z_q=Z_q(\pi_1,\pi_2)$ et θ_{α_0} définies dans α), d'après α_3), R est isomorphe à $\theta_{\alpha_0}(R)$. L'étude de $R\cap r^{-1}(q)$ se ramène donc à celle de $\theta_{\alpha_0}(R)\cap s^{-1}(q_1)$ et de $\theta_{\alpha_0}(R)\cap s^{-1}(q_2)$, où $s:Z_q\to\overline{Z}_q$ est la réduction de Z_q définie dans α_2), q_1, q_2 sont des points réguliers de $\overline{Z}_q$ définis dans α_2). En vertu de la proposition 4.4.2), on voit facilement que $R\cap r^{-1}(q)$ est du type décrit dans II.

γ) *Supposons* $g(X)<g(C)$*. Alors il existe* $q\in(\overline{C}-\overline{R}_0^c)\cap\overline{C}_{sing}$ *(c'est donc un point double ordinaire de* $\overline{C}$*) tel que tout ouvert affinoïde connexe* R *de* X *soit du type* II *(voir* β*)).*

Supposons le contraire. Soit $F=(\overline{C}-\overline{R}_0^c)\cap\overline{C}_{sing}$, par la construction de $\overline{C}$, les points de F sont des points doubles ordinaires de $\overline{C}$. Donc pour tout $q\in F$, il existe, d'après notre hypothèse, un ouvert affinoïde connexe R_q de X tel que $R_q\cap r^{-1}(q)$ soit du type I, donc il existe un ouvert affine V_q de $\overline{C}$ contenant q tel que

$r^{-1}(V_q-\{q\})\subset R_q$. Considérons $R_\infty=R_0\cup[\bigcup_{q\in F}(R\cap r^{-1}(V_q))]$, c'est un ouvert

affinoïde de C^{an}, contenu dans X. Soit $r_\infty:C^{an}\to Z$ la réduction de C^{an} selon un recouvrement pur $\{R_\infty,.\}$ tel que $\overline{R}_\infty^c$ soit dense dans Z (voir la proposition 1.6). Soient $p_1,\dots,p_n$ les points de $Z-\overline{R}_\infty^c$, les ouverts analytiques $r_\infty^{-1}(p_1),\dots,r_\infty^{-1}(p_n)$ sont connexes ([B2] Satz 6.1) il est alors facile de voir que ce sont les composantes connexes de $r_\infty^{-1}(Z-\overline{R}_\infty^c)$. D'autre part, par la définition de R_∞, $r_\infty^{-1}(Z-\overline{R}_\infty^c)=C-R_\infty$ est une réunion finie disjointe d'ouverts analytiques isomorphes à un disque ouvert, il est aussi facile de voir que ses composantes connexes sont ces ouverts analytiques isomorphes à un disque ouvert. Il suit que pour tout $i\leq n$, $r_\infty^{-1}(p_i)$ est isomorphe à un disque ouvert, donc p_i est un point régulier de Z ([B,L] proposition 2.2), donc

$\hat{\overline{R}}_\infty^c=Z$ et $g(R_\infty)=g(C)$ contraire à l'hypothèse $g(X)<g(C)$.

δ) *Supposons* $g(X)<g(C)$. *Alors il existe une courbe projective* C_1 *sur* k *telle que* X *soit ouvert analytique de* C_1^{an}, $C_1^{an}-X$ *est régulier,* C_1^{an} *admet un recouvrement pur* $\mathcal{V}=\{R_0,S_1,\dots,S_m\}$ *tel que* $\overline{S}_i^c$ *soit préstable et que la réduction de* C_1^{an} *selon* $\mathcal{V}$ *ait strictement moins de singularités que* $\overline{C}$.

Soit q un point double ordinaire défini par l'énoncé de γ). Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des ouverts affinoïdes connexes de X contenant R_0, soient $R_1,R_2\in\mathcal{R}$, alors on a $I_{R_1}\cap I_{R_2}=I_{R_1\cup R_2}$, où I_R a été défini

dans β)II). Donc toute intersection d'un nombre fini de I_R est non vide, comme ce sont des ensembles fermés de l'intervalle [0,1], on a $\bigcap_{R\in\mathcal{R}} I_R\neq\emptyset$. Soit $\lambda\in\bigcap_{R\in\mathcal{R}} I_R\subset[|\pi|,1]$.

δ1) *Supposons* $1>\lambda>|\pi|$. *Alors* δ) *est vraie.*

Soient $\pi_1,\pi_2\in k$ tels que $|\pi|<|\pi_2|<\lambda<|\pi_1|<1$. Considérons $Z_q=Z_q(\pi_1,\pi_2)$ et $\theta_\lambda:C\to Z_q$ définies dans α). On peut supposer par exemple que pour tout $R\in\mathcal{R}$, $I_R=[|\alpha|,|\beta|]$ avec $\lambda\neq|\beta|$, θ_λ induit donc un isomorphisme de R sur $\theta_\lambda(R)$ (voir α3)). Soit C_q la composante connexe de Z_q qui contient $\psi_0(R_0)$, alors $\theta_\lambda(R)\subset C_q$ pour tout $R\in\mathcal{R}$, comme X est non projectif (sinon $X=C^{an}$), $\mathcal{R}$ est un recouvrement admissible de X (proposition 4.1), donc $\theta_\lambda(X)\subset C_q$, donc θ_λ induit un isomorphisme de X sur l'ouvert analytique $\theta_\lambda(X)$ de C_q (voir α3)).

Soit $\mathcal{U}_1$ le recouvrement pur de Z_q qui définit la réduction $Z_q\to\overline{Z}_q$ (voir α2)), alors $\mathcal{V}=\mathcal{U}_1\cap C_q$ est un recouvrement pur de C_q et la réduction $\overline{C}_q$ de C_q selon $\mathcal{V}$ est une composante connexe de $\overline{Z}_q$, ce dernier ayant strictement moins de singularités que $\overline{C}$, il en est de même pour $\overline{C}_q$. Clairement, $\mathcal{V}$ est formé d'affinoïdes $R_0, S_1, \ldots, S_m$ (R_0 est fixé au début de la démonstration du théorème) avec $\overline{S}_i^c$ préstable et S_i régulier. Comme R_0 est irréductible (proposition 4.2), C_q a un recouvrement admissible par des affinoïdes irréductibles, comme il est connexe, il est irréductibde. L'espace C_q est une composante connexe de Z_q, donc C_q est projectif, $C_q = C_1^{an}$, C_1 est irréductible, réduit car C_q est réduit ([F] théorème 1, p 248, [B,G,R] proposition 8, p 301), c'est donc une courbe projective.

$\delta 2$) *Supposons* $\lambda=1$. *Alors* δ) *est vraie.*

Pour tout ouvert affinoïde connexe R de X contenant R_0, on a donc $I_R = [|\alpha|, 1]$ pour un certain $\alpha \in k$. Soient $\pi_1, \pi_2 \in k$ tels que $|\pi| < |\pi_2| < |\pi_1| < 1$, considérons $Z_q = Z_q(\pi_1, \pi_2)$. Soit $\theta : C \to Z_q$ l'application définie par

$$\theta(x) = \begin{cases} \Psi_0(x) & \text{si } x \in W_0 \\ \Psi_1(\sigma(x)) & \text{si } x \in r^{-1}(q) \text{ et } |f(x)| \leq |\pi_1|. \end{cases}$$

(pour la signification de $f, \sigma, \Psi_0, \Psi_1$ et W_0 voir α)). Soit C_q la composante connexe de Z_q qui contient $\psi_0(R_0)$. Par des raisonnements analogues à ceux de $\alpha 3$) et $\delta 1$), on voit que X est isomorphe à un ouvert analytique de C_q, que $C_q = C_1^{an}$, avec C_1 courbe projective, et que C_q vérifie bien les propriétés énoncées dans δ).

$\delta 3$) *Si* $\lambda = |\pi|$. *Alors* δ) *est vraie.*

On raisonne de la même manière que dans $\delta 2$).

ε) ***Fin de la démonstration.***

Si $g(X) = g(C)$, il n'y a rien à démontrer. Si $g(X) < g(C)$, soit $\overline{C}$ la réduction de C^{an} décrite au début de la démonstration, d'après δ), X est ouvert analytique d'une courbe projective (analytifiée) C_1 qui admet une réduction $\overline{C}_1$ ayant strictement moins de singularités que $\overline{C}$. Si $g(X) = g(C_1)$, c'est fini, sinon la description de C_1 par δ) permet de recommencer l'opération avec C_1. Comme $\overline{C}$ n'a qu'un nombre fini de singularités, on aboutit au résultat au bout d'un nombre fini de telles opérations.

COROLLAIRE 2.1. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* Z *une variété projective, réduite, de dimension* 1 *sur* k, X *un ouvert analytique connexe de* Z^{an}. *Alors* X *est isomorphe à un ouvert analytique d'une variété projective (analytifiée) réduite, de dimension* 1 *sur* k, *de genre* $g(X)$.

Preuve. Soit S l'ensemble des points singuliers de X, c'est un ensemble fini car Z^{an} n'a qu'un nombre fini de points singuliers. Il suit que X n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles $F_1,\dots,F_n$.

α) ***Soit F une composante irréductible de X. Alors F (muni de la structure analytique réduite induite) est ouvert analytique d'une courbe projective.***

Soit R un ouvert affinoïde de X contenant S. D'après le corollaire 1.6.3, il existe un ouvert affinoïde W de Z^{an} tel que $Z^{an}=R\cup W$ et $W\cap S=\emptyset$.

Comme $W\cap S=\emptyset$, $R\cap F\cap W=R\cap(F\cap W)$ est un ouvert affinoïde de F qui ne rencontre pas S, c'est donc un ouvert affinoïde de X, donc de W. On recolle les espaces affinoïdes $R\cap F$ et W sur $R\cap F\cap W$, et on obtient un espace analytique U séparé, quasi-compact, réduit de dimension 1. D'après le corollaire 1.6.3, U est ouvert analytique d'une variété projective C réduite, de dimension 1. On voit alors que F est ouvert analytique de C. Soit C_1 la composante irréductible de C qui contient F, alors F est ouvert analytique de la courble projective C_1.

β) ***Fin de la démonstration.***

D'après α), F_i est ouvert analytique d'une courbe projective C_i, d'après le théorème 2, on peut supposer $g(F_i)=g(C_i)$.

Soit R un ouvert affinoïde de X contenant S. D'après le corollaire 1.6.2, il existe un ouvert affinoïde R_i de C_i tel que $C_i=(R\cap F_i)\cup R_i$ et $R_i\cap F_i\cap S=\emptyset$. Par un raisonnement analogue à celui de α), on montre en recollant les espaces affinoïdes $R,R_1,R_2,\dots,R_n$ sur les intersections $R\cap R_1,\dots,R\cap R_n$, que X est ouvert analytique d'une variété projective réduite Z de dimension 1, les composantes irréductibles de Z sont $C_1,\dots,C_n$.

Soit W_i un ouvert affinoïde connexe de F_i, de genre $g(F_i)$, W_i est irréductible (proposition 4.2) et on peut supposer $R\cap F_i\subset W_i$. Comme $(W_i\cap R_i)\cap S=\emptyset$, $W_i\cap R_i$ est un ouvert affinoïde de X, donc $W=\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} W_i=R\bigcup\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}[W_i\cap R_i]$ est un ouvert analytique quasi-compact de X qui ne contient aucune composante irréductible de Z, il est donc affinoïde (théorème 0.4), ses composantes irréductibles sont $W_1,\dots,W_n$. Comme $S\subset W$ et X est connexe, on a W connexe. En plus, $g(W_i)=g(C_i)$ implique $g(W_i')=g(C_i')$ où "$'$" signifie "normalisation" (voir la démonstration de la proposition 1.9, énoncé β)). D'après la proposition 1.9, on a

$$(*)\qquad g(W)-1=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}(g(C_i')-1)+\sum_{p\in S}\dim_k(\mathcal{O}'_{W,p}/\mathcal{O}_{W,p})$$

où $\mathcal{O}'_{W,p}$ est la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{W,p}$ dans son anneau total de fractions. D'autre part, C_i-W_i est régulier (proposition 4.2), donc Z-W est régulier, en plus Z est connexe, donc en comparant l'égalité (*) à la suivante

$$g(Z)-1=\sum_{1\leq i\leq n}(g(C'_i)-1)+\sum_{p\in S}\dim_k(\mathcal{O}'_{Z,p}/\mathcal{O}_{Z,p})$$

(l'égalité est vraie lorsque l'on considère les Z, C_i comme variétés algébriques projectives, elle reste vraie après analytification grâce au théorème GAGA et à l'énoncé (α) de la démonstration de la proposition 1.9), on obtient $g(Z)=g(W)$, donc $g(X)\geq g(Z)$, donc $g(X)=g(Z)$.

Nous allons maintenant nous intéresser au problème de l'immersion d'un espace analytique réduit irréductible, séparé, de dimension 1 et de genre fini dans une courbe projective. Le cas général se ramène moyennant le théorème 1, au cas où l'espace est de genre 0.

NOTATION 5.1. Soient k un corps valué complet, algébriquement clos, R un k-espace affinoïde connexe régulier, de dimension 1 et de genre 0, $x_0\in R$, W un ouvert affinoïde connexe de R contant x_0.

1) *On note* par $|W/R|$ le nombre

$$\mathrm{Sup}\{\|f|_W\|_{sp}\,\big|\,f\in\mathcal{O}(R)^0,\ f|_W \text{ non inversible}\}.$$

2) Soient $D=\{d_1,\dots,d_m\}$ une x_0-base de W (voir définition 3.1), $E=\{e_1,\dots,e_n\}$ une x_0-base de R. *On note* $\tau(E,D)$ l'application $E\to D$ définie de la façon suivante : pour tout $i\leq n$, $e_i|_W$ induit une immersion injective ouverte de W dans $\mathbb{B}^1_k$ (voir définition et notation 2.1), donc il existe un unique $j\leq m$, et un $\lambda\in k$ tels que $e_i|_W\in\lambda(d_j+\mathcal{O}(W)^{00})$ (voir proposition 3.1), on associe alors d_j à e_i.

3) Soit $\varphi:R\to\mathbb{P}^1_k$ un isomorphisme de R sur un ouvert affinoïde $\mathbb{P}^1_k-\bigcup_{1\leq i\leq n}B(a_i,\pi_i)$ de $\mathbb{P}^1_k$ tel que $\varphi(x_0)=\infty$ et $e_i=\varphi^*(R)\left(\dfrac{\pi_i}{T-a_i}\right)$ pour tout $i\leq n$. *On note* $\langle e_i|e_j\rangle$ le nombre $\left|\dfrac{\pi_i\pi_j}{(a_i-a_j)^2}\right|$ si $i\neq j$ et 1 si $i=j$.

REMARQUE. *L'interprétation de* $\tau(E,D)$. On identifie R à $\mathbb{P}^1_k-\bigcup_{1\leq i\leq n}B(a_i,\pi_i)$, x_0 à ∞ et e_i à $\dfrac{\pi_i}{T-a_i}$. On a $W=\mathbb{P}^1_k-\bigcup_{1\leq j\leq m'}B(b_j,r_j)$, $\left\{\dfrac{r_j}{T-b_j}\,\Big|\,1\leq j\leq m'\right\}$ est une x_0-base de W. D'après la proposition 3.1,

$m'=m$ et il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in k^0-k^{00}$ tels que (quitte à changer de numérotation) $d_j\in\lambda_j(\frac{r_j}{T-b_j}+\mathcal{O}(W)^{00})$. Alors $\tau(E,D)(e_i)=d_j$ si et seulement si $B(a_i,\pi_i)\subset B(b_j,r_j)$.

PROPOSITION 5.1. *Avec les hypothèses de la Notation 5.1, on a les propriétés suivantes:*

1) *Soient* S *un ouvert affinoïde connexe de* R *contenant* W, $H=\{h_1,\dots,h_\ell\}$ *une* x_0*-base de* S. *Alors* $|W/R|\leqslant|W/S|\,|S/R|$, $|W/R|=\max\{\|e_i|_W\|_{sp}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ *et* $\tau(E,D)=\tau(H,D)\circ\tau(E,H)$.

2) *Les nombres* $\langle e_i|e_j\rangle$, $i\leqslant n$, $j\leqslant n$, *ne dépendent pas du choix de l'isomorphisme* φ.

Preuve. 1) Soit $f\in\mathcal{O}(R)^0$ tel que $f|_W$ soit non inversible. On a $f=\lambda+\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j\geqslant 1}\lambda_{ij}e_i^j=\lambda+g$ avec $\lambda\in k,\lambda_{ij}\in k$ et $\lim_{j\to\infty}\lambda_{ij}=0$. Comme $f|_W$ est non inversible, on a $|\lambda|\leqslant\|g|_W\|_{sp}$ donc

$$\|f|_W\|_{sp}\leqslant\|g|_W\|_{sp}\leqslant\max\{\|e_i|_W\|_{sp}\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}.$$

D'autre part e_i est un élément de $\mathcal{O}(R)^0$ qui s'annule dans W, donc $\|e_i|_W\|_{sp}\leqslant|W/R|$, d'où $|W/R|=\max\{\|e_i|_W\|_{sp}\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$.

Soit $i\leqslant n$, $e_i\in\mathcal{O}(R)^0$ s'annule en $x_0\in W$, donc $\|e_i|_W\|_{sp}=\|(e_i|_S)|_W\|_{sp}\leqslant\|e_i|_S\|_{sp}|W/S|\leqslant|S/R|\,|W/S|$ donc $|W/R|\leqslant|W/S|\,|S/R|$.

Soient $e_i\in D$, $h_\ell=\tau(E,H)(e_i)$, $d_j=\tau(H,D)(h_\ell)$, il existe $\lambda,\mu\in k$ tels que $e_i|_S\in\lambda(h_\ell+\mathcal{O}(S)^{00})$ et $h_\ell|_W\in\mu(d_j+\mathcal{O}(W)^{00})$, donc $e_i|_W\in\lambda\mu(d_j+\mathcal{O}(W)^{00})$, donc $\tau(E,D)(e_i)=d_j$. Donc $\tau(E,D)=\tau(H,D)\circ\tau(E,H)$.

2) Soit φ (resp. ψ) un isomorphisme de R sur un ouvert affinoïde $\mathbb{P}^1_k-\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}B(a_i,\pi_i)$ (resp. $\mathbb{P}^1_k-\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}B(b_i,r_i)$) de $\mathbb{P}^1_k$ avec $\varphi(x_0)=\infty$ (resp. $\psi(x_0)=\infty$) et $\varphi^*(R)(\frac{\pi_i}{T-a_i})=e_i$ (resp. $\psi^*(R)(\frac{r_i}{T-b_i})=e_i$). On note $\langle e_i|e_j\rangle_\varphi$ le nombre $\left|\frac{\pi_i\pi_j}{(a_i-a_j)^2}\right|$ si $i\neq j$ et 1 si $i=j$. On définit de la même façon $\langle e_i|e_j\rangle_\psi$.

Supposons par exemple que $\langle e_i|e_j\rangle\varphi \not< \langle e_i|e_j\rangle\psi$. Soit $\varepsilon\in k^{00}$

tel que $\langle e_i|e_j\rangle_\varphi \underset{\neq}{<} \varepsilon \underset{\neq}{<} \langle e_i|e_j\rangle_\psi$. Alors $e_i+\varepsilon e_j$ induit une immersion injective ouverte de R dans $\mathbb{B}_k^1$ puisque $\psi^*(R)^{-1}(e_i+\varepsilon e_j)=\dfrac{r_i}{T-b_i}+\varepsilon\dfrac{r_j}{T-b_j}$ induit une immersion injective ouverte de $\psi(R)$ dans $\mathbb{B}_k^1$ (proposition 2.3), il suit que $\dfrac{\pi_i}{T-a_i}+\varepsilon\dfrac{\pi_j}{T-a_j}=\varphi^*(R)^{-1}(e_i+\varepsilon e_j)$ induit une immersion injective ouverte de $\varphi(R)$ dans $\mathbb{B}_k^1$, ce qui est en contradiction avec la proposition 2.3. Donc $\langle e_i|e_j\rangle_\varphi=\langle e_i|e_j\rangle_\psi$.

LEMME 5.1. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension* 1, *de genre fini,* $r:X\to\overline{X}$ *une réduction préstable de* X *selon un recouvrement pur* $\mathcal{U}$. *Alors il existe un espace analytique* $\hat{X}$ *sur* k, *connexe, régulier, séparé, de dimension* 1, *de genre* $g(X)$, *un recouvrement pur* $\mathcal{V}$ *de* $\hat{X}$ *tels que la réduction* $\hat{r}:\hat{X}\to\overline{\hat{X}}$ *associée à* $\mathcal{V}$ *soit préstable,* X *soit ouvert analytique de* $\hat{X}$, $\hat{r}|_X=r$, $\overline{X}$ *dense dans* $\overline{\hat{X}}$ *et* $\overline{\hat{X}}-\overline{X}$ *régulier, et que toutes les composantes irréductibles de* $\overline{\hat{X}}$ *soient complètes.*

Preuve. On peut supposer $\overline{X}$ non projectif. Soient Z_i, $i\in I$ les composantes irréductibles de $\overline{X}$. Pour tout $i\in I$, on pose $V_i=Z_i-\bigcup_{j\in I-\{i\}}Z_j$, $U_i=\overline{X}-\bigcup_{Z_j\cap Z_i=\emptyset}Z_j$, U_i et V_i ont chacun au moins une composante irréductible non complète, donc ils sont affinoïdes ([G,P] théorème, p 139). D'après le théorème 0.1, il existe une courbe projective non-singulière C_i sur k, une réduction analytique $r_i:C_i^{an}\to\overline{C}_i$, un isomorphisme φ_i de $r^{-1}(U_i)$ sur un ouvert affinoïde de C_i^{an} tels que $\overline{C}_i$ soit le complété projectif de U_i et que $r_i\circ\varphi_i=r|_{r^{-1}(U_i)}$.

Soit $R_i=r_i^{-1}(\overline{C}_i-\bigcup_{j\in I-\{i\}}(U_i\cap Z_j))$ pour tout $i\in I$. On définit $\hat{X}$ comme étant l'espace analytique obtenu par le recollement des espaces analytiques X, R_i, $i\in I$ par les isomorphismes

$$X\supset r^{-1}(V_i)\xrightarrow[\sim]{\varphi_i}\varphi_i(r^{-1}(V_i))\subset R_i.$$

En identifiant X et les R_i à des ouverts analytiques de $\hat{X}$, on pose $\mathcal{V}=\mathcal{U}\cup\{R_i\}_{i\in I}$. Le couple $(\hat{X},\mathcal{V})$ répond clairement à la question.

LEMME 5.2. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique régulier de dimension* 1, $(R_n)_{n\geq 1}$ *une suite croissante (pour l'inclusion) d'ouverts affinoïdes connexes de genre 0 de* X, $x_0\in R_1$. *On suppose que* $|\eta_n|=|R_n/R_{n+1}|<1$ *pour tout* $n\geq 1$. *Alors il existe pour tout* $n\geq 1$ *une* x_0*-base* $\{e_{n,1},\ldots,e_{n,t_n}\}$ *de* R_n

telle que pour tout $n>m\geq 1$ *on ait*

$$e_{n,1}\big|_{R_m} \in k^{oo}[e_{m,1} + \sum_{1\leq j\leq t_n} \delta_{n,m}\xi_{m,j}k^{oo}\langle e_{m,j}\rangle]$$

où $\delta_{n,m}\in k, \xi_{m,j}\in k$, $|\delta_{n,m}|=\max\{|\eta_i|\,|m\leq i\leq n-1\}$, $|\xi_{m,j}|=\langle e_{m,j}|e_{m,1}\rangle$,

$k^{oo}\langle e_{m,j}\rangle=\{\sum_{\ell>0}\alpha_\ell(e_{m,j})^\ell \mid \alpha_\ell\in k^{oo},\ \lim_{\ell\to\infty}\alpha_\ell=0\}$.

Preuve. Pour tout $n\geq 1$, on a une x_0-base $D_n=\{d_{n,1},\dots,d_{n,t_n}\}$ de R_n. Chaque D_n étant non vide, la limite projective $\varprojlim_n(D_n,\tau(D_n,D_m))$ est non vide (le système $(D_n,\tau(D_n,D_m))$ est projectif d'après la proposition 5.1). On peut supposer $(d_{n,1})_{n\geq 1}\in\varprojlim_n D_n$.

Soit φ un isomorphisme de R_2 sur $\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup}_{1\leq i\leq t_2} B(b_i,r_i)$ tel que $\varphi^*(R_2)(\frac{r_i}{T-b_i})=d_{2,i}$. On a $\varphi(R_1)=\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup}_{1\leq j\leq t_1} B(a_j,\pi_j)$. Posons

$$e_{1,j}=\varphi^*(R_1)(\frac{\pi_j}{T-a_j}) \quad ,$$

on peut supposer que $e_{1,j}\in k^o(d_{1,j}+\mathcal{O}(R_1)^{oo})$ (voir proposition 3.1), donc $B(b_1,r_1)\subset B(a_1,\pi_1)$, on prendra $a_1=b_1$. On construit de la même façon une x_0-base $E_n=\{e_{n,1},\dots,e_{n,t_n}\}$ pour tout $n\geq 1$.

D'après la proposition 2.3, il existe $\alpha_{i\ell}\in k$ pour $1\leq i\leq t_2,\ell\geq 1$, tels que $\lim_{\ell\to\infty}\alpha_{i\ell}=0$, $|\alpha_{1,1}|=1$, $|\alpha_{i\ell}| \underset{\neq}{<} \langle d_{2,i}|d_{2,1}\rangle$ si $(i,\ell)\neq(1,1)$, et

$$e_{2,1}=\sum_{1\leq j\leq t_2}\ \sum_{\ell\geq 1}\alpha_{i\ell}d_{2,i}^{\ell}$$

(il n'y a pas de terme constant car $e_{2,1}$ et les $d_{2,i}$ s'annulent en x_0).

Si $\tau(D_2,E_1)(d_{2,i})=e_{1,j}$, alors $B(b_i,r_i)\subset B(a_j,\pi_j)$ et $|a_j-b_i|<|\pi_j|$. Donc

$$\frac{r_i}{T-b_i}=\frac{r_i}{\pi_j}\cdot\frac{\pi_j}{T-a_j}\Big[\sum_{s\geq 0}\Big(\frac{b_i-a_j}{\pi_j}\Big)^s\Big(\frac{\pi_j}{T-a_j}\Big)^s\Big],$$

il suit

$$d_{2,i}\Big|_{R_1} = \frac{r_i}{\pi_j}\, e_{1,j}\Big[\sum_{s>0}\Big(\frac{b_i-a_j}{\pi_j}\Big)^s e_{1,j}^s\Big].$$

Si $j\neq 1$ et $\ell\geq 1$, on a $\left|\frac{r_i}{\pi_j}\right|\leq 1$, donc

$$\Big|\alpha_{i\ell}\Big(\frac{r_i}{\pi_j}\Big)^\ell\Big| < \Big|\frac{r_i r_1}{(b_i-b_1)^2}\cdot\frac{r_i}{\pi_j}\Big| = \Big|\frac{r_1}{\pi_1}\Big|^2\ \Big|\frac{r_i}{\pi_j}\Big|^2\ \Big|\frac{\pi_1\pi_j}{(a_1-a_j)^2}\Big|$$

$$\leq \Big|\frac{r_1}{\pi_1}\Big|^2\ |\eta_1|^2\ (\langle e_{1,1}|e_{1,j}\rangle)$$

$$< \Big|\frac{r_1}{\pi_1}\Big|\ |\eta_1|(\langle e_{1,1}|e_{1,j}\rangle).$$

Si $j=1$, $i\neq 1$, $\ell\geq 2$, on a

$$\Big|\alpha_{i\ell}\Big(\frac{r_i}{\pi_j}\Big)^\ell\Big| < \Big|\frac{r_i r_1}{(b_i-b_1)^2}\ \Big(\frac{r_i}{\pi_1}\Big)^2\Big| \leq |\eta_1|\ \Big|\frac{r_1}{\pi_1}\Big|.$$

Si $j=1$, $i\neq 1$, on a $\left|\alpha_{i1}\left(\frac{r_i}{\pi_1}\right)\right|\leq\left|\frac{r_i^2}{(b_i-b_1)^2}\right|\left|\frac{r_1}{\pi_1}\right|$. Comme $b_1=a_1$, on a pour tout $s\geq 1$

$$\Big|\alpha_{i1}\Big(\frac{r_i}{\pi_j}\Big)\Big(\frac{b_i-a_1}{\pi_j}\Big)^s\Big| \leq \Big|\frac{r_1}{\pi_1}\Big|\ |\eta_1|.$$

Si $j=1$, $i=1$, $\ell\geq 2$, on a

$$\Big|\alpha_{11}\Big(\frac{r_i}{\pi_j}\Big)\Big| = \Big|\frac{r_1}{\pi_1}\Big|,\quad \Big|\alpha_{i\ell}\Big(\frac{r_i}{\pi_j}\Big)^\ell\Big| < \Big|\frac{r_1}{\pi_1}\Big|\ |\eta_1|.$$

En rassemblant toutes ces inégalités, on trouve le résultat pour $m=1$ et $n=2$. Le résultat est aussi valable pour tout $n\geq 2$ et $m=n-1$.

En particulier,

$$e_{3,1}\Big|_{R_2} = \lambda[e_{2,1}+\ldots] = \lambda[(1-\eta_2)e_{2,1}+\eta_2(e_{2,1}+\ldots)]$$
$$= \lambda[(1-\eta_2)e_{2,1}+\eta_2 f],$$

où $f\in\mathcal{O}(R_2)^0$ s'écrit en fonction des $e^j_{2,i}$ avec les coefficients qui satisfont les inégalités de la proposition 2.3, donc f induit une immersion injective ouverte de R_2 dans $\mathbb{B}^1_k$ et on a $\|f\|_{sp}=1$ et $f(x_0)=0$. Donc R_2 admet une x_0-base $F=\{f,\ldots\}$, clairement, $\tau(F,E_2)(f)=e_{2,1}$, donc $\tau(F,E_1)(f)=e_{1,1}$, d'où

$$f\Big|_{R_1} \in \frac{r_1}{\pi_1}\,[e_{1,1}+\sum_{1\leqslant j\leqslant t_1}\xi_j k^{00}\langle e_{1,j}\rangle]$$

où $|\xi_j|\leqslant(\langle e_{1,1}|e_{1,j}\rangle)$. On a donc une écriture de $e_{3,1}\Big|_{R_1}$ en fonction des $e_{1,j}$ comme dans l'énoncé, d'où le lemme pour $n=3$, $m=1$. En continuant de la même façon, on démontre le lemme pour tout $n\geqslant2$ et $m=1$, donc pour tout $n\geqslant2$ et tout $m\geqslant1$.

LEMME 5.3. *Avec les hypothèses et notations du lemme 5.2, il existe une suite d'ouverts affinoïdes connexes $(W_n)_{n\geqslant1}$ de X tels que*

1) pour tout $n\geqslant1$, $R_n\subset W_n\subset R_{n+1}$ et $|W_n/W_{n+1}|<1$,
2) pour tout isomorphisme φ_n de W_n sur un ouvert affinoïde $\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup}_{1\leqslant i\leqslant s_n} B(c_i,\ell_i)$ de $\mathbb{P}^1_k$ avec $\varphi_n(x_0)=\infty$, on ait $|c_i-c_j|>|\ell_i|$ si $i\neq j$.

Preuve. Soit φ un isomorphisme de R_2 sur un ouvert affinoïde $\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup}_{1\leqslant i\leqslant t_2} B(b_i,r_i)$ de $\mathbb{P}^1_k$ avec $\varphi(x_0)=\infty$. On a $\varphi(R_1)=\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup}_{1\leqslant j\leqslant t_1} B(a_j,\pi_j)$.

Si $B(b_i,r_i)\subset B(a_j,\pi_j)$, alors $\left|\frac{r_i}{\pi_j}\right|\leqslant|R_1/R_2|<1$. Il existe donc $\varepsilon\in k^{00}-\{0\}$ tel que

$$\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup_{1\leqslant j\leqslant t_1}} B(a_j,\varepsilon\pi_j)\subset\varphi(R_2).$$

On pose alors

$$W_1=\varphi^{-1}(\mathbb{P}^1_k-\dot{\bigcup_{1\leqslant j\leqslant t_1}} B(a_j,\varepsilon\pi_j)).$$

En prenant $|\varepsilon|$ assez proche de 1, on a $|W_1/R_2|<1$. On construit de cette façon la suite $(W_n)_{n\geqslant1}$.

On a $|W_n/W_{n+1}|\leq|W_n/R_{n+1}||R_{n+1}/W_{n+1}|<1$ pour tout $n\geq 1$. La propriété 2) équivaut à la suivante : pour toute x_0-base $\{d_{n,1},\ldots,d_{n,s_n}\}$ de W_n, $\overline{d}_{n,i}\ \overline{d}_{n,j}=0$ si $i\neq j$ ($\overline{d}_{n,i}$ est l'image de $d_{n,i}$ dans $\overline{\mathcal{O}(W_n)}$). Par la construction de W_n, ceci est vrai pour une x_0-base de W_n, donc vrai pour toute x_0-base de W_n (voir proposition 3.1).

On rappelle qu'un corps valué k est dit *maximalement complet* si l'intersection de toute suite décroissante de disques non vides est non vide.

PROPOSITION 5.2. *Soient* k *un corps valué, maximalement complet et algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension* 1, *de genre* 0. *Alors* X *est isomorphe à un ouvert analytique de* $\mathbb{P}^1_k$.

Preuve. D'après la proposition 3.4, X admet une réduction $r:X\to\overline{X}$ qui est préstable. Si $\overline{X}$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, alors X est quasi-compact et $g(\overline{X})=g(X)=0$, il suit des théorèmes 0.1 et 0.2 que X est ouvert analytique de $\mathbb{P}^1_k$.

On suppose donc que $\overline{X}$ a une infinité de composantes irréductibles $Z_1,\ldots,Z_n,\ldots$. D'après le lemme 5.1, on peut les supposer toutes complètes. Soit $d(Z_n,Z_m)$ la distance entre Z_n et Z_m dans le graphe d'intersection de $\overline{X}$([G,P] p 11).

On pose pour tout $n\geq 1$, $R_n=r^{-1}(\overline{X}-\bigcup_{d(Z_1,Z_m)>n}Z_m)$. Les R_n sont des ouverts affinoïdes connexes de X et $\{R_n\}_{n\geq 1}$ est un recouvrement admissible de X. Pour tout $n\geq 1$, $r(R_n)$ est un ouvert connexe de $\overline{X}$ contenu dans la réunion des composantes irréductibles complètes de $r(R_{n+1})$, donc l'image de R_n dans $\overline{R}^c_{n+1}$ est réduite à un point, par suite $|R_n/R_{n+1}|<1$.

On fixe un point $x_0\in R_1$ et on considère la suite $(W_n)_{n\geq 1}$, associée aux R_n, définie dans le lemme 5.3. Pour tout $n\geq 1$, soit $D_n=\{d_{n,1}\ldots,d_{n,s_n}\}$ une x_0-base de W_n, on peut supposer que $\tau(D_{n+1},D_n)(d_{n+1,1})=d_{n,1}$. Si $n>m\geq 1$, on a

$$\tau(D_n,D_m)(d_{n,1})=\tau(D_{m+1},D_m)\circ\ldots\circ\tau(D_n,D_{n-1})(d_{n,1})=d_{m,1}.$$

Par conséquent,

$$d_{n,1}|_{W_m}=\alpha_{n,m}(\sum_{\ell\geq 1}\ \sum_{1\leq j\leq s_m}\lambda_{m,j,\ell}(n)d^{\ell}_{m,j})$$

avec $\alpha_{n,m}\in k, \lambda_{m,j,\ell}(n)\in k$, $\lim_{\ell\to\infty}\lambda_{m,j,\ell}(n)=0$, $\lambda_{m,1,1}(n)=1$ et $|\lambda_{m,j,\ell}(n)|<(\langle d_{m,j}|d_{m,1}\rangle)$ si $(j,\ell)\neq(1,1)$ (voir proposition 2.3).

Soit $\Lambda_{m,j,\ell}$ la suite définie par

$$\Lambda_{m,j,\ell}(n)=\begin{cases} 0 & \text{si } n\leqslant m \\ \lambda_{m,j,\ell}(n) & \text{si } n>m. \end{cases}$$

Soit $\ell^\infty(k)$ l'ensemble des suites bornées à coefficients dans k, les $\Lambda_{m,j,\ell}$ sont des éléments de $\ell^\infty(k)$. Soit c l'ensemble des suites convergentes à coefficients dans k, la forme linaire $\Phi:c\to k$ définie par $\Phi((\alpha_n)_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ est continue, de norme égale à 1 ($\ell^\infty(k)$ est muni de la norme $\|(\alpha_n)_n\|=\operatorname{Sup}_n|\alpha_n|$ et c est muni de la norme induite par celle de $\ell^\infty(k)$). Soit G le sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty(k)$ engendré par c et les suites $\Lambda_{m,j,\ell}$ pour $m\geqslant1$, $j\leqslant s_m$, $\ell\geqslant1$. La forme linéaire Φ se prolonge en une forme linéaire continue de G dans k, de norme égale à 1 ([M] chapitre V, k maximalement complet). On note encore par Φ ce prolongement.

Pour tout $m\geqslant1$, on pose

$$g_m=\alpha_{m,1}^{-1}\sum_{\ell\geqslant1}\sum_{1\leqslant j\leqslant s_m}\Phi(\Lambda_{m,j,\ell})d_{m,j}^{\ell}\Big|_{W_{m-1}},$$

la série converge car $\|d_{m,j}|_{W_{m-1}}\|_{sp}\leqslant|W_{m-1}/W_m|<1$. On a $g_m\in\mathcal{O}(W_{m-1})$.

Si $(j,\ell)\neq(1,1)$, on a

$$|\Phi(\Lambda_{m,j,\ell})|\leqslant\|\Phi\|\,\|\Lambda_{m,j,\ell}\|\leqslant(\langle d_{m,j}|d_{m,1}\rangle).$$

En utilisant la proposition 2.3, le même calcul que celui du lemme 5.3 montre que $\alpha_{m,1}g_m$ induit une immersion injective ouverte. Par suite l'homomorphisme $\psi_m:k\langle\alpha_{m,1}T\rangle\to\mathcal{O}(W_{m-1})$ défini par $\psi_m(\alpha_{m,1}T)=\alpha_{m,1}g_m$ induit un isomorphisme φ_m de W_{m-1} sur un ouvert affinoïde de $\{z\in k\,\big|\,|z|\leqslant|\alpha_{m,1}^{-1}|\}=\operatorname{Spm}k\langle\alpha_{m,1}T\rangle\subset\mathbb{P}_k^1$. On a $\varphi_m(x)=g_m(x)$ pour tout $x\in W_{m-1}$.

Soient $x\in W_{m-2}$, $n>m$, on a $\alpha_{n,m}\alpha_{m,1}=\alpha_{n,1}$, donc

$$\alpha_{m,1}^{-1}\sum_{\ell\geqslant1}\sum_{s_m\geqslant j\geqslant1}\Lambda_{m,j,\ell}(n)d_{m,j}^{\ell}(x)=\alpha_{m,1}^{-1}\alpha_{n,m}^{-1}d_{n,1}(x)=\alpha_{n,1}^{-1}d_{n,1}(x),$$

or

$$g_m(x)=\Phi\Big(\Big(\sum_{\ell\geqslant1}\sum_{s_m\geqslant j\geqslant1}\Lambda_{m,j,\ell}(n)d_{m,j}^{\ell}(x)\Big)_{n\geqslant1}\Big),$$

donc $g_m(x)-g_{m-1}(x)$ est l'image par Φ d'une suite nulle à partir du $m^{\text{ième}}$ rang, donc $g_m(x)-g_{m-1}(x)=0$, ce qui prouve que $\varphi_m|_{W_{m-2}}=\varphi_{m-1}$.

Soit $Y=\bigcup_{m\geq 2}\varphi_m(W_{m-1})$, les $\varphi_m(W_{m-1})$ forment un recouvrement admissible de l'ouvert analytique Y de $\mathbb{P}^1_k$ ([G,P] p 127), donc X est isomorphe à l'ouvert analytique Y de $\mathbb{P}^1_k$.

PROPOSITION 5.3. *Soient k un corps valué complet, algébriquement clos, X un k-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension 1, de genre 0. On suppose que pour tout ouvert affinoïde connexe R de X, le nombre* $\inf\{|R/W|\,|\,W$ *ouvert affinoïde connexe de X contenant R}* *est nul. Alors X est isomorphe à un ouvert analytique Y de* $\mathbb{P}^1_k$ *tel que* $\mathbb{P}^1_k-Y$ *soit une partie compacte (pour la topologie ordinaire sur* $\mathbb{P}^1_k$*).*

Preuve. On peut supposer X non projectif. Soit $\delta\in k^{00}-\{0\}$, X admet un recouvrement admissible affinoïde $\{R_n\}_{n\geq 1}$ avec R_n connexe, $R_n\subset R_{n+1}$ et $|R_n/R_{n+1}|<|\delta|$ (voir proposition 3.3).

Soit $x_0\in R_1$. On munit chaque R_n d'une x_0-base $E_n=\{e_{n,1},\dots,e_{n,s_n}\}$ définie dans le lemme 5.2. Donc pour $n>m\geq 1$, on a

$$e_{n,1}|_{R_m}\in k^{00}[e_{m,1}+\sum_{1\leq j\leq s_m}\delta\xi_{m,j}k^{00}\langle e_{m,j}\rangle]$$

où $\xi_{m,j}\in k$ et $|\xi_{m,j}|=\langle e_{m,j}|e_{m,1}\rangle$.

On considère les suites $\Lambda_{m,j,\ell}$ associées aux x_0-bases E_n, définies comme dans la démonstration de la proposition précédente, ainsi que les espaces de Banach $\ell^\infty(k)$, c, G. Soit ψ la forme linéaire continue sur c définie par $\psi((\alpha_n)_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$, ψ se prolonge en une forme linéaire continue Φ sur G, de norme $\|\Phi\|<|\delta|^{-1}$ ([M], p 61).

On a donc $\Phi(\Lambda_{m,1,1})=1$ et

$$|\Phi(\Lambda_{m,j,\ell})|\leq\|\Phi\|\,\|\Lambda_{m,j,\ell}\|,$$

or si $(j,\ell)\neq(1,1)$

$$|\Lambda_{m,j,\ell}(n)|\leq|\delta|(\langle e_{m,j}|e_{m,1}\rangle)$$

(voir début de la démonstration), donc si $(j,\ell)\neq(1,1)$,

$$|\Phi(\Lambda_{m,j,\ell})|\leq\|\Phi\|\,|\delta|(\langle e_{m,j}|e_{m,1}\rangle)\underset{\neq}{<}(\langle e_{m,j}|e_{m,1}\rangle).$$

On définit, de la même façon que dans la démonstration de la proposition précédente, les fonctions $g_m\in\mathcal{O}(R_{m-1})$, elles vérifient $g_m|_{R_{m-2}}=g_{m-1}$. En utilisant la proposition 2.3, le même calcul que celui du lemme 5.3 montre que g_m induit un isomorphisme φ_m, de R_{m-1} sur un ouvert affinoïde de $\mathbb{P}^1_k$, tel que $\varphi_m|_{R_{m-2}}=\varphi_{m-1}$.

Soit $Y=\bigcup_{m\geq 2}\varphi_m(R_{m-1})$, en composant éventuellement une fonction homographique, on peut supposer $\varphi_m(x_0)=\infty$. Comme

$$|R_1/R_m|\leqslant|R_1/R_2|\ldots|R_{m-1}/R_m|\leqslant|\delta|^{m-1},$$

si $\varphi_2(R_1)=\mathbb{P}^1_k-\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}^{\circ}B(a_i,\pi_i)$, alors $\mathbb{P}^1_k-\varphi_{m+1}(R_m)$ est la réunion d'un nombre fini de disques ouverts de rayons majorés par $|\delta|^{m-1}\max_{1\leqslant i\leqslant s}|\pi_i|$, ce qui montre que $\mathbb{P}^1_k-Y$ est compact.

Soit R un ouvert affinoïde de $\mathbb{P}^1_k$ contenu dans Y, $(R\cap[\mathbb{P}^1_k-\varphi_{m+1}(R_m)])_{m\geqslant 1}$ est une suite décroissante d'ouverts de diamètres tendant vers 0, d'intersection vide, donc il existe un $m\geqslant 1$ tel que $R\cap[\mathbb{P}^1_k-\varphi_{m+1}(R_m)]=\emptyset$, donc $R\subset\varphi_{m+1}(R_m)$. Par conséquent, $\{\varphi_{m+1}(R_m)\}_{m\geqslant 1}$ est un recouvrement admissible de l'ouvert analytique Y de $\mathbb{P}^1_k$, donc X est isomorphe à Y.

DEFINITIONS 5.2. Soient k un corps valué complet, algébriquement clos, X un k-espace analytique réduit, irréductible, séparé, de dimension 1, de genre fini, $r:X\to\overline{X}$ une réduction de X telle qu'en dehors d'un ouvert affine, $\overline{X}$ soit préstable (voir théorème 1). On appelle *demi-droite infinie de* $\overline{X}$ toute suite $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ de composantes irréductibles de $\overline{X}$, deux à deux distinctes, telles que $Y_n\cap Y_{n+1}\neq\emptyset$ pour tout $n\geqslant 1$.

Comme g(X) est fini, il existe $n_0\geqslant 1$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$ et tout $m\geqslant n+2$, $Y_n\cap Y_{n+1}=\{q_n\}$ (i.e. est réduite à un point double ordinaire), et $Y_n\cap Y_m=\emptyset$. La fibre formelle $r^{-1}(q_n)$ est isomorphe à une couronne $\{z\in k\,\big|\,|\pi_n|<|z|<1\}$, on appelle *valeur absolue de l'angle* (Y_n,Y_{n+1}) le nombre $|\pi_n|$ ([G,P], p 132), on dit que *le produit des valeurs absolues des angles de la demi-droite infinie* $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ *est nul* si $\prod_{n\geqslant n_0}|\pi_n|=0$.

PROPOSITION 5.4. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension* 1, *de genre* 0. *On suppose que* X *admet une réduction préstable* $r:X\to\overline{X}$ *telle que toutes les composantes irréductibles de* $\overline{X}$ *soient complètes et que le produit des valeurs absolues des angles de toute demi-droite infinie soit nul. Alors* X *est isomorphe à un ouvert analytique de* $\mathbb{P}^1_k$ *dont le complémentaire est compact.*

Preuve. On peut supposer que $\overline{X}$ a une infinité de composantes irréductibles $Z_1,\ldots,Z_m,\ldots$ (sinon X est isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$). On définit, comme au début de la démonstration de la proposition 5.2, un recouvrement affinoïde admissible $\{R_n\}_{n\geq 1}$ de X en posant

$$R_n=r^{-1}(\overline{X}-\bigcup_{d(Z_m,Z_1)>n} Z_m).$$

On fixe un point $x_0\in R_1$ et une x_0-base $E_n=\{e_{n,1},\dots,e_{n,s_n}\}$ de R_n pour tout $n\geq 1$.

α) *Si* $(e_{n,1})_{n\geq 1}\in\varprojlim_n (E_n,\tau(E_n,E_m))$, *alors il existe une demi-droite infinie* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *de* $\overline{X}$ *telle que pour tout* $n\geq 1$, $\|e_{n+1,1}|_{R_n}\|_{sp}$ *soit égal à la valeur absolue de l'angle* (Y_n,Y_{n+1}).

La réduction $r:X\to\overline{X}$ induit une réduction $r:R_n\to\overline{R}_n=r(R_n)$. Soit τ_n le morphisme qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
R_n \arrow[r, "r_n"] \arrow[dr, "r"'] & \overline{R}_n^c \\
& \overline{R}_n \arrow[u, "\tau_n"']
\end{tikzcd}$$

où $r_n:R_n\to\overline{R}_n^c$ est la réduction canonique de R_n, soit F_n la réunion des Z_m tels que $d(Z_1,Z_m)\leq n-2$. Alors F_n est la réunion des composantes irréductibles complètes de $\overline{R}_n$, c'est aussi l'adhérence de $\overline{R}_{n-1}$ dans $\overline{R}_n$. Comme F_n est connexe, $\tau_n(F_n)$ est réduit à un point (si $n\geq 2$), c'est le point $r_n(x_0)$. Il suit que

$$\overline{R}_n-F_n\xrightarrow{\tau_n}\overline{R}_n^c-\{r_n(x_0)\}$$

est un isomorphisme ([P1] proposition 1.1). Les composantes irréductibles de $\overline{R}_n^c$ se rencontrent au point $r_n(x_0)$.

La fonction $\overline{e}_{n,1}\in\mathcal{O}(\overline{R}_n^c)$ est non constante sur une unique composante irréductible L_n de $\overline{R}_n^c$, soit Y_n l'adhérence de $\tau_n^{-1}(L_n-\{r_n(x_0)\})$ dans $\overline{R}_{n+1}$, c'est une composante irréductible de $\overline{X}$.

Soit $\varphi:R_n\to\mathbb{P}_k^1$ un isomorphisme de R_n sur un ouvert affinoïde $\mathbb{P}_k^1-\bigcup_i B(a_i,\pi_i)$ de $\mathbb{P}_k^1$ tel que $\varphi(x_0)=\infty$ et $e_{n,1}=\varphi^*(R_n)(\frac{\pi_1}{T-a_1})$. On a $\varphi(R_{n-1})=\mathbb{P}_k^1-\bigcup_j B(b_j,r_j)$. On peut supposer que $B(a_1,\pi_1)\subset B(b_1,r_1)$, alors

$$e_{n-1,1}\in(k^0-k^{00})(\varphi^*(R_{n-1})(\frac{r_1}{T-b_1})+\mathcal{O}(R_{n-1})^{00})$$

On peut donc remplacer R_n par $\mathbb{P}_k^1 - \bigcup_i B(a_i, \pi_i)$, $e_{n,1}$ par $\frac{\pi_1}{T-a_1}$, R_{n-1} par $\mathbb{P}_k^1 - \bigcup_j B(b_j, r_j)$ et $e_{n-1,1}$ par $\frac{r_1}{T-b_1}$. On voit alors facilement que Y_{n-1} et Y_n se rencontrent en un seul point q_{n-1}, et que $r^{-1}(q_{n-1}) = \{z \in k \mid |r_1| > |z| > |\pi_1|\}$. Donc la valeur absolue de l'angle (Y_{n-1}, Y_n) est $\left|\frac{\pi_1}{r_1}\right|$, c'est aussi $\|e_n|_{R_{n-1}}\|_{sp}$, d'où α).

β) *Pour tout* $m \geq 1$, *on a* $\lim_{n\to\infty} |R_m/R_n| = 0$.

Supposons le contraire. Il existe $m \geq 1$, $\delta \in k - \{0\}$ tels que pour tout $n \geq m$, l'ensemble

$$F_n = \{e_{n,1} \in E_n \mid \|e_{n,1}|_{R_m}\|_{sp} \geq |\delta|\}$$

soit non vide. Clairement, si $e_{n,1} \in F_n$, alors $\tau(E_n, E_{n-1})(e_{n,1}) \in F_{n-1}$, on a un système projectif $(F_n, \tau(E_n, E_{n-1}))_{n \geq m}$. Comme chaque F_n est non vide, $\varprojlim_n F_n$ est non vide. On peut supposer que $(e_{n,1})_{n \geq m}$ est dans cette limite projective. D'après α), il existe une demi-droite infinie $(Y_n)_{n \geq m}$ de $\overline{X}$ telle que $\|e_{n,1}|R_{n-1}\|_{sp}$ soit égale à la valeur absolue $|\pi_n|$ de l'angle (Y_{n-1}, Y_n).

Pour tout $\ell \geq m$, on a

$$\prod_{m < n \leq \ell} |\pi_{n+1}| = \prod_{m \leq n \leq \ell} \|e_{n+1,1}|_{R_n}\| = \|e_{\ell+1,1}|_{R_m}\| \geq |\delta|,$$

ce qui contredit l'hypothèse $\prod_{n \geq m} |\pi_n| = 0$. Donc $\lim_{n\to\infty} |R_m/R_n| = 0$.

γ) *Fin de la démonstration.*

Soit R un ouvert affinoïde de X. Il existe $m \geq 1$ tel que $R \subset R_m$. Pour tout $n \geq m$, on a $|R/R_n| \leq |R/R_m|\,|R_m/R_n| \leq |R_m/R_n|$, il suit de β) que $\inf\{|R/W| \mid W$ ouvert affinoïde connexe de X contenant $R\}$ est nul. On a donc le résultat d'après la proposition précédente.

THEOREME 3. *Soient* k *un corps valué, maximalement complet et algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique réduit, irréductible, séparé, de dimension* 1 *et de genre fini. Alors* X *est isomorphe à un ouvert analytique d'une courbe projective (analytifiée) de genre* $g(X)$.

Preuve. On sait d'après le théorème 1 que X admet une réduction $r: X \to \overline{X}$ telle qu'il existe un ouvert affine connexe V de $\overline{X}$ avec

$\overline{X}$-V préstable et $g(V)=g(X)$. Soient F l'adhérence de V dans $\overline{X}$, $F_1,\ldots,F_n$ les adhérences des composantes connexes de $\overline{X}$-F. En prenant V assez grand, $F\cap F_i$ est réduit à un point double ordinaire p_i et tout ouvert affine de F_i est de genre 0.

Soit U_i un ouvert affine connexe de $\overline{X}$ tel que $p_i \in U_i$, $U_i-\{p_i\}$ soit régulier. Si U_i est assez petit, il existe $f_i \in \mathcal{O}(r^{-1}(U_i))^0$ tel que l'homomorphisme $\psi_i : k\langle T\rangle \to \mathcal{O}(r^{-1}(U_i))$ défini par $\psi_i(T)=f_i$ induise un isomorphisme σ_i de $r^{-1}(p_i)$ sur une couronne de la forme $\{z\in k \,|\, |\pi_i|<|z|<1\}$ et $\overline{f}_i|_{F\cap U_i}=0$ ([B,L] proposition 2.3).

On fixe $\alpha,\beta\in k$ tels que $1>|\alpha|>|\beta|>|\pi_i|$ pour tout $i\leq n$, et on considère les ouverts analytiques de X

$$X_i=r^{-1}(F_i-\{p_i\})\cup\{x\in r^{-1}(U_i) \,|\, |f_i(x)|\geq|\alpha|\},$$

$$W_i=\{x\in r^{-1}(U_i) \,|\, |\alpha|\geq|f_i(x)|\geq|\beta|\},$$

$$R_i=X_i\cap W_i=\{x\in r^{-1}(U_i) \,|\, |f_i(x)|=|\alpha|\},$$

$$R_0=r^{-1}(F-\{p_1,\ldots,p_n\})\cup \bigcup_{1\leq i\leq n}{}^{\!\cdot}\ \{x\in r^{-1}(U_i) \,|\, |f_i(x)|\leq|\alpha|\}$$

et $A_i=X_i\cup W_i$. On a $g(A_i)=0$ parce que $A_i\cap r^{-1}(V)=\emptyset$. On construit un espace analytique Y_i en recollant A_i et le disque fermé $\{z\in k \,|\, |z|\leq|\beta|\}$ par l'isomorphisme

$$\{x\in r^{-1}(U_i) \,|\, |f_i(x)|=|\beta|\} \stackrel{\sigma}{\simeq} \{z\in k \,|\, |z|=|\beta|\}.$$

L'espace Y_i est connexe, régulier, séparé, de dimension 1, de même genre que A_i, donc de genre 0. D'après la proposition 5.2, il existe un isomorphisme φ_i de Y_i sur un ouvert analytique de $\mathbb{P}^1_k$. On peut supposer que

$$\varphi_i(A_i) \subset \{z\in k \,|\, |z|\geq|\beta|\}\cup\{\infty\},$$

$$\varphi_i(W_i)=\{z\in k \,|\, |\alpha|\geq|z|\geq|\beta|\}$$

et

$$\varphi_i(R_i)=\{z\in k \,|\, |z|=|\alpha|\},$$

il suit que

$$\varphi_i(X_i)\subset\{z\in k \,|\, |z|\geq|\alpha|\}\cup\{\infty\}.$$

Soit $D_i=\{z\in k \,|\, |z|\geq|\alpha|\}\cup\{\infty\}$ pour tout $i\leq n$, on recolle les espaces affinoïdes $R_0,D_1,\ldots,D_n$ par les isomorphismes $R_0\supset R_i \xrightarrow{\varphi_i} \varphi_i(R_i)\subset D_i$. Soient Y l'espace ainsi obtenu, $\theta_0 : R_0 \to Y$, $\theta_i : D_i \to Y$ pour $i\leq n$, les morphismes injections canoniques. En considérant le recouvrement admissible affinoïde

$\mathscr{V}=\{\theta_i(D_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}\cup\{\theta_0(W_i)\}_{1\leqslant i\leqslant n}\cup\{\theta_0(r^{-1}(F-\{p_1,\ldots,p_n\}))\}\cup$

$\cup\{\theta_0(\{x\in r^{-1}(U_i)\,|\,|f_i(x)|\leqslant|\beta|\})\}_{1\leqslant i\leqslant n}$

de Y, on voit que Y est séparé. Comme $R_0\supset r^{-1}(V)$, $g(R_0)=g(X)$, donc R_0 est irréductible (proposition 4.2), Y est connexe et admet un recouvrement admissible par des ouverts affinoïdes irréductibles, donc Y est irréductible. Comme en plus Y est réduit et quasi-compact, il est ouvert analytique d'une courbe projective analytifiée (théorème 0.1).

On a $X=R_0\cup(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}X_i)$ et pour tout ouvert affinoïde R de X, $R\cap X_i$ est affinoïde. Comme $\varphi_i(X_i)\subset D_i$, X est isomorphe à un ouvert analytique de Y. Donc X est isomorphe à un ouvert analytique d'une courbe projective analytifiée. On peut supposer cette courbe de même genre que X d'après le théorème 2.

PROPOSITION 5.5. *Soit* k *un corps valué complet, algébriquement clos. On suppose que* k *n'est pas maximalement complet. Alors il existe un espace analytique* X *sur* k, *connexe, régulier, séparé, de dimension* 1 *et de genre* 0 *qui vérifie la propriété : pour tout morphisme* $f:X\to\mathbb{P}^1_k$, *il existe un ouvert affinoïde* R *de* X *tel que* $f|_R$ *ne soit pas un isomorphisme de* R *sur* f(R). *En particulier,* X *ne peut pas être isomorphe à un ouvert analytique d'une courbe projective.*

Preuve. α) *Construction de* X.

Puisque k n'est pas maximalement complet, il existe une suite décroissante de disques ouverts $(B(c_n,\pi'_n))_{n\geqslant1}$ de k telle que $\bigcap_{n\geqslant1}B(c_n,\pi'_n)=\emptyset$. Soient $\pi_n\in k$, $b_n\in k$ tels que $\pi_n^2=\pi'_n$ et
$c_n=(b_n-b_{n-1})^2+\ldots+(b_2-b_1)^2$. On pose $r_n=\pi_1\pi_n^{-1}$, $D_n=\{z\in k\,|\,|z|\leqslant|r_n|\}$, $\gamma_n=(b_n-b_{n-1})\pi_1^{-1}$, $\delta_n=\gamma_2+\ldots+\gamma_n=(b_n-b_1)\pi_1^{-1}$ et $\varepsilon_n=\delta_n^2-(\gamma_2^2+\ldots+\gamma_n^2)=\delta_n^2-c_n\pi_1^{-2}$.

Soit $\varphi_n:D_n\to D_n$ le morphisme induit par l'homomorphisme $\psi_n:\mathscr{O}(D_n)\to\mathscr{O}(D_n)$ défini par $\psi_n(r_n^{-1}T)=r_n^{-1}T+\gamma_{n+1}r_n(r_n^{-1}T)^2$, comme

$$|\gamma_{n+1}r_n|=|(b_{n+1}-b_n)\pi_n^{-1}|=\sqrt{|(c_{n+1}-c_n)\pi_n'^{-1}|}<1,$$

φ_n est un isomorphisme de D_n sur D_n. On a $\varphi_n(z)=z+\gamma_{n+1}z^2$ pour tout $z\in D_n$. On définit X comme étant le recollement des espaces affinoïdes D_n, $n\geqslant1$ par les isomorphismes

$$D_n \supseteq D_n \xrightarrow[\sim]{\varphi_n} D_n \subseteq D_{n+1}.$$

Clairement X est un espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension 1 et de genre 0.

β) L'espace analytique X vérifie les propriétés énoncées.

Supposons le contraire. Il existe alors une suite de morphismes $(f_n)_{n\geq 1}$ telle que f_n soit un isomorphisme de D_n sur un ouvert affinoïde W_n de $\mathbb{P}^1_k$ et que $f_{n+1}|_{D_n} o\varphi_n = f_n$ pour tout $n\geq 1$.

On peut supposer que $f_1(0)=\infty$, donc W_n s'écrit sous la forme

$$W_n=\{z\in k \mid |z-a_n|\geq |h_n|\}\cup\{\infty\}.$$

On a

$$f_1^{\#}(W_1)^{-1}(T)=\sum_{i\geq 1}\alpha_i\left(\frac{h_1}{T-a_1}\right)^i$$

avec $\alpha_i\in k$, $\alpha_1=1$ et $|\alpha_i|<1$ si $i\geq 2$,

$$f_n^{\#}(W_n)^{-1}(r_n^{-1}T)=\sum_{i\geq 1}\alpha_{n,i}\left(\frac{h_n}{T-a_n}\right)^i$$

avec $\alpha_{n,i}\in k$, $|\alpha_{n,1}|=1$ et $|\alpha_{n,i}|<1$ si $i\geq 2$. Un simple calcul montre que

$$(\varphi_{n-1}o\ldots o\varphi_1)^{\#}(D_n)(r_n^{-1}T)=(T+\delta_n T^2+\varepsilon_n T^3+\ldots)r_n^{-1}$$

(les nombres δ_n, ε_n sont définis dans α)), comme

$$f_1^{\#}(W_1)^{-1}o(\varphi_{n-1}o\ldots o\varphi_1)^{\#}(D_n)=s_n o f_n^{\#}(W_n)^{-1},$$

où s_n est la restriction $\mathcal{O}(W_n)\to\mathcal{O}(W_1)$, on a

$$r_n^{-1}\left[\sum_{i\geq 1}\alpha_i\left(\frac{h_1}{T-a_1}\right)^i+\delta_n\left(\sum_{i\geq 1}\alpha_i\left(\frac{h_1}{T-a_1}\right)^i\right)^2+\varepsilon_n\left(\sum_{i\geq 1}\alpha_i\left(\frac{h_1}{T-a_1}\right)^i\right)^3+\ldots\right]=\sum_{i\geq 1}\alpha_{n,i}\left(\frac{h_n}{T-a_n}\right)^i,$$

en comparant les coefficients en $\frac{h_1}{T-a_1}$, $\left(\frac{h_1}{T-a_1}\right)^2$, $\left(\frac{h_1}{T-a_1}\right)^3$ des deux membres de cette égalité où l'on remplace $\frac{h_n}{T-a_n}$ par

$$\frac{h_n}{T-a_n}=\frac{h_n}{h_1}\,\frac{h_1}{T-a_1}\sum_{\iota>0}\left(\frac{a_n-a_1}{h_1}\right)^{\iota}\left(\frac{h_1}{T-a_1}\right)^{\iota},$$

On trouve

(1) $$\alpha_1=r_n\alpha_{n,1}h_nh_1^{-1}$$

(2) $$\alpha_2+\delta_n\alpha_1^2=\alpha_{n,1}(a_n-a_1)h_1^{-1}+\alpha_{n,2}r_n^{-1}$$

(3) $$\alpha_3+\delta_n(2\alpha_1\alpha_2)+\varepsilon_n\alpha_1^3=\alpha_{n,1}(a_n-a_1)^2h_1^{-2}+2\alpha_{n,2}(a_n-a_1)h_1^{-1}r_n^{-1}+\alpha_{n,3}r_n^{-2}.$$

Par (1), on a $|r_n^{-1}|=|h_nh_1^{-1}|$. En choisissant convenablement les h_n, on peut supposer $r_n^{-1}=h_nh_1^{-1}$, donc $\alpha_{n,1}=\alpha_1=1$ et (2) devient

(2)' $$\alpha_2+\delta_n=(a_n-a_1)h_1^{-1}+\alpha_{n,2}r_n^{-1},$$

(3) devient

(3)' $$\alpha_3+2\alpha_2\delta_n+\varepsilon_n=(a_n-a_1)^2h_1^{-2}+2\alpha_{n,2}(a_n-a_1)r_n^{-1}h_1^{-1}+\alpha_{n,3}r_n^{-2}.$$

En faisant (3)'-(2)'×(2)', on obtient

$$\alpha_3-\alpha_2^2+\varepsilon_n-\delta_n^2=(\alpha_{n,3}-\alpha_{n,2})r_n^{-2},$$

donc $\alpha_3-\alpha_2^2-\pi_1^{-2}c_n=(\alpha_{n,3}-\alpha_{n,2})\pi_1^{-2}\pi_n^2$, par suite $|c_n-\pi_1^2(\alpha_3-\alpha_2^2)|<|\pi_n^2|$ pour tout $n\geqslant 2$, ce qui contredit l'hypothèse $\bigcap_{n\geqslant 1}B(c_n,\pi_n^2)=\emptyset$.

PROPOSITION 5.6. *Soient* k *un corps valué, maximalement complet et algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique réduit, irréductible, séparé, de dimension* 1 *et de genre fini. Soit* $\mathcal{O}(X)^0$ *l'ensemble des* $f\in\mathcal{O}(X)$ *tels que* $\|f|_R\|_{sp}\leqslant 1$ *pour tout ouvert affinoïde* R *de* X. *On suppose que* $\mathcal{O}(X)^0=k^0$. *Alors pour toute réduction* $r:X\to\overline{X}$ *préstable en dehors d'un ouvert affine de* $\overline{X}$ *(voir théorème 1), le produit des valeurs absolues des angles de toute demi-droite infinie de* X *est nul et les composantes irréductibles de* $\overline{X}$ *sont complètes.*

Preuve. Si $\overline{X}$ a des composantes irréductibles non complètes, on peut construire, de façon analogue à ce qui est fait au lemme 5.1, un espace analytique Y qui est réduit, irréductible, séparé, de dimension 1 et de genre $g(X)$ tel que X soit ouvert analytique de Y et que X ne soit pas dense dans Y. D'après le théorème 3, Y est ouvert analytique d'une courbe projective C^{an}, donc X est un ouvert analytique non dense de C^{an}. Il existe un ouvert affinoïde non vide R de C^{an} qui ne rencontre pas X.

D'après le corollaire 1.6.2, il existe un ouvert affinoïde R_0 de C^{an} tel que $C^{an}=R_0\cup R$. Il suit que $X\subset R_0$. Pour tout $f\in\mathcal{O}(R_0)$ et tout ouvert affinoïde W de X, on a $f|_W=(f|_X)|_W\in k$, donc $\dim W=0$, donc $\dim X=0$, c'est absurde. Donc les composantes irréductibles de $\overline{X}$ sont complètes.

Soit V un ouvert affine de $\overline{X}$ tel que $\overline{X}-V$ soit préstable et $g(V)=g(X)$. D'après le théorème 3, X est un ouvert analytique d'une courbe projective C^{an} de genre $g(X)$. On sait que C^{an} admet une réduction $\hat{r}:C^{an}\to\overline{C}$ telle que $\hat{r}|_{r^{-1}(V)}=r|_{r^{-1}(V)}$ et que V soit dense dans $\overline{C}$ (proposition 1.6). Comme $g(V)=g(C)$, les points de $\overline{C}-V$ sont des points réguliers de $\overline{C}$.

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une demi-droite infinie de $\overline{X}$ (voir définition 5.2). On peut supposer $Y_n\cap V=\emptyset$ pour tout $n\geq 1$ donc Y_n est isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$ et $Y_n\cap Y_{n+1}$ est réduit à un point double ordinaire q_n. L'ouvert analytique $r^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} Y_n)$ est connexe et contenu dans $C-r^{-1}(V)$, donc il existe $p\in\overline{C}-V$ tel que $r^{-1}(\bigcup_{n\geq 1} Y_n)\subset\hat{r}^{-1}(p)$. Le point p étant régulier, on peut identifier $\hat{r}^{-1}(p)$ à $\{z\in k\,|\,|z|<1\}\subset\mathbb{P}^1_k$.

Pour tout $n\geq 1$, $r^{-1}(q_n)$ est une couronne ouverte de $\hat{r}^{-1}(p)$, $r^{-1}(Y_{n+1}-I_{n+1})$, où I_{n+1} est la réunion des composantes irréductibles de $\overline{X}$ différentes de Y_{n+1}, est une partie formelle d'un ouvert affinoïde de la forme $\{z\in k\,|\,|z|=|\pi|\}$ de $\hat{r}^{-1}(p)$. Il existe deux suites $(a_n)_{n\geq 1}$, $(\pi_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de k^{oo} telles que pour tout $n\geq 1$, $a_n\in r^{-1}(q_{n+1})$,

$$r^{-1}(q_n)=\{z\in k\,|\,|\pi_n|>|z-a_n|>|\pi_{n+1}|\},$$

et

$$r^{-1}(Y_{n+1}-\{q_n,q_{n+1}\})\subset\{z\in k\,|\,|z-a_{n+1}|=|\pi_{n+1}|\}.$$

On a donc une suite décroissante de disques ouverts $(B(a_n,\pi_{n+1}))_{n\geq 1}$ et il est facile de voir que $\bigcap_{n\geq 1} B(a_n,\pi_{n+1})$ ne rencontre pas X.

Comme k est maximalement complet, cette intersection est un disque fermé de rayon $\lim_{n\to\infty}|\pi_n|$, comme X est dense dans C^{an}, on a $\lim_{n\to\infty}|\pi_n|=0$.
Or la valeur absolue de l'angle (Y_n,Y_{n+1}) est égale à $|\pi_{n+1}\pi_n^{-1}|$, il suit que le produit des valeurs absolues des angles de la demi-droite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est nul.

Pour le dernier théorème, nous aurons besoin de la technique de l'extension du corps de base.

Soient K un corps valué complet, k un sous-corps fermé, A une k-algèbre affinoïde, $R=\mathrm{Spm}A$. Alors par définition $R_{(K)}=\mathrm{Spm}(A\hat{\otimes}_k K)$ où $A\hat{\otimes}_k K$ est le séparé complété pour la semi-norme tensorielle de $A\otimes_k K$. Si X est un k-espace analytique séparé, on peut définir de façon canonique un K-espace analytique séparé $X_{(K)}$ ([B,G,R], p 370). Si $\{R_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement admissible affinoïde de X, alors $\{R_{i(K)}\}_{i\in I}$ est un recouvrement admissible affinoïde de $X_{(K)}$.

LEMME 5.4. *Soient k un corps valué complet, algébriquement clos, K la clôture maximalement complète de k, X un k-espace analytique séparé et réduit. Alors on a les propriétés suivantes.*

a) *Soient E,F deux k-espaces vectoriels normés complets,* $c\in]0,1]\subset\mathbb{R}$, $\{e_i\}_{i\in J}$ *une base c-normale de E avec J dénombrable. Alors pour tout* $z\in E\hat{\otimes}_k F$, *il existe* $f_i\in F, i\in I$ *uniques tels que*

$$\lim_{i\to\infty}\|e_i\|\|f_i\|=0,\quad c\max_{i\in J}\|e_i\|\|f_i\|\leq\|z\|\leq\max_{i\in J}\|e_i\|\|f_i\|$$

et

$$z=\sum_{i\in J}e_i\otimes f_i$$

($\|z\|$ *est la norme tensorielle de* z).

b) *Le corps K est algébriquement clos et* $\overline{K}=\overline{k}$. *Si* $r:X\to\overline{X}$ *est la réduction de X selon un recouvrement pur* $\mathcal{U}=\{R_i\}_{i\in I}$, $s:X_{(K)}\to\overline{X_{(K)}}$ *la réduction de* $X_{(K)}$ *selon le recouvrement pur* $\mathcal{U}_{(K)}=R_{i(K)}\}_{i\in I}$, *alors* $\overline{X}=\overline{X_{(K)}}$ *et pour tout* $p\in\overline{X}$, *on a* $r^{-1}(p)_{(K)}=s^{-1}(p)$.

c) *Si X est réduit, irréductible, séparé, de dimension 1 et de genre fini, alors il en est de même pour* $X_{(K)}$. *Si de plus* $\mathcal{O}(X)^0=k^0$, *alors* $\mathcal{O}(X_{(K)})^0=K^0$.

Preuve. a) C'est élémentaire.

b) Les propriétés concernant K et $\overline{K}$ sont immédiates. Si A est une k-algèbre affinoïde réduite, comme k est algébriquement clos, A est distinguée donc admet une base normale dénombrable, il résulte de a) que $\overline{A\hat{\otimes}_k K}=\overline{A}\otimes_{\overline{k}}\overline{K}=\overline{A}$. Par conséquent $\mathcal{U}_{(K)}=\{R_{i(K)}\}_{i\in I}$ est un recouvrement pur de X×K et $\overline{X}=\overline{X_{(K)}}$ où $\overline{X}$ (resp. $\overline{X_{(K)}}$) est la réduction de X (resp. $X_{(K)}$) selon le recouvrement pur $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}_{(K)}$).

Soit V un ouvert affine de $\overline{X}$ contenant p, soient m_p l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\overline{X}}(V)$ correspondant au point p, $f_1,\dots,f_n\in\mathcal{O}(r^{-1}(V))^0$ tels que $\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_n$ engendrent m_p. On a

$$r^{-1}(p)=\{x\in r^{-1}(V)\,\big|\,|f_i(x)|<1,\ 1\leq i\leq n\}.$$

Soit $(\pi_m)_{m\geq 1}$ une suite d'éléments de k^{00} telle que $\lim_{m\to\infty}|\pi_m|=1$, on pose $S_m=\{x\in r^{-1}(V) \,|\, |f_i(x)|\leq|\pi_m|,\ i\leq n\}$. Alors $\{S_m\}_{m\geq 1}$ est un recouvrement admissible affinoïde de $r^{-1}(p)$, donc $\{S_{m(K)}\}_{m\geq 1}$ est un recouvrement admissible affinoïde de $r^{-1}(p)_{(K)}$. Comme

$$S_{m(K)}=\{x\in r^{-1}(V)_{(K)} \,|\, |f_i\otimes 1(x)|\leq|\pi_m|,\ 1\leq i\leq n\}$$

([B.G.R] proposition 1, p 369), on a

$$r^{-1}(p)_{(K)}=\{x\in r^{-1}(V)_{(K)} \,|\, |f_i\otimes 1(x)|<1,\ 1\leq i\leq n\},$$

or les fonctions $\overline{f_i\otimes 1}\in\overline{\mathcal{O}(r^{-1}(V)_{(K)})}=\overline{\mathcal{O}(V)}$ engendrent l'idéal maximal m_p de $\overline{\mathcal{O}(r^{-1}(V)_{(K)})}$ associé au point $p\in\overline{r^{-1}(V)_{(K)}}=\overline{s^{-1}(V)}^c$, donc $r^{-1}(p)_{(K)}=s^{-1}(p)$.

c) Si X est projectif, il existe une courbe projective C sur k telle que $X=C^{an}$, il est alors facile de voir que $X_{(K)}=(C_{(K)})^{an}$ où $C_{(K)}\overset{déf}{=}C\times_{Spk}SpK$. Comme k est algébriquement clos, $C_{(K)}$ est une courbe projective sur K, on a donc les propriétés énoncées.

Supposons maintenant X non projectif. On sait (proposition 4.2, corollaire 1.2) que X admet un recouvrement admissible $\{R_n\}_{n\geq 1}$ avec $R_n\subset R_{n+1}$ et R_n affinoïde irréductible. Pour tout $n\geq 1$, $\mathcal{O}(R_n)$ est intègre, donc $\mathcal{O}(R_{n(K)})=\mathcal{O}(R_n)\hat{\otimes}K$ aussi ([B3] Satz 2.3, p 137). Il suit que $X_{(K)}$, qui admet un recouvrement admissible $\{R_{n(K)}\}_{n\geq 1}$, est réduit séparé, irréductible. Comme $\overline{R_{n(K)}}^c=\overline{R}_n^c$, on a $\dim(X_{(K)})=1$ et $g(X_{(K)})=g(X)$.

Supposons que X vérifie en plus $\mathcal{O}(X)^0=k^0$. Soit $f\in\mathcal{O}(X_{(K)})^0$, on pose $f_n=f|_{R_{n(K)}}$. Pour tout $n\geq 1$, on a

$$f_n=\lim_{i\to\infty}\sum_{1\leq j\leq i} g_{n,j}\otimes\lambda_{n,j}$$

avec $g_{n,j}\in\mathcal{O}(R_n)$, $\lambda_{n,j}\in K$ et $\lim_{j\to\infty}\|g_{n,j}\|_{sp}|\lambda_{n,j}|=0$.

Soit E le sous-espace vectoriel fermé de K engendré par les $\lambda_{n,j}$, $n\geq 1$, $j\geq 1$. Il suit que $f_n\in\mathcal{O}(R_n)\hat{\otimes}_k E\subset\mathcal{O}(R_n)\hat{\otimes}_k K$. Soit $c\in]0,1[\subset\mathbb{R}$, E étant de type dénombrable, il admet une base c-normale $(e_j)_{j\geq 1}$. On peut supposer $|e_j|\geq c$ pour tout $j\geq 1$.

D'après a), il existe $f_{n,j}$ uniques tels que $\lim_{j\to\infty}\|f_{n,j}\||e_j|=0$, $f_n=\sum_{j\geq 1} f_{n,j}\otimes e_j$ et $c.\max_{j\geq 1}|e_j|\,\|f_{n,j}\|\leq\|f_n\|$.

Si $m<n$, on a

$$\sum_{j\geq 1} f_{m,j}\otimes e_j = f_m = f_n|_{R_m(K)} = \sum_{j\geq 1} f_{n,j}|_{R_m}\otimes e_j,$$

donc $f_{n,j}|_{R_m}=f_{m,j}$, il existe $g_j\in\mathcal{O}(X)$ tel que $g_j|_{R_n}=f_{n,j}$ pour tout $n\geq 1$. Or $c|e_j|\|f_{n,j}\|\leq\|f_n\|\leq 1$, donc $\|f_{n,j}\|\leq c^{-2}$, il suit que $c^2g_j\in\mathcal{O}(X)^0=k^0$, donc $g_j\in k$, donc $f_{n,j}\in k$, d'où $f_n\in K$ et $f\in K$.

THEOREME 4. *Soient* k *un corps valué complet, algébriquement clos,* X *un* k*-espace analytique réduit, séparé, de dimension* 1 *et de genre fini. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

i) Il existe une courbe projective C *sur* k *telle que* X *soit ouvert analytique de* C^{an} *et que* $C^{an}-X$ *soit compact (pour la topologie ordinaire sur* C^{an}*).*

ii) L'espace analytique X *est irréductible et* $\mathcal{O}(X)^0=k^0$.

iii) L'espace analytique X *est irréductible et pour toute réduction* $r:X\to\overline{X}$ *préstable en dehors d'un ouvert affine de* $\overline{X}$, *le produit des valeurs absolues des angles de toute demi-droite infinie de* $\overline{X}$ *est nul et les composantes irréductibles de* $\overline{X}$ *sont complètes.*

Preuve. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Montrons d'abord que X est irréductible. On peut supposer que les points de $C^{an}-X$ sont réguliers. Donc tout point de $C^{an}-X$ est contenu dans un ouvert affinoïde de C^{an} isomorphe à $\mathbb{B}^1_k$, comme $C^{an}-X$ est compact, il existe $D_1,\dots,D_n$ des ouverts affinoïdes isomorphes à $\mathbb{B}^1_k$ tels que $C^{an}-X\subset\bigcup_{1\leq i\leq n}D_{i,+}$ où $D_{i,+}$ est un disque ouvert de D_i, de même rayon que D_i. On peut supposer que $C^{an}\neq D_1\cup\dots\cup D_n$, donc si $D_i\cap D_j\neq\emptyset$, alors $D_i\cup D_j$ est un espace affinoïde connexe (théorème 0.4 il est ouvert affinoïde d'une courbe projective non-singulière C_{ij}, si $g(C_{ij})=0$, alors $C_{ij}=\mathbb{P}^1_k$, donc $D_i\subset D_j$ ou $D_j\subset D_i$. Si $g(C_{ij})\geq 1$ on a le même résultat ([B,L] proposition 5.4). On peut donc supposer les D_i deux à deux disjoints.

Soit $R=D_1\uplus\dots\uplus D_n$, d'après la proposition 1.6, C^{an} admet une réduction $s:C^{an}\to\overline{C}$ telle que $s|_R$ soit la réduction canonique de R et que $\overline{R}^c$ soit dense dans $\overline{C}$. On a $\overline{R}^c=\overline{D}^c_1\cup\dots\cup\overline{D}^c_n$, soit p_i le point de $\overline{D}^c_i$ correspondant à la fibre formelle $D_{i,+}$, alors $V=\overline{C}-\{p_1,\dots,p_n\}$ est un ouvert affine de $\overline{C}$, de même genre que $\overline{C}$. Il suit que $r^{-1}(V)$ est un ouvert affinoïde de C^{an}, de même genre que C^{an}, comme $r^{-1}(V)\subset X$, on a $g(X)=g(C)$, donc X est irréductible d'après la proposition 4.2.

Soit $f_i \in \mathcal{O}(D_i)^0$ tel que $\mathcal{O}(D_i)=k\langle f_i\rangle$ et $D_{i,+}=\{x\in D_i \,\|\, |f_i(x)|<1\}$. Soit $g\in\mathcal{O}(X)^0$. Pour tout $\varepsilon\in k^{00}-\{0\}$, il existe des disques ouverts $B_1,\ldots,B_s$ de $D_{1,+}$, deux à deux disjoints, de rayon $|\varepsilon|$, tels que $X\cap D_{1,+}\supset W=D_1-\bigcup_{1\leq i\leq s} B_i$. Soit $\lambda_i\in k^{00}$ tel que $B_i=\{x\in D_1 \,\|\, |f_1(x)-\lambda_i|<|\varepsilon|\}$, on a

$$g|_W = \alpha_0+\sum_{j\geq 1}\alpha_j f_1^j+\sum_{s\geq i\geq 1}\sum_{j\geq 1}\alpha_{ij}\left(\frac{\varepsilon}{f_1-\lambda_i}\right)^j$$

où $\alpha_0\in k^0,\alpha_j\in k^0,\alpha_{ij}\in k^0$. Soit $S_1=\{x\in D_1 \,\|\, |f_1(x)|=1\}$, alors

$$g|_{S_1} = \alpha_0+\sum_{j\geq 1}\alpha_j f_1^j+\sum_{j\geq 1}\alpha'_j\frac{1}{f_1^j}$$

avec $\alpha'_j\in\varepsilon k^0$. Comme il y a unicité de cette écriture et que $g|_{S_1}$ ne dépend pas de ε, on a $\alpha'_j=0$ pour tout $j\geq 1$, donc $g|_{S_1}$ se prolonge en une fonction $g_1\in\mathcal{O}(D_1)$. De même, pour tout $i\leq n$, la restriction de g à $\{x\in D_i \,\|\, |f_i(x)|=1\}$ se prolonge en une fonction $g_i\in\mathcal{O}(D_i)$.

L'ouvert $C^{an}-\dot{\bigcup}_{1\leq i\leq n} D_{i,+}=r^{-1}(V)$ est affinoïde, les fonctions $g|_{r^{-1}(V)},g_1,\ldots,g_n$ se recollent en une fonction $\lambda\in\mathcal{O}_{C^{an}}(C^{an})=k$, d'où $g\in k^0$ et $\mathcal{O}(X)^0=k^0$.

ii) ⇒ *iii)*. C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.6 et du lemme 5.4.

iii) ⇒ *i)*. Soit $r:X\to\overline{X}$ une réduction de X telle qu'il existe un ouvert affine V de $\overline{X}$ avec $\overline{X}-V$ préstable. On reprend la démonstration du théorème 3 avec les mêmes notations, pour tout $i\leq n$, Y_i (qui est défini dans la même démonstration) est un k-espace analytique connexe, régulier, séparé, de dimension 1, de genre 0 et admet une réductible préstable $\overline{Y}_i$ qui est la réunion de F_i (défini dans la démonstration citée ci-dessus) avec une composante irréductible isomorphe à $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$. D'après la proposition 5.4, il existe un isomorphisme φ_i de Y_i sur un ouvert analytique de $\mathbb{P}^1_k$ tel que $\mathbb{P}^1_k-\varphi_i(Y_i)$ soit compact. Par conséquent $D_i-\varphi_i(X_i)$ est compact. D'autre part la réduction de Y selon le recouvrement pur $\mathcal{V}$ est la réunion de F avec un nombre fini de composantes irréductibles isomorphes à $\mathbb{P}^1_{\bar{k}}$, donc elle est complète, Y est donc projectif, il est irréductible parce qu'il est connexe et admet un recouvrement admissible par des ouverts affinoïdes irréductibles, donc Y est l'analytifié d'une courbe projective sur k. Enfin, $X=R_0 \cup \bigcup_{1\leq i\leq n} X_i$ est isomorphe à un ouvert analytique de Y dont le complémentaire dans Y est compact.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] S. BOSCH, *Zur Kohomologietheorie rigid analytischer Räume*, Manuscripta math. 20 (1977), 1-27.

[B2] S. BOSCH, *Eine bemerkenswerte Eigenschaft der formellen Fasern affinoider Räume*, Math. Ann. 229, 25-45 (1977).

[B3] S. BOSCH, *k-affinoide Gruppen*, Inv. Math. 10, p 128-176 (1970).

[B,G.R] S. BOSCH, U. GÜNTZER, R. REMMERT, *Non-archimedian analysis*, Grund. der Math. 261, Springer Verlag, 1984.

[B,L] S. BOSCH, W. LUTKEBOHMERT, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties* I, Math. Ann. 270 (1985), 349-379.

[F] J. FRESNEL, *Géométrie analytique rigide*, Polycopié, Université de Bordeaux I, 1984.

[F,M] J. FRESNEL, M. MATIGNON, *Structure des espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1 sur un corps valué, complet, ultramétrique*, à paraître dans Annali di mathematica pura ed applicata.

[F,P] J. FRESNEL, M. van der PUT, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progress in Math 18, Birkaüser, 1981.

[G,P] L. GERRITZEN, M. van der PUT, *Schottky groups and Mumford curves*, L.N. 817, Springer Verlag, 1980.

[Ki] R. KIEHL, *Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie*, Invent. Math. 2 (1967), 256-273.

[Kö] U. KÖPF, *Über eigentlighe Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räume*, Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, 2, Série Heft 7 (1964).

[M] A.F. MONNA, *Analyse non-archimédienne*, Erg. der Math. 56. Springer (1970).

[Mo] Y. MORITA, *On the induced h-structure on an open subset of the rigid analytic space* $\mathbb{P}^1(k)$, Math. Ann. 242 (1979), 47-58.

[P1] M. van der PUT, *Stable reductions of algebraic curves*, Proc. Konik. Ned. Ak. Série A, Vol. 87 (1984), 461-478.

[P2] M. van der PUT, *The class group of a one-dimensional affinoïd space*, Ann. Inst. Fourier, n°4 (1980), 155-164.

[S] J.-P. SERRE, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 1-42.