THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE DE BORDEAUX

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

PRÉSENTÉE PAR

Marouane Assal

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Analyse spectrale des systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels

Spectral Analysis of systems of h-pseudodifferential operators

Directeur de thèse: Mouez Dimassi

Soutenue publiquement le 12 Mai 2017 devant le jury composé de

Alain Bachelot	Professeur à l'Université de Bordeaux	Président du jury
Thierry Jecko	MC HDR à l'Université de Cergy-Pontoise	Rapporteur
Karel Pravda-Starov	Professeur à l'Université de Rennes 1	Rapporteur
Jean-François Bony	CR CNRS à l'Université de Bordeaux	Examinateur
Vesselin Petkov	Professeur émérite à l'Université de Bordeaux	Examinateur
Xue-Ping Wang	Professeur à l'Université de Nantes	Examinateur
Maher Zerzeri	MC à l'Université Paris 13	Examinateur

Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251

Analyse spectrale des systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels

Spectral analysis of systems of h-pseudodifferential operators

Marouane Assal

Thèse de Mathématiques pures
Mai 2017

À la mémoire de ma grand-mère
À mes parents

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements et ma profonde gratitude vont à Mouez Dimassi, mon directeur de thèse, qui tout au long de ces années de thèse, m'a guidé dans mes recherches dans un climat détendu et chaleureux. Je le remercie pour sa disponibilité sans faille, sa patience et pour tous qu'il m'a apporté tant sur le plan scientifique qu'humain. Ses conseils avisés, son soutien permanent et ses remarques pertinentes ont été déterminants dans l'avancée de ma thèse. Merci de m'avoir donné cette chance d'intégrer le domaine de la recherche et d'avoir partagé avec moi votre culture mathématique avec une grande générosité et une passion admirable.

Je tiens ensuite à remercier mes rapporteurs, Thierry Jecko et Karel Pravda-Starov, pour leur relecture minutieuse de mon manuscrit et pour l'intérêt qu'ils portent à mes travaux. Je les remercie pour leur gentils efforts et leur remarques précieuses.

Je voudrais également exprimer toute ma reconnaissance à Alain Bachelot pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Mes remerciements s'adressent également à Jean-François Bony, Vesselin Petkov, Xue-Ping Wang et Maher Zerzeri d'avoir accepter d'être membre de mon jury de thèse.

Je voudrais particulièrement remercier Jean-François Bony pour nos nombreux échanges mathématiques et dans plein d'autres sujets. Nos nombreuses discussions ont été d'une aide considérable dans mes activités de recherche et les mots ne peuvent que me manquer pour exprimer ma gratitude envers lui. Je tiens aussi à remercier Setsuro Fujiié pour notre collaboration scientifique qui m'a beaucoup apportée et de m'avoir donner la chance de visiter l'Université de Ritsumeikan en Mai 2016. L'occasion pour moi de remercier Takuya Watanabe pour son accueil chaleureux au Japon.

Je garde un bon souvenir de ma rencontre avec Maher Zerzeri à l'occasion du GDR dynamique quantique à Grenoble. Je suis très heureux qu'il fasse partie de mon jury et je le remercie pour ses conseils précieuses.

Je remercie chaleureusement l'Institut de Mathématiques de Bordeaux pour l'accueil et les conditions du travail. Merci à tout les membres de l'IMB et plus particulièrement aux membres du groupe EDP et Physique Mathématique de m'avoir donner l'occasion d'exposer mes travaux à plusieurs reprises. J'en profite pour adresser un salut amical aux thésard de l'IMB que j'ai côtoyé pendant ces années de thèse, Diomba, Clément, Francesco, Stefano, Benjamin, Nikola, Duc-Trung, Olivier, Elsa, Mehdi, Marc-Adrien et la liste est longue ! Je remercie également mes amis proches en dehors du laboratoire avec qui j'ai passé des moments agréables, je pense particulièrement à mes amis "physiciens" Dima, Karim, Mohamed et Racine.

Je remercie ma famille, mon père et ma mère qui nous ont toujours donné le meilleur au prix de nombreux sacrifices, mes frères Mehdi et Meher, et ma petite soeur May, pour leur soutien et leur confiance. Je veux, en particulier, dédier ce travail à la mémoire de ma grand-mère Saida, qui nous a toujours poussé à donner le meilleur dans les études et dans la vie en général. Je remercie également mon oncle Rachid et sa femme Besma pour leur générosité pendant mes premières années à Monastir, et mon oncle Mohamed pour sa présence à ma soutenance. Merci enfin à Marie-Line pour son soutien constant et à sa famille pour leur accueil en leur sein.

Mes derniers remerciements vont à mes enseignants en Licence et en Master à la faculté des sciences de Monastir, et plus particulièrement Leila Ben Abdelghani à qui je dois ma participation au projet qui finance cette thèse.

Cette thèse a été financée par le projet de la commission européenne *Erasmus Mundus Green IT*.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous nous intéressons à l'analyse spectrale des systèmes d'opérateurs pseudodifférentiels semi-classiques. Dans la première partie, nous étudions la généralisation du théorème d'Egorov en temps longs dans le cas où l'Hamiltonien quantique qui génère l'évolution en temps et l'observable quantique initiale sont deux opérateurs pseudodifférentiels semi-classiques associés à des symboles à valeurs matricielles. Sous une condition d'hyperbolicité sur le symbole principal de l'Hamiltonien qui assure l'existence des projecteurs semi-classiques, et pour une classe d'observables "semi-classiquement" diagonales par blocs par rapport à ces projecteurs, nous démontrons un théorème de type Egorov valable pour un temps long d'ordre $\log(h^{-1})$ connu comme le temps d'Ehrenfest. Ici $h \searrow 0$ est le paramètre semi-classique.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à la théorie spectrale et la théorie de la diffusion pour des systèmes d'opérateurs pseudodifférentiels auto-adjoints. Nous développons une approche stationnaire pour l'étude de la fonction de décalage spectral associée à une paire d'opérateurs de Schrödinger semi-classiques à potentiels matriciels. Une asymptotique de type Weyl avec reste optimal sur la fonction de décalage spectral est établie, et sous l'hypothèse d'existence d'une fonction fuite scalaire, un développement asymptotique complet en puissances de h au sens fort sur sa dérivée est obtenu. Ce dernier résultat est une généralisation au cas matriciel d'un résultat de Robert et Tamura établi dans le cas scalaire près des énergies non-captives. Notre méthode indépendante du temps nous permet de traiter certains potentiels avec des croisements des valeurs propres.

Mots-clés : systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels, théorème d'Egorov en temps longs, fonction de décalage spectral, opérateurs de Schrödinger à potentiels matriciels, formules de trace, asymptotiques spectrales, fonction fuite.

ABSTRACT

In this work, we are interested in the spectral analysis of systems of semiclassical pseudodifferential operators. In the first part, we study the extension of the long time semiclassical Egorov theorem in the case where the quantum Hamiltonian which generates the time evolution and the initial quantum observable are two semiclassical pseudodifferential operators with matrix-valued symbols. Under an hyperbolicity condition on the principal symbol of the Hamiltonian which ensures the existence of the semiclassical projections, and for a class of observable that are "semi-classically" block-diagonal with respect to these projections, we prove an Egorov theorem valid in a large time interval of order $\log(h^{-1})$ known as the Ehrenfest time. Here $h \searrow 0$ is the semiclassical parameter.

In the second part, we are interested in the spectral and scattering theories for self-adjoint systems of pseudodifferential operators. We develop a stationary approach for the study of the spectral shift function (SSF) associated to a pair of self-adjoint semiclassical Schrödinger operators with matrix-valued potentials. We prove a Weyl-type asymptotics with sharp remainder estimate on the SSF, and under the existence of a scalar escape function, a pointwise complete asymptotic expansion on its derivative. This last result is a generalisation in the matrix-valued case of a result of Robert and Tamura established in the scalar case near non-trapping energies. Our time-independent method allows us to treat certain potentials with energy-level crossings.

Keywords : systems of h-pseudodifferential operators, long time Egorov theorem, spectral shift function, Schrödinger operators with matrix-valued potentials, trace formulas, spectral asymptotics, escape function.

TABLE DES MATIÈRES

0 INTRODUCTION

Sommaire

0.1 SYSTÈMES D'OPÉRATEURS h-PSEUDODIFFÉRENTIELS EN PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Les opérateurs h-pseudodifférentiels sont des outils de base dans la formulation et l'étude de plusieurs problèmes de physique mathématique. Selon les contraintes du problème étudié, ces opérateurs sont généralement définis à l'aide d'un procédé de quantification (habituellement la quantification de Weyl, voir (1.1.1)) à partir des symboles à valeurs scalaires, réelles pour les problèmes auto-adjoints et complexes dans le cadre non auto-adjoint. Néanmoins, plusieurs problèmes font appel à des opérateurs h-pseudodifférentiels associés à des symboles à valeurs matricielles. On parle dans ce cas des systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels. Malgré la multitude des problèmes et de situations où on est amené à étudier des systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels, nous rappelons dans ce premier paragraphe quelques exemples bien connus dans la littérature.

1. Une situation typique se produit lorsqu'on étudie un système mécanique quantique relativiste gouverné par l'Hamiltonien de Dirac

$$D(h) := \sum_{j=1}^{3} \alpha_j h D_{x_j} + \alpha_4 + V(x), \quad D_{x_j} := -i\partial_{x_j} \tag{0.1.1}$$

où $h > 0$ est un petit paramètre appelé le paramètre semi-classique, $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ sont les matrices de Dirac 4×4 satisfaisant certaines propriétés d'anti-commutation (voir par exemple [20]) et $V(x)$ est l'opérateur de multiplication par une fonction régulière hermitienne $V : \mathbb{R}^3 \to M_4(\mathbb{C})$. L'opérateur $D(h)$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole matriciel 4×4

$$d(x, \xi) := \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \xi_j + \alpha_4 + V(x), \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

Ici et dans toute la suite $M_m(\mathbb{C})$ désigne l'espace des matrices carrées $m \times m$ à coefficients complexes. L'étude des propriétés dynamiques et spectrales de l'opérateur de Dirac (0.1.1) a fait l'objet de plusieurs travaux, voir par exemple [114, 20, 18, 7, 76].

2. Une autre situation importante dans la chimie moléculaire est l'approximation de Born-Oppenheimer ([26, 57, 74]) introduite en 1927 afin de décrire la dynamique des systèmes moléculaires : les systèmes mécaniques quantiques composés de deux types de particules, des particules lourdes tel que les noyaux et des particules légères tel que les électrons. Il a été établi dans plusieurs travaux (voir [57, 115]) que l'étude de cette approximation se réduit à l'étude de l'équation de Schrödinger dépendante du temps

$$\begin{cases} ih\partial_t\psi(t,x;h) &= \left(-h^2\Delta\otimes I_m + V(x)\right)\psi(t,x;h) \\ \psi(0,x;h) &= \psi_0(x;h)\in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m) \end{cases} \tag{0.1.2}$$

où I_m est la matrice identité $m \times m$ et $V : \mathbb{R}^n \to M_m(\mathbb{C})$ est un potentiel régulier hermitien. Nous sommes donc en présence d'un système d'opérateurs h-pseudodifférentiels

$$P(h) := -h^2\Delta\otimes I_m + V(x)$$

dont l'Hamiltonien classique associé est le symbole hermitien $m \times m$

$$p(x,\xi) := \xi^2 I_m + V(x), \quad (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}. \tag{0.1.3}$$

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de l'équation de Schrödinger (0.1.2) dans des cadres linéaires et d'autres non-linéaires dont nous citons quelques uns dans la suite. Pour d'autres travaux portant sur l'étude des propriétés spectrales (résonances, fonction de comptage des valeurs propres, principe d'absorption limite, ...) des opérateurs de Schrödinger à potentiels matriciels, voir [51, 89, 73, 72, 4], etc. Dans la deuxième partie de cette thèse, nous serons intéressés par la théorie de diffusion des opérateurs de Schrödinger à potentiels matriciels.

3. Il existe aussi d'autres situations où le problème est initialement posé pour des opérateurs scalaires et on se ramène à l'étude d'un système d'opérateurs h-pseudodifférentiels. On pense ici à des problèmes périodiques tels qu'étudiés dans [54, 38, 37]. Le problème initial étant d'étudier des perturbations des opérateurs périodiques, typiquement de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$, où V est un potentiel périodique par rapport à un réseau de $\mathbb{R}^n$, et par la méthode de l'approximation de l'Hamiltonien effectif, l'étude du spectre de l'opérateur perturbé près d'un niveau d'énergie $z_0 \in \mathbb{R}$ fixé se réduit à l'étude d'un système d'opérateurs h-pseudodifférentiels dépendant d'une façon implicite du paramètre spectral.

0.2 PARTIE I : THÉORÈME D'EGOROV EN TEMPS LONGS POUR DES SYSTÈMES D'OPÉRATEURS h-PSEUDODIFFÉRENTIELS

L'approximation semi-classique

Connue sous le nom du principe de correspondance en physique et Théorème d'Egorov en mathématique, l'approximation semi-classique assure la transition entre les évolutions quantiques et classiques des observables. Depuis sa fondation au début du siècle précédent, la mécanique quantique est interprétée comme une déformation par un procédé de quantification de la mécanique classique dont le paramètre de déformation est la constante de Planck [50]. De cette interprétation surgit un problème central qui peut être considérer comme l'un des problèmes les plus ancien de l'analyse semi-classique qui est l'étude de la relation entre les deux mécaniques. Le point de départ est le fameux principe de correspondance proposé par Niels Bohr en 1920 [13] qui stipule qu'on devrait retrouver les formules de la mécanique classique à partir de celles de la mécanique quantique lorsque la constante de Planck devient négligeable. D'une façon imprécise, on dit que la mécanique classique est la limite de la mécanique quantique quand la constante de Planck tends vers zéro. Depuis plusieurs années, l'approximation semi-classique a fait l'objet de plusieurs travaux mathématiques basés essentiellement sur deux approches :

• *Propagation des états cohérents :* La première consiste à étudier la propagation d'états cohérents ou paquets d'ondes en considérant l'équation de Schrödinger (0.1.2) avec une donnée initiale de type paquet d'onde et a pour but d'approximer la solution (la fonction d'onde) $\psi^h(t)$ par une combinaison linéaire de paquets d'ondes. On renvoie à [29, 59, 60, 97] pour des travaux concernant cette approche et à [28] pour une description des notions d'états cohérents et paquets d'ondes.

• *Évolution des observables :* La deuxième approche consiste à étudier l'évolution en temps d'une observable quantique $Q^w(x, hD_x)$ dans la représentation de Heisenberg donnée par

$$Q(t) := e^{\frac{it}{h}H^w(x,hD_x)}Q^w(x, hD_x)e^{-\frac{it}{h}H^w(x,hD_x)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

générée par un Hamiltonien quantique $H^w(x, hD_x)$. L'objectif est de construire une approximation de $Q(t)$ en termes d'opérateurs h-pseudodifférentiels et d'étudier sa validité par rapport au temps. L'étude de cette approche a fait l'objet de nombreux travaux dans le cas scalaire, i.e. lorsque $H^w(x, hD_x)$ et $Q^w(x, hD_x)$ sont deux opérateurs h-pseudodifférentiels associés à des symboles à valeurs scalaires réelles, voir par exemple [17, 8, 116, 102], et dans le cas matriciel lorsque $H^w(x, hD_x)$ et $Q^w(x, hD_x)$ sont deux systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels, voir [15, 70, 14, 18].

C'est cette deuxième approche dans le cadre matriciel des systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels qui sera notre principal interêt dans la première partie du présent travail de thèse.

Évolution en temps des observables classiques et quantiques

Évolution classique

Dans un système mécanique classique à n degrés de liberté, l'état d'une particule est entièrement déterminé par sa position et sa quantité de mouvement. On désigne par M l'ensemble des positions appelé aussi ensemble de configuration du système qui est dans le cadre général une variété riemanienne de dimension n. L'ensemble des états possibles du système est alors décrit par l'espace des phases T^*M qui, muni de sa structure symplectique canonique, est une variété symplectique de dimension $2n$.

Dans la suite, nous nous plaçons dans le cadre habituel où $M = \mathbb{R}^n$ et on identifie l'espace des phases avec $\mathbb{R}^{2n}$. On rappelle la forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$

$$\sigma(x,\xi;y,\zeta) := \langle J(x,\xi),(y,\zeta)\rangle, \quad J := \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall x,\xi,y,\zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{0.2.1}$$

Considérons un Hamiltonien classique $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ et notons $\mathscr{X}_H(x,\xi) := (\partial_\xi H(x,\xi), -\partial_x H(x,\xi))$ le champ de vecteurs Hamiltonien correspondant. L'évolution de l'état du système au cours du temps est déterminée par le système d'équations de Hamilton

$$\frac{d}{dt}X(t) = \mathscr{X}_H(X(t)), \quad X(t) := (x(t),\xi(t)). \tag{0.2.2}$$

Le système (0.2.2) génère un flot noté ϕ_H^t sur $\mathbb{R}^{2n}$ appelé flot Hamiltonien associé à H défini par

$$\phi_H^t(x = x(0), \xi = \xi(0)) = (x(t),\xi(t)), \quad \phi^t_{H_{|t=0}}(x,\xi) = (x,\xi).$$

Le domaine d'existence maximal de $\phi_H^t(x,\xi)$ dépend de la donnée initiale $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ (Théorème de Cauchy-Lipschitz) mais pour simplifier la discussion, on suppose dans ce paragraphe que $\phi_H^t(x,\xi)$ existe sur tout $\mathbb{R}$ pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.[1] Il est bien connu que ϕ_H^t est un symplectomorphisme sur $\mathbb{R}^{2n}$: ϕ_H^t préserve la forme symplectique σ, et vérifie $\phi_H^t \circ \phi_H^s = \phi_H^{t+s}$, pour tout $t,s \in \mathbb{R}$. De plus, deux propriétés importantes du flot classique sont la conservation du volume : ϕ_H^t préserve la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{2n}$ et la conservation d'énergie : pour toute énergie $\tau \in \mathbb{R}$, la surface d'énergie correspondante $\Sigma_\tau := H^{-1}(\tau)$ est stable par ϕ_H^t.

L'évolution en temps d'une observable classique $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ le long du flot ϕ_H^t donnée par la fonction $q_0(t,x,\xi) := Q \circ \phi_H^t(x,\xi)$, $t \in \mathbb{R}$, $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, est décrite par l'équation classique

$$\frac{d}{dt}q_0(t,x,\xi) = \{H,Q\} \circ \phi_H^t(x,\xi), \quad q_0(t,x,\xi)_{|t=0} = Q(x,\xi), \tag{0.2.3}$$

où $\{H,Q\}$ est le crochet de Poisson de H,Q défini par

$$\{H,Q\} := \partial_\xi H \cdot \partial_x Q - \partial_x H \cdot \partial_\xi Q. \tag{0.2.4}$$

Évolution quantique

Pour quantifier notre système classique, on fait appel à la théorie des opérateurs h-pseudodifférentiels définis par le procédé de quantification habituel qui est la quantification de Weyl (voir (1.1.1)). Il s'agit d'un procédé qui établit une correspondance entre les observables classiques et quantiques dans le sens où il permet d'associer à toute observable classique $A \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ (appartenant à une classe convenable de symboles quantifiables), une observable quantique $A^w(x,hD_x)$ auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie

1 Ceci est par exemple assuré en supposant que $\partial^\gamma_{(x,\xi)} H \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$, pour tout $|\gamma| \geqslant 2$ car dans ce cas $(x,\xi) \mapsto \mathscr{X}_H(x,\xi)$ est uniformément lipshitzienne sur $\mathbb{R}^{2n}$.

comme l'opérateur h-pseudodifférentiel correspondant. Les éléments de base de cette théorie seront rappelés dans le chapitre 1.

Soit $H^w := H^w(x, hD_x)$ l'Hamiltonien quantique auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ associé à H. La dynamique du système quantique est gouvernée par l'équation de Schrödinger

$$ih\frac{d}{dt}\psi(t) = H^w\psi(t). \tag{0.2.5}$$

Cette équation génère l'opérateur unitaire d'évolution $U_H(t) := e^{-\frac{it}{h}H^w}$, $t \in \mathbb{R}$. L'évolution en temps de l'observable quantique $Q^w := Q^w(x, hD_x)$ associée à Q donnée par

$$Q(t) := U_H(-t)Q^w U_H(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

est alors décrite par l'analogue quantique de l'équation (0.2.3) appelée équation de Heisenberg

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \frac{i}{h}\big[H^w, Q(t)\big], \quad Q(t)_{|t=0} = Q^w \tag{0.2.6}$$

où $\big[H^w, Q(t)\big] := H^w \circ Q(t) - Q(t) \circ H^w$ désigne le commutateur au sens des opérateurs.

Approximation semi-classique en temps finis - Théorème d'Egorov

Le théorème d'Egorov établit une approximation semi-classique pour $Q(t)$ en termes d'opérateurs h-pseudodifférentiels valable en temps finis. Au premier ordre semi-classique, cette approximation donnée par

$$\big\|Q(t) - \big(Q \circ \phi_H^t\big)^w(x, hD_x)\big\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \mathcal{O}(h),$$

uniformément pour $|t| \leqslant \bar{t}$, pour tout $\bar{t} > 0$, fournit une justification mathématique rigoureuse au principe de correspondance qui énonce que l'évolution quantique coïncide avec son analogue classique dans la limite semi-classique $h \searrow 0$. D'une façon générale, elle assure que $Q(t)$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole principal $Q \circ \phi_H^t$. Plus précisément, il existe une suite d'opérateurs h-pseudodifférentiels $(q_j(t)^w(x, hD_x))_{j \geqslant 0}$ uniformément bornés sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \quad \Big\|Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j q_j(t)^w(x, hD_x)\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \mathcal{O}(h^{N+1}), \tag{0.2.7}$$

uniformément pour $|t| \leqslant \bar{t}$, avec $q_0(t) = Q \circ \phi_H^t$. L'évolution en temps des symboles $(q_j(t))_{j \geqslant 1}$ est gouvernée par le flot Hamiltonien ϕ_H^t. En particulier, pour tout $j \geqslant 1$, le support de $q_j(t, \cdot, \cdot)$ est inclus dans le support de $q_0(t, \cdot, \cdot) = Q \circ \phi_H^t(\cdot, \cdot)$. La preuve de cette approximation est essentiellement basée sur la formule de composition des opérateurs h-pseudodifférentiels en combinant les équations (0.2.3) et (0.2.6), et l'estimation des restes résultant de cette composition. L'énoncé précis de ce résultat sera rappelé dans le chapitre 2.

Jusqu'ici, pour simplifier, nous avons considéré un Hamiltonien classique $H = H(x, \xi)$ indépendant de h. Cependant la discussion précédente reste valable dans le cas d'un

Hamiltonien semi-classique H admettant un développement asymptotique en puissances de h

$$H(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j H_j(x, \xi)$$

au sens des développements asymptotiques semi-classiques des symboles que nous rappellerons dans le chapitre 1. Dans ce cas l'évolution classique est gouvernée par le flot Hamiltonien $\phi^t_{H_0}$ associé au symbole principal H_0 de H. En particulier,

$$q_0(t) = Q \circ \phi^t_{H_0}.$$

Construction des symboles $(q_j(t))_{j \geqslant 0}$

Naturellement, la construction des symboles $(q_j(t))_{j \geqslant 0}$ est basée sur la résolution de l'équation de Heisenberg (0.2.6) au niveau des symboles dans l'espace des séries formelles de puissances de h. Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement les grandes lignes de cette construction qui sera utile dans la suite afin de pointer les difficultés qui se posent lorsque l'on veut étudier le cas matriciel.

Si on suppose que $Q(t)$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole $q(t)$ admettant un développement asymptotique en puissances de h

$$q(t) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j q_j(t)$$

alors au niveau des symboles, l'équation (0.2.6) s'écrit sous la forme

$$\frac{d}{dt} q(t) = \frac{i}{h} [H, q(t)]_{\#}, \quad q(t)_{|t=0} = Q, \tag{0.2.8}$$

où $[H, q(t)]_{\#} := H \# q(t) - q(t) \# H$, avec $H \# q(t)$ est le produit de Moyal de $H, q(t)$ défini comme le symbole de $H^w \circ Q(t)$ (voir chapitre 1). Par le calcul symbolique, le symbole $[H, q(t)]_{\#}$ admet un développement asymptotique en puissances de h

$$[H, q(t)]_{\#} \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j \left([H, q(t)]_{\#}\right)_j$$

où le symbole principal et le symbole sous-principal (par définition, les coefficients de h^0 et h^1, respectivement) sont donnés par

$$\left([H, q(t)]_{\#}\right)_0 = [H_0, q_0(t)] = 0 \quad \text{et} \quad \left([H, q(t)]_{\#}\right)_1 = \frac{1}{i} \{H_0, q_0(t)\}.$$

En identifiant les puissances égales de h des deux cotés dans (0.2.8), on dérive les problèmes de Cauchy suivants sur les $(q_j(t))_{j \geqslant 0}$,

$$(\mathscr{C}_j) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt} q_j(t) & = & (i[H, q(t)]_{\#})_{j+1} \\ q_0(t)_{|t=0} & = & Q, \quad q_j(t)_{|t=0} = 0, \forall j \geqslant 1. \end{array} \right. \tag{0.2.9}$$

Au niveau du symbole principal $q_0(t)$, le fait que $\left([H, q(t)]_{\#}\right)_0 = 0$ implique que le coefficient de h^0 dans le développement asymptotique de $\frac{i}{h}[H, q(t)]_{\#}$ coïncide avec le symbole sous-principal de $i[H, q(t)]_{\#}$ qui est égal à $\{H_0, q_0(t)\}$. Par conséquent, $(\mathscr{C}_0)$ devient

$$\frac{d}{dt} q_0(t) = \{H_0, q_0(t)\}, \quad q_0(t)_{|t=0} = Q,$$

et on obtient $q_0(t) = Q \circ \phi^t_{H_0}$. Les symboles $q_j(t)$, pour $j \geqslant 1$, s'obtiennent de la même manière en suivant cet algorithme.

Notons qu'on peut aussi considérer une observable semi-classique Q admettant un développement asymptotique en puissances de h, $Q(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j Q_j(x, \xi)$. Dans ce cas, on doit tenir compte de ce développement dans les données initiales en résolvant les problèmes de Cauchy (0.2.9) i.e. $q_j(t)_{t=0} = Q_j$, $j \geqslant 0$.

Approximation semi-classique jusqu'au temps d'Ehrenfest

L'approximation semi-classique donnée par le théorème d'Egorov est limitée aux évolutions en temps finis, i.e. t doit évoluer dans un intervalle borné. L'étude de sa validité pour des temps longs dépendants du paramètre semi-classique h a fait l'objet de nombreux travaux (voir [29] pour l'évolution en temps des états cohérents et [8, 17] pour l'évolution des observables). Ces travaux ont été basés sur une conjecture célèbre due au physiciens Chirikov [25] et Zaslavsky [118] qui stipule que l'approximation semi-classique reste valable dans un intervalle de temps d'ordre $\log(h^{-1})$ connu comme le temps d'Ehrenfest. Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, la preuve de l'approximation (0.2.7) repose essentiellement sur le calcul symbolique h-pseudodifférentiel et les estimations des restes dans la formule de composition. Au niveau des symboles (le passage aux opérateurs se fait en utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt, voir Théorème 1.3 dans le chapitre suivant), ces restes dépendent en effet des dérivées de H et de $Q \circ \phi^t_H$. Donc pour estimer leurs dérivées, il faut en particulier estimer les dérivées (en x, ξ) du flot ϕ^t_H qui en général croient exponentiellement en temps. L'exemple simple suivant illustre la nature logarithmique en h du temps maximal jusqu'au quel on s'attend que l'approximation semi-classique reste valable.

On considère l'Hamiltonien classique $H(x, \xi) = x \cdot \xi$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, et soit

$$\phi^t_H(x, \xi) = (e^t x, e^{-t} \xi), \quad t \in \mathbb{R},$$

le flot Hamiltonien correspondant. Pour une observable classique $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ bornée ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathbb{R}^{2n}$, le théorème d'Egorov nous dit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t)$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole

$$q(t, x, \xi; h) \sim Q(e^t x, e^{-t} \xi) + \sum_{j \geqslant 1} h^j q_j(t, x, \xi).$$

Comme le reste $q(t, x, \xi; h) - Q(e^t x, e^{-t} \xi)$ dépend des dérivées de $Q(e^t x, e^{-t} \xi)$ qui croient exponentiellement en t, alors il tend vers 0 quand $h \searrow 0$ seulement pour des temps d'ordre $\log(h^{-1})$, i.e. pour $|t| \leqslant \mathrm{Cste.} \log(h^{-1})$.

Dans [8], Bambusi, Graffi et Paul ont étudié le cas analytique, l'Hamiltonien H est supposé analytique dans un voisinage complexe de l'espace des phases. Ils ont montré des estimations sur le reste à tout ordre dans le développement asymptotique de $Q(t)$

uniformes pour $|t| \leqslant C_N \log(h^{-1})$, où $C_N > 0$ est une constante qui dépend de l'ordre N de l'approximation. Ces estimations ont été améliorées par Bouzouina et Robert [17] dans les cas C^∞ et analytiques permettant de prouver la validité de l'approximation semi-classique jusqu'au temps (optimal) $|t| < \frac{1}{2\Gamma}\log(h^{-1})$, où $\Gamma > 0$ est une constante qui contrôle la croissance exponentielle du flot classique à l'infini. L'ingrédient principal dans la preuve de cette validité dans [17] est une estimation exponentielle uniforme en temps du reste à tout ordre dans le développement asymptotique de $Q(t)$ que nous rappellerons dans le chapitre 2.

Le cas des systèmes

Dans le cas des systèmes où l'Hamiltonien $H \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j H_j$ et l'observable $Q \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j Q_j$ sont à valeurs matricielles dans $M_m(\mathbb{C})$, des résultats de type Egorov existent dans la littérature dans différents contextes et sous divers hypothèses sur H. Naturellement, la perte de commutativité induit plusieurs problèmes commençant dès la construction d'une solution asymptotique $q(t) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j q_j(t)$ de l'équation de Heisenberg (0.2.8). En effet, dans ce cas le symbole principal du commutateur de Moyal $[H, q(t)]_\#$ donné par le commutateur matriciel $[H_0, q_0(t)]$ n'est plus forcément nul. Donc au niveau du symbole principal, on a une équation de la forme

$$\frac{d}{dt} q_0(t) = \frac{i}{h}[H_0, q_0(t)] + \mathcal{O}(h^0), \quad q_0(t)_{|t=0} = Q_0. \tag{0.2.10}$$

Afin d'obtenir un algorithme permettant de construire une solution asymptotique $q(t) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j q_j(t)$, le facteur h^{-1} dans le membre de droite de l'équation précédente nous force d'assurer la commutativité entre H_0 et $q_0(t)$, pour tout temps t.

Cette condition est satisfaite dans le cas où le symbole principal H_0 est un multiple scalaire de l'identité, i.e. de la forme

$$H_0(x,\xi) = \lambda(x,\xi) I_m, \quad \text{avec} \quad \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}). \tag{0.2.11}$$

Ce cas a été étudié dans [18] (voir aussi [14, 70]) où un théorème d'Egorov valable en temps fini a été établi. Le symbole sous-principal H_1 joue un rôle important dans ce cas et affecte la structure de l'approximation construite. Pour voir cela, il faut passer au symbole sous-principal du commutateur de Moyal $[H, q(t)]_\#$ qui est dans ce cas donné par

$$\big([H, q(t)]_\#\big)_1 = -i\{\lambda, q_0(t)\} + [H_1, q_0(t)].$$

Par conséquent, le problème de Cauchy satisfait par $q_0(t)$ s'écrit

$$\frac{d}{dt} q_0(t) = \{\lambda, q_0(t)\} + i[H_1, q_0(t)], \quad q_0(t)_{|t=0} = Q,$$

et la solution est donnée par

$$q_0(t,x,\xi) = T^{-1}(t,x,\xi) Q(\phi_\lambda^t(x,\xi)) T(t,x,\xi),$$

où $\phi_\lambda^t : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ est le flot Hamiltonien généré par λ et $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to M_m(\mathbb{C})$ est solution du système différentiel

$$\frac{d}{dt} T(t,x,\xi) = -iH_1(\phi_\lambda^t(x,\xi)) T(t,x,\xi), \quad T(0,x,\xi) = I_m.$$

L'évolution en temps du symbole principal $q_0(t)$ (ou encore des symboles $(q_j(t))_{j\geqslant 1}$) n'est donc plus gouvernée seulement par le flot Hamiltonien ϕ_λ^t mais aussi par la fonction à valeurs matricielles T que nous allons voir dans la suite qu'elle est unitaire.

Dans le cas général où le symbole principal H_0 est à valeurs matricielles, la commutativité entre H_0 et $q_0(t)$ à l'instant $t = 0$ est équivalente à ce que Q_0 soit diagonale par blocs par rapport aux projecteurs propres associés à H_0, i.e.

$$Q_0(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_{\nu,0}(x,\xi)Q_0(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi), \tag{0.2.12}$$

où $P_{\nu,0} : \mathbb{R}^{2n} \to M_m(\mathbb{C})$ est le projecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_\nu : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ de H_0, $\ell \in \{1,...,m\}$. En se restreignant à des telles observables et en essayant de construire une approximation semi-classique pour $Q(t)$ (au moins au premier ordre semi-classique), l'intuition naturelle consiste à dire que l'évolution classique dans ce cas sera gouvernée par les flots Hamiltoniens générés par les valeurs propres $(\lambda_\nu)_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}$ de H_0 et des fonctions à valeurs matricielles qu'on note $(T_\nu(t))_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}$ analogues à T qui sont dues à la contribution du symbole sous-principal H_1 comme nous l'avons expliqué dans le cas particulier précédent. Ceci peut être justifié dans le cas où les valeurs propres de H_0 sont uniformément disjoints de multiplicités constantes sur $\mathbb{R}^{2n}$, i.e. sous une condition de "gap" sur ces valeurs propres qui assure leurs régularités et la régularité des projecteurs propres associés. Cependant dans le cas général, on sait que les valeurs propres de H_0 ne sont pas assez régulières sur l'ensemble là où les croisements éventuelles ont lieu et par conséquent les flots classiques correspondants ne sont pas toujours bien définis (voir [75]).

Dans [15], Bolte et Glaser ont étudié le cas d'un Hamiltonien matriciel hermitien

$$H(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j H_j(x,\xi) \quad \text{dans} \quad S(g;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$$

où $g : \mathbb{R}^{2n} \to [1,+\infty[$ est une fonction d'ordre (voir chapitre 1), sous l'hypothèse d'hyperbolicité suivante sur le symbole principal H_0 :

(A1). $H_0(x,\xi)$ admet $\ell \in \{1,...,m\}$ valeurs propres distinctes $\lambda_1(x,\xi) < \cdots < \lambda_\ell(x,\xi)$ de multiplicités constantes sur $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant la condition de "gap" suivante :

$$|\lambda_\mu(x,\xi) - \lambda_\nu(x,\xi)| \geqslant \rho\, g(x,\xi), \quad \text{pour} \ \ 1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell \ \ \text{et} \ \ |x|+|\xi| \geqslant c,$$

avec $c, \rho > 0$ deux constantes indépendantes de (x,ξ). Ils ont établi un théorème d'Egorov valable en temps finis. Un ingrédient important dans leur étude est la notion de projecteurs semi-classiques associés à $H^w(x, hD_x; h)$ dont l'existence est assurée par l'hypothèse **(A1)**. Cette notion ainsi qu'une observation simple motivant la construction de ces projecteurs sera expliquée dans le chapitre 2.

Notre objectif dans la première partie de cette thèse est d'établir une approximation semi-classique pour l'opérateur de Heisenberg $Q(t)$ sous l'hypothèse **(A1)** sur H_0 et de prouver sa validité pour des temps longs d'ordre $\log(h^{-1})$. Notre construction est différente de celle établie dans [15] et a l'avantage de permettre des estimations plus faciles sur les différentes quantités qu'on doit contrôler.

0.3 PARTIE II : FORMULE DE TRACE SEMI-CLASSIQUE POUR DES SYSTÈMES MICROHYERBOLIQUES ET APPLICATION À LA FONCTION DE DÉCALAGE SPECTRAL

Dans le cadre de la théorie spectrale et la théorie de diffusion des opérateurs h-pseudodifférentiels auto-adjoints, deux quantités importantes définies dans deux contextes différents et jouant des rôles analogues sont la fonction de comptage des valeurs propres et la fonction de décalage spectral.

Fonction de comptage des valeurs propres

On considère un opérateur h-pseudodifférentiel $P(h) := p^w(x, hD_x; h)$ auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de symbole réel $p(x,\xi;h) = p_0(x,\xi) + hp_1(x,\xi) + h^2p_2(x,\xi) + \cdots$, et on suppose que le spectre de $P(h)$ près d'un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, i.e. dans $[a-\eta, b+\eta]$, $\eta > 0$, est discret, consiste en une suite de valeurs propres isolées de multiplicités finies notées $\mu_1(h) \leqslant \mu_2(h) \leqslant \cdots \leqslant \mu_{N_h}(h)$, où l'on répète chaque valeur propre suivant sa multiplicité. Pour étudier la distribution asymptotique de ces valeurs propres, on introduit la fonction de comptage définie par

$$N_h(a,b) := \mathrm{Card}\,\{j;\ \mu_j(h) \in [a,b]\} = \mathrm{tr}\,(1_{[a,b]}(P(h))),$$

où $1_{[a,b]}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[a,b]$. Cette hypothèse sur le spectre de $P(h)$ est d'une façon générale satisfaite si $p_0^{-1}([a-\eta, b+\eta])$ est compact dans $\mathbb{R}^{2n}$ (voir [102, Proposition III.13]). Un exemple typique est donné par l'opérateur de Schrödinger semi-classique

$$P(h) := -h^2\Delta + V(x), \quad \text{avec } V \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})\,;\ V(x) \to_{|x|\to+\infty} 0, \quad \text{et} \quad a < b < 0.$$

L'étude du comportement asymptotique semi-classique de $N_h(a,b)$ associée à différents types d'opérateurs a fait l'objet de plusieurs travaux, voir par exemple [24, 61, 62, 99, 102, 70]. La fonction indicatrice $1_{[a,b]}$ n'étant pas régulière, l'étude de $N_h(a,b)$ se fait habituellement en passant par la distribution $C_0^\infty([a-\eta, b+\eta];\mathbb{R}) \ni f \mapsto \mathrm{tr}\,(f(P(h)))$. Comme conséquence du calcul fonctionnel h-pseudodifférentiel, la loi de Weyl semi-classique (voir par exemple [41, ch. 8])

$$N_h(a,b) = (2\pi h)^{-n}\left(\iint_{p_0^{-1}([a,b])} dx\,d\xi + o(1)\right), \quad h \searrow 0, \tag{0.3.1}$$

relie le comportement asymptotique de $N_h(a,b)$ quand $h \searrow 0$ au volume dans l'espace des phases de l'ensemble $p_0^{-1}([a,b])$ sans donner de précision sur le reste. Pour améliorer ce reste, on cherche souvent à établir des asymptotiques de type

$$N_h(a,b) = (2\pi h)^{-n}\iint_{p_0^{-1}([a,b])} dx\,d\xi + \mathcal{O}(h^{-n+\delta}), \quad \delta > 0$$

en étudiant le nombre des valeurs propres de $P(h)$ dans un intervalle de longueur $\mathcal{O}(h^\delta)$ autour des extrémités a, b, i.e. dans un intervalle de type $]\tau - ch^\delta, \tau + ch^\delta[$, avec $\tau \in \{a, b\}$. Une attention particulière est portée au cas $\delta = 1$ qui à travers des exemples simples où le calcul des valeurs propres est explicite, on sait qu'il est optimal en général (voir par exemple [102, Remarque V.12]). En localisant par l'opérateur de Fourier inverse semi-classique,

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau) := \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it\tau}{h}}\theta(t)dt \tag{0.3.2}$$

on étudie alors le comportement asymptotique quand $h \searrow 0$ de quantités de type

$$\mathrm{tr}\left(f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P(h))\right) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it\tau}{h}}\theta(t)\mathrm{tr}\left(f(P(h))e^{-\frac{itP(h)}{h}}\right)dt, \tag{0.3.3}$$

avec $f \in C_0^\infty(]\tau-\eta, \tau+\eta[;\mathbb{R})$ et $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Dans [24], Chazarain a étudié des opérateurs de Schrödinger $P(h) := -h^2\Delta + V(x)$, avec des potentiels V qui se comportent comme $|x|^2$ à l'infini. L'exemple typique étant l'oscillateur harmonique $-h^2\Delta + |x|^2$. Il a établi l'asymptotique de type Weyl avec reste optimal suivante sur le nombre $N_h(-\infty, \tau)$ des valeurs propres de $P(h)$ dans $]-\infty, \tau]$

$$N_h(-\infty, \tau) = (2\pi h)^{-n}\omega_n \int_{\{V(x)\leqslant\tau\}} (\tau - V(x))^{\frac{n}{2}}dx + \mathcal{O}(h^{-n+1}), \quad h \searrow 0,$$

où ω_n est le volume de la boule unité sur $\mathbb{R}^n$. Ce résultat a été généralisé par Helffer et Robert [62] pour des opérateurs elliptiques puis par les mêmes auteurs [61] pour une classe plus générale d'opérateurs h-admissibles. Sous l'hypothèse que les extrémités a et b ne sont pas des valeurs critiques de p_0, i.e. $\nabla_{x,\xi}p_0 \neq 0$ sur la surface d'énergie $\Sigma_\tau := p_0^{-1}(\tau)$, $\tau = a, b$, on a l'asymptotique optimale suivante

$$N_h(a, b) = (2\pi h)^{-n} \iint_{p_0^{-1}([a,b])} dxd\xi + \mathcal{O}(h^{-n+1}), \quad h \searrow 0. \tag{0.3.4}$$

Fonction de décalage spectral

Dans un contexte différent important dans la théorie de diffusion, on regarde $P_1(h) := P(h)$ comme perturbation d'un opérateur libre $P_0(h)$ et on étudie l'influence de cette perturbation sur le spectre continu. La fonction de comptage ne peut plus être utiliser et on doit considérer une quantité qui joue un rôle analogue pour le spectre continu. Cette quantité est la fonction de décalage spectral habituellement abrégée en SSF (Spectral Shift Function). On peut initialement la définir en supposant que la différence $P_1(h) - P_0(h)$ est de classe trace. Sous cette hypothèse, Krein [79] a montré l'existence d'une fonction $s_h(\tau) \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\mathrm{tr}\big(f(P_1(h)) - f(P_0(h))\big) = \int_{\mathbb{R}} s_h(\tau)f'(\tau)d\tau, \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}). \tag{0.3.5}$$

La fonction $s_h(\tau) := s_h(\tau; P_1(h), P_0(h))$ est appelée fonction de décalage spectral associée à $(P_1(h), P_0(h))$. Lorsque les spectres de $P_1(h)$ et $P_0(h)$ sont discrets, cette fonction n'est autre que la différence entre les fonctions de comptage des valeurs propres de $P_1(h)$ et $P_0(h)$, plus précisément,

$$s_h(\tau) = N_{1,h}(-\infty, \tau) - N_{0,h}(-\infty, \tau),$$

où $N_{i,h}(-\infty, \tau)$ désigne le nombre des valeurs propres de $P_i(h)$ dans $]-\infty, \tau]$, $i = 0, 1$.

Dans la pratique l'hypothèse sur la différence $P_1(h) - P_0(h)$ pour qu'elle soit de classe trace est en général très restrictive et assez difficile à satisfaire. On demande plutôt que la différence des résolvantes est de classe trace, i.e.

$$\|(P_1(h) - z_0)^{-q} - (P_0(h) - z_0)^{-q}\|_{tr} < \infty \tag{0.3.6}$$

pour $q \in \mathbb{N}$ assez grand et $z_0 \notin \sigma(P_1(h)) \cup \sigma(P_0(h))$, où pour simplifier on suppose que $P_0(h)$ et $P_1(h)$ sont bornés inférieurement. Cette hypothèse permet de définir la fonction de décalage spectral $s_h(\tau) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ associée à $(P_1(h), P_0(h))$ par la formule de Lifshits-Krein (voir [117])

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle_{\mathscr{D}', \mathscr{D}} = -\mathrm{tr}\,(f(P_1(h)) - f(P_0(h))), \quad \forall\, f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) := C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}). \tag{0.3.7}$$

Par cette formule, $s_h(\tau)$ est définie modulo une constante additive qui est en général fixée par la condition $s_h(\tau) = 0$ pour $\tau \ll 0$.

Le concept de la fonction de décalage spectral a été introduit pour la première fois au milieu du siècle précédent par le physicien I. M. Lifshits [84, 85], puis a été développé par M. Krein [80, 78, 79] en une théorie mathématique ayant beaucoup d'applications, notamment dans les théories de diffusion et des résonances. Les travaux de M. Krein sur la fonction de décalage spectral sont décrites dans [12]. On renvoie le lecteur au livre [117] pour plus de détails sur cette théorie.

Fonction de décalage spectral pour une paire d'opérateurs de Schrödinger scalaires

Comme exemple typique de perturbation d'opérateur h-pseudodifférentiel où l'hypothèse (0.3.6) est satisfaite, on considère les opérateurs de Schrödinger semi-classiques sur $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$P_1(h) := -h^2\Delta + V(x), \quad P_0(h) := -h^2\Delta \tag{0.3.8}$$

où $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ satisfaisant

$$\exists\, \mu > n, \quad |\partial_x^\alpha V(x)| \leqslant C_\alpha \langle x\rangle^{-\mu-|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{0.3.9}$$

Sous cette hypothèse sur V, la condition (0.3.6) est satisfaite pour tout $q > \frac{n}{2}$ (voir Lemme 4.4.2).

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de la fonction de décalage spectral associée à une paire d'opérateurs de Schrödinger scalaires dans différents régimes asymptotiques; citons par exemple [105, 103, 104, 107, 6, 43, 40]. Habituellement, on étudie deux régimes asymptotiques :

Régime haute énergie : Le paramètre semi-classique h est fixé (i.e., $h = 1$) et on étudie le comportement asymptotique de $s(\tau)$ et de sa dérivée $s'(\tau)$ quand $\tau \to +\infty$. Dans ce régime, Robert [104] a étudié la fonction de décalage spectral associée au opérateurs

$$H_1 := -\Delta + V + W, \quad H_0 := -\Delta + V,$$

pour des potentiels W à décroissances polynômiales. Il a établi un développement asymptotique complet en puissances de τ^{-1} pour la dérivée $s'(\tau)$ quand $\tau \to +\infty$. Un résultat similaire a été obtenu dans [6] sous une hypothèse plus faible sur W incluant par exemple les potentiels à décroissances logarithmiques.

Régime semi-classique : Dans le régime semi-classique $h \searrow 0$ qui sera notre principal interêt dans cette deuxième partie, Robert et Tamura [105] ont étudié le comportement asymptotique de la dérivée de la fonction de décalage spectral associée aux opérateurs $(P_1(h), P_0(h))$ définis par (0.3.8) près des énergies $\tau_0 > 0$ non-captives pour l'Hamiltonien classique $p_1(x,\xi) := \xi^2 + V(x)$, $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. On rappelle qu'une énergie $\tau \in \mathbb{R}$ est dite non-captive pour un Hamiltonien classique $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ ou pour le flot Hamiltonien correspondant ϕ_p^t si l'ensemble des trajectoires captées en τ défini par

$$C_\tau := \left\{(x,\xi) \in p^{-1}(\tau);\ t \mapsto \phi_p^t(x,\xi) \ \text{ reste borné en temps}\right\}$$

est vide. De manière équivalente, si

$$\forall\, K \Subset p^{-1}(\tau), \exists\, T_K > 0;\ \forall\, |t| \geqslant T_K,\quad (x,\xi) \in K \Rightarrow \phi_p^t(x,\xi) \notin K.$$

Sous cette condition de non-capture, un développement asymptotique complet en puissances de h^2 au sens fort pour $s_h'(\tau)$:

$$s_h'(\tau) \sim (2\pi h)^{-n} \sum_{j \geqslant 0} \gamma_{2j}(\tau) h^{2j}, \quad h \searrow 0, \tag{0.3.10}$$

uniformément près de τ_0 a été prouvé. La preuve de ce résultat repose essentiellement sur le principe d'absorption limite et l'étude du comportement asymptotique quand $h \searrow 0$ de l'analogue de (0.3.3)

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - \cdot) f(\cdot)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = -\mathrm{tr}\left(\left[f(P_j(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P_j(h))\right]_0^1\right) \tag{0.3.11}$$

près de τ_0, avec $f, \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Ici on utilise la notation $[a_j]_0^1 := a_1 - a_0$.

La méthode classique pour l'étude des comportements asymptotiques de (0.3.11) ou encore de (0.3.3) est basée sur la construction d'une approximation de l'opérateur d'évolution localisé $U_h(t) := f(P_1(h))e^{-\frac{it}{h}P_1(h)}$ par un opérateur intégral de Fourier (OIF) dont le noyau est obtenu par une résolution WKB de l'équation d'évolution correspondante

$$(-ih\partial_t + P_1(h))U_h(t) = 0, \quad U_h(0) = f(P_1(h)). \tag{0.3.12}$$

Le comportement asymptotique de (0.3.11) et (0.3.3) quand $h \searrow 0$ sera alors régi par celui des intégrales oscillantes qui résultent de cette approximation (principe de la phase stationnaire). Il est bien connu qu'il existe un lien étroit entre ce comportement asymptotique et les trajectoires Hamiltoniennes périodiques de p_1 (voir [62], [102, ch. 5]).

Fonction de décalage spectral pour une paire d'opérateurs de Schrödinger à potentiels matriciels

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudions la fonction de décalage spectral associée aux opérateurs de Schrödinger semi-classiques à potentiels matriciels

$$P_1(h) := -h^2\Delta \otimes I_m + V(x), \quad P_0(h) := -h^2\Delta \otimes I_m + V_\infty \tag{0.3.13}$$

sur $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$, où I_m est la matrice identité $m \times m$ et $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; M_m(\mathbb{C}))$ est un potentiel matriciel hermitien qui tend vers V_∞ à l'infini et satisfait l'hypothèse

$$\exists\, \mu > n, \quad \|\partial_x^\alpha (V(x) - V_\infty)\|_{m\times m} \leqslant C_\alpha \langle x\rangle^{-\mu-|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Naturellement, l'étude dans le cas matriciel est plus compliquée que celle dans le scalaire. Lorsque les valeurs propres du potentiel V (ou plus généralement du symbole principal de l'opérateur perturbé si l'on considère des opérateurs matriciels généraux) sont de multiplicités constantes, i.e. en l'absence des croisements des valeurs propres, l'étude se ramène au cas scalaire par une diagonalisation. Ceci a été fait dans [20] (voir aussi [18, 76]) pour la fonction de décalage spectral associée à une paire d'opérateurs de Dirac semi-classiques. Un développement asymptotique complet en puissances de h pour la dérivée de la fonction de décalage spectral a été établi près des énergies non-captives pour les flots Hamiltoniens générés par les valeurs propres distinctes du symbole de l'opérateur perturbé. Dans [76], la relation entre la fonction de décalage spectral et les résonances de l'opérateur de Dirac avec un potentiel analytique a été étudiée.

Dans le cas matriciel général, cette réduction n'est plus possible et la méthode dépendante du temps utilisée dans le cas scalaire est en général difficile à généraliser. La difficulté principale provient du fait que les croisements éventuelles des valeurs propres rendent la résolution de l'équation d'évolution (0.3.12) difficile (ou impossible) même pour des temps courts (voir [70, 82]).

Approche stationnaire

Dans [42], en étudiant la fonction de comptage des valeurs propres d'un système d'opérateurs h-pseudodifférentiels auto-adjoint, Dimassi et Sjöstrand ont developpé une méthode alternative pour l'étude du comportement asymptotique de la trace (0.3.3). Cette méthode est stationnaire (indépendante du temps) et est basée sur le calcul fonctionnel h-pseudodifférentiel par la formule de Helffer-Sjöstrand. À la fonction $f \in C_0^\infty(]\tau-\eta, \tau+\eta[; \mathbb{R})$, on associe une fonction $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ à support dans un petit voisinage complexe arbitraire de $]\tau-\eta, \tau+\eta[$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\tilde{f}_{|\mathbb{R}} = f \tag{0.3.14}$$

$$\bar{\partial}_z \tilde{f}(z) := \frac{1}{2}(\partial_{\Re z} + i\partial_{\Im z})\tilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im z|^\infty). \tag{0.3.15}$$

La fonction $\tilde{f}$ est appelée extension presque analytique de f (voir Définition 1.3). La formule de Helffer-Sjöstrand (voir chapitre 1 pour plus de détails) affirme alors que pour tout opérateur auto-adjoint H, on a

$$f(H) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}_z \tilde{f}(z)(z-H)^{-1} L(dz), \tag{0.3.16}$$

où $L(dz) = dxdy$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$. Par cette formule, le membre de gauche de (0.3.3) se réécrit sous la forme

$$\mathrm{tr}\,\left(f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P(h))\right) = -\mathrm{tr}\,\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-z)(z-P(h))^{-1}L(dz). \tag{0.3.17}$$

L'avantage de cette nouvelle représentation réside dans le fait qu'elle relie la trace de l'opérateur $f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P(h))$ à la résolvante $(z-P(h))^{-1}$ au lieu de l'opérateur d'évolution $e^{-\frac{it}{h}P(h)}$. L'idée principale dans l'étude du comportement asymptotique de cette trace par cette nouvelle approche consiste à se ramener à la région $\{z \in \mathbb{C}; |\Im z| \geqslant h^{\delta}\}$, $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$, où le calcul symbolique h-pseudodifférentiel est disponible et un résultat classique que nous rappellerons dans le chapitre suivant assure que la résolvante $(z-P(h))^{-1}$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole principal $(z-p_0(x,\xi))^{-1}$.

Le point essentiel dans cette réduction réside dans l'étude de la contribution de la trace de l'opérateur $f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P(h))$ lorsque $\operatorname{supp}\theta \subset \{h^{\delta} < |t| < \kappa\}$, avec $\delta \in]0,1]$ et $\kappa > 0$ fixés. Pour des systèmes microhyperboliques (voir Définition 2.1), Dimassi et Sjöstrand [42] prouvent que cette contribution est négligeable (i.e. est un $\mathcal{O}(h^{\infty})$) et établissent un développement asymptotique en puissances de h pour (0.3.17) lorsque le support de θ est suffisamment proche de 0. À l'aide d'un argument Tauberien classique, ils obtiennent une asymptotique de type Weyl avec reste optimal pour la fonction de comptage des valeurs propres généralisant (0.3.4) au cas des systèmes. Nous rappellerons ce résultat dans le dernier chapitre de ce manuscrit (voir Théorème 5.1).

Concernant l'étude de la fonction de décalage spectral qui est notre principal intérêt dans cette deuxième partie, en s'appuiyant sur cette approche stationnaire, Dimassi et Fujiié [40] ont étudié la SSF pour des opérateurs scalaires non semi-bornés tel que l'opérateur de Stark

$$S(h) := -h^2\Delta + \beta x_1 + V(x), \quad V \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}), \beta > 0, x = (x_1, x') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}.$$

La situation pour la fonction de décalage spectral est différente de celle concernant la fonction de comptage et l'étude du comportement asymptotique de (0.3.11) doit être réalisée pour θ à support assez grand, plus précisément, pour $\operatorname{supp}\theta \subset \{\kappa \leqslant |t| \leqslant h^{-\nu}\}$, $\kappa > 0$ et $\nu \in \mathbb{N}$ fixés (voir chapitres 2 et 4).

Notre objectif dans la deuxième partie de cette thèse est de développer cette approche pour l'étude de la fonction de décalage spectral associée à une paire d'opérateurs h-pseudodifférentiels matriciels. Notre application concerne la fonction de décalage spectral associée aux opérateurs de Schrödinger à potentiels matriciels (0.3.13) mais notre méthode reste appliquable pour des systèmes généraux sous des hypothèses raisonnables permettant notamment de définir la fonction de décalage spectral.

0.4 ORGANISATION DE LA THÈSE

Cette thèse est organisée sur cinq chapitres :

• **Chapitre 1 :** Dans ce chapitre, nous rappellons quelques résultats connus d'analyse semi-classique dans le cadre des systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels que nous allons utiliser tout au long de ce manuscrit.

• **Chapitre 2 :** Dans ce chapitre, nous présentons les résultats principaux de cette thèse et nous expliquons les idées et les techniques utilisées dans les preuves.

• **Chapitre 3 :** Ce chapitre contient les résultats et les preuves de la partie I de cette thèse concernant le théorème d'Egorov semi-classique en temps longs pour des systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels.

• **Chapitre 4 :** Dans ce chapitre, on prouve les résultats de la deuxième partie de cette thèse sur la formule de trace semi-classique pour des systèmes microhyperboliques et l'application à l'étude de la fonction de décalage spectral.

• **Chapitre 5 :** Dans ce dernier chapitre, on donne une remarque et une perspective sur la fonction de comptage des valeurs propres pour des systèmes non-microhyperboliques.

1

ÉLÉMENTS D'ANALYSE SEMI-CLASSIQUE

Dans ce chapitre, on rappelle brièvement quelques résultats d'analyse semi-classique dans le cadre des opérateurs de symboles à valeurs matricielles que nous allons utiliser tout au long de cette thèse. Ces résultats sont bien connus dans le cas scalaire et sont dans la plupart des cas directement généralisables au cas matriciel en effectuant les modifications naturelles. Nous nous contentons d'énoncer ces résultats sans preuves accompagnés parfois de quelques remarques et commentaires. Pour les détails et les preuves on renvoie le lecteur au livres [41, ch. 7-9], [119, ch. 4], [102, ch. 2-3], [70, ch. 1].

Tout au long de cette thèse, $h \in]0,1]$ désigne un petit paramètre appelé le paramètre semi-classique. Soit $M_m(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées $m \times m$ à coefficients complexes muni de la norme $\|\cdot\|_{m\times m}$, où pour $A \in M_m(\mathbb{C})$,

$$\|A\|_{m\times m} = \sup_{\{\omega\in\mathbb{C}^m;\, |w|\leqslant 1\}} |A\omega|.$$

On note I_m la matrice identité $m \times m$. Pour simplifier les notations, souvent on omet l'indice $m \times m$ dans la norme.

1.1 Quantification de Weyl

Avant de définir les opérateurs h-pseudodifférentiels associés à des symboles dans des classes générales, on commence par quantifier des fonctions dans l'espace de Schwartz. Soit $A \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C}))$ l'espace de Schwartz des fonctions à valeurs dans $M_m(\mathbb{C})$. La h-quantification de Weyl de A est définie par la formule : pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$,

$$A^w(x,hD_x)u(x) := \frac{1}{(2\pi h)^n}\iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} A\left(\frac{x+y}{2},\xi\right)u(y)dyd\xi. \tag{1.1.1}$$

Cette formule définit un opérateur linéaire $A^w(x,hD_x) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ appelé opérateur h-pseudodifférentiel de symbole A. L'opérateur $A^w(x,hD_x)$ est un opérateur intégral de noyau K_h donné par

$$K_h(x,y) = \mathcal{F}_h^{-1}(A(\frac{x+y}{2},\cdot))(x-y),$$

où $\mathcal{F}_h^{-1}$ est l'opérateur de Fourier inverse semi-classique sur $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\mathcal{F}_h^{-1}\psi(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}x\cdot y}\psi(y)dy.$$

Par dualité, $A^w(x,hD_x)$ agit sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C}))$ l'espace des distributions tempérées et définit un opérateur continu de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$. On peut aussi quantifier des distributions $A \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C}))$ et par le théorème des noyaux de Schwartz (voir [67]), l'opérateur h-pseudodifférentiel correspondant est continu de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$.

La h-quantification de Weyl est un choix particulier d'une famille infinie de quantifications où le terme $\frac{x+y}{2}$ dans (1.1.1) est remplacé par $tx+(1-t)y$, $t\in[0,1]$. On parle dans ce cas de la t-quantification (voir [119]). Une propriété importante du choix $t=\frac{1}{2}$ est celle d'associer à un symbole hermitien un opérateur symétrique, i.e. on a

$$\left(A^w(x,hD_x)\right)^* = (A^*)^w(x,hD_x),$$

où A^* est l'adjoint du symbole A. Dans la suite, nous utiliserons parfois les notations suivantes :

$$A^w = \mathrm{Op}_h^w(A) := A^w(x,hD_x).$$

1.2 Calcul symbolique h-pseudodifférentiel

1.2.1 *Composition dans l'espace de Schwartz*

L'ensemble des opérateurs h-pseudodifférentiels associés à des symboles dans l'espace de Schwartz est stable par le produit des opérateurs. Plus précisément, on a le résultat suivant (voir [119, Th. 4.11, 4.12])

Théorème 1.1 *Soient A et B deux symboles dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n};M_m(\mathbb{C}))$. Il existe un symbole noté $A\#B\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n};M_m(\mathbb{C}))$ défini par*

$$A\#B(x,\xi) := e^{\frac{ih}{2}\sigma(D_x,D_\xi;D_y,D_\eta)}\left(A(x,\xi)B(y,\eta)\right)_{|(x,\xi)=(y,\eta)} \tag{1.2.1}$$

tel que

$$A^w(x,hD_x)\circ B^w(x,hD_x) = (A\#B)^w(x,hD_x).$$

De plus on a le développement asymptotique suivant en puissances de h : pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$A\#B(x,\xi) = \sum_{j=0}^{N}\frac{h^j}{j!}\left(\frac{i}{2}\sigma(D_x,D_\xi;D_y,D_\eta)\right)^j A(x,\xi)B(y,\eta)_{|(x,\xi)=(y,\eta)} + \mathcal{O}(h^{N+1}), \tag{1.2.2}$$

où les reste $\mathcal{O}(h^{N+1})$ est pris dans l'espace de Schwartz

Ici σ est la forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$ définie par (0.2.1). Le symbole $A\#B$ est appelé produit de Moyal de A et B. Le développement asymptotique (1.2.2) s'obtient en appliquant le principe de la phase stationnaire (voir par exemple [41, ch. 5]) à la forme intégrale de $A\#B$ donnée par

$$A\#B(x,\xi) = \frac{1}{(\pi h)^{2n}}\iint_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}} e^{-\frac{2i}{h}\sigma(\omega_1,\omega_2)}A((x,\xi)+\omega_1)B((x,\xi)+\omega_2)\,d\omega_1\,d\omega_2. \tag{1.2.3}$$

En particulier, si les supports de A et B sont disjoints alors $A\#B=\mathcal{O}(h^\infty)$. Pour $N=1$, les premiers termes du développement asymptotique (1.2.2) s'écrivent

$$A\#B = AB + \frac{h}{2i}\{A,B\} + \mathcal{O}(h^2), \tag{1.2.4}$$

où $\{A, B\}$ est le crochet de Poisson de A et B défini par (0.2.4). Notons qu'en général le crochet de Poisson de deux fonctions à valeurs matricielles n'est pas anti-symétrique, i.e., $\{A, B\} \neq -\{B, A\}$, par exemple

$$A(x, \xi) = \begin{pmatrix} \xi & x \\ x & -\xi \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \{A, A\}(x, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{1.2.5}$$

En quantifiant la relation (1.2.4), on obtient le développement suivant pour le commutateur $[A^w, B^w]$

$$[A^w, B^w] = \big([A, B]\big)^w + \frac{h}{2i}\big(\{A, B\}^w - \{B, A\}^w\big) + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.2.6}$$

En particulier, si les symboles A et B sont à valeurs scalaires, le commutateur $[A, B]$ s'annule et $\{A, B\} = -\{A, B\}$, on retrouve donc la relation habituelle du cas scalaire

$$[A^w, B^w] = \frac{h}{i}\{A, B\}^w + \mathcal{O}(h^2). \tag{1.2.7}$$

1.2.2 *Classes admissibles de symboles*

On étend maintenant le procédé de quantification de Weyl à des classes de symboles plus générales que la classe de Schwartz. Nous allons introduire les classes $S(g)$ et $S^k_\delta(g)$, $k \in \mathbb{R}$, $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$, pour une fonction d'ordre g sur $\mathbb{R}^{2n}$ en suivant [41, ch. 7].

Définition 1.1 (Fonction d'ordre) *Une fonction* $g : \mathbb{R}^{2n} \to]0, +\infty[$ *est appelée fonction d'ordre s'il existe deux constantes* $C, N > 0$ *tel que*

$$g(\rho) \leqslant C\langle \rho - \rho' \rangle^N g(\rho'), \quad \forall \rho, \rho' \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{1.2.8}$$

avec $\langle \rho \rangle := (1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}$.

Les fonctions d'ordres typiques sont les fonctions constantes ou encore les fonctions de type $\langle \rho \rangle^a$, $a \in \mathbb{R}$. On vérifie facilement que le produit de deux fonctions d'ordre est encore une fonction d'ordre.

Pour une fonction d'ordre g sur $\mathbb{R}^{2n}$, on définit la classe de symboles à valeurs matricielles $S(g) = S(g; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ par

$$S(g) := \Big\{ A \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C})); \forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n}, \exists C_\gamma > 0; \forall \rho \in \mathbb{R}^{2n} : \|\partial^\gamma_\rho A(\rho)\| \leqslant C_\gamma g(\rho) \Big\}.$$

$S(g)$ equippé de la topologie induite par la famille des semi-normes $\|g^{-1}\partial^\gamma_\rho A(\cdot)\|_{L^\infty}$, $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, est un espace de Fréchet. D'une façon générale, pour $k \in \mathbb{R}$ et $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$, on définit la classe de symboles $S^k_\delta(g) = S^k_\delta(g; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ par

$$\begin{aligned} S^k_\delta(g) := \Big\{ & A : \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1] \to M_m(\mathbb{C}); \ \forall h \in]0, 1] : A(\cdot; h) \in S(g) \text{ et} \\ & \forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n}, \exists C_\gamma > 0 ; \forall (\rho, h) \in \mathbb{R}^{2n} \times]0, 1] \ : \ \|\partial^\gamma_\rho A(\rho; h)\| \leqslant C_\gamma h^{-\delta|\gamma| - k} g(\rho) \Big\}. \end{aligned}$$

En particulier, $S_0^0(1)$ est la classe des symboles bornés ainsi que toutes leurs dérivées sur $\mathbb{R}^{2n}$, uniformément par rapport à h. Le paramètre δ indique la perte en h après dérivation. Dans la suite, lorsqu'il n'y a pas de confusion, on utilise les notations

$$S_0^k(g) := S^k(g), \quad S_\delta^0(g) := S_\delta(g), \quad S_0^0(g) := S(g).$$

On définit également la classe

$$S^{-\infty}(g) := \bigcap_{k \leqslant 0} S^k(g),$$

qui sera utile lorsqu'on veut travailler modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ au niveau des opérateurs h-pseudodifférentiels correspondants.

Définition 1.2 (Développements asymptotiques) *Soit* $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$ *et* g *une fonction d'ordre. Pour* $A \in S_\delta(g)$ *et* $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *une suite de symboles indépendants de* h *dans* $S_\delta(g)$*, on dit que* A *admet le développement asymptotique* $\sum_{j \geqslant 0} h^j A_j$ *et on note*

$$A(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j A_j(x, \xi) \quad \textit{dans} \;\; S_\delta(g)$$

si pour tout $N \in \mathbb{N}$*,*

$$h^{-(N+1)} \left(A - \sum_{j=0}^{N} h^j A_j \right) \in S_\delta(g). \tag{1.2.9}$$

Les symboles A_0 *et* A_1 *sont respectivement appelés symbole principal et symbole sous principal de* A*. L'ensemble des symboles* A *dans* $S_\delta(g)$ *admettant un développement asymptotique en puissances de* h *est noté* $S_{\delta,sc}(g)$*. Ses éléments sont appelés symboles semi-classiques.*

Le lemme suivant permet de donner un sens à une somme infinie de la forme $\sum_{j \geqslant 0} h^j A_j$ en lui associant un symbole "unique" au sens des développements asymptotiques précédent. La preuve de ce résultat se fait en utilisant l'argument de Borel (voir [87, Prop. 2.3.2], [119, Th. 4.15]).

Lemme 1.1 *Soient* $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *une suite de symboles indépendants de* h *dans* $S_\delta(g)$*. Il existe un symbole* $A \in S_\delta(g)$ *(unique modulo* $S_\delta^{-\infty}(g)$*) tel que*

$$A(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j A_j(x, \xi) \quad \textit{dans} \;\; S_\delta(g).$$

Passons maintenant à la quantification des symboles dans la classe $S_\delta^k(g)$, $(k, \delta) \in \mathbb{R} \times [0, \frac{1}{2}]$. La formule (1.1.1) s'étend au symboles dans $S_\delta^k(g)$ et pour $A \in S_\delta^k(g)$, l'opérateur de Weyl associé

$$A^w(x, hD_x) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$$

est continu. Par dualité, l'opérateur $A^w(x, hD_x)$ agit sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ et défini un opérateur continu de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ dans lui même. Lorsque le symbole A dépend de h, on note $A^w(x, hD_x; h)$ l'opérateur h-pseudodifférentiel correspondant.

Théorème 1.2 *[41, Prop. 7.7, Th. 7.9]) Soient g_1, g_2 deux fonctions d'ordre sur $\mathbb{R}^{2n}$ et $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$. L'application*

$$\#: \begin{array}{ccc} \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C})) \times \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C})) \\ (A, B) & \longmapsto & A\#B \end{array}$$

où $A\#B$ est défini par (1.2.1), s'étend en une application bilinéaire continue de $S_\delta(g_1) \times S_\delta(g_2)$ dans $S_\delta(g_1 g_2)$ et on a

$$A^w(x, hD_x) \circ B^w(x, hD_x) = (A\#B)^w(x, hD_x), \quad \textit{pour} \;\; A \in S_\delta(g_1), B \in S_\delta(g_2),$$

comme opérateur de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$. De plus, si $\delta \in [0, \frac{1}{2}[$, on a le développement asymptotique suivant en puissances de h pour le produit de Moyal $A\#B$:

$$A\#B(x, \xi; h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{ih}{2} \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta) \right)^j A(x, \xi) B(y, \eta)_{|(x,\xi)=(y,\eta)} \quad \textit{dans} \;\; S_\delta(g_1 g_2). \tag{1.2.10}$$

Remarque 1.1 *Dans le cas où $A(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j A_j(x, \xi)$ dans $S_\delta(g_1)$ et $B(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j B_j(x, \xi)$ dans $S_\delta(g_2)$, $\delta \in [0, \frac{1}{2}[$, sont deux symboles semi-classiques, le développement asymptotique (1.2.10) peut être réordonner pour voir que $A\#B$ est lui aussi un symbole semi-classique admettant un développement asymptotique en puissances de h*

$$A\#B(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j (A\#B)_j(x, \xi) \quad \textit{dans} \;\; S_\delta(g_1 g_2),$$

où l'on peut donner explicitement le coefficient $(A\#B)_j$, $j \geqslant 0$, en fonctions des symboles A_k,B_l, $0 \leqslant l, k \leqslant j$, et leurs dérivées (voir Annexe A du chapitre 3).

Jusqu'ici les opérateurs h-pseudodifférentiels qu'on a défini agissent sur l'espace de Scwhartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$. On rappelle le résultat important suivant qui permet d'étendre ces opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ (voir [41, Th. 7.11])

Théorème 1.3 (Calderón-Vaillancourt) *Soit $A \in S^k_\delta(1)$, $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$, $k \in \mathbb{R}$. L'opérateur $A^w(x, hD_x; h) : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m) \to L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ est borné et il existe $\kappa_n \in \mathbb{N}$ et $C_n > 0$ qui dépendent uniquement de la dimension tel que*

$$\|A^w(x, hD_x; h)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m))} \leqslant C_n h^{-k} \sum_{|\gamma| \leqslant \kappa_n} h^{\frac{|\gamma|}{2}} \|\partial^\gamma_{(x,\xi)} A\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}. \tag{1.2.11}$$

La preuve habituelle de ce résultat dans le cas scalaire utilisant le théorème de Cotlar-Stein (voir [41, Lemme 7.10]) s'étend directement au cas matriciel.

Théorème 1.4 (Inversibilité) *[41, p. 99-100] Soit $A = A(x, \xi) \in S(1)$. On suppose que A est elliptique, i.e. il existe $C > 0$ (indépendante de h) tel que*

$$|\det A(x, \xi)| \geqslant C, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Alors il existe $h_0 \in]0,1]$ *tel que pour* $0 < h \leqslant h_0$, $A^w(x, hD_x) : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m) \to L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ *est inversible d'inverse uniformément borné. De plus, il existe* $B(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j B_j(x, \xi)$ *dans* $S(1)$ *tel que*

$$(A^w(x, hD_x))^{-1} = B^w(x, hD_x; h).$$

En particulier, $B_0(x, \xi) = A(x, \xi)^{-1}$ *et pour* $j \geqslant 1$, B_j *est une combinaison linéaire finie de termes de la forme*

$$(A(x, \xi))^{-1} b_1(x, \xi)(A(x, \xi))^{-1} b_2(x, \xi) \cdots b_k(x, \xi)(A(x, \xi))^{-1}$$

avec $k < 2j + 1$ *et les fonctions* b_ℓ *dépendent de* A *et de ses dérivées.*

On termine cette section par rappeler le résultat suivant qui assure que la positivité d'un symbole hermitien $A \in S(1)$ implique la positivité de l'opérateur h-pseudodifférentiel correspondant modulo $\mathcal{O}(h)$. Une preuve de ce résultat dans le cas matriciel utilisant la quantification Anti-Wick est donnée dans [72, Annexe A].

Théorème 1.5 (Inégalité de Gårding semi-classique) *Soit* $A \in S(1)$ *un symbole hermitien positive, i.e.*

$$(A(x, \xi)\omega, \omega) \geqslant 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{C}^m, \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Il existe une constante C *et* $h_0 \in]0,1]$ *tel que pour tout* $u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ *et* $0 < h \leqslant h_0$,

$$\langle A^w(x, hD_x)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)} \geqslant Ch\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)}.$$

1.3 Calcul fonctionnel h-pseudodifférentiel

1.3.1 *Formule de Helffer-Sjöstrand*

On sait que pour un opérateur auto-adjoint P non nécessairement borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, le théorème spectral permet de définir $f(P)$ pour toute fonction réelle f continue et bornée par la formule

$$f(P) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dE_\lambda,$$

où $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est la famille des projecteurs spectraux associés à P. Cependant cette formule ne donne a priori aucune information sur le caractère h-pseudodifférentiel de $f(P(h))$ lorsque $P(h)$ est un opérateur h-pseudodifférentiel et ne permet pas de définir un cadre fonctionnel général qui permet d'étudier les propriétés spectrales de $f(P(h))$. Dans [61], un calcul fonctionnel sur les opérateurs h-admissibles a été développé par Helffer et Robert en utilisant la transformation de Mellin. Dans la deuxième partie de cette thèse, nous utilisons la formule de Helffer-Sjöstrand qui relie l'opérateur $f(P(h))$ à la résolvante $(z - P(h))^{-1}$ de $P(h)$ à l'aide de la notion d'extension presque analytique.

Définition 1.3 (Extension presque analytique) *Soit* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. *On appelle extension presque analytique de* f *toute fonction* $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ *vérifiant les deux propriétés suivantes*

$$\tilde{f}_{|\mathbb{R}} = f \tag{1.3.1}$$

$$\overline{\partial}\tilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im z|^N), \quad \forall N \in \mathbb{N}, \tag{1.3.2}$$

où $\overline{\partial} = \partial_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$.

Cette notion a été introduite par Hörmander [67, vol II]. Plusieurs façons permettant de construire une telle extension presque analytique existent (voir par exemple [36, Annexe C] pour une construction en utilisant le théorème de Borel). Une autre manière simple de le faire consiste à considérer la fonction suivante

$$\tilde{f}(x+iy) = \frac{\psi(x)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i(x+iy)\xi}\chi(y\xi)\widehat{f}(\xi)d\xi, \tag{1.3.3}$$

où $\widehat{f}$ est la transformé de Fourier de f, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une troncature localisant près de 0 et $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 dans un voisinage de $\mathrm{supp}(f)$. La propriété (1.3.1) découle directement de la formule d'inversion de Fourier tandis que (1.3.2) peut être vérifiée avec un calcul direct en itérant des intégrations par parties (voir [41, ch. 8]). De la formule (1.3.3), on voit bien que le support de $\tilde{f}$ peut être pris dans un petit voisinage complexe arbitraire de $\mathrm{supp}\, f$.

Remarque 1.1 *On voit clairement qu'une extension presque analytique de $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ n'est pas unique. Cependant, en utilisant la formule de Taylor, on vérifie facilement que si $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ sont deux extensions presque analytiques de f alors $\tilde{f}_1(z) - \tilde{f}_2(z) = \mathcal{O}(|\Im z|^\infty)$.*

Théorème 1.6 (Formule de Helffer-Sjöstrand) *Soit P un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soient $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ une extension presque analytique de f. Alors*

$$f(P) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \overline{\partial}\widetilde{f}(z)(z-P)^{-1}L(dz). \tag{1.3.4}$$

où $L(dz) = dxdy$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$.

On renvoie le lecteur à [64, Prop. 7.2] et [41, Th. 8.1] pour deux preuves différentes de cette formule.

1.3.2 *Calcul fonctionnel h-pseudodifférentiel*

La caractérisation suivante des opérateurs h-pseudodifférentiels est due à Beals [9] dans sa version microlocale. Pour une preuve dans le cadre semi-classique voir [41, Prop. 8.3].

Théorème 1.7 (Caractérisation de Beals) *Soit $A(h) : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe un symbole $A = A(x,\xi;h) \in S(1)$ tel que $A(h) = A^w(x, hD_x;h)$.

(2) Pour toute suite $\ell_1(x,\xi), ..., \ell_N(x,\xi)$, $N \in \mathbb{N}$, de formes linéaires sur $\mathbb{R}^{2n}$, l'opérateur $\mathrm{ad}_{\ell_1(x,hD_x)} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{\ell_N(x,hD_x)} A(h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$ et on a

$$\left\|\mathrm{ad}_{\ell_1(x,hD_x)} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{\ell_N(x,hD_x)} A(h)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}(h^N).$$

Ici on utilise la notation standard $\mathrm{ad}_A B$ pour le commutateur $[A,B] = A \circ B - B \circ A$.

On a le résultat suivant sur le caractère essentiellement auto-adjoint des opérateurs h-pseudodifférentiels [41, Propo. 8.5]. Dans la suite $g : \mathbb{R}^{2n} \to [1, +\infty[$ désigne une fonction d'ordre.

Théorème 1.8 (Caractère ess. auto-adjoint) *Soit* $A(x,\xi;h) \in S(g)$ *un symbole hermitien et on suppose que* $(A+i)$ *est elliptique dans* $S(g)$. *Alors pour* $h>0$ *assez petit, l'opérateur* $(A^w(x,hD_x;h)+i)^{-1}$ *existe et appartient à* $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$. *De plus,* $A^w(x,hD_x;h)$: $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ *est essentiellement auto-adjoint sur* $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ *et son unique extension auto-adjointe est obtenue en l'equippant du domaine*

$$(A^w(x,hD_x;h)+i)^{-1}L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m) \subset L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m).$$

On notera par la même lettre l'unique extension auto-adjointe de $A^w(x,hD_x;h)$. Le théorème suivant a été démontré par Helffer et Robert dans [61, Th. 4.1] en utilisant un calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et dans [41, Th. 8.7] en utilisant la formule de Helffer-Sjöstrand (1.3.4).

Théorème 1.9 *Soit* $A = A(x,\xi;h) \in S(g)$ *un symbole hermitien et on suppose que* $(A+i)$ *est elliptique. Pour tout* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *l'opérateur* $f(A^w(x,hD_x;h))$ *est un opérateur* h-*pseudodifférentiel de symbole appartenant à* $S(g^{-k})$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$. *Plus précisément, il existe un symbole* $B_f \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S(g^{-k})$ *tel que*

$$f(A^w(x,hD_x;h)) = B_f^w(x,hD_x;h).$$

De plus, si $A(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j A_j(x,\xi)$ *dans* $S(g)$ *alors le symbole* B_f *admet un développement asymptotique en puissances de* h,

$$B_f(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j B_{f,j}(x,\xi) \quad \text{dans} \;\; S(g^{-1}).$$

En particulier, le symbole principal et le symbole sous-principal sont donnés par

$$B_{f,0}(x,\xi) = f(A_0(x,\xi)) \quad \textit{et} \quad B_{f,1}(x,\xi) = A_1(x,\xi)f'(A_0(x,\xi)), \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Proposition 1.1 *[41, Prop. 8.6] Soit* $A(x,\xi;h)$ *un symbole hermitien satisfaisant les hypothèses du Théorème précédent. Pour tout* $z \in \Omega_\delta := \{z \in \mathbb{C};\, |\Im z| \geqslant h^\delta\}$, *avec* $\delta \in]0,\frac{1}{2}[$, *la résolvante* $(z - A^w(x,hD_x;h))^{-1}$ *est un opérateur* h-*pseudodifférentiel de symbole* $a \in S_\delta^\delta(1)$, *i.e.,*

$$(z - A^w(x,hD_x;h))^{-1} = a^w(x,hD_x,z;h), \quad \forall z \in \Omega_\delta.$$

De plus, si $A(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j A_j(x,\xi)$, *le symbole* a *admet un développement asymptotique en puissances de* h *donné par*

$$a(x,\xi,z;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j a_j(x,\xi,z) \quad \text{dans} \;\; S_\delta^\delta(1),$$

uniformément pour $z \in \Omega_\delta$, *avec pour tout* $j \in \mathbb{N}$, $a_j(x,\xi,z)$ *est une combinaison linéaire finie de termes de la forme*

$$(z - A_0(x,\xi))^{-1}B_1(x,\xi,z)(z-A_0(x,\xi))^{-1}B_2(x,\xi,z)\cdots B_k(x,\xi,z)(z-A_0(x,\xi))^{-1},$$

avec $k < 2j+1$, $B_l(\cdot,\cdot,z) \in S(1)$ *et holomorphe en* $z \in \Omega_\delta$.

1.4 Systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels de classe trace

Dans cette section, on rappelle brièvement quelques résultats connus sur les opérateurs h-pseudodifférentiels de classe trace que nous allons utiliser dans la deuxième partie de cette thèse. On renvoie le lecteur à [41, ch. 9-13], [102, ch. II-III] pour les détails et les preuves.

1.4.1 *Définitions et propriétés*

Dans la suite, $\mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{N}^*$, désigne un espace de Hilbert séparable. On rappelle que les valeurs singulières d'un opérateur compact A notées $(s_j(A))_{j\geqslant 1}$ sont définies comme étant les valeurs propres de l'opérateur compact auto-adjoint positive $\sqrt{AA^*}$ (ou encore de $\sqrt{A^*A}$). D'une manière générale, si on désigne par $S_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ l'espace des opérateurs compacts de $\mathcal{H}_1$ à valeurs dans $\mathcal{H}_2$, les espaces de Schatten-von Neumann $S_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $1 \leqslant p < \infty$, sont définis par

$$S_p = S_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) := \left\{ A \in S_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2); \|A\|_{S_p} := \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Ici nous sommes intéressés uniquement par la classe S_1 appelée la classe des opérateurs de classe trace. On utilise la notation usuelle suivante pour la norme trace $\|\cdot\|_{\mathrm{tr}} := \|\cdot\|_{S_1}$. L'espace $(S_1, \|\cdot\|_{\mathrm{tr}})$ est un espace de Banach stable par composition à gauche et à droite par les opérateurs bornés. Plus explicitement, Si $A \in S_1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, alors $BA \in S_1(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ et on a

$$\|BA\|_{\mathrm{tr}} \leqslant \|B\| \|A\|_{\mathrm{tr}}.$$

La même propriété est vraie pour la composition à droite.

Soit $A \in S_1(\mathcal{H})$ et $(e_k)_{k\geqslant 1}$ une base orthonormée. La somme $\sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k)$ est absolument convergente et ne dépend pas du choix de la base orthonormée $(e_k)_{k\geqslant 1}$. La trace de A est définie par

$$\mathrm{tr}\, A := \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k, e_k).$$

Comme en dimension finie, si $A \in S_1$ alors $\mathrm{tr}\, A$ est la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. Plus précisément (voir [110, ch. 3]),

Théorème 1.10 (Lidski) *Soit $A \in S_1(\mathcal{H})$ et on note $(\lambda_k(A))_{1\leqslant k\leqslant N}$, $1 \leqslant N \leqslant \infty$, ses valeurs propres chacune répétée suivant sa multiplicité (algébrique). Alors*

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(A).$$

Dans la remarque suivante on regroupe quelques propriétés importantes de la classe S_1 (voir [110])

Remarque 1.2 *(i) Si $A \in S_\infty$ et B est borné tel que AB et BA sont de classe trace, alors on a* $\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$.

(ii) *Pour* $A \in S_1$, *on a* $|\mathrm{tr}\, A| \leqslant \|A\|_{\mathrm{tr}}$.

(iii) $A \in S_1$ *si et seulement si* $A^* \in S_1$ *et on a* $\mathrm{tr}\, A^* = \overline{\mathrm{tr}\, A}$.

1.4.2 *Systèmes d'opérateurs* h*-pseudodifférentiels de classe trace*

Contrairement au opérateurs h-pseudodifférentiels de classe Hilbert-Schmidt (i.e. dans S_2) pour lesquels on dispose d'une caractérisation précise (voir [41, Prop. 9.2]), une telle caractérisation n'existe pas pour les opérateurs h-pseudodifférentiels de classe trace. Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'un opérateur h-pseudodifférentiel soit de classe trace.

Théorème 1.11 *[41, Th. 9.4] , [102, Th. II.53] Soit* $A \in S(1)$ *et on suppose que*

$$\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} A \in L^1(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C})), \quad \forall |\gamma| \leqslant 2n+1.$$

Alors $A^w(x, hD_x; h) : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m) \to L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ *est de classe trace et on a l'estimation suivante sur sa norme trace*

$$\|A^w(x, hD_x; h)\|_{\mathrm{tr}} \leqslant C_n h^{-n} \sum_{|\gamma| \leqslant 2n+1} \|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} A\|_{L^1(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C}))},$$

où $C_n > 0$ *est une constante qui dépend uniquement de la dimension. De plus, on a*

$$\mathrm{tr}\,(A^w(x, hD_x; h)) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \widehat{\mathrm{tr}}\,(A(x, \xi; h))\,dx\,d\xi,$$

où $\widehat{\mathrm{tr}}$ *désigne la trace au sens matriciel.*

Théorème 1.12 *[41, Théorème 9.6] Soit* $A(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j A_j(x, \xi)$ *dans* $S(g)$ *pour une fonction d'ordre* $g \geqslant 1$ *avec* $(A + i)$ *elliptique. Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle ouvert borné et on suppose que pour tout* $1 \leqslant j \leqslant m$,

$$\liminf_{|(x,\xi)| \to +\infty} \mathrm{dist}\big(\lambda_j(x, \xi), I\big) \geqslant C > 0,$$

où $\lambda_1(x, \xi) \leqslant \lambda_2(x, \xi) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m(x, \xi)$ *sont les valeurs propres de* $A_0(x, \xi)$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. *Alors, pour tout* $f \in C_0^\infty(I; \mathbb{R})$, *l'opérateur* $f(A^w(x, hD_x; h))$ *est de classe trace pour* h *assez petit et on a*

$$\mathrm{tr}\,(f(A^w(x, hD_x; h))) \sim (2\pi h)^{-n} \sum_{j=0}^{+\infty} c_j(f) h^j, \tag{1.4.1}$$

avec

$$c_j(f) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \widehat{\mathrm{tr}}\,(B_{f,j}(x, \xi))\,dx\,d\xi,$$

où $B_f(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j B_{f,j}(x, \xi)$ *est le symbole de* $f(A^w(x, hD_x; h))$ *(voir Théorème 1.9). En particulier,*

$$c_0(f) = \sum_{k=1}^{m} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} f(\lambda_k(x, \xi))\,dx\,d\xi.$$

On termine ce chapitre par le résultat utile suivant (voir [102, Théorème II.56])

Théorème 1.13 *Soit* $A \in S(1)$. *Pour tout* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$, *on a*

$$\operatorname{tr}\left(\chi^w(x, hD_x)A^w(x, hD_x; h)\right) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \widehat{\operatorname{tr}}\big(\chi(x, \xi)A(x, \xi; h)\big)\, dx d\xi.$$

2

PRÉSENTATION DES RÉSULTATS DE LA THÈSE

Sommaire

2.1 PARTIE I : THÉORÈME D'EGOROV EN TEMPS LONGS POUR DES SYSTÈMES D'OPÉRATEURS h-PSEUDODIFFÉRENTIELS

La première partie du présent travail de thèse est consacrée à l'étude du Théorème d'Egorov en temps longs dans le cadre matriciel des systèmes d'opérateurs h-pseudo-différentiels. Nous étudions l'évolution en temps dans la représentation de Heisenberg d'une observable quantique $Q^w(x, hD_x; h)$ bornée sur $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ associée à une observable semi-classique $Q(x, \xi; h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j Q_j(x, \xi)$ à valeurs matricielles $m \times m$, générée par un Hamiltonien semi-classique $H(x, \xi; h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j H_j(x, \xi)$ hermitien $m \times m$. Notre résultat principal consiste en une approximation semi-classique de l'opérateur

$$Q(t) := e^{\frac{it}{h}H^w(x,hD_x;h)} Q^w(x, hD_x; h) e^{-\frac{it}{h}H^w(x,hD_x;h)}$$

en termes d'opérateurs h-pseudodifférentiels, valable pour des temps longs de type Ehrenfest $|t| < \frac{1}{4\Gamma_{\max}} \log(h^{-1})$, sous une hypothèse de "non-croisement" sur les valeurs propres du symbole principal H_0 de H. Ici $\Gamma_{\max} > 0$ est une constante qui contrôle la croissance exponentielle en temps des flots Hamiltoniens générées par les valeurs propres de H_0. Ce résultat est une extension des résultats prouvés dans [17] et [15] dans les deux directions différentes suivantes :

- Dans le cas scalaire $m = 1$, Bouzouina et Robert [17] ont montré la validité de l'approximation semi-classique donnée par le théorème d'Egorov jusqu'au temps d'Ehrenfest $|t| < \frac{1}{2\Gamma}\log(h^{-1})$. Notre généralisation concerne le cas matriciel $m \geqslant 2$. Nous rappellerons les résultats du cas scalaire dans le paragraphe suivant.

• Dans le cas matriciel $m \geqslant 2$, sous la même hypothèse de "non-croisement" sur les valeurs propres de H_0 que nous allons introduire dans la suite, Bolte et Glaser [15] ont montré un théorème d'Egorov valable en temps finis $|t| \leqslant \bar{t}$, pour tout $\bar{t} > 0$ indépendant de h. Nous étendons ce résultat en montrant la validité de l'approximation semi-classique pour des temps longs d'ordre $\log(h^{-1})$.

Les résultats présentés dans cette section sont issus de l'article [3] et seront prouvés dans le chapitre 3. Dans nos preuves nous nous inspirons des techniques développées dans [17, 15].

2.1.1 *Présentation du problème*

On considère un opérateur h-pseudodifférentiel $H^w(x, hD_x; h)$ de symbole semi-classique hermitien $H(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j H_j(x,\xi)$ dans $S(g;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$, où $g : \mathbb{R}^{2n} \to [1, +\infty[$ est une fonction d'ordre. On suppose que $H_0 + i$ est elliptique, i.e.,

$$\exists\, C > 0\,; \quad \|H_0 + i\| \geqslant C g(x,\xi), \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{2.1.1}$$

Sous cette hypothèse, $H^w(x, hD_x; h)$ est essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ pour h assez petit (voir Théorème 1.8), et par le théorème de Stone (voir par exemple [91, p. 74]), l'opérateur d'évolution $U_H(t) := e^{-\frac{it}{h}H^w(x,hD_x;h)}$ généré par l'équation de Schrödinger correspondante (0.2.5) est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Soit $Q(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j Q_j(x,\xi)$ dans $S(1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ et on s'intéresse à l'étude de l'approximation semi-classique de la solution

$$Q(t) := U_H(-t) Q^w(x, hD_x; h) U_H(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

de l'équation de Heisenberg

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \frac{i}{h}\big[H^w(x, hD_x; h), Q(t)\big], \quad Q(t)_{|t=0} = Q^w(x, hD_x; h). \tag{2.1.2}$$

Par le théorème de Calderón-Vaillancourt (Théorème 1.3), $Q^w(x, hD_x; h)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ et par conséquent $Q(t)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$, uniformément pour $t \in \mathbb{R}$.

2.1.2 *Rappel des résultats dans le cas scalaire*

Commençons par rappeler les résultats dans le cas scalaire $m = 1$. Soit $H(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j H_j(x,\xi)$ dans $S(g;\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ et $Q \in S(1;\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ une observable classique (pour simplifier).

Approximation semi-classique en temps finis

Avant de rappeler l'énoncé du Théorème d'Egorov, on rappelle brièvement la preuve de l'approximation d'ordre h de $Q(t)$ qui est basée sur un calcul simple en combinant les équations (0.2.3) et (0.2.6) et le calcul symbolique h-pseudodifférentiel.

On suppose que

$$\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} H_j \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R}), \quad \text{pour } \gamma \in \mathbb{N}^{2n}, j \in \mathbb{N};\ |\gamma| + j \geqslant 2. \tag{2.1.3}$$

Pour $j = 0$, cette hypothèse assure en particulier l'existence du flot classique $t \mapsto \phi^t_{H_0}(x,\xi)$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. On pose

$$q_0(t,x,\xi) := Q \circ \phi^t_{H_0}(x,\xi), \quad t \in \mathbb{R}, (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Par des arguments standards d'équations différentielles ordinaires, on vérifie facilement que $q_0(t,\cdot,\cdot) \in S(1;\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$, uniformément pour $|t| \leqslant \bar{t}$, pour tout $\bar{t} > 0$.

En combinant les équations (0.2.3) et (0.2.6), on obtient

$$\forall t,s \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{ds}\left(U_H(-s) q_0(t-s)^w U_H(s)\right) = U_H(-s) \Lambda_{H^w, q_0(t-s)^w} U_H(s) \tag{2.1.4}$$

avec

$$\Lambda_{H^w, q_0(t-s)^w} := \frac{i}{h}\left[H^w, q_0(t-s)^w\right] - \{H, q_0(t-s)\}^w.$$

Par la formule de composition des opérateurs h-pseudodifférentiels (voir Chapitre 1), l'opérateur $\frac{i}{h}[H^w, q_0(t-s)^w]$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole principal $\{H_0, q_0(t-s)\}$. Donc $\Lambda_{H^w, q_0(t-s)^w}$ s'écrit sous la forme

$$\Lambda_{H^w, q_0(t-s)^w} = h\, r^w_{t,s}(x, hD_x; h) \tag{2.1.5}$$

où le reste $r_{t,s} = r_{t,s}(x,\xi;h)$ dépend des dérivées en (x,ξ) des symboles $(H_j)_{j\geqslant 0}$ et de $q_0(t-s)$. Pour t,s dans un intervalle borné, l'hypothèse (2.1.3) garantit que $r_{t,s} \in S(1;\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ et par conséquent le théorème de Calderón-Vaillancourt assure que $r^w_{t,s}(x,hD_x;h) = \mathcal{O}_{L^2\to L^2}(1)$. Donc (2.1.5) entraîne que $\Lambda_{H^w,q_0(t-s)^w} = \mathcal{O}_{L^2\to L^2}(h)$ et en intégrant dans (2.1.4) en utilisant le fait que $q_0(t)_{|t=0} = Q$, on obtient, uniformément pour $|t| \leqslant \bar{t}$,

$$\|Q(t) - q_0(t)^w\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \mathcal{O}(h). \tag{2.1.6}$$

Cette relation est un cas particulier du Théorème d'Egorov. En utilisant la règle du développement asymptotique du produit des symboles, on sait qu'on peut donner un développement asymptotique à tout ordre pour le commutateur de deux opérateurs h-pseudodifférentiels. Ainsi, en itérant le raisonnement précédent, on obtient le résultat bien connu suivant (voir [102, Théorème IV-10] pour une preuve détaillée)

Théorème 2.1 (Egorov) *Soit* $H(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j H_j(x,\xi)$ *dans* $S(g;\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ *un Hamiltonien réel satisfaisant* (2.1.1),(2.1.3) *et* $Q \in S(1;\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *l'opérateur* $Q(t)$ *est un opérateur* h*-pseudodifférentiel de symbole* $q_{sca}(t) \in S(1;\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$, *i.e.,* $Q(t) =$

$q_{sca}(t)^w(x, hD_x; h)$. *Le symbole* $q_{sca}(t)$ *admet un développement asymptotique en puissances de* h

$$q_{sca}(t, x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j q_{j,sca}(t, x, \xi) \quad \textit{dans} \quad S(1; \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}), \tag{2.1.7}$$

uniformément pour t *dans tout intervalle borné avec*

$$q_{0,sca}(t) = Q \circ \phi^t_{H_0},$$

où $\phi^t_{H_0} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *est le flot Hamiltonien associé au symbole principal* H_0 *de* H.

Ici nous avons introduit l'indice "sca" pour préciser que nous sommes dans le cas scalaire. Par le théorème de Calderón-Vaillancourt, le développement asymptotique (2.1.7) se traduit au niveau des opérateurs par l'estimation (0.2.7). Notons que le résultat précédent reste valable pour une observable Q vérifiant $\partial^\gamma_{(x,\xi)} Q \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ pour $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ avec $|\gamma| \geqslant 1$.

Remarque 2.1 *Les symboles* $q_{j,sca}(t)$, $j \geqslant 1$, *sont donnés par la formule de récurrence*

$$q_{j,sca}(t, x, \xi) = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|+k+p=j+1 \\ 0 \leqslant p \leqslant j-1}} \gamma(\alpha, \beta) \int_0^t \left((H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)})(q_{p,sca}{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(s)) \right) \left(\phi^{t-s}_{H_0}(x, \xi) \right) ds.$$

avec

$$\gamma(\alpha, \beta) := \frac{i\left((-1)^{|\beta|} - (-1)^{|\alpha|}\right)}{(2i)^{|\alpha|+|\beta|} \alpha! \beta!}.$$

Ici, pour $A \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, *on utilise la notation*

$$A^{(\alpha)}_{(\beta)}(x, \xi) := \partial^\beta_\xi \partial^\alpha_x A(x, \xi).$$

Approximation semi-classique en temps d'Ehrenfest

Nous avons vu dans l'introduction que pour étudier la validité de l'approximation semi-classique donnée par le théorème d'Egorov pour des temps longs dépendant de h, il faut établir des estimations uniformes sur les dérivées par rapport à (x, ξ) du flot Hamiltonien $\phi^t_{H_0}$. On pose

$$\Gamma := \|J\nabla^{(2)}_{x,\xi} H_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})},$$

où $\nabla^{(2)}_{x,\xi} H_0$ désigne la matrice Hessienne de H_0 et J la matrice $2n \times 2n$ associée à la forme symplectique canonique (0.2.1). En procédant par récurrence en utilisant l'équation de stabilité de Jacobi

$$\frac{d}{dt} \nabla_{x,\xi} \phi^t_{H_0}(x, \xi) = J\nabla^{(2)}_{x,\xi} H_0(\phi^t_{H_0}(x, \xi)) \nabla_{x,\xi} \phi^t_{H_0}(x, \xi), \tag{2.1.8}$$

l'estimation suivante a été prouvée dans [17] sous l'hypothèse (2.1.3) :

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}, \ \exists\, C_\gamma > 0 \,; \quad \|\partial^\gamma_{(x,\xi)} \phi^t_{H_0}(x, \xi)\| \leqslant C_\gamma \exp(|\gamma| \Gamma |t|), \tag{2.1.9}$$

uniformément pour $t \in \mathbb{R}$ et $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Théorème 2.2 (Bouzouina-Robert [17]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, il existe $C_{\gamma,j} > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, on a*

$$|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} q_{0,sca}(t, x, \xi)| \leqslant C_{\gamma,0} \exp\left(|\gamma|\Gamma|t|\right), \tag{2.1.10}$$

et pour $j \geqslant 1$,

$$|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} q_{j,sca}(t, x, \xi)| \leqslant C_{\gamma,j} \exp\left((2j - 1 + |\gamma|)\Gamma|t|\right). \tag{2.1.11}$$

De plus, on a l'estimation suivante sur le reste à tout ordre dans le développement asymptotique de $Q(t)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $C_N > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left\| Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j q_{j,sca}(t)^w(x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant C_N h^{N+1} (1 + |t|)^{N+\delta_n} \exp\left(\Gamma(2N + \delta_n)|t|\right), \tag{2.1.12}$$

avec δ_n une constante qui dépend uniquement de la dimension ($\delta_n \leqslant 5n + 3$).

Comme conséquence de cette estimation, on a le corollaire suivant concernant la validité de l'approximation semi-classique jusqu'au temps d'Ehrenfest.

Corollaire 2.1 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, pour tout $N \geqslant 1$, il existe $C_N > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on a*

$$\left\| Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j q_{j,sca}(t)^w(x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant C_N h^{\varepsilon N + 1} h^{(\frac{\varepsilon - 1}{2})(5n+3)},$$

uniformément pour $|t| \leqslant \dfrac{1 - \varepsilon}{2\Gamma} \log(h^{-1})$.

Remarque 2.1 *La constante $\frac{1}{2\Gamma}$ est optimale en général et peut être améliorée en $\frac{2}{3\Gamma}$ dans le cas où l'Hamiltonien H est classique, i.e. $H = H_0$, plus généralement dans le cas où le développement asymptotique en puissances de h de H est pair (voir [17]).*

2.1.3 *Cas d'un Hamiltonien de symbole principal scalaire*

Avant d'étudier le cas général, on commence notre étude par le cas particulier d'un Hamiltonien semi-classique $H(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j H_j(x, \xi)$ dans $S(g; \mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C}))$ de symbole principal multiple scalaire de l'identité, i.e.,

$$H_0(x, \xi) = \lambda(x, \xi) I_m, \quad \text{avec } \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}). \tag{2.1.13}$$

Ce cas est important et est différent du cas scalaire du fait que le symbole sous-principal matriciel H_1 joue un rôle important dans l'évolution en temps comme nous allons le voir dans la suite. Ce cas a été étudié dans [18, 14] où des théorèmes de type Egorov valables en temps finis ont été prouvés.

Comme dans le cas scalaire, on suppose que pour tout $j \geqslant 0$ et $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$,

$$\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} H_j \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C})), \quad \text{pour } |\gamma| + j \geqslant 2. \tag{2.1.14}$$

Résolution asymptotique de l'équation de Heisenberg

L'hypothèse (2.1.13) nous permet de construire directement une solution asymptotique $q(t) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j q_j(t)$ de l'équation de Heisenberg (2.1.2) au niveau des symboles dans l'espace des séries formelles de puissances de h. Au niveau des symboles, le problème (2.1.2) s'écrit sous la forme

$$\frac{d}{dt}\sum_{j\geqslant 0} h^j q_j(t) \sim i\sum_{j\geqslant 0} h^{j-1}\big([H,q(t)]_{\#}\big)_j, \qquad \sum_{j\geqslant 0} h^j q_j(t)_{|t=0} \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j Q_j, \tag{2.1.15}$$

où on rappelle que

$$[H,q(t)]_{\#} \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j\big([H,q(t)]_{\#}\big)_j$$

est le commutateur de Moyal de $H, q(t)$ défini comme le symbole du commutateur $[H^w, Q(t)]$. Pour tout $j \geqslant 0$, on a (voir Annexe A du Chapitre 3)

$$i\big([H,q(t)]_{\#}\big)_j = \sum_{|\alpha|+|\beta|+k+p=j} \tilde{\gamma}(\alpha,\beta)\Big(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} - (-1)^{|\alpha|-|\beta|} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)}\Big) \tag{2.1.16}$$

avec $\tilde{\gamma}(\alpha,\beta) := \dfrac{i(-1)^{|\beta|}}{(2i)^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!\beta!}$.

Pour $j = 0$, l'hypothèse (2.1.13) entraîne que le symbole principal de $[H,q(t)]_{\#}$ donné par le commutateur $[H_0, q_0(t)]$ est nul. Donc, en identifiant les puissances égales de h des deux cotés dans (2.1.15), on dérive les problèmes de Cauchy suivants sur les $\big(q_j(t)\big)_{j\geqslant 0}$

$$(\mathscr{C}_j)\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}q_j(t) &=& i\big([H,q(t)]_{\#}\big)_{j+1} \\ q_j(t)_{|t=0} &=& Q_j. \end{array}\right.$$

Par l'hypothèse (2.1.13) de nouveau, le terme correspondant à $p = j+1$ dans la somme (2.1.16) donné par le commutateur $i[H_0, q_{j+1}(t)]$ est aussi nul. Par conséquent, $(\mathscr{C}_j)_j$ se réécrit sous la forme

$$(\mathscr{C}_j)\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}q_j(t) &=& \{\lambda, q_j(t)\} + i[H_1, q_j(t)] + B_j(t) \\ q_j(t)_{|t=0} &=& Q_j, \end{array}\right. \tag{2.1.17}$$

avec

$$B_j(t,x,\xi) := \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|+k+p=j+1 \\ 0\leqslant p\leqslant j-1}} \tilde{\gamma}(\alpha,\beta)\Big(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} - (-1)^{|\alpha|-|\beta|} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)}\Big)(x,\xi).$$

Dans l'annexe B du chapitre 3, on résout les problèmes de Cauchy de la forme (2.1.17) et on obtient les solutions, pour tout $j \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} q_j(t,x,\xi) =& T^{-1}(t,x,\xi)\Big(Q_j\big(\phi^t_\lambda(x,\xi)\big) \\ &+ \int_0^t T^{-1}\big(-s,\phi^t_\lambda(x,\xi)\big)B_j\big(s,\phi^{t-s}_\lambda(x,\xi)\big)T\big(-s,\phi^t_\lambda(x,\xi)\big)\,ds\Big)T(t,x,\xi), \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

définies pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. En particulier, le symbole principal $q_0(t, x, \xi)$ est donné par

$$q_0(t, x, \xi) = T^{-1}(t, x, \xi) Q_0\big(\phi_\lambda^t(x, \xi)\big) T(t, x, \xi), \quad t \in \mathbb{R}, (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{2.1.19}$$

Contrairement au cas scalaire, on voit que l'évolution en temps des symboles $q_j(t)$, $j \geqslant 0$, n'est plus gouvernée seulement par un transport le long du flot Hamilonien ϕ_λ^t associé à λ, mais aussi par une conjugaison par la fonction à valeurs matricielles unitaires $T : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to M_m(\mathbb{C})$ solution du système

$$\frac{d}{dt} T(t, x, \xi) = -iH_1\big(\phi_\lambda^t(x, \xi)\big) T(t, x, \xi), \quad T(0, x, \xi) = I_m. \tag{2.1.20}$$

Ceci est dû à la structure matricielle du symbole sous-principal H_1. En effet, de l'équation (2.1.17), on peut voir que si H_1 est à valeurs scalaires, le commutateur $[H_1, q_j(t)]$ s'annule et on retrouve les solutions $q_{j,\text{sca}}(t)$ du cas scalaire (voir Remarque 3.3.1).

Approximation semi-classique en temps finis

Si l'on s'intéresse seulement à une approximation semi-classique valable en temps finis, on est amené à estimer les dérivées (en (x, ξ)) des symboles $(q_j(t, x, \xi))_{j \geqslant 0}$ uniformément en temps pour $|t| \leqslant \bar{t}$, avec $\bar{t} > 0$ fixé (indépendant de h). Sous l'hypothèse (2.1.14), par des arguments standards d'équations différentielles ordinaires, on peut prouver les estimations suivantes uniformément pour $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $|t| \leqslant \bar{t}$,

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}, \;\; \exists\, C_\gamma, C'_\gamma > 0\,; \quad \|\partial^\gamma_{(x,\xi)} \phi_\lambda^t(x, \xi)\| \leqslant C_\gamma, \quad \|\partial^\gamma_{(x,\xi)} T(t, x, \xi)\| \leqslant C'_\gamma.$$

De ces estimations, on déduit que pour tout $j \geqslant 0$, $q_j(t, \cdot, \cdot) \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ uniformément pour $|t| \leqslant \bar{t}$. On peut donc sommer les symboles $(q_j(t))_{j \geqslant 0}$ en utilisant le lemme de Borel (Lemme 1.1) et définir le symbole

$$q(t, x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j q_j(t, x, \xi) \quad \text{dans } \; S(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C})), \quad |t| \leqslant \bar{t}, \tag{2.1.21}$$

solution du problème de Heisenberg (2.1.15). Au niveau des opérateurs, par le théorème de Calderón-Vaillancourt (Théorème 1.3), on a donc l'estimation

$$\forall N \in \mathbb{N}, \; \exists\, C_N > 0\,; \quad \Big\| Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j q_j(t)^w(x, hD_x) \Big\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m))} \leqslant C_N h^{N+1} \tag{2.1.22}$$

uniformément pour $|t| \leqslant \bar{t}$. Ainsi, on obtient une approximation semi-classique pour $Q(t)$ valable pour t dans n'importe quel intevalle borné. Ce résultat a été déjà établi dans [18, Théorème 3] où seul le symbole principal $q_0(t)$ a été donné explicitement. Par la caractérisation de Beals des opérateurs h-pseudodifférentiels (Théorème 1.7), en utilisant l'estimation précédente, on peut montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Q(t)$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole $q(t) \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ donné par (2.1.21), i.e. $Q(t) = q(t)^w(x, hD_x; h)$.

Approximation semi-classique en temps d'Ehrenfest

Pour prouver la validité de l'approximation semi-classique pour des temps longs dépendants de h, on doit établir une estimation uniforme en temps sur le reste à tout ordre dans le développement asymptotique de $Q(t)$ donné par le membre de gauche de (2.1.22). On adapte la preuve de [17]. Il s'agit dans un premier temps d'exprimer ce reste en fonctions des restes successifs dans les formules de composition des symboles $(H_k)_{k\geqslant 0}$ et $(q_j(t))_{j\geqslant 0}$ (voir Lemme 3.3.9). Ces restes dépendent en particulier des dérivées en (x,ξ) des symboles $(q_j(t))_{j\geqslant 0}$. Donc pour les estimer, il faut estimer ces dérivées uniformément par rapport à $t\in\mathbb{R}$ et $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$. Pour les dérivées du flot Hamiltonien ϕ^t_λ, on a l'estimation (2.1.9). Sous l'hypothèse (2.1.3) (avec $j=1$), on prouve une estimation similaire sur les dérivées de la solution T du système (2.1.20)

$$\forall\gamma\in\mathbb{N}^{2n}\setminus\{0\},\ \exists\, C_\gamma>0\,;\quad \|\partial^\gamma_{(x,\xi)}T(t,x,\xi)\|\leqslant C_\gamma\exp(|\gamma|\Gamma|t|),\tag{2.1.23}$$

uniformément pour $t\in\mathbb{R}$ et $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$, avec

$$\Gamma := \|J\nabla^{(2)}_{x,\xi}\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}.$$

En utilisant ces estimations, on prouve

Proposition 2.1.1 *[cf. Proposition 3.3.2] Sous l'hypothèse (2.1.14), pour tout $\gamma\in\mathbb{N}^{2n}$ et tout $j\geqslant 0$, il existe $C_{\gamma,j}>0$ indépendante de $t\in\mathbb{R}$ et $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$, tel que*

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}q_0(t,x,\xi)\right\|\leqslant C_{\gamma,0}\exp\left(|\gamma|\Gamma|t|\right),\tag{2.1.24}$$

et pour $j\geqslant 1$,

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}q_j(t,x,\xi)\right\|\leqslant C_{\gamma,j}\exp\left((2|\gamma|+4j-3)\Gamma|t|\right).\tag{2.1.25}$$

Notre résultat principal concernant ce cas particulier est le suivant

Théorème 2.3 *[cf. Théorème 3.2.1] On suppose que (2.1.1), (2.1.13) et (2.1.14) sont satisfaites. Pour tout $N\in\mathbb{N}$, il existe $C_N>0$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}$,*

$$\left\|Q(t)-\sum_{j=0}^{N}h^j q_j(t)^w(x,hD_x)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}\leqslant C_N h^{N+1}\exp\left((4N+\delta_n)\Gamma|t|\right),\tag{2.1.26}$$

où $\delta_n\in\mathbb{N}$ dépend uniquement de la dimension.

Corollaire 2.2 *[cf. Corollaire 3.2.2] Sous les hypothèses du Théorème précédent, pour tout $N\geqslant 1$, il existe $C_N>0$ tel que pour tout $\varepsilon>0$, on a*

$$\left\|Q(t)-\sum_{j=0}^{N}h^j q_j(t)^w(x,hD_x)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}\leqslant C_N h^{\varepsilon N+1}h^{\frac{(\varepsilon-1)}{4}\delta_n},$$

uniformément pour $|t|\leqslant\dfrac{(1-\varepsilon)}{4\Gamma}\log(h^{-1})$.

On voit bien que nos estimations sur les dérivées des symboles $q_j(t)$ pour $j\geqslant 1$ sont différentes de celles du cas scalaire (voir (2.1.11)). Cela est lié à la présence des termes $T(-s,\phi^t_\lambda(x,\xi))$ dans les symboles $(q_j(t))_{j\geqslant 1}$, qui comme nous l'avons précisé est due au fait que H_1 est à valeurs matricielles. Nous expliquons cette différence en plus de détails dans la remarque 3.3.8. En particulier, cela entraîne que notre estimation exponentielle (2.1.26) sur le reste dans le développement asymptotique de $Q(t)$ est différente de l'estimation du cas scalaire (2.1.12) et par conséquent la constante $\frac{1}{4\Gamma}$ dans le temps d'Ehrenfest est plus petite que celle du cas scalaire. Cette différence peut être liée à nos estimations et nous ne pouvons pas affirmer l'optimalité de la constante $\frac{1}{4\Gamma}$ vu qu'on ne dispose pas d'exemple qui la confirme.

2.1.4 *Le cas général*

Dans le cas général, on introduit l'hypothèse suivante sur les valeurs propres de H_0. On suppose que

(A1). $H_0(x,\xi)$ admet $\ell \in \{1,...,m\}$ valeurs propres distinctes $\lambda_1(x,\xi) < \cdots < \lambda_\ell(x,\xi)$ de multiplicités constantes sur $\mathbb{R}^{2n}$ vérifiant : $\exists\, \rho, c > 0$ tel que

$$|\lambda_\mu(x,\xi) - \lambda_\nu(x,\xi)| \geqslant \rho\, g(x,\xi), \quad \text{pour } \; 1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell \; \text{ et } \; |x| + |\xi| \geqslant c. \tag{2.1.27}$$

Cette hypothèse est identique à celle considérée dans [15][1]. Elle interdit les croisements entre les valeurs propres $(\lambda_\nu(x,\xi))_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}$ de $H_0(x,\xi)$ et donc assure leurs régularités et la régularité des projecteurs propres associés qu'on note $(P_{\nu,0}(x,\xi))_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}$. De plus en utilisant la condition de gap (2.1.27), on montre que λ_ν et $P_{\nu,0}$ appartiennent à des bonnes classes de symboles, plus précisément $P_{\nu,0} \in S(1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ et $\lambda_\nu \in S(g;\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$.

On suppose que pour tout $j \geqslant 0$ et $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$,

$$\partial^\gamma_{(x,\xi)} H_j \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C})), \quad \text{pour } \; |\gamma| + j \geqslant 1. \tag{2.1.28}$$

D'après (0.2.10), pour construire une solution asymptotique $q(t) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j q_j(t)$ au problème de Heisenberg (2.1.2), il faut assurer la commutativité entre H_0 et $q_0(t)$. Pour $t = 0$, cette condition est équivalente à ce que Q_0 soit diagonale par blocs par rapport aux projecteurs propres $(P_{\nu,0})_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}$, i.e.

$$Q_0(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_{\nu,0}(x,\xi) Q_0(x,\xi) P_{\nu,0}(x,\xi), \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{2.1.29}$$

Projections semi-classiques

Réduction modulo $\mathcal{O}(h)$

Afin de motiver la discussion qui suit où nous allons introduire la notion des projecteurs semi-classiques associés à $H^w(x, hD_x; h)$ qui sera un ingrédient important dans notre étude, faisons la remarque suivante. Si l'on essaye de diagonaliser $Q(t)$ en le conjuguant par

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} P^w_{\nu,0}(x, hD_x) = \mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)}, \tag{2.1.30}$$

un calcul formel donne

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum_{\mu,\nu=1}^{\ell} P^w_{\nu,0} e^{\frac{it}{h}H^w} Q^w e^{-\frac{it}{h}H^w} P^w_{\mu,0} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\ell} e^{\frac{it}{h}P^w_{\nu,0}H^w P^w_{\nu,0}} P^w_{\nu,0} Q^w P^w_{\nu,0} e^{-\frac{it}{h}P^w_{\nu,0}H^w P_{\nu,0}} + \mathcal{O}_t(h) \\ &=: \sum_{\nu=1}^{\ell} Q^{(0)}_\nu(t) + \mathcal{O}_t(h), \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

1 Une hypothèse similaire a été imposée dans [31] pour établir une propriété de type Egorov pour des systèmes pseudodifférentiels hyperboliques.

où le reste $\mathcal{O}(h)$ vient du fait que

$$[P_{\nu,0}^w, H^w] = \mathcal{O}(h) \tag{2.1.32}$$

car $[P_{\nu,0}, H_0] = 0$, et $P_{\nu,0}^w Q^w P_{\mu,0}^w = \mathcal{O}(h)$ pour $\mu \neq \nu$ d'après (2.1.29) et la propriété

$$P_{\nu,0}^w P_{\mu,0}^w = \mathcal{O}(h), \quad \forall\, \mu \neq \nu. \tag{2.1.33}$$

Ici on a aussi utilisé la propriété

$$e^{\frac{it}{h}H^w} P_{\nu,0}^w = e^{\frac{it}{h}P_{\nu,0}^w H^w P_{\nu,0}^w} P_{\nu,0}^w + \mathcal{O}_t(h),$$

qui découle du principe du Duhamel (voir Lemme 3.4.7), où le reste $\mathcal{O}_t(h)$ dépend de t. Pour l'instant on ne fait pas attention à l'uniformité de ce reste par rapport à t. Fixons $\nu \in \{1, ..., \ell\}$ et observons tout d'abord que le symbole principal de $P_{\nu,0}^w H^w P_{\nu,0}^w$ qui est égale à $P_{\nu,0} H_0 P_{\nu,0} = \lambda_\nu P_{\nu,0}$ est un multiple scalaire de l'identité dans le sous espace propre $P_{\nu,0}\mathbb{C}^m$. Au niveau des symboles, le problème de Heisenberg satisfait par $Q_\nu^{(0)}(t)$ s'écrit

$$\frac{d}{dt} q_\nu^{(0)}(t) = \frac{i}{h}\left[P_{\nu,0} \# H \# P_{\nu,0}, q_\nu^{(0)}(t)\right]_\#, \quad q_\nu^{(0)}(t)_{|t=0} = P_{\nu,0} \# Q \# P_{\nu,0}. \tag{2.1.34}$$

Si l'on cherche à construire une solution asymptotique $q_\nu^{(0)}(t) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j q_{\nu,j}^{(0)}(t)$ pour ce problème, le fait que $P_{\nu,0}^w$ commute avec $Q_\nu^{(0)}(t)$ modulo $\mathcal{O}(h)$ implique

$$\left[P_{\nu,0} H_0 P_{\nu,0}, q_{\nu,0}^{(0)}(t)\right] = \lambda_\nu \left[P_{\nu,0}, q_{\nu,0}^{(0)}(t)\right] = 0.$$

Par conséquent on n'a pas de problème de commutativité au niveau du symbole principal et on peut résoudre (2.1.34) en suivant l'algorithme utilisé dans le cas précédent.

Cette réduction est utile si l'on s'intéresse seulement à une approximation de $Q(t)$ au premier ordre semi-classique car on voit d'après (2.1.31) qu'on ne peut pas aller au delà d'un $\mathcal{O}(h)$. Pour une approximation à tout ordre, l'idée consiste alors à construire des opérateurs h-pseudodifférentiels $P_\nu^w(x, hD_x; h)$ de symboles principaux les projecteurs propres $P_{\nu,0}$, $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, vérifiant les propriétés (2.1.30), (2.1.32) et (2.1.33) modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, i.e. modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ en norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m))$, on a

$$P_\nu^w P_\nu^w = P_\nu^w = (P_\nu^w)^* \tag{2.1.35}$$

$$[P_\nu^w, H^w] = 0 \tag{2.1.36}$$

$$P_\nu^w P_\mu^w = 0, \quad \forall \mu \neq \nu, \tag{2.1.37}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} P_\nu^w = \mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)}. \tag{2.1.38}$$

Ces opérateurs sont appelés projecteurs semi-classiques associés à $H^w(x, hD_x; h)$ d'ordre h^∞. Il existe au moins deux méthodes différentes pour la construction des ces opérateurs. La première utilisée dans [18, 47] est une construction récursive qui consiste à résoudre les équations (2.1.35)-(2.1.38) au niveau des symboles dans l'espace des séries formelles de puissances de h. Plus explicitement, au niveau des symboles, les équations (2.1.35) et (2.1.36) s'écrivent sous la forme

$$P_\nu \# P_\nu \sim P_\nu \sim P_\nu^*, \quad [P_\nu, H]_\# := P_\nu \# H - H \# P_\nu \sim 0. \tag{2.1.39}$$

En supposant que P_ν admet un développement asymptotique $P_\nu \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j P_{\nu,j}$ puis en identifiant les puissances égales de h dans (2.1.39) en utilisant le calcul symbolique, on obtient des problèmes de Cauchy récursives sur les $P_{\nu,j}$, $j \geqslant 0$. Par exemple, au niveau des symboles principaux, d'après (2.1.39), on a

$$P_{\nu,0}^2 = P_{\nu,0}, \quad [P_{\nu,0}, H_0] = 0$$

ce qui implique que $P_{\nu,0}$ est le projecteur propre de H_0 associé à λ_ν. Une fois ces problèmes résolus, on obtient le symbole P_ν en sommant les $(P_{\nu,j})_{j\geqslant 0}$ en utilisant le lemme de Borel (voir Lemme 1.1). En particulier, si $P_{\nu,j} \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ alors $P_\nu(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j P_{\nu,j}(x,\xi)$ dans $S(1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ est unique modulo $S^{-\infty}(1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$, i.e., $P_\nu^w(x, hD_x; h)$ est unique modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ en norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$.

La deuxième méthode due à Helffer-Sjöstrand [63] (voir aussi [93, 94]) utilise les projecteurs de Riesz et le calcul symbolique h-pseudodifférentiel. Dans le chapitre 3, on rappelle la construction des opérateurs $P_\nu^w(x, hD_x; h)$ en utilisant cette deuxième méthode qui a l'avantage de permettre des estimations plus précises sur les dérivées des symboles $P_{\nu,j}$, $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, $j \geqslant 0$. Nous verrons aussi qu'en suivant une idée de Nenciu [93], on peut satisfaire la propriété (2.1.35) exactement, c-à-d. pas seulement modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$.

Les deux méthodes mènent alors au résultat suivant qui sera notre point de départ dans l'étude de l'approximation semi-classique de $Q(t)$.

Théorème 2.4 *[cf. Théorème 3.2.4] Sous l'hypothèse **(A1)**, pour tout $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, il existe*

$$P_\nu(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j P_{\nu,j}(x,\xi) \quad \textit{dans} \quad S(1;\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C})),$$

tel que $P_\nu^w(x, hD_x; h)$ satisfait les propriétés (2.1.35)-(2.1.38) avec (2.1.35) exactement. En particulier, $P_{\nu,0}$ est le projecteur propre associé à la valeur propre λ_ν de H_0.

Diagonalisation par blocs uniforme en temps

On introduit la classe $\mathcal{Q}(1)$ d'observables $Q \in S_{sc}(1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ qui sont "semi-classiquement" diagonales par blocs par rapport au projecteurs semi-classiques $(P_\nu)_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}$

$$\mathcal{Q}(1) := \left\{ Q(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j Q_j(x,\xi);\ Q \sim \sum_{\nu=1}^{\ell} P_\nu \# Q \# P_\nu \ \text{ dans } \ S(1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C})) \right\}.$$

Le symbole principal de $P_\nu \# Q \# P_\nu$ étant $P_{\nu,0} Q_0 P_{\nu,0}$ donc si $Q \in \mathcal{Q}(1)$ alors en particulier Q_0 est diagonale par blocs par rapport au projecteurs propres $(P_{\nu,0})_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}$, i.e. Q_0

satisfait (2.1.29). Au niveau des opérateurs, par le théorème de Calderón-Vaillancourt, si $Q \in \mathscr{Q}(1)$ alors modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ en norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$, on a

$$Q^w = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_\nu^w Q^w P_\nu^w. \tag{2.1.40}$$

En procédant comme dans la réduction (2.1.31) en utilisant les propriétés (2.1.35)-(2.1.38) et l'hypothèse $Q \in \mathscr{Q}(1)$, on obtient

$$Q(t) = \sum_{\nu=1}^{\ell} Q_\nu(t) + \mathcal{O}_t(h^\infty), \tag{2.1.41}$$

en norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$, où pour $\nu = 1, \cdots, \ell$,

$$Q_\nu(t) := e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} P_\nu^w Q^w P_\nu^w e^{-\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.2 *(i) L'hypothèse $Q \in \mathscr{Q}(1)$ nous permet de négliger modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ les termes*

$$Q_{\nu\mu}(t) := e^{\frac{it}{h}P_\mu^w H^w P_\mu^w} P_\mu^w Q^w P_\nu^w e^{-\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}, \quad \mu \neq \nu,$$

qui sont des opérateurs intégraux de Fourier (OIF) pour $t \neq 0$, i.e. elle assure que pour $\mu \neq \nu$, $Q_{\nu\mu}(t) = \mathcal{O}(h^\infty)$, uniformément pour $t \in \mathbb{R}$.

(ii) L'hypothèse $Q \in \mathscr{Q}(1)$ est en effet nécessaire pour que l'opérateur $Q(t)$ soit un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole semi-classique dans $S(1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$. En effet, en partant de l'équation de Heisenberg (2.1.2) satisfaite par $Q(t)$, on peut montrer que si $Q(t)$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole $q(t) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j q_j(t)$ dans $S(1;\mathbb{R}^{2n};M_m(\mathbb{C}))$ alors $Q(t)$ est diagonale par blocs par rapport au projecteurs semi-classiques $P_\nu^w(x, hD_x; h)$, $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, i.e. modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ en norme $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$ uniformément pour $|t| \leqslant \bar{t}$, on a

$$Q(t) = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_\nu^w Q(t) P_\nu^w.$$

En particulier pour $t = 0$, on trouve (2.1.40). Ce résultat a été montré dans [15] généralisant un résultat similaire dans le cas d'un Hamiltonien de Dirac prouvé dans [32]. Nous rappelons la preuve de ce résultat dans la proposition 3.5.1.

(iii) Si on veut une réduction de $Q(t)$ d'ordre $\mathcal{O}(h)$, c-à-d. si on s'intéresse seulement au symbole principal dans l'approximation de $Q(t)$, l'hypothèse (2.1.29) sur Q_0 suffit puisqu'elle assure que $Q_{\nu\mu}(t) = \mathcal{O}(h)$, pour $\mu \neq \nu$, uniformément pour $t \in \mathbb{R}$.

Le reste $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans (2.1.41) dépend de t. Puisque nous sommes intéressés par la validité de l'approximation semi-classique pour des temps dépendant de h, il est important d'étudier son uniformité par rapport à t. On prouve l'estimation suivante uniformément pour $t \in \mathbb{R}$ (cf. Proposition 3.4.6) :

$$\|Q(t) - \sum_{\nu=1}^{\ell} Q_\nu(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}((1+|t|)h^\infty). \tag{2.1.42}$$

Résolution asymptotique de l'équation de Heisenberg

D'après l'estimation (2.1.42), le problème de construction d'une approximation semi-classique pour $Q(t)$ est réduit, modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ uniformément pour des temps longs d'ordre $h^{-\infty}$, à la construction d'une approximation semi-classique pour chaque bloc de Heisenberg $Q_\nu(t)$, $\nu \in \{1, ..., \ell\}$.

Pour construire une solution asymptotique au problème de Heisenberg satisfait par $Q_\nu(t)$ qui s'écrit au niveau des symboles sous la forme

$$\frac{d}{dt}q_\nu(t) = \frac{i}{h}[P_\nu \# H \# P_\nu, q_\nu(t)]_\#, \quad q_\nu(t)_{|t=0} = P_\nu \# Q \# P_\nu := Q_\nu, \tag{2.1.43}$$

l'idée principale consiste à utiliser la propriété suivante

$$(P_\nu^w)^j Q_\nu(t)(P_\nu^w)^j = Q_\nu(t), \quad \forall j \in \mathbb{N} \tag{2.1.44}$$

qui découle de la définition de $Q_\nu(t)$ et de la propriété (2.1.35). On cherche une solution sous la forme

$$q_\nu(t) \sim P_\nu \# \sum_{k \geqslant 0} h^k \widetilde{q}_{\nu,k}(t) \# P_\nu.$$

Conditions initiales : En utilisant (2.1.44), on construit des symboles $\widetilde{Q}_{\nu,k} \in S(1; \mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C}))$ tel que

$$Q_\nu \sim P_\nu \# \sum_{k \geqslant 0} h^k \widetilde{Q}_{\nu,k} \# P_\nu.$$

Une propriété importante des $\widetilde{Q}_{\nu,k}$ réside dans le fait qu'ils sont tous portés par la ν-ème bande, i.e., on a

$$P_{\nu,0}\widetilde{Q}_{\nu,k}P_{\nu,0} = \widetilde{Q}_{\nu,k}, \quad \forall k \geqslant 0. \tag{2.1.45}$$

En particulier,

$$\widetilde{Q}_{\nu,0} = Q_{\nu,0} = P_{\nu,0}Q_0P_{\nu,0}.$$

Problèmes de Cauchy : En tenant compte de ces conditions initiales, on dérive les problèmes de Cauchy suivant sur les $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$

$$(\mathscr{C}_{\nu,j}) \begin{cases} \frac{d}{dt}P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0} &= \{\lambda_\nu, P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}\} + i[\widetilde{H}_{\nu,1}, P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}] + K_{\nu,j-1}(t) \\ \widetilde{q}_{\nu,j}(t)_{|t=0} &= \widetilde{Q}_{\nu,j}, \end{cases}$$

où le reste $K_{\nu,j-1}(t)$ dépend des symboles $\widetilde{q}_{\nu,k}(t)$ pour $0 \leqslant k \leqslant j-1$, (avec $K_{\nu,-1}(t) = 0$) et $\widetilde{H}_{\nu,1}$ est la fonction à valeurs dans $M_m(\mathbb{C})$ hermitienne définie par

$$\widetilde{H}_{\nu,1} := \frac{1}{2i}P_{\nu,0}\big\{P_{\nu,0}, H_0\big\}P_{\nu,0} - i\big[P_{\nu,0}, \{\lambda_\nu, P_{\nu,0}\}\big] + P_{\nu,0}H_1P_{\nu,0}. \tag{2.1.46}$$

La résolution des problèmes de Cauchy $(\mathscr{C}_{\nu,j})_{j\geqslant 0}$ se fait par récurrence sur j. Dans l'annexe B du chapitre 3, en utilisant la propriété (2.1.45) et une propriété analogue sur le reste $K_{\nu,j-1}(t)$, on prouve que si $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,j}(t) &= \{\lambda_\nu, \widetilde{q}_{\nu,j}(t)\} + i[\widetilde{H}_{\nu,1}, \widetilde{q}_{\nu,j}(t)] + K_{\nu,j-1}(t) \\ \widetilde{q}_{\nu,j}(t)_{|t=0} &= \widetilde{Q}_{\nu,j}, \end{cases} \tag{2.1.47}$$

alors
$$\widetilde{q}_{\nu,j}(t) = P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'une façon similaire au cas précédent, on résout l'équation(2.1.47) et on obtient les solutions suivantes, pour tout $j \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\widetilde{q}_{\nu,j}(t,x,\xi) = T_\nu^{-1}(t,x,\xi)\Bigg(&\widetilde{Q}_{\nu,j}\big(\phi_\nu^t(x,\xi)\big)\\ &+\int_0^t T_\nu^{-1}\big(-s,\phi_\nu^t(x,\xi)\big)K_{\nu,j-1}\big(s,\phi_\nu^{t-s}(x,\xi)\big)T_\nu\big(-s,\phi_\nu^t(x,\xi)\big)ds\Bigg)T_\nu(t,x,\xi),\end{aligned}$$

où $T_\nu : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n} \to M_m(\mathbb{C})$ (unitaire) est solution du système

$$\frac{d}{dt}T_\nu(t,x,\xi) = -i\widetilde{H}_{\nu,1}\big(\phi_\nu^t(x,\xi)\big)T_\nu(t,x,\xi), \quad T_\nu(0,x,\xi) = I_m. \tag{2.1.48}$$

Nous avons ainsi construit une solution asymptotique $q_\nu(t) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j q_{\nu,j}(t)$ au problème de Heisenberg (2.1.43) où les symboles $q_{\nu,j}(t)$, $j \geqslant 0$, peuvent être calculer explicitement en fonction des symboles $\widetilde{q}_{\nu,k}(t)$ en utilisant la formule de composition à travers la relation

$$q_{\nu,j}(t) = \Big(P_\nu \# \sum_{k=0}^{j} h^k \widetilde{q}_{\nu,k}(t)\#P_\nu\Big)_j, \quad \forall j \geqslant 0.$$

En particulier, le symbole principal de $Q_\nu(t)$ est donné par

$$q_{\nu,0}(t) = P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,0}(t)P_{\nu,0} = \widetilde{q}_{\nu,0}(t) = T_\nu^{-1}(t,x,\xi)\big(P_{\nu,0}Q_0P_{\nu,0}\big)\big(\phi_\nu^t(x,\xi)\big)T_\nu(t,x,\xi).$$

Approximation semi-classique en temps d'Ehrenfest - Résultat principal

Le reste de l'étude se fait d'une façon similaire au cas précédent. Dans un premier temps, on prouve des estimations uniformes sur les dérivées des symboles $(q_{\nu,j}(t))_{j\geqslant 0}$. Ensuite, on établit une estimation exponentielle uniforme sur le reste dans le développement asymptotique de $Q_\nu(t)$ en suivant la méthode de Bouzouina-Robert [17]. Le passage à $Q(t)$ se fait en utilisant la réduction (2.1.42). Nous présentons ces résultats ci-dessous.

On pose
$$\Gamma_\nu := \|J\nabla^{(2)}_{x,\xi}\lambda_\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}, \quad \Gamma_{max} := \max_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}\Gamma_\nu.$$

Proposition 2.1.2 *[cf. Proposition 3.4.15] Soit $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$. Sous les hypothèses **(A1)** et (2.1.28), pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ et tout $j \geqslant 0$, il existe $C_{\gamma,\nu,j} > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, on a*

$$\big\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} q_{\nu,0}(t,x,\xi)\big\| \leqslant C_{\gamma,\nu,0}\exp\big(|\gamma|\Gamma_\nu|t|\big), \tag{2.1.49}$$

et pour $j \geqslant 1$,

$$\big\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} q_{\nu,j}(t,x,\xi)\big\| \leqslant C_{\gamma,\nu,j}\exp\big((2|\gamma|+4j-2)\Gamma_\nu|t|\big). \tag{2.1.50}$$

Théorème 2.5 *[cf. Théorème 3.2.5] Soit* $H \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j H_j$ *dans* $S(g; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ *un Hamiltonien semi-classique satisfaisant les hypothèses (2.1.1),* ***(A1)*** *et (2.1.28), et* $Q \in \mathscr{Q}(1)$*. Pour tout* $N \in \mathbb{N}$*, il existe* $C_N > 0$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$\left\| Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j q_j(t)^w(x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} \leqslant C_N h^{N+1} \exp\left((4N + \tilde{\delta}_n)\Gamma_{max}|t|\right),$$

avec $\tilde{\delta}_n$ *est une constante qui dépend uniquement de la dimension* n*. Les symboles* $(q_j(t))_{j \geqslant 0}$ *sont définis par*

$$q_j(t, x, \xi) := \sum_{\nu=1}^{\ell} q_{\nu,j}(t, x, \xi), \quad j \geqslant 0, t \in \mathbb{R}, (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

En particulier, le symbole principal est donné par

$$q_0(t, x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\ell} T_\nu^{-1}(t, x, \xi)\big(P_{\nu,0} Q_0 P_{\nu,0}\big)\big(\phi_\nu^t(x, \xi)\big)T_\nu(t, x, \xi).$$

Corollaire 2.3 *[cf. Corollaire 3.2.6] Sous les hypothèses du Théorème précédent, pour tout* $N \geqslant 1$*, il existe* $C_N > 0$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$*, on a*

$$\left\| Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j q_j(t)^w(x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} \leqslant C_N h^{\varepsilon N+1} h^{\frac{(\varepsilon-1)}{4}\tilde{\delta}_n},$$

uniformément pour $|t| \leqslant \dfrac{(1-\varepsilon)}{4\Gamma_{\max}} \log(h^{-1})$*.*

Comme nous l'avons précisé dans la remarque 2.2, si l'on s'intéresse seulement au symbole principal de $Q(t)$, nous avons juste besoin de l'hypothèse (2.1.29) sur Q_0. Plus précisément, on a

Corollaire 2.4 *[cf. Corollaire 3.2.7] Soit* H *un Hamiltonien semi-classique satisfaisant les hypothèses du Théorème 2.5 et* $Q(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j Q_j(x, \xi)$ *dans* $S(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$*. On suppose que* Q_0 *est diagonale par blocs par rapport au projecteurs propres* $(P_{\nu,0})_{1 \leqslant \nu \leqslant \ell}$ *de* H_0*, i.e.,*

$$Q_0(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_{\nu,0}(x, \xi) Q_0(x, \xi) P_{\nu,0}(x, \xi), \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Alors il existe $C > 0$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, on a l'estimation*

$$\left\| Q(t) - \big(q_0(t)\big)^w(x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} \leqslant Ch \exp\left(\tilde{\delta}_n \Gamma_{max}|t|\right).$$

2.2 PARTIE II : FORMULE DE TRACE SEMI-CLASSIQUE POUR DES SYSTÈMES MICROHYPERBOLIQUES ET APPLICATION À LA FONCTION DE DÉCALAGE SPECTRAL

Dans cette section, nous présentons les résultats principaux de la deuxième partie de cette thèse portant sur la formule de trace semi-classique pour des systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels microhyperboliques et une application à l'étude de la fonction de décalage spectral pour une paire d'opérateurs de Schrödinger à potentiels matriciels. Ces résultats ont fait l'objet de l'article [4] en collaboration avec Mouez Dimassi et Setsuro Fujiié et seront prouvés dans le chapitre 4.

Tout au long de cette partie, $\mathcal{H}_m$ désigne l'espace des matrices $m \times m$ hermitiennes.

2.2.1 *Formule de trace semi-classique pour des systèmes d'opérateurs h-pseudodifférentiels microhyperboliques*

On considère un opérateur h-pseudodifférentiel auto-adjoint $H^w := H^w(x, hD_x)$ de symbole hermitien $H \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m)$ et soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$. Dans ce premier paragraphe, nous étudions le comportement asymptotique quand $h \searrow 0$ de la trace suivante

$$\operatorname{tr}\left(\chi^w f(H^w) \mathcal{F}_h^{-1} \theta(\tau - H^w)\right), \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{2.2.1}$$

avec $f, \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\mathcal{F}_h^{-1}$ est l'opérateur de Fourier inverse semi-classique défini par (0.3.2). On étudie (2.2.1) près d'une énergie fixée $\tau_0 \in \mathbb{R}$, i.e. pour f à support dans un petit voisinage de τ_0. On désigne par O_{τ_0} l'ensemble des intervalles ouverts centrés en τ_0, i.e.,

$$O_{\tau_0} := \{]\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta[, \eta > 0\}.$$

La fonction χ étant à support compact sur $\mathbb{R}^{2n}$, donc l'opérateur χ^w est de classe trace (de norme trace $\|\chi^w\|_{\mathrm{tr}} = \mathcal{O}(h^{-n})$, voir Théorème 1.11). Par conséquent (2.2.1) est bien définie puisque l'opérateur $f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)$ est borné par le théorème spectral.

Sous une hypothèse de microhyperbolicité sur $\tau_0 - H$ sur le support de χ, on établit un développement asymptotique complet en puissances de h de (2.2.1) lorsque le support de θ est assez proche de 0. Ce résultat est une version microlocale du résultat de Dimassi-Sjöstrand [42] (voir aussi Ivrii [70]).

Définition 2.1 (Microhyperbolicité) *On dit que $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathcal{H}_m)$ est microhyperbolique en $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ dans la direction $T = (T_{x_0}, T_{\xi_0}) \in \mathbb{R}^{2n}$ s'il existe des constantes $C_0, C_1, C_2 > 0$ tel que*

$$\left(\langle T, \nabla_{x,\xi} H(x,\xi)\rangle w, w\right) \geqslant C_0 |w|^2 - C_1 |H(x,\xi) w|^2, \tag{2.2.2}$$

pour tout (x, ξ) tel que $|(x,\xi) - (x_0, \xi_0)| \leqslant C_2$ et $w \in \mathbb{C}^m$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $(\cdot, \cdot)$ désignent les produits scalaires sur $\mathbb{R}^{2n}$ et $\mathbb{C}^m$ respectivement, et on utilise la notation

$$\langle T, \nabla_{x,\xi} H(x,\xi)\rangle = \langle T_{x_0}, \partial_x\rangle H(x,\xi) + \langle T_{\xi_0}, \partial_\xi\rangle H(x,\xi).$$

Théorème 2.6 *[cf. Théorème 4.2.6] Fixons $\tau_0 \in \mathbb{R}$ et on suppose que $\tau_0 - H(x,\xi)$ est microhyperbolique en tout point $(x,\xi) \in \operatorname{supp}\chi$. Il existe $I \in O_{\tau_0}$ et $C > 0$ tel que pour $f \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$ et $\theta \in C_0^\infty(]-\frac{1}{C},\frac{1}{C}[;\mathbb{R})$ avec θ égale à 1 près de 0, on a le développement asymptotique suivant en puissances de h*

$$\operatorname{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)\right) \sim (2\pi h)^{-n} f(\tau)\sum_{j\geqslant 0}\gamma_j(\tau)h^j, \quad h \searrow 0, \tag{2.2.3}$$

uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$.

Les coefficients $\gamma_j(\cdot)$ sont des fonctions C^∞ en τ, indépendantes de f et θ (et dépendent de χ). Ils peuvent être exprimer explicitement en fonction du symbole de la résolvante $(z - H^w)^{-1}$ vue comme un opérateur h-pseudodifférentiel dans la région $\{z \in \mathbb{C}; |\Im z| \geqslant h^\delta\}$, $\delta \in]0,\frac{1}{2}[$ (voir Remarque 4.2.7 et Proposition 1.1).

La preuve du Théorème 2.6 repose essentiellement sur les deux résultats suivants et le calcul symbolique h-pseudodifférentiel. Dans un premier temps, on étudie la contribution de (2.2.1) lorsque

$$\operatorname{supp}\theta \subset \{h^{1-\delta} \leqslant |t| < \kappa\}, \quad \delta \in]0,1], \kappa > 0 \text{ fixés.}$$

Sous une hypothèse de microhyperbolicité uniforme sur $\tau_0 - H$, on prouve que cette contribution est un $\mathcal{O}(h^\infty)$ uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$. Pour l'application à l'étude de la fonction de décalage spectral, il est important de prouver ce résultat avec un opérateur h-pseudodifférentiel général $A^w := A^w(x, hD_x)$ de symbole $A \in S(1;\mathbb{R}^{2n},\mathcal{H}_m)$ au lieu de χ^w. On suppose que $\partial^\gamma_{(x,\xi)}A \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$, pour tout $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ ce qui garantit que l'opérateur A^w est de classe trace de norme trace $\mathcal{O}(h^{-n})$. En particulier, pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $A^w f(H^w)$ est de classe trace.

Théorème 2.7 *[cf. Théorème 4.2.3] Soit $\theta \in C_0^\infty(]\pm\frac{1}{2},\pm 1[;\mathbb{R})$ et $\kappa > 0$, $\delta \in]0,1]$ fixés. On suppose qu'il existe $T \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $\tau_0 - H(x,\xi)$ est uniformément microhyperbolique par rapport à $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ dans la direction T. Alors, il existe $I \in O_{\tau_0}$ tel que pour tout $f \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$, on a*

$$\operatorname{tr}\left(A^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - H^w)\right) = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{2.2.4}$$

uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in [h^{1-\delta},\kappa[$, avec

$$\theta_\varepsilon(t) := \theta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

La notation $\theta \in C_0^\infty(]\pm\frac{1}{2},\pm 1[;\mathbb{R})$ signifie que le résultat est vrai pour θ à support dans $]\frac{1}{2},1[$ ou encore dans $]-1,-\frac{1}{2}[$. D'une façon générale, ce résultat reste valable si $\operatorname{supp}\theta \subset \mathbb{R}^*$. L'hypothèse de microhyperbolicité uniforme signifie que $\tau_0 - H$ satisfait (2.2.2) avec $C_0, C_1 > 0$ indépendantes de τ_0 et de $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Dans le théorème suivant, nous montrons que modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, seule la restriction de H près du support de χ contribue dans la formule de trace (2.2.1) lorsque le support de θ est suffisamment proche de 0. En d'autres termes, ce résultat nous dit qu'on peut modifier H en dehors de $\operatorname{supp}\chi$, en acceptant une erreur d'ordre $\mathcal{O}(h^\infty)$ dans la trace (2.2.1).

Théorème 2.8 *[cf. Théorème 4.2.5] Soient* $H_0, H_1 \in S(1;\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m)$ *tel que* $H_0 = H_1$ *dans un voisinage de* $\operatorname{supp}\chi$. *Il existe* $C_0 > 0$ *assez grand tel que pour* $\theta \in C_0^\infty(]-\frac{1}{C_0}, \frac{1}{C_0}[;\mathbb{R})$, *on a*

$$\operatorname{tr}\left(\chi^w\left[f(H_j^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H_j^w)\right]_0^1\right) = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{2.2.5}$$

uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$, *où on utilise la notation* $[a_j]_0^1 := a_1 - a_0$.

2.2.2 *Application à la fonction de décalage spectral pour des opérateurs de Schrödinger à potentiels matriciels*

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, notre application de la formule de trace présentée dans le paragraphe précédent concerne l'étude de la fonction de décalage spectral associée aux opérateurs de Schrödinger semi-classiques à potentiels matriciels sur $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$

$$P_1(h) := -h^2\Delta \otimes I_m + V(x), \quad P_0(h) := -h^2\Delta \otimes I_m + V_\infty \tag{2.2.6}$$

où I_m est la matrice identité $m \times m$ et $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_m)$ est un potentiel matriciel hermitien qui tends vers $V_\infty \in \mathcal{H}_m$ à l'infini.

On suppose que

$$\exists\, \mu > n; \quad \|\partial_x^\alpha(V(x) - V_\infty)\| = \mathcal{O}_\alpha(\langle x\rangle^{-\mu-|\alpha|}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2.7}$$

Cette hypothèse assure que l'opérateur $f(P_1(h)) - f(P_0(h))$ est de classe trace pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. La fonction de décalage spectral $s_h(\tau)$ associée à $(P_1(h), P_0(h))$ est définie (modulo une constante) comme une distribution par la formule de Lifshits-Krein

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} = -\operatorname{tr}\left(f(P_1(h)) - f(P_0(h))\right), \quad \forall f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}) := C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}). \tag{2.2.8}$$

Quitte à effectuer une transformation unitaire, on suppose que

$$V_\infty = \operatorname{diag}(e_{1,\infty}, \ldots, e_{m,\infty}), \quad \text{avec } e_{1,\infty} \leqslant e_{2,\infty} \leqslant \cdots \leqslant e_{m,\infty}.$$

L'opérateur $P_0(h)$ est auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ l'espace de Sobolev d'ordre 2 des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}^m$. Son spectre coïncide avec la demi-droite $[e_{1,\infty}, +\infty[$. Puisque la perturbation $V - V_\infty$ est Δ-compact d'après (2.2.7), alors $P_1(h)$ admet une unique réalisation auto-adjointe sur $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ de domaine $H^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$. De plus, par le critère de Weyl, le spectre essentiel de $P_1(h)$ coïncide avec celui de $P_0(h)$. La perturbation $V - V_\infty$ peut créer des valeurs propres discrètes dans $]-\infty, e_{1,\infty}[$ et d'autres plongées dans l'intervalle $[e_{1,\infty}, e_{m,\infty}]$ qui est inclus dans le spectre continu.

Asymptotique dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

On commence par étudier le comportement asymptotique de la dérivée $s_h'(\cdot)$ au sens des distributions. On rappelle les symboles de $P_0(h)$ et $P_1(h)$ respectivement,

$$p_0(x,\xi) := \xi^2 I_m + V_\infty, \quad p_1(x,\xi) := \xi^2 I_m + V(x), \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Soient $e_1(x) \leqslant e_2(x) \leqslant \cdots \leqslant e_m(x)$ les valeurs propres de $V(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ce sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ comme étant les racines de l'équation polynomiale à coefficients C^∞

$$\det(V(x) - \lambda I_m) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\lambda^k = 0, \quad a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}).$$

Théorème 2.9 *[cf. Théorème 4.2.8] Sous l'hypothèse (2.2.7), pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, il existe une suite de nombres réels $(c_{2j}(f))_{j\in\mathbb{N}}$ tel que*

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle \sim (2\pi h)^{-n} \sum_{j\geqslant 0} c_{2j}(f) h^{2j}, \quad h \searrow 0, \tag{2.2.9}$$

avec

$$c_0(f) = \frac{\omega_n}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \big[f(e_{k,\infty} + \tau) - f(e_k(x) + \tau)\big] \tau^{\frac{n-2}{2}} d\tau dx, \tag{2.2.10}$$

où ω_n est le volume de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$.

Ce résultat est une conséquence du calcul symbolique h-pseudodifférentiel. Notons que seule l'hypothèse (2.2.7) est requise afin d'obtenir le développement asymptotique (2.2.9). Les coefficients $c_j(f)$ sont nuls pour j impaire car l'application $h \mapsto |2\pi h|^n \mathrm{tr}\ (f(P_1(h)) - f(P_0(h)))$ est paire.

Asymptotique faible

Dans le théorème suivant, sous l'hypothèse que $\tau_0 \notin \sigma(V_\infty) := \{e_{1,\infty}, \cdots, e_{m,\infty}\}$ et $\tau_0 - p_1$ est microhyperbolique en tout point de la surface d'énergie Σ_{τ_0} définie par

$$\Sigma_{\tau_0} := \bigcup_{j=1}^{m} \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ \xi^2 + e_j(x) = \tau_0\right\},$$

on établit un développement asymptotique complet en puissances de h pour

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - \cdot) f(\cdot)\rangle = -\mathrm{tr}\left(\left[f(P_j(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P_j(h))\right]_0^1\right), \tag{2.2.11}$$

lorsque le support de θ est suffisamment proche de 0. Ce résultat est une conséquence du Théorème 2.6.

Théorème 2.10 *[cf. Théorème 4.2.9] Soit $\tau_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma(V_\infty)$. On suppose que (2.2.7) est satisfaite et que $\tau_0 - p_1(x,\xi)$ est microhyperbolique en tout point $(x,\xi) \in \Sigma_{\tau_0}$. Il existe $I \in O_{\tau_0}$ et une constante $C_0 > 0$ (assez grande) tel que pour tout $f \in C_0^\infty(I; \mathbb{R})$ et $\theta \in C_0^\infty(]-\frac{1}{C_0}, \frac{1}{C_0}[; \mathbb{R})$ avec θ égale à 1 près de 0, on a*

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - \cdot) f(\cdot)\rangle \sim (2\pi h)^{-n} f(\tau) \sum_{j\geqslant 0} \gamma_{2j}(\tau) h^{2j}, \quad h \searrow 0, \tag{2.2.12}$$

uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$. Les coefficients $\gamma_{2j}(\cdot)$ sont des fonctions C^∞ en τ, indépendantes de f et θ. En particulier,

$$\gamma_0(\tau) = \frac{\omega_n}{2} \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} \left((\tau - e_{k,\infty})_+^{\frac{n-2}{2}} - (\tau - e_k(x))_+^{\frac{n-2}{2}}\right) dx, \tag{2.2.13}$$

avec $\tau_+ := \max\ (\tau, 0)$.

En utilisant la définition 2.1, on voit que l'hypothèse de microhyperbolicité sur $\tau_0 - p_1$ en tout point de Σ_{τ_0} est équivalente à la condition suivante : pour $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n; e_j(x) = \tau_0\}$, $j = 1, \dots, m$, il existe $T_1 \in \mathbb{R}^n$ et $C > 0$ tel que

$$\big(\langle T_1, \nabla_x V(x_0)\rangle w, w\big) \geqslant \frac{1}{C}|w|^2, \quad \forall w \in \ker(V(x_0) - \tau_0 I_m).$$

En particulier, si $e_j(x_0)$ est une valeur propre simple de $V(x_0)$, ceci est équivalent à $\nabla_x e_j(x_0) \neq 0$ (voir aussi Remarque 4.2.10).

Asymptotique de type Weyl avec reste optimal

Comme conséquence du Théorème précédent, on obtient l'asymptotique de Weyl avec reste optimal suivante sur $s_h(\cdot)$.

Théorème 2.11 *[cf. Théorème 4.2.11] On suppose que le potentiel V satisfait (2.2.7) avec $V_\infty = 0$. Soit $\tau_0 \neq 0$ tel que $\tau_0 - p_1(x, \xi)$ est microhyperbolique en tout point $(x, \xi) \in \Sigma_{\tau_0}$. Il existe $I \in O_{\tau_0}$ tel que*

$$s_h(\tau) = (2\pi h)^{-n} a_0(\tau) + \mathcal{O}(h^{-n+1}), \quad h \searrow 0, \tag{2.2.14}$$

uniformément pour $\tau \in I$, avec

$$a_0(\tau) = \frac{\omega_n}{n} \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} \big(\tau_+^{\frac{n}{2}} - (\tau - e_k(x))_+^{\frac{n}{2}}\big) dx. \tag{2.2.15}$$

Asymptotique forte

Notre résultat principal consiste en un développement asymptotique complet en puissances de h pour la dérivée de la fonction de décalage spectral au sens fort généralisant le résultat de Robert-Tamura [105] établi dans le cas scalaire $m = 1$ près des énergies non-captives pour l'Hamiltonien classique p_1 associé à $P_1(h)$ (voir (0.3.10)). Dans le cas présent d'un potentiel matriciel $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_m)$, la généralisation de cette condition de non-capture nécessite une discussion adaptée à chaque modèle de croisement des valeurs propres considéré. Ce type de discussion a été étudiée dans [72, 73, 45]. On utilise ici une notion alternative qui est la notion de fonction fuite.

Fixons une énergie $\tau_0 > e_{m,\infty}$. On suppose qu'il existe une fonction fuite $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ associée à p_1 en τ_0, i.e.

$$\exists\, C > 0 ; \quad \{p_1, G\}(x, \xi) \geqslant C, \quad \forall (x, \xi) \in \Sigma_{\tau_0}, \tag{2.2.16}$$

au sens des matrices hermitiennes, où $\{p_1, G\}$ est le crochet de Poisson de p_1 et G défini par (0.2.4).

Il est bien connu que dans le cas scalaire $m = 1$, cette hypothèse est équivalente à la condition de non-capture sur l'énergie τ_0. En effet, si $\tau_0 > 0$ est non-captive pour p_1, alors on peut construire une fonction fuite $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ associée à p_1 en τ_0 (voir par exemple [53]). Inversement, s'il existe $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ satisfaisant (2.2.16) alors la fonction $t \mapsto G(\phi_{p_1}^t(x, \xi))$, où $\phi_{p_1}^t$ désigne le flot Hamiltonien associé à p_1, est strictement croissante pour tout $(x, \xi) \in \Sigma_{\tau_0} = p_1^{-1}(\tau_0)$ chose qui empêche l'existence de trajectoires captées à l'énergie τ_0.

Théorème 2.12 *[cf. Théorème 4.2.13] Soit $\tau_0 > e_{m,\infty}$. Sous les hypothèses (2.2.7) et (2.2.16), il existe $I \in O_{\tau_0}$ tel que $s'_h(\cdot)$ admet un développement asymptotique complet en puissances de h donné par*

$$s'_h(\tau) \sim (2\pi h)^{-n} \sum_{j \geqslant 0} \gamma_{2j}(\tau) h^{2j}, \quad h \searrow 0, \tag{2.2.17}$$

uniformément pour $\tau \in I$. Les coefficients $\gamma_{2j}(\tau)$ sont donnés par le théorème 2.10. De plus (2.2.17) peut être dériver par rapport à τ à n'importe quel ordre.

Notons que nous n'avons introduit aucune condition sur les multiplicités des valeurs propres du potentiel V. Le développement asymptotique (2.2.17) est valable dès que l'hypothèse (2.2.16) sur l'existence d'une fonction fuite scalaire associée à p_1 en τ_0 est satisfaite. Dans le chapitre 4, on discute cette hypothèse dans le cas de la fonction simple $G(x, \xi) = x \cdot \xi$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Remarque 2.3 *L'existence d'une fonction fuite G associée à p_1 en τ_0 implique que $\tau_0 - p_1$ est microhyperbolique en tout point $(x, \xi) \in \Sigma_{\tau_0}$ dans la direction du champ Hamiltonien $\mathscr{X}_G := (\partial_\xi G, -\partial_x G)$ correspondant à G.*

2.2.3 *Idées principales des preuves*

Dans ce paragraphe, nous expliquons les idées principales et les techniques utilisées dans nos preuves. Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, nous utilisons une approche stationnaire basée sur le calcul fonctionnel h-pseudodifférentiel par la formule de Helffer-Sjöstrand (1.3.4). Par cette formule, les différentes quantités qu'on étudie se ramène essentiellement à l'étude du comportement asymptotique quand h tend vers 0 d'une intégrale de la forme

$$\mathcal{I}(\tau, \varepsilon; h) := -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z) \mathcal{F}_h^{-1} \theta_\varepsilon(\tau - z) K(z; h) L(dz), \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.2.18}$$

Ici $\tilde{f}$ est une extension presque analytique de f, i.e. $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ vérifie les propriétés (1.3.1) et (1.3.2), $\theta \in C_0^\infty(]-1, 1[; \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ est une constante qui peut dépendre du paramètre semi-classique h et K est une fonction à valeurs complexes spécifique pour chaque preuve (qui est en effet la trace d'un opérateur dépendant de la résolvante) analytique sur $\widetilde{U} := U \cap \{z \in \mathbb{C}; \Im z \neq 0\}$, où U est un voisinage de $\operatorname{supp} \tilde{f}$ et satisfait l'estimation suivante[2] uniformément pour $z \in \widetilde{U}$ et h assez petit,

$$K(z; h) = \mathcal{O}(h^{-n} |\Im z|^{-2}). \tag{2.2.19}$$

2 Dans la suite, nous verrons que parfois K vérifie une estimation de type

$$K(z; h) = \mathcal{O}(h^{-n} |\Im z|^{-1}),$$

uniformément pour $z \in U$. Comme on travaille toujours dans le support de $\tilde{f}$ qu'on peut choisir dans la région $\{z \in \mathbb{C}; |\Im z| < 1\}$, K vérifie aussi l'estimation (2.2.19). En d'autre termes, la puissance ici n'a pas d'importance dans nos estimations dans la suite qui seront de l'ordre h^∞.

Avant d'expliquer les idées principales de chaque preuve, on commence par quelques remarques générales sur l'intégrale (2.2.18).

La première observation importante consiste à voir que la définition de $\mathcal{I}(\tau, \varepsilon; h)$ ne dépend pas du choix particulier de l'extension presque analytique $\tilde{f}$ de f. Ceci est une conséquence simple de la formule de Stokes et du fait que la différence $\tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ de deux extensions presque analytiques $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ de f est un $\mathcal{O}(|\Im z|^\infty)$ (voir Remarque 4.3.1). En particulier, pour $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ tel que $\psi(t) = 1$ pour $|t| \leqslant 1$ et $\psi(t) = 0$ pour $|t| \geqslant 2$, si on définit

$$\psi_L(z) := \psi\left(\frac{\Im z}{L}\right), \quad L > 0, \tag{2.2.20}$$

alors $\tilde{f}\psi_L$ est une extension presque analytique de f et on a

$$\mathcal{I}(\tau, \varepsilon; h) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)K(z; h)L(dz). \tag{2.2.21}$$

L'insertion de ψ_L avec un bon choix de L dépendant de h est très utile pour contrôler le comportement de $\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)$ lorsque $h \searrow 0$, qui dépend de support de θ. En général, pour $\theta \in C_0^\infty(]-1, 1[; \mathbb{R})$, on a l'estimation (voir Lemme D.0.3)

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z) = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{h}e^{\frac{\varepsilon|\Im z|}{h}}\right). \tag{2.2.22}$$

L'uniformité de nos estimations par rapport à ε sera importante dans nos preuves. Soit $M > 0$ une constante fixée arbitrairement indépendante de h et on pose

$$\zeta(h) := h\log\left(\frac{1}{h}\right), \qquad L = L(h) := \frac{M\zeta(h)}{\varepsilon}.$$

On vérifie que le domaine d'intégration dans (2.2.21) se réduit, modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \leqslant ch^{-\nu}$, pour tout $c > 0$ et $\nu \in \mathbb{N}$ fixés, à la région $\{z \in \mathbb{C};\ |\Im z| > L\}$, i.e.

$$\mathcal{I}(\tau, \varepsilon; h) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\{|\Im z| > L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)K(z; h)L(dz).$$

Ici, on utilise la notation asymptotique $A_h \equiv B_h$ lorsque $A_h - B_h = \mathcal{O}(h^\infty)$. Cette réduction résulte de (2.2.19), (2.2.22) et l'estimation suivante

$$\bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z) = \mathcal{O}(h^\infty)\psi_L(z) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)\tilde{f}(z)1_{[1,2]\cup[-2,-1]}\left(\frac{\Im z}{L}\right). \tag{2.2.23}$$

On écrit alors

$$\mathcal{I}(\tau, \varepsilon; h) \equiv \mathcal{I}_-(\tau, \varepsilon; h) + \mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h),$$

avec

$$\mathcal{I}_\pm(\tau, \varepsilon; h) := -\frac{1}{\pi}\int_{\{\pm\Im z > L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)K(z; h)L(dz). \tag{2.2.24}$$

2.2.3.1 *Idées des preuves des résultats sur la formule de trace semi-classique*

Dans cette partie nous allons expliquer les idées principales des preuves des Théorèmes 2.7, 2.8 et 2.6 respectivement.

Par la formule de Helffer-Sjöstrand (1.3.4), la trace de l'opérateur $A^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - H^w)$ s'écrit sous la forme (2.2.18) avec

$$K(z;h) := \operatorname{tr}\left(A^w(z-H^w)^{-1}\right).$$

La preuve de (2.2.4) repose sur l'étude des comportements asymptotiques de $\mathcal{I}_-(\tau,\varepsilon;h)$ et $\mathcal{I}_+(\tau,\varepsilon;h)$ séparément.

On suppose par exemple que $\operatorname{supp}\theta \subset]\frac{1}{2},1[$, le cas $\operatorname{supp}\theta \subset]-1,-\frac{1}{2}[$ se traite d'une façon similaire. En utilisant (2.2.19), (2.2.23) et l'estimation (voir Lemme D.0.3)

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{h}e^{\frac{\varepsilon \Im z}{h}}\right) & \text{pour} \quad \Im z > 0 \\ \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{h}e^{\frac{\varepsilon \Im z}{2h}}\right) & \text{pour} \quad \Im z < 0, \end{cases} \tag{2.2.25}$$

on obtient

$$\mathcal{I}_-(\tau,\varepsilon;h) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^3 h^{\frac{M}{2}-n-3}\log(\frac{1}{h})^{-2}\right). \tag{2.2.26}$$

La constante $M > 0$ étant arbitraire, l'estimation précédente implique que $\mathcal{I}_-(\tau,\varepsilon;h) \equiv 0$, uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in [h^{1-\delta},\kappa[$ tel que dans le théorème 2.7. En général, cette estimation reste valable pour ε d'ordre polynomial en h.

Le point essentiel réside dans l'étude de $\mathcal{I}_+(\tau,\varepsilon;h)$. En conjuguant les opérateurs H^w et A^w par l'opérateur unitaire

$$U_t := e^{\frac{it}{h}(T_2.x - T_1.hD_x)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

où $T = (T_1,T_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ est la direction de microhyperbolicité uniforme de $\tau_0 - H$, on construit la fonction

$$K_t(z;h) := \operatorname{tr}\left(A_t^w(z-H_t^w)^{-1}\right)$$

avec

$$H_t^w := U_t H^w U_t^{-1} = H^w(x+tT_1, hD_x + tT_2)$$

et

$$A_t^w := U_t A^w U_t^{-1} = A^w(x+tT_1, hD_x + tT_2).$$

Par la cyclicité de la trace, K_t coïncide avec K pour t réel. En passant par des extensions presque analytiques de H et A, on l'étend pour des valeurs complexes de t en une fonction $\widetilde{K}_t$ définie sur $\{z \in \mathbb{C};\, |\Im z| \geqslant C_0|\Im t|\}$, avec $C_0 > 0$ une constante indépendante de M, h et ε. De plus, $\widetilde{K}_t(z;h)$ satisfait l'estimation

$$\widetilde{K}_t(z;h) = \mathcal{O}(h^{-n}|\Im z|^{-1}),$$

uniformément pour $|\Im z| \geqslant C_0|\Im t|$. Pour $t_0 \in \mathbb{C}$ fixé avec $\Im t_0 = \frac{L}{C_0} = \frac{M\zeta(h)}{\varepsilon C_0}$, on montre que

$$\widetilde{K}_{t_0}(z;h) \equiv K(z;h) \tag{2.2.27}$$

uniformément dans la région $\{\Im z > L\}$ et $\varepsilon \in [h^{1-\delta}, \kappa[$. Cette égalité nous permet de remplacer, modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, K par $\widetilde{K}_{t_0}$ dans l'expression de $\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h)$ pour avoir

$$\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h) \equiv -\frac{1}{\pi} \int_{\{\Im z > L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)\widetilde{K}_{t_0}(z; h)L(dz). \tag{2.2.28}$$

L'hypothèse de microhyperbolicité uniforme sur $\tau_0 - H$, nous permet d'étendre la fonction $z \mapsto \widetilde{K}_{t_0}(z; h)$ analytiquement à la région $\{\Im z > -cL\}$, pour une constante fixée $c > 0$. On utilise l'inégalité de Gårding semi-classique (Théorème 1.5) pour prouver cette extension analytique. Par conséquent, par le théorème de Cauchy, le domaine d'intégration dans (2.2.28) peut être remplacer par $\{\Im z < -cL\}$ et par les mêmes arguments qui ont mené à (2.2.26), on obtient

$$\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^3 h^{\frac{M}{2} - n - 3} \log(\frac{1}{h})^{-2}\right).$$

Ainsi $\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h) \equiv 0$, uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in [h^{1-\delta}, \kappa[$ et on déduit (2.2.4). Ceci achève la preuve du Théorème 2.7.

Remarque 2.4 *Si on suppose qu'il existe un voisinage* U *de* $\operatorname{supp} \tilde{f}$ *tel que la fonction* $U \cap \{\Im z > 0\} \ni z \mapsto K(z; h)$ *s'étend en une fonction* $\widetilde{K}(z; h)$ *holomorphe sur* $U_N(h) := U \cap \{\Im z \geqslant -N\zeta(h)\}$, *pour tout* $N \in \mathbb{N}$, *et satisfait une estimation de type* $\widetilde{K}(z; h) = \mathcal{O}(h^{-d(n)})$ *sur cette région, où* $d(n)$ *dépend uniquement de la dimension, alors il sera clair de la preuve du Théorème 2.7 que (2.2.4) reste valable pour* $\varepsilon \in [\kappa, h^{-\nu}[$, *pour tout* $\kappa > 0$ *et* $\nu \in \mathbb{N}$ *fixés. Dans notre application à l'étude de la fonction de décalage spectral, sous l'hypothèse (2.2.16) d'existence d'une fonction fuite scalaire associée à* p_1 *en* τ_0, *nous allons montrer que les conditions précédentes sur* K *sont satisfaites par la représentation* σ_h *de la dérivée de la SSF définie dans (2.2.31) et ainsi montrer que la contribution de (2.2.11) pour* $\operatorname{supp} \theta \subset \{\kappa < |t| < h^{-\nu}\}$, *est un* $\mathcal{O}(h^\infty)$. *Ce résultat sera crucial pour la preuve du développement asymptotique au sens fort (2.2.17) de la dérivée de la SSF.*

Concernant le théorème 2.8, on fixe $C_0 > 0$ indépendant de h et par la formule de Helffer-Sjöstrand, on écrit la trace de l'opérateur $\chi^w\left[f(H_j^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\frac{1}{C_0}}(\tau - H_j^w)\right]_0^1$ sous la forme (2.2.18) avec $\varepsilon = \frac{1}{C_0}$ et

$$K(z; h) := \operatorname{tr}\left(\chi^w\left[(z - H_j^w)^{-1}\right]_0^1\right) = \operatorname{tr}\left(\chi^w(z - H_1^w)^{-1}(H_1^w - H_0^w)(z - H_0^w)^{-1}\right).$$

En utilisant le fait que $\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\chi, \operatorname{supp}(H_1 - H_0)) > 0$, on prouve par des estimations de la résolvante pondérée par des poids exponentielles,

$$K(z; h) = \mathcal{O}\left(\frac{h^{\frac{C_0 M}{C} - n}}{L^2}\right),$$

uniformément pour $|\Im z| \geqslant L$, avec $C > 0$ une constante indépendante de h, M et ε. En combinant cette estimation avec le fait que $\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z) = \mathcal{O}(h^{-2M-1})$ sur le support de ψ_L, et en choisissant C_0 assez grand, on obtient (2.2.5).

Le théorème 2.6 est une conséquence des Théorèmes 2.7, 2.8 et le calcul symbolique h-pseudodifférentiel. Quitte à effectuer une partition de l'unité, on peut supposer sans perte de généralité que χ est à support dans un petit voisinage d'un point fixé $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Comme d'après le théorème 2.8, la trace de l'opérateur $\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)$ ne dépend, modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, que des valeurs de H près du support de χ lorsque θ est à support suffisamment proche de 0, alors en choisissant le support de χ assez proche de (x_0, ξ_0) et en utilisant le théorème C.0.1 qui assure qu'une fonction microhyperbolique près d'un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ peut être étendue en une fonction uniformément microhyperbolique sur tout $\mathbb{R}^{2n}$, on peut supposer qu'il existe $I \in O_{\tau_0}$ tel que $\tau - H$ est uniformément microhyperbolique par rapport à $\tau \in I$ et $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. (Nous sommes donc dans l'hypothèse du Théorème 2.7).

On fixe $\tilde{\varepsilon} = h^{1-\delta_0}$ avec $\delta_0 \in]0, \frac{1}{2}[$. En représentant la différence $\theta - \theta_{\tilde{\varepsilon}}$ comme somme finie de fonctions de types $\tilde{\theta}_\varepsilon$ comme dans le théorème 2.7, où ε peut prendre des valeurs dans $[\tilde{\varepsilon}, \kappa[$, $\kappa > 0$, on obtient

$$\operatorname{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)\right) \equiv \operatorname{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau - H^w)\right),$$

uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$. Cette réduction nous permet d'utiliser le calcul symbolique h-pseudodifférentiel et ainsi le développement asymptotique (2.2.3) découle du Théorème 1.11 sur la trace d'un opérateur h-pseudodifférentiel. En effet, comme dans les paragraphes précédents, par la formule de Helffer-Sjöstrand, le terme de droite de l'équation précédente s'écrit sous la forme (2.2.18) avec $K(z;h) := \operatorname{tr}\left(\chi^w(z - H^w)^{-1}\right)$, i.e.,

$$\operatorname{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)\right) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau - z)\operatorname{tr}\left(\chi^w(z - H^w)^{-1}\right)L(dz).$$

Par des arguments similaires à ceux utilisés dans les paragraphes précédents, on vérifie que la restriction de l'intégrale ci-dessus à la région $\{|\Im z| < h^{\delta_0}\}$ est un $\mathcal{O}(h^\infty)$ et on se ramène donc à la région $\{|\Im z| \geqslant h^{\delta_0}\}$ où la résolvante $(z - H^w)^{-1}$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole principal $(z - H(x, \xi))^{-1}$ (voir Proposition 1.1).

2.2.3.2 *Idées des preuves des résultats sur la fonction de décalage spectral*

Dans ce paragraphe, nous exposons les idées principales des preuves des résultats concernant notre application à l'étude de la fonction de décalage spectral associée aux opérateurs de Schrödinger matriciels $(P_1(h), P_0(h))$ définis par (2.2.6). Comme dans le paragraphe précédent, le point de départ consiste à représenter $\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle$ et $\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - \cdot)f(\cdot)\rangle$, $f, \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, sous la forme (2.2.18) à l'aide de la formule de Helffer-Sjöstrand. En combinant cette formule avec la formule de Lifshits-Krein (2.2.8), on obtient

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)K(z;h)L(dz), \tag{2.2.29}$$

$$-\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - \cdot)f(\cdot)\rangle = \mathcal{I}(\tau, \varepsilon; h), \tag{2.2.30}$$

avec

$$K(z;h) = \sigma_h(z) := (z - z_0)^q \operatorname{tr}\left(\left[(P_j(h) - z_0)^{-q}(z - P_j(h))^{-1}\right]_0^1\right) \tag{2.2.31}$$

où $q \in \mathbb{N}$ assez grand ($q > \frac{n}{2}$) et $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \sigma(P_1(h)) \cup \sigma(P_0(h))$. On rappelle qu'on utilise la notation $[a_j]_0^1 := a_1 - a_0$.

Une conséquence simple de (2.2.29) et la formule de Green est la représentation suivante de la dérivée de la fonction de décalage spectral au sens des distributions que nous allons utiliser dans la preuve du Théorème 2.12 (cf. Lemme 4.4.4)

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{s\searrow 0}\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\Im\sigma_h(\tau+is)d\tau, \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}), \tag{2.2.32}$$

où $\Im\sigma_h$ désigne la partie imaginaire de σ_h.

Le théorème 2.9 est classique et est une conséquence du calcul symbolique h-pseudo-différentiel, en utilisant des arguments similaires à ceux exposés dans la section précédente.

La preuve du Théorème 2.10 est similaire à celle du Théorème 2.6 et repose sur l'étude du comportement asymptotique quand $h \searrow 0$ du membre de droite dans (2.2.30). La différence principale réside dans le fait que la surface d'énergie Σ_{τ_0} n'est pas un compact de $\mathbb{R}^{2n}$, elle l'est seulement par rapport à ξ, i.e. $\Sigma_{\tau_0} = \Sigma_{\tau_0} \cap \{|\xi| \leqslant R_0\}$, pour $R_0 > 0$ assez grand. On l'écrit sous la forme

$$\Sigma_{\tau_0} = (\Sigma_{\tau_0} \cap \{|x| \leqslant R_1\}) \cup (\Sigma_{\tau_0} \cap \{|x| > R_1\}) := \Sigma^c_{\tau_0,R_1} \cup \Sigma_{\tau_0,R_1},$$

où $R_1 > 0$ est une constante assez grande tel que

$$\inf_{|x|>R_1} |e_j(x) - \tau_0| > 0, \quad \forall j \in \{1, ..., m\}. \tag{2.2.33}$$

Ceci est possible car $\lim_{|x|\to+\infty} e_j(x) = e_{j,\infty}$ et $\tau_0 \notin \{e_{1,\infty}, \cdots, e_{m,\infty}\}$. Sur le compact $\Sigma^c_{\tau_0,R_1}$, on applique le théorème 2.6. D'autre part, en utilisant le fait que $0 \notin \pi_\xi(\Sigma_{\tau_0,R_1})$, $\pi_\xi : (x,\xi) \mapsto \xi$, (d'après (2.2.33)) et le théorème C.0.1, on peut construire un recouvrement $\bigcup_{k=1}^{\ell} O_k \supset \Sigma_{\tau_0,R_1}$ et des symboles $\widetilde{p}_{1,1}, ..., \widetilde{p}_{1,\ell}$, tel que $\widetilde{p}_{1,k}$ coïncide avec p_1 sur O_k et $\tau_0 - \widetilde{p}_{1,k}$ est uniformément microhyperbolique sur $\mathbb{R}^{2n}$ dans une certaine direction, pour tout $k \in \{1, ..., \ell\}$. Cette construction nous permet de procéder comme dans la preuve du Théorème 2.6.

Concernant le théorème 2.11, contrairement à la fonction de comptage des valeurs propres, l'application $\tau \mapsto s_h(\tau)$ n'est pas monotone (au sens des distributions). Afin d'utiliser les arguments tauberiens classiques permettant de prouver l'asymptotique de Weyl (2.2.14) en utilisant le développement asymptotique (2.2.12), on exploite une idée de Robert [107] qui consiste à écrire $s_h(\tau)$ comme la différence $s_{1,h}(\tau) - s_{2,h}(\tau)$ de deux distributions monotones $s_{j,h}(\tau)$, $j = 1, 2$. Pour cela, nous avons besoin de supposer que V_∞ est un multiple scalaire de l'identité I_m.

Terminons à présent par les idées de la preuve de notre résultat principal, le théorème 2.12. La preuve se décompose essentiellement en deux étapes importantes. Dans la première étape, sous l'hypothèse (2.2.16) d'existence d'une fonction fuite $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ associée à p_1 en τ_0, on prouve en utilisant la méthode de distortion analytique qu'il existe $I \in O_{\tau_0}$ tel que pour tout $M > 0$, la fonction

$$\{z \in \mathbb{C};\ \Re z \in I,\ \Im z > 0\} \ni z \mapsto \sigma_h(z)$$

s'étend analytiquement dans la région

$$\Gamma_M := \left\{ z \in \mathbb{C};\, \Re z \in I,\, \Im z > -M\zeta(h) = -Mh\log(\frac{1}{h}) \right\}.$$

De plus, on a l'estimation suivante sur sa dérivée,

$$\partial_z \sigma_h(z) = \mathcal{O}\big(h^{-n}\zeta(h)^{-2}\big),$$

uniformément pour $z \in \Gamma_M$ et h assez petit. De ce résultat, on déduit deux conséquences importantes. Premièrement, comme conséquence de l'estimation précédente et la représentation (2.2.32), on obtient

$$s_h''(\tau) = \mathcal{O}\big(h^{-n}\zeta(h)^{-2}\big), \tag{2.2.34}$$

uniformément pour $\tau \in I$ et h assez petit. Ensuite, comme nous l'avons expliqué dans la remarque 2.4, on déduit que la contribution de (2.2.11) pour $\operatorname{supp}\theta \subset \{\kappa \leqslant |t| \leqslant h^{-\nu}\}$, est un $\mathcal{O}(h^\infty)$. Plus explicitement, pour $\theta \in C_0^\infty(]\pm\frac{1}{2}, \pm 1[; \mathbb{R})$ et $\varepsilon \in]\kappa, h^{-\nu}[$, avec $\kappa > 0$ et $\nu \in \mathbb{N}$ fixés, on a

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - \cdot) f(\cdot)\rangle \equiv 0. \tag{2.2.35}$$

Dans la deuxième étape qui est l'étape finale, en utilisant les résultats précédents, on montre que le développement asymptotique (2.2.17) découle de l'asymptotique faible (2.2.12). En effet, soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ à support suffisament proche de 0 et égale à 1 près de 0. La différence $\theta - \theta_{h^{-\nu}}$ ($\nu \in \mathbb{N}$ fixé) peut être représenter comme somme finie de fonctions de type $\tilde{\theta}_\varepsilon$ satisfaisant (2.2.35) et on obtient

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - \cdot) f(\cdot)\rangle \equiv \langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta_{h^{-\nu}}(\tau - \cdot) f(\cdot)\rangle.$$

Le membre de droite de l'équation précédente s'écrit par la formule de Taylor et l'estimation (2.2.34) sous la forme

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta_{h^{-\nu}}(\tau - \cdot) f(\cdot)\rangle = s_h'(\cdot) f(\tau) + \mathcal{O}(h^{\nu+1-n}\zeta(h)^{-2}).$$

Par conséquent le développement asymptotique (2.2.17) découle de l'asymptotique faible (2.2.12) en prenant $f = 1$ près de τ_0. On rappelle que ν est arbitraire. Ceci termine la preuve du Théorème 2.12.

3

LONG TIME SEMICLASSICAL EGOROV THEOREM FOR h-PSEUDODIFFERENTIAL SYSTEMS

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de l'article [3].

Contents

3.1 Introduction

Let $H^w(x, hD_x; h)$ be a self-adjoint quantum Hamiltonian in $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ associated to a $m \times m$ hermitian matrix-valued semiclassical symbol

$$H(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j H_j(x, \xi) \quad \text{in } \ S(g; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C})),$$

for some order function $g \geqslant 1$. In this chapter, we study the semiclassical time evolution of a bounded quantum observable $Q^w(x, hD_x; h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m))$ with matrix-valued semiclassical symbol $Q(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j Q_j(x, \xi)$ in $S(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$, in the Heisenberg picture given by

$$Q(t) = e^{\frac{it}{h} H^w(x, hD_x; h)} Q^w(x, hD_x; h) e^{-\frac{it}{h} H^w(x, hD_x; h)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

We are interested in the semiclassical approximation of $Q(t)$ in terms of h-pseudodifferential operators and its validity for large times of Ehrenfest type $|t| \leqslant C \log(h^{-1})$.

As recalled in the previous chapter, in the scalar case, under suitables growth assumptions on H, the semiclassical Egorov theorem (see Theorem 2.1) provides a semiclassical approximation for $Q(t)$ in terms of h-pseudodifferential operators relating the quantum evolution to its classical counterpart. The validity of this approximation for large times of order $\log(h^{-1})$ has been proved in [17] where a uniform exponential estimate on the remainder term at any order in the asymptotic expansion of $Q(t)$ was established (see Theorem 2.2).

Matrix-valued version for Egorov's theorem has been discussed several times in the literature ([31, 95, 18, 14, 15, 70]). Brummelhuis and Nourrigat [18] (see also [14, 70]) have studied the particular case of matrix-valued Hamiltonian with scalar principal symbol and they proved an Egorov theorem valid for finite times. This result has been extended to the general case by Bolte and Glaser [15] under a non-crossing assumption on the eigenvalues of the principal symbol H_0 (see assumption **(A1)** in the next section). However, their result is again only valid for finite times. Here we require the same assumptions as in [15] and we are mainly concerned with the validity of the semiclassical approximation for large times of order $\log(h^{-1})$.

Organization of the chapter

We shall study two cases. Firstly, we consider the particular case of Hamiltonian with scalar principal symbol, i.e. H_0 is of the form

$$H_0(x, \xi) = \lambda(x, \xi) I_m, \quad \text{with } \lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}).$$

This case is different from the scalar one since as we shall see the matrix-valued sub-principal symbol H_1 plays an important role. In the first step, we construct an asymptotic expansion in powers of h for $Q(t)$ by solving recursively the corresponding Heisenberg equation of motion. Then, since we are interested in the validity of the semiclassical approximation for large times, we give uniform estimates on the derivatives of the constructed symbols (Proposition 3.3.2). Relying on these estimates and using a result of Bouzouina-Robert [17] which consists in an accurate estimate on the remainder term in the composition formula of h-pseudodifferential operators (see Appendix A), we prove a uniform (in time) exponential estimate on the remainder term at any order in the asymptotic expansion of $Q(t)$ (Theorem 3.2.5). This estimate ensures the validity of the semiclassical approximation for large times of order $\log(h^{-1})$ (Corollary 3.2.2). These results will be stated in subsection 3.2.1 and proved in section 3.3.

Next, we consider the general case of matrix-valued principal symbol satisfying the non-crossing assumption : H_0 admits $\ell \in \{1, ..., m\}$ distincts eigenvalues with constant multiplicities in $\mathbb{R}^{2n}$ separated according to the gap condition (3.2.8). This assumption ensures the existence of the semiclassical projections associated to $H^w(x, hD_x; h)$. More precisely, it allows us to decompose $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ into a sum of ℓ almost invariant subspaces of order h^∞ with respect to the time evolution generated by $H^w(x, hD_x; h)$ (Theorem 3.2.4). For a class of observables Q that are "semiclassically" block-diagonal with respect to the projections into these almost invariant subspaces, we reduce the study of $Q(t)$ to that of a family of Heisenberg operators $(Q_\nu(t))_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}$ satisfying nice properties in relation with these projections. The main property of this reduction lies in the fact that it is uniform modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ up to times of order h^{-k} for all $k \in \mathbb{N}$, which in particular cover Ehrenfest type times. Using the symbolic calculus, we construct an asymptotic expansion in powers of h for each $Q_\nu(t)$ by solving the corresponding Heisenberg equation. This leads to an asymptotic expansion in powers of h for $Q(t)$. As in the previous case, relying on uniform estimates on the derivatives of the constructed symbols, and using the method of [17], we prove a uniform exponential estimate on the remainder term at any order in the asymptotic expansion of $Q(t)$ ensuring the validity of the semiclassical approximation for large times of order $\log(h^{-1})$ (Theorem 3.2.5 and Corollary 3.2.6). These results are stated in subsection 3.2.2 and proved in section 3.4.

Notations

Let us fix some notations that we shall use throughout this chapter. For a smooth matrix-valued function $A \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C}))$, we introduce the notation

$$A^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi) := \partial_\xi^\beta \partial_x^\alpha A(x,\xi), \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^n.$$

In this chapter, three types of commutators appear : for P, Q two matrix-valued functions in some suitable class of symbols, $[P,Q] = PQ - QP$ is the usual matrix commutator. We use the same notation for the standard operators commutator $[P^w, Q^w] := P^w Q^w - Q^w P^w$. Finally, the symbol of $[P^w, Q^w]$ will be denoted $[P,Q]_\# := P\#Q - Q\#P$ and called the Moyal commutator of P and Q.

The following notion of Moyal bracket will play an important role throughout this chapter. See Appendix A for more details.

Definition 3.1.1 (Moyal bracket) *For P and Q two matrix-valued symbols in suitable classes of symbols, the Moyal bracket of P, Q denoted $\{P,Q\}^*$ is defined as the Weyl symbol of the operator $\frac{i}{h}[P^w, Q^w]$. In the following, when $\{P,Q\}^*$ admits an asymptotic expansion in powers of h, the j-th term, i.e. the coefficient of h^j, will be denoted $\{P,Q\}^*_j$.*

We recall that our convention for the Poisson bracket of matrix-valued functions $A, B \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C}))$ is

$$\{A,B\} := \partial_\xi A \cdot \partial_x B - \partial_x A \cdot \partial_\xi B.$$

Notice that in general $\{A,B\} \neq -\{B,A\}$ (see (1.2.5)). Finally, in what follows $g : \mathbb{R}^{2n} \to [1,+\infty[$ denotes an order function.

3.2 Assumptions and statements of the main results

Let $H(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j H_j(x,\xi)$ in $S(g)$ be a $m \times m$ semiclassical Hamiltonian. To simplify the presentation and without any loss of generality, we suppose that $H(x,\xi;h) = H_0(x,\xi) + hH_1(x,\xi)$. We assume that

(A0). H_0 and H_1 are hermitian-valued and $(H_0 + i)$ is elliptic, i.e. there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|H_0(x,\xi) + i\| \geqslant Cg(x,\xi), \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Under this assumption, for h small enough, $H^w := H^w(x, hD_x; h)$ is essentially self-adjoint in $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ with domain $(H^w + i)^{-1} L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$(see Theorem 1.8). By Stone's theorem (see e.g. [91, p. 74]), the corresponding Schrödinger equation (0.2.5) generates a one parameter group of unitary operators $U_H(t) := e^{-\frac{it}{h}H^w}$ defined for all $t \in \mathbb{R}$.

Let $Q(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j Q_j(x,\xi)$ in $S(1)$ be a $m \times m$ semiclassical observable and we consider the time evolution of $Q^w(x, hD_x; h)$ in the Heisenberg picture given by

$$Q(t) := U_H(-t) Q^w(x, hD_x; h) U_H(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

By the Calderón-Vaillancourt theorem (Theorem 1.3), $Q^w(x, hD_x; h)$ is bounded on $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ and then $Q(t)$ is uniformly bounded on $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ with respect to $t \in \mathbb{R}$. Moreover, $Q(t)$ satisfies the following Heisenberg equation of motion

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \frac{i}{h}\left[H^w(x, hD_x; h), Q(t)\right], \quad Q(t)_{|t=0} = Q^w(x, hD_x; h). \tag{3.2.1}$$

The first step in the semiclassical approximation of $Q(t)$ consists in the construction of an asymptotic expansion in powers of h for $Q(t)$ by solving the following Cauchy problems arising from (3.2.1) if one assumes that $Q(t)$ admits a Weyl symbol $q(t) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j q_j(t)$

$$(\mathscr{C}_j) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt} q_j(t) & = & \{H, q(t)\}_j^* \\ q_j(t)_{|t=0} & = & Q_j. \end{array} \right. \tag{3.2.2}$$

For $j = 0$, the factor h^{-1} forces us to ensure the following commutativity property

$$[H_0, q_0(t)] = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.2.3}$$

which for $t = 0$ is equivalent to a block-diagonal form of Q_0 with respect to the eigenprojectors of H_0. However, if one restricts to such observable, nothing ensures that this block-diagonal form will be respected by the time evolution.

3.2.1 *Hamiltonian with scalar principal symbol*

We begin with a particular but an important case where the principal symbol H_0 is a scalar multiple of the identity, that is

(A1'). $H_0(x,\xi) = \lambda(x,\xi) I_m$, for a scalar real-valued symbol λ.

This case allows us to understand the contribution of the sub-principal symbol H_1 in the time evolution. It will be clear from Theorem 3.2.1 below that this case is different from the scalar one studied by Bouzouina-Robert [17]. In particular, this case cannot be deduced from the results of [17].

We assume that

(A2′). For all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ and $j \in \{0, 1\}$,

$$\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} H_j \in L^{\infty}(\mathbb{R}^{2n}), \quad \text{for } |\gamma| + j \geqslant 2.$$

Let ϕ^t_λ be the Hamiltonian flow generated by λ. Under the above assumption, the corresponding vector field $\mathscr{X}_\lambda := (\partial_\xi \lambda, -\partial_x \lambda)$ grows at most linearly at infinity. Therefore a trajectory $\phi^t_\lambda(x, \xi)$ cannot blow up at finite times so that, for all $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\phi^t_\lambda(x, \xi)$ exists for all $t \in \mathbb{R}$.

Put

$$\Gamma := \left\| J \nabla^{(2)}_{(x,\xi)} \lambda(x, \xi) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}, \tag{3.2.4}$$

where $\nabla^{(2)}_{(x,\xi)} \lambda$ is the Hessian matrix of λ and J is the $(2n \times 2n)$ matrix associated to the canonical symplectic form on $\mathbb{R}^{2n}$ (see (0.2.1)).

Theorem 3.2.1 *Assume **(A0)**, **(A1′)** and **(A2′)**, and let $Q \in S_{sc}(1)$. There exists a sequence of $m \times m$ matrix-valued h-pseudodifferential operators $\big((q_j(t))^w(x, hD_x)\big)_{j \geqslant 0}$ such that for all $N \in \mathbb{N}$, there exists $C_N > 0$ such that for all $t \in \mathbb{R}$, the following estimate holds*

$$\left\| Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j \big(q_j(t)\big)^w (x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} \leqslant C_N h^{N+1} \exp\big((4N + \delta_n)\Gamma|t|\big), \tag{3.2.5}$$

where δ_n is an integer depending only on the dimension n. The symbols $q_j(t)$, $j \geqslant 0$, are defined by the general formula (3.3.6) and satisfy the estimates (3.3.10) and (3.3.11). In particular, the principal symbol $q_0(t)$ is given by

$$q_0(t, x, \xi) = T^{-1}(t, x, \xi) Q_0\big(\phi^t_\lambda(x, \xi)\big) T(t, x, \xi), \quad t \in \mathbb{R}, (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n},$$

where T is the unitary $m \times m$ matrix-valued function solution of the system

$$\frac{d}{dt} T(t, x, \xi) = -iH_1\big(\phi^t_\lambda(x, \xi)\big) T(t, x, \xi), \quad T(0, x, \xi) = I_m. \tag{3.2.6}$$

As a consequence of estimate (3.2.5), we get the following corollary about the Ehrenfest time for the validity of the semiclassical approximation.

Corollary 3.2.2 *Under the assumptions of Theorem 3.2.1, for all $N \geqslant 1$, there exists $C_N > 0$ such that for every $\varepsilon > 0$, we have*

$$\left\| Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j \big(q_j(t)\big)^w (x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} \leqslant C_N h^{\varepsilon N+1} h^{\frac{(\varepsilon-1)}{4}\delta_n}, \tag{3.2.7}$$

uniformly for $|t| \leqslant \dfrac{(1-\varepsilon)}{4\Gamma} \log(h^{-1})$.

Remark 3.2.3 *(i) The upper bound Γ is used to control the exponential growth of the flow ϕ^t_λ at infinity (see Lemma 3.3.4).*

(ii) *The constant δ_n is related to the universal constant in the Calderón-Vaillancourt Theorem (Theorem 1.3). See the end of the proof of Theorem 3.2.1.*

(iii) *Notice that for $m \geqslant 2$, our estimate on the remainder term (3.2.5) is different from the one proved in the scalar case (see Theorem 2.2) where the argument in the exponential term was $2N + \delta'_n$ with δ'_n a universal constant. In particular, the constant $\frac{1}{4\Gamma}$ in the Ehrenfest time up to which the semiclassical approximation remains valid is half of the one proved in the scalar case. This is due to the matrix structure of the sub-principal symbol H_1 (see Remark 3.3.8 for more details).*

3.2.2 *General case*

Now we drop the assumption **(A1′)**. We assume that

(A1). There exists $\ell \in \{1, ..., m\}$ and $r_1, ..., r_\ell \in \mathbb{N}^*$ with $r_1 + \cdots + r_\ell = m$ such that $H_0(x, \xi)$ admits exactly ℓ distinct eigenvalues $\lambda_1(x, \xi) < \cdots < \lambda_\ell(x, \xi)$ with constant multiplicities on $\mathbb{R}^{2n}$ given by $r_1, ..., r_\ell$ respectively, satisfying : there exists a constant $\rho > 0$ such that for all $1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell$,

$$|\lambda_\mu(x, \xi) - \lambda_\nu(x, \xi)| \geqslant \rho g(x, \xi), \quad \text{for } |x| + |\xi| \geqslant c > 0. \tag{3.2.8}$$

(A2). For all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ and $j \in \{0, 1\}$,

$$\partial^\gamma_{(x,\xi)} H_j \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad \text{for } |\gamma| + j \geqslant 1.$$

For $\nu \in \{1, ..., \ell\}$, let $P_{\nu,0}(x, \xi)$ be the eigenprojector associated to the eigenvalue $\lambda_\nu(x, \xi)$. The assumption **(A1)** ensures that the functions $(x, \xi) \mapsto \lambda_\nu(x, \xi)$ and $(x, \xi) \mapsto P_{\nu,0}(x, \xi)$ are smooth in $\mathbb{R}^{2n}$. Moreover, in Lemma 3.4.1, we show that for all $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, $P_{\nu,0} \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ and under assumption **(A2)**, we have

$$\partial^\gamma_{(x,\xi)} \lambda_\nu \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad \forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}. \tag{3.2.9}$$

In particular, $\lambda_\nu \in S(g; \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$.

As explained in Chapter 2, the starting point in our study is the construction of the semiclassical projections associated to $H^w(x, hD_x; h)$.

Theorem 3.2.4 (Semiclassical projections) *Under assumptions **(A1)** and **(A2)**, for every $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, there exists a semiclassical symbol $P_\nu(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j P_{\nu,j}(x, \xi)$ in $S(1)$ (unique modulo $S^{-\infty}(1)$) such that*

$$P^w_\nu P^w_\nu = P^w_\nu = \left(P^w_\nu\right)^*, \tag{3.2.10}$$

and modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ in $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m))$, we have

$$[P^w_\nu, H^w] = 0, \tag{3.2.11}$$

$$P^w_\mu P^w_\nu = P^w_\nu P^w_\mu = 0, \quad \forall\, 1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell, \tag{3.2.12}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} P^w_\nu = \mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)}. \tag{3.2.13}$$

In particular, the principal symbol $P_{\nu,0}$ is the eigenprojector associated to the eigenvalue λ_ν.

The operators $P_\nu^w = P_\nu^w(x, hD_x; h)$, $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, are called semiclassical projections associated to $H^w(x, hD_x; h)$.

As indicated in [15, Proposition 3.2] (see also Proposition 3.5.1), to construct a complete asymptotic expansion in powers of h for $Q(t)$, some restrictions on the initial observable Q are necessary. We introduce the class $\mathscr{Q}(1)$ of matrix-valued semiclassical observables $Q \in S_{sc}(1)$ that are "semiclassically" block-diagonal with respect to the semiclassical projections $(P_\nu)_{1 \leqslant \nu \leqslant \ell}$, i.e.,

$$\mathscr{Q}(1) := \left\{ Q \in S_{sc}(1)\,;\; Q \sim \sum_{\nu=1}^{\ell} P_\nu \# Q \# P_\nu \ \text{ in } \ S(1) \right\}.$$

In particular, using formula (A.0.7), one sees that if $Q \in \mathscr{Q}(1)$ then its principal symbol Q_0 is block-diagonal with respect to the eigenprojectors $P_{\nu,0}$, i.e.,

$$Q_0(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_{\nu,0}(x, \xi) Q_0(x, \xi) P_{\nu,0}(x, \xi), \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Let ϕ_ν^t be the Hamiltonian flow generated by the eigenvalue λ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$. Thanks to (3.2.9), for all $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, $\phi_\nu^t(x, \xi)$ exists globally on $\mathbb{R}$, for all $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Put

$$\Gamma_\nu := \| J \nabla^{(2)}_{(x,\xi)} \lambda_\nu(x, \xi) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}, \quad \Gamma_{\max} := \max_{1 \leqslant \nu \leqslant \ell} \Gamma_\nu, \tag{3.2.14}$$

where $\nabla^{(2)}_{(x,\xi)} \lambda_\nu$ denotes the Hessian matrix of λ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$.

Our main result is the following :

Theorem 3.2.5 *Assume **(A0)**, **(A1)** and **(A2)**, and let $Q \in \mathscr{Q}(1)$. There exists a sequence $\big((q_j(t))^w(x, hD_x)\big)_{j \geqslant 0}$ of $m \times m$ matrix-valued h-pseudodifferential operators such that for all $N \in \mathbb{N}$, there exists $C_N > 0$ such that for all $t \in \mathbb{R}$, the following estimate holds*

$$\left\| Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j \big(q_j(t)\big)^w (x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m))} \leqslant C_N h^{N+1} \exp\big((4N + \tilde{\delta}_n) \Gamma_{max} |t|\big), \tag{3.2.15}$$

where $\tilde{\delta}_n$ is an integer depending only on the dimension n. The symbols $q_j(t, x, \xi)$ are defined for $t \in \mathbb{R}$ and $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ by

$$q_j(t, x, \xi) := \sum_{\nu=1}^{\ell} q_{\nu,j}(t, x, \xi), \quad j \geqslant 0,$$

where $(q_{\nu,j}(t, x, \xi))_{j \geqslant 0}$ are given by formulas (3.4.52), (3.4.74) and satisfy the estimates (3.4.76) and (3.4.77). In particular, the principal symbol $q_0(t)$ is given by

$$q_0(t, x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\ell} T_\nu^{-1}(t, x, \xi) \big(P_{\nu,0} Q_0 P_{\nu,0}\big) \big(\phi_\nu^t(x, \xi)\big) T_\nu(t, x, \xi), \tag{3.2.16}$$

where T_ν is the unitary $m \times m$ matrix-valued function solution of the system

$$\frac{d}{dt}T_\nu(t,x,\xi) = -i\widetilde{H}_{\nu,1}\big(\phi_\nu^t(x,\xi)\big)T_\nu(t,x,\xi) \quad T_\nu(0,x,\xi) = I_m. \tag{3.2.17}$$

Here $\widetilde{H}_{\nu,1}$ *is the* $m \times m$ *hermitian-valued function defined by*

$$\widetilde{H}_{\nu,1} := \frac{1}{2i}P_{\nu,0}\big\{P_{\nu,0}, H_0\big\}P_{\nu,0} - i\big[P_{\nu,0}, \{\lambda_\nu, P_{\nu,0}\}\big] + P_{\nu,0}H_1P_{\nu,0}. \tag{3.2.18}$$

As a consequence we get the following corollary.

Corollary 3.2.6 *Under the assumptions of Theorem 3.2.5, for all* $N \geqslant 1$ *there exists* $C_N > 0$ *such that for all* $\varepsilon > 0$*, we have*

$$\left\| Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j (q_j(t))^w(x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} \leqslant C_N h^{\varepsilon N+1} h^{\frac{(\varepsilon-1)}{4}\tilde{\delta}_n}, \tag{3.2.19}$$

uniformly for $|t| \leqslant \dfrac{(1-\varepsilon)}{4\Gamma_{max}} \log(h^{-1})$.

If we only look for the principal symbol of $Q(t)$, the assumption $Q \in \mathscr{Q}(1)$ can be relaxed and we have the following result.

Corollary 3.2.7 *Let* H *be a semiclassical Hamiltonian satisfying the assumptions of Theorem 3.2.5 and let* $Q \in S_{sc}(1)$*. We assume that*

$$Q_0(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_{\nu,0}(x,\xi)\widetilde{Q}(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi)$$

for some $\widetilde{Q} \in S(1)$*. There exists* $C > 0$ *such that for all* $t \in \mathbb{R}$*, the following estimate holds*

$$\left\| Q(t) - \big(q_0(t)\big)^w(x, hD_x) \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} \leqslant Ch \exp\big(\tilde{\delta}_n \Gamma_{max}|t|\big),$$

where $q_0(t)$ *is given by* (3.2.16)*.*

3.3 Hamiltonian with scalar principal symbol

In this section, we study the particular case where the principal symbol H_0 is a scalar multiple of the identity in $M_m(\mathbb{C})$. The proof of Theorem 3.2.1 relies essentially on the following steps. In the next paragraph, using assumption **(A1')**, we construct a formal asymptotic expansion in powers of h for $Q(t)$ by solving the Cauchy problems $(\mathscr{C}_j)_{j\geqslant 0}$ (see (3.2.2)). The constructed matrix-valued functions $(q_j(t,x,\xi))_{j\geqslant 0}$ are defined by the general formula (3.3.6). Since we are interested in the semiclassical approximation for $Q(t)$ up to times of Ehrenfest type, we give in Proposition 3.3.2 uniform (in time) estimates on the derivatives with respect to (x,ξ) of the symbols $(q_j(t,x,\xi))_{j\geqslant 0}$. Then, using these estimates, we prove (3.2.5) by following the method of Bouzouina-Robert [17].

3.3.1 *Formal asymptotic expansion*

Let $H(x,\xi;h) = H_0(x,\xi) + hH_1(x,\xi)$ be a semiclassical Hamiltonian and suppose that H_0 satisfies **(A1')**. According to this assumption, the principal symbol of $[H, q(t)]_\#$ given by the commutator $[H_0, q_0(t)]$ vanishes for all $t \in \mathbb{R}$. Consequently, using the rule of asymptotic expansion of the product of symbols (formula (A.0.2)), the symbol $\frac{i}{h}[H, q(t)]_\#$ can be expended in a power series of h (see formula (A.0.8)) and then the Cauchy problems $(\mathscr{C}_j)_{j\geqslant 0}$ become

$$(\mathscr{C}_j)\begin{cases} \dfrac{d}{dt}q_j(t) &= \displaystyle\sum_{|\alpha|+|\beta|+k+p=j+1} \tilde{\gamma}(\alpha,\beta)\left(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} - (-1)^{|\alpha|-|\beta|} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)}\right) \\ \\ q_j(t)_{|t=0} &= Q_j, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

with $\tilde{\gamma}(\alpha,\beta) := \dfrac{i(-1)^{|\beta|}}{(2i)^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!\beta!}$.

Thanks to assumption **(A1')** again, for $p = j+1$, the right hand side of (3.3.1) is equal to $i[H_0, q_{j+1}(t)]$ which vanishes for all $t \in \mathbb{R}$. Then, $(\mathscr{C}_j)$ can be rewritten in the following form

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q_j(t) &= \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|+k+p=j+1 \\ 0\leqslant p\leqslant j}} \tilde{\gamma}(\alpha,\beta)\left(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} - (-1)^{|\alpha|-|\beta|} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)}\right) \\ &= \{\lambda, q_j(t)\} + i[H_1, q_j(t)] + B_j(t) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

where for $j \geqslant 0$,

$$B_j(t,x,\xi) := \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|+k+p=j+1 \\ 0\leqslant p\leqslant j-1}} \tilde{\gamma}(\alpha,\beta)\left(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} - (-1)^{|\alpha|-|\beta|} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)}\right)(x,\xi), \tag{3.3.3}$$

with the convention $B_0(t,x,\xi) = 0$ since the sum is empty.

Before giving the solution of (3.3.2), let us make the following remark concerning the case where the sub-principal symbol H_1 is also scalar-valued.

Remark 3.3.1 *Suppose that H_1 is a scalar real-valued symbol. Then, $[H_1, q_j(t)]$ vanishes and one can easily verify that equation (3.3.2) is equivalent to the following one*

$$\frac{d}{dt}\left(q_j(t, \phi_\lambda^{-t}(x,\xi))\right) = B_j(t, \phi_\lambda^{-t}(x,\xi)), \quad j \geqslant 0,$$

where B_j can be rewritten in the simpler form

$$B_j(t,x,\xi) = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|+k+p=j+1 \\ 0\leqslant p\leqslant j-1}} \frac{i((-1)^{|\beta|} - (-1)^{|\alpha|})}{(2i)^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!\beta!}\left(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)}(x,\xi) q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)\right). \tag{3.3.4}$$

Consequently, the solutions $q_{j,sca}(t)$, $j \geqslant 0$, are given by

$$q_{j,sca}(t,x,\xi) = q_{j,sca}\left(0, \phi_\lambda^t(x,\xi)\right) + \int_0^t B_j\left(s, \phi_\lambda^{t-s}(x,\xi)\right) ds, \quad t \in \mathbb{R}, (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{3.3.5}$$

Here the index "sca" precise that we are in the case where H_0 and H_1 are scalar-valued. In particular, the principal and sub-principal symbols are given by

$$q_{0,sca}(t,x,\xi) = Q_0 \circ \phi_\lambda^t(x,\xi),$$

and

$$q_{1,sca}(t,x,\xi) = Q_1\left(\phi_\lambda^t(x,\xi)\right) + \int_0^t \left\{H_1, Q_0(\phi_\lambda^s)\right\} \circ \phi_\lambda^{t-s}(x,\xi)\, ds.$$

Solutions of $(\mathscr{C}_j)_j$

Turn now to the resolution of (3.3.2). The Cauchy problem (3.3.2) is a particular case of the general Cauchy problem (B.0.1) studied in the appendix B. Applying the results of this appendix with $\Lambda = \lambda$, $A = H_1$ and $B(t) = B_j(t)$, we get the solution of (3.3.2) for all $j \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} q_j(t,x,\xi) =& T^{-1}(t,x,\xi)\Bigg(Q_j\left(\phi_\lambda^t(x,\xi)\right) \\ &+ \int_0^t T^{-1}\left(-s, \phi_\lambda^t(x,\xi)\right) B_j\left(s, \phi_\lambda^{t-s}(x,\xi)\right) T\left(-s, \phi_\lambda^t(x,\xi)\right)\, ds \Bigg) T(t,x,\xi), \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

defined for all $t \in \mathbb{R}$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, where T and T^{-1} are the unitary $m \times m$ matrix-valued functions solutions of the following systems

$$\frac{d}{dt} T(t,x,\xi) = -iH_1\left(\phi_\lambda^t(x,\xi)\right) T(t,x,\xi), \quad T(0,x,\xi) = I_m, \tag{3.3.7}$$

$$\frac{d}{dt} T^{-1}(t,x,\xi) = iT^{-1}(t,x,\xi) H_1\left(\phi_\lambda^t(x,\xi)\right), \quad T^{-1}(0,x,\xi) = I_m. \tag{3.3.8}$$

In particular, the principal symbol $q_0(t)$ is given by

$$q_0(t,x,\xi) = T^{-1}(t,x,\xi) Q_0\left(\phi_\lambda^t(x,\xi)\right) T(t,x,\xi), \quad \forall t \in \mathbb{R}, (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{3.3.9}$$

3.3.2 *Uniform estimates*

Let Γ be the upper bound defined by (3.2.4).

Proposition 3.3.2 *Assume **(A2')**. For all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ and all $j \geqslant 0$, there exists $C_{\gamma,j} > 0$ such that for all $t \in \mathbb{R}$ and all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, we have*

$$\left\|\partial_{(x,\xi)}^\gamma q_0(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_{\gamma,0} \exp\left(|\gamma|\Gamma|t|\right), \tag{3.3.10}$$

and for $j \geqslant 1$,

$$\left\|\partial_{(x,\xi)}^\gamma q_j(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_{\gamma,j} \exp\left((2|\gamma| + 4j - 3)\Gamma|t|\right). \tag{3.3.11}$$

To prove this proposition we need to recall the multivariate Faá Di Bruno formula used for computing arbitrary partial derivatives of a function composition. In the following, this formula will be used wherever we have to estimate the derivatives of observables moving along the Hamiltonian flow. In the literature, one can found several forms to this formula (see for instance [83, 30]). As in [17], we use the following one :

Lemma 3.3.3 *Let* $F = (F_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m} : \mathbb{R}^{2n} \to M_m(\mathbb{C})$ *and* $G = (G_1, ..., G_{2n}) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *be smooth functions. For all* $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$*, we have*

$$\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}(F \circ G) = \left(\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}(F_{ij} \circ G)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant m}$$

where

$$\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}(F_{ij} \circ G) = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^{2n}\\ \beta\neq 0, \beta\leqslant\gamma}} (\partial^{\beta}_{(x,\xi)} F_{ij}) \circ G \,.\, \mathcal{A}_{\gamma,\beta}(G), \tag{3.3.12}$$

with

$$\mathcal{A}_{\gamma,\beta}(G) = \gamma! \sum_{\substack{\sum_\alpha \alpha=\beta\\ \sum_\alpha \alpha|\eta|=\gamma}} \prod_{\alpha\in\mathbb{N}^{2n}\setminus\{0\}} \frac{1}{\eta!}\left(\frac{\partial^{\alpha}_{(x,\xi)} G_1}{\alpha!}\right)^{\eta_1} \cdots \left(\frac{\partial^{\alpha}_{(x,\xi)} G_{2n}}{\alpha!}\right)^{\eta_{2n}}. \tag{3.3.13}$$

We refer to [30, Theorem 2.1] for more details about the multivariate notations used in (3.3.13).

The proof of Proposition 3.3.2 is based on the three following lemmas. The first one gives exponential estimate on the derivatives (with respect to (x, ξ)) of the Hamiltonian flow associated to λ. This result can be proved by induction on $|\gamma|$ using the Jacobi stability equation

$$\frac{d}{dt}\nabla_{(x,\xi)}\phi^t_\lambda(x, \xi) = J\nabla^{(2)}_{(x,\xi)}\lambda(\phi^t_\lambda(x, \xi))\nabla_{(x,\xi)}\phi^t_\lambda(x, \xi), \tag{3.3.14}$$

where $\nabla_{(x,\xi)}\phi^t_\lambda := (\partial_x\phi^t_\lambda, \partial_\xi\phi^t_\lambda)$.

Lemma 3.3.4 *[17, Lemma 2.2] We assume that*

$$\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}\lambda \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad \forall\gamma \in \mathbb{N}^{2n}; |\gamma| \geqslant 2.$$

Then, for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}$*, there exists* $C_\gamma > 0$ *such that for all* $t \in \mathbb{R}$ *and all* $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$*,*

$$\left\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}\phi^t_\lambda(x, \xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\left(|\gamma|\Gamma|t|\right). \tag{3.3.15}$$

In the next lemma, we prove similar estimate on the derivatives of the matrix-valued function T (see (3.3.7)).

Lemma 3.3.5 *Assume **(A2')**. For all* $\gamma \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}$*, there exists* $C_\gamma > 0$ *(independent of* $t \in \mathbb{R}$ *and* $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$*) such that*

$$\left\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}T(t, x, \xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\left(|\gamma|\Gamma|t|\right). \tag{3.3.16}$$

Furthermore, the same estimate remains valid for the derivatives of T^{-1}.

Proof. Without any loss of generality, we assume that $t \geqslant 0$ (the proof for $t \leqslant 0$ is similar). We proceed by induction on $|\gamma|$. Let us check (3.3.16) for the first order derivative of T with respect to x_1. A straightforward computation using equations (3.3.7) and (3.3.8) yields

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(T^{-1}(t,x,\xi)\partial_{x_1}T(t,x,\xi)\right) &= \partial_t T^{-1}(t,x,\xi)\partial_{x_1}T(t,x,\xi)+T^{-1}(t,x,\xi)\partial_t\partial_{x_1}T(t,x,\xi)\\ &= -iT^{-1}(t,x,\xi)\partial_{x_1}\left(H_1(\phi_\lambda^t(x,\xi))\right)T(t,x,\xi)\\ &= -iT^{-1}(t,x,\xi)\nabla_{(x,\xi)}H_1(\phi_\lambda^t(x,\xi))\cdot\partial_{x_1}\phi_\lambda^t(x,\xi)T(t,x,\xi),\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}\nabla_{(x,\xi)}H_1(\phi_\lambda^t(x,\xi))\cdot\partial_{x_1}\phi_\lambda^t(x,\xi) = \nabla_x H_1(\phi_\lambda^t(x,\xi))\cdot\partial_{x_1}X(t,x,\xi)&\\ +\nabla_\xi H_1(\phi_\lambda^t(x,\xi))\cdot\partial_{x_1}\Xi(t,x,\xi)&\end{aligned}$$

with $\phi_\lambda^t(\cdot,\cdot) = (X(t,\cdot,\cdot),\Xi(t,\cdot,\cdot)) : \mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$. Therefore

$$T^{-1}(t,x,\xi)\partial_{x_1}T(t,x,\xi) = -i\int_0^t T^{-1}(s,x,\xi)\nabla_{(x,\xi)}H_1(\phi_\lambda^s(x,\xi))\cdot\partial_{x_1}\phi_\lambda^s(x,\xi)T(s,x,\xi)\,ds,$$

since $\partial_{x_1}T(0,x,\xi) = 0$ (we recall that $T(0,x,\xi) = I_m$). Taking into account the fact that T^{-1} is unitary and using estimate (3.3.15), we obtain

$$\left\|\partial_{x_1}T(t,x,\xi)\right\| \leqslant \int_0^t \left\|\partial_{x_1}\phi_\lambda^s(x,\xi)\right\|.\left\|\nabla_{(x,\xi)}H_1\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}\,ds \leqslant C\exp(\Gamma t),$$

uniformly for $t \geqslant 0$ and $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$. This gives the proof for $\gamma = (1,0,...,0)$. The same proof holds for $|\gamma| = 1$.

Let us now assume that (3.3.16) holds for all $\gamma\in\mathbb{N}^{2n}$ with $|\gamma| < r$, $r \geqslant 2$, and take $|\gamma| = r$. Computing derivatives with respect to (x,ξ) in (3.3.7) using Leibniz formula, we get

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\partial^\gamma_{(x,\xi)}T(t,x,\xi) = -iH_1\left(\phi_\lambda^t(x,\xi)\right)\partial^\gamma_{(x,\xi)}T(t,x,\xi)&\\ -i\sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant r}\binom{\gamma}{\beta}\partial^\beta_{(x,\xi)}\left(H_1(\phi_\lambda^t(x,\xi))\right)\partial^{\gamma-\beta}_{(x,\xi)}T(t,x,\xi).&\end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(T^{-1}(t,x,\xi)\partial^\gamma_{(x,\xi)}T(t,x,\xi)\right)\\ &\qquad= -iT^{-1}(t,x,\xi)\sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant r}\binom{\gamma}{\beta}\partial^\beta_{(x,\xi)}\left(H_1(\phi_\lambda^t(x,\xi))\right)\partial^{\gamma-\beta}_{(x,\xi)}T(t,x,\xi).\end{aligned}$$

According to assumption **(A2')**, for all $\beta\in\mathbb{N}^{2n}$ with $|\beta|\geqslant 1$, we have $\partial^\beta_{(x,\xi)}H_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Consequently, using Faá Di Bruno's formula (3.3.12) and estimate (3.3.15), we obtain

$$\left\|\partial^\beta_{(x,\xi)}\left(H_1\circ\phi_\lambda^t(x,\xi)\right)\right\| \leqslant C_\beta\exp\left(|\beta|\Gamma t\right), \tag{3.3.17}$$

uniformly with respect to $t\geqslant 0$ and $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$.

On the other hand, by the induction hypothesis, there exists $C_{\gamma,\beta} > 0$ such that for all $t \geqslant 0$ and all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, we have

$$\|\partial_{(x,\xi)}^{\gamma-\beta} T(t,x,\xi)\| \leqslant C_{\gamma,\beta} \exp\big((r-|\beta|)\Gamma t\big). \tag{3.3.18}$$

Putting together (3.3.17) and (3.3.18) and taking into account the fact that $\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} T(0,x,\xi) = 0$, we get

$$\begin{aligned}
\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} T(t,x,\xi)\| &\leqslant \sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant r} C_{\gamma,\beta} \int_0^t \|\partial^{\beta}_{(x,\xi)} (H_1(\phi^s_\lambda(x,\xi)))\| . \|\partial^{\gamma-\beta}_{(x,\xi)} T(s,x,\xi)\| \, ds \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant|\beta|\leqslant r} C'_{\gamma,\beta} \int_0^t \exp\big(|\beta|\Gamma s\big) \exp\big((r-|\beta|)\Gamma s\big) \, ds \\
&\leqslant C_\gamma \exp(r\Gamma t).
\end{aligned}$$

Hence (3.3.16) holds for $|\gamma| = r$. This ends the proof. ■

Remark 3.3.6 *Notice that the same proof can be repeated for T^{-1} and then estimate (3.3.16) remains valid for the derivatives of T^{-1}.*

The following lemma is a consequence of the two previous lemmas and the Faá Di Bruno formula (3.3.12).

Lemma 3.3.7 *Under assumption **(A2')**, for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}$, there exists $C_\gamma > 0$ such that for all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ and all $t, s \in \mathbb{R}$, we have*

$$\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} (T(s, \phi^t_\lambda(x,\xi)))\| \leqslant C_\gamma \exp\big(|\gamma|\Gamma(|t|+|s|)\big). \tag{3.3.19}$$

Furthermore, the same estimate holds for the derivatives of $T^{-1}(s, \phi^t_\lambda(x,\xi))$.

With Lemmas 3.3.4, 3.3.5 and 3.3.7 at hand, we are now ready to prove Proposition 3.3.2.

Proof of Proposition 3.3.2 :

We start by proving estimate (3.3.10). Using formula (3.3.12) and estimate (3.3.15), one can easily verify that for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, there exists $C_\gamma > 0$ such that for all $t \in \mathbb{R}$ and all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} (Q_0 \circ \phi^t_\lambda(x,\xi))\| \leqslant C_\gamma \exp\big(|\gamma|\Gamma|t|\big). \tag{3.3.20}$$

Consequently, by differentiating $q_0(t)$ $|\gamma|$-times with respect to (x,ξ) using the Leibniz formula, we obtain

$$\begin{aligned}
\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} q_0(t,x,\xi)\| \leqslant \sum_{\beta\leqslant\gamma,\alpha\leqslant\beta} \binom{\gamma}{\beta}\binom{\beta}{\alpha} \|\partial^{\alpha}_{(x,\xi)} T^{-1}(t,x,\xi)\| \|\partial^{\beta-\alpha}_{(x,\xi)} (Q_0(\phi^t_\lambda(x,\xi)))\| \\
\times \|\partial^{\gamma-\beta}_{(x,\xi)} T(t,x,\xi)\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{\beta\leqslant\gamma,\alpha\leqslant\beta} C_{\alpha,\beta,\gamma} \exp\big((|\gamma|+|\alpha|-|\beta|)\Gamma|t|\big) \exp\big((|\beta|-|\alpha|)\Gamma|t|\big) \\
&\leqslant C_\gamma \exp\big(|\gamma|\Gamma|t|\big),
\end{aligned}$$

uniformly for $(t,x,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$. Hence (3.3.10) holds.

Turn now to the proof of (3.3.11). We proceed by induction with respect to $j \geqslant 1$. We give the proof only for $t \geqslant 0$, the case $t \leqslant 0$ is similar. Recall the expression of $q_j(t,x,\xi)$

$$\begin{aligned} q_j(t,x,\xi) =& T^{-1}(t,x,\xi)\Big(Q_j\big(\phi_\lambda^t(x,\xi)\big) \\ &+ \int_0^t T^{-1}\big(-s,\phi_\lambda^t(x,\xi)\big)B_j\big(s,\phi_\lambda^{t-s}(x,\xi)\big)T\big(-s,\phi_\lambda^t(x,\xi)\big)\ ds\Big)T(t,x,\xi), \end{aligned}$$

with

$$B_j(t,x,\xi) := \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|+k+p=j+1 \\ 0\leqslant p\leqslant j-1}} \tilde{\gamma}(\alpha,\beta)\Big(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} - (-1)^{|\alpha|-|\beta|} q_p(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)}\Big)(x,\xi).$$

For $j=1$, we have

$$B_1(t,x,\xi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|+k=2} \tilde{\gamma}(\alpha,\beta)\Big(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_0(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} - (-1)^{|\alpha|-|\beta|} q_0(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)}\Big)(x,\xi).$$

Since H_0 is scalar according to assumption **(A1′)**, for $k=0$ the previous sum vanishes and then B_1 can be rewritten as

$$\begin{aligned} B_1(s,x,\xi) &= \sum_{|\alpha|+|\beta|=1} \tilde{\gamma}(\alpha,\beta)\Big(H_1{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_0(s)^{(\alpha)}_{(\beta)} - (-1)^{|\alpha|-|\beta|} q_0(s)^{(\alpha)}_{(\beta)} H_1{}^{(\beta)}_{(\alpha)}\Big)(x,\xi) \\ &= \frac{1}{2}\big(\{H_1,q_0(s)\}(x,\xi) - \{q_0(s),H_1\}(x,\xi)\big). \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Let $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$. Using assumption **(A2′)** with $j=1$ and estimate (3.3.10), we get

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} B_1(s,x,\xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\big((|\gamma|+1)\Gamma s\big),$$

uniformly for $s \geqslant 0$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Now, computing the derivatives of $B_1 \circ \phi_\lambda^{t-s}$ by means of the Faá Di Bruno formula (3.3.12) and combining the above estimate with (3.3.15), we obtain

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} B_1\big(s,\phi_\lambda^{t-s}(x,\xi)\big)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\big((|\gamma|t+s)\Gamma\big), \tag{3.3.22}$$

uniformly for $0 \leqslant s \leqslant t$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Put

$$A_1(t,s,x,\xi) := T^{-1}\big(-s,\phi_\lambda^t(x,\xi)\big)B_1\big(s,\phi_\lambda^{t-s}(x,\xi)\big)T\big(-s,\phi_\lambda^t(x,\xi)\big),$$

and

$$\tilde{A}_1(t,x,\xi) := Q_1\big(\phi_\lambda^t(x,\xi)\big) + \int_0^t A_1(t,s,x,\xi)ds.$$

Using Leibniz formula, estimates (3.3.22) and (3.3.19) imply

$$\begin{aligned} \left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} A_1(t,s,x,\xi)\right\| \leqslant & \sum_{\beta\leqslant\gamma,\alpha\leqslant\beta} \binom{\gamma}{\beta}\binom{\beta}{\alpha} \left\|\partial^\alpha_{(x,\xi)}\big(T^{-1}\big(-s,\phi_\lambda^t(x,\xi)\big)\big)\right\| \\ & \times \left\|\partial^{\gamma-\beta}_{(x,\xi)}\big(T\big(-s,\phi_\lambda^t(x,\xi)\big)\big)\right\| \left\|\partial^{\beta-\alpha}_{(x,\xi)}\big(B_1\big(s,\phi_\lambda^{t-s}(x,\xi)\big)\big)\right\| \end{aligned}$$

$$\leqslant \sum_{\beta\leqslant\gamma,\alpha\leqslant\beta} C_{\alpha,\beta,\gamma} \exp\left((|\gamma|+|\alpha|-|\beta|)(t+s)\Gamma\right) \exp\left(((|\beta|-|\alpha|)t+s)\Gamma\right)$$
$$\leqslant C_\gamma \exp\left((|\gamma|t+(|\gamma|+1)s)\Gamma\right), \tag{3.3.23}$$

uniformly for $0 \leqslant s \leqslant t$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Therefore,

$$\left\| \int_0^t \partial^\gamma_{(x,\xi)} A_1(t,s,x,\xi)ds \right\| \leqslant C_\gamma \exp\left(\Gamma|\gamma|t\right) \int_0^t \exp\left(\Gamma(|\gamma|+1)s\right)ds \leqslant C'_\gamma \exp\left((2|\gamma|+1)\Gamma t\right). \tag{3.3.24}$$

Combining this estimate with the fact that $Q_1 \circ \phi^t_\lambda$ satisfies estimate (3.4.86), we get

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} \tilde{A}_1(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\left((2|\gamma|+1)\Gamma t\right).$$

Finally, we use Leibniz formula again to compute derivatives with respect to (x,ξ) of $q_1(t,x,\xi)$. The above estimate together with estimate (3.3.16) give

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} q_1(t,x,\xi)\right\| \leqslant \sum_{\beta\leqslant\gamma,\alpha\leqslant\beta} \binom{\gamma}{\beta}\binom{\beta}{\alpha} \left\|\partial^\alpha_{(x,\xi)} T^{-1}(t,x,\xi)\right\| \left\|\partial^{\gamma-\beta}_{(x,\xi)} T(t,x,\xi)\right\|$$
$$\times \left\|\partial^{\beta-\alpha}_{(x,\xi)} \tilde{A}_1(t,x,\xi)\right\|$$
$$\leqslant C_\gamma \exp\left((2|\gamma|+1)\Gamma t\right),$$

uniformly for $t \geqslant 0$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Thus we proved (3.3.11) for $j=1$.

Now, suppose that (3.3.11) holds for all $j < r$. For $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, we have

$$\partial^\gamma_{(x,\xi)} B_r(s,x,\xi) \tag{3.3.25}$$
$$= \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|+k+p=r+1\\ 0\leqslant p\leqslant r-1}} \tilde{\gamma}(\alpha,\beta)\partial^\gamma_{(x,\xi)} \left(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_p(s)^{(\alpha)}_{(\beta)} - (-1)^{|\alpha|-|\beta|} q_p(s)^{(\alpha)}_{(\beta)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} \right)(x,\xi). \tag{3.3.26}$$

We shall only focus on the first term of the above difference since the other term can be estimated similarly. Applying Leibniz formula, we get

$$\partial^\gamma_{(x,\xi)} \left(H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} q_p(s)^{(\alpha)}_{(\beta)} \right)(x,\xi) = \sum_{\eta\leqslant\gamma} \binom{\gamma}{\eta} \partial^\eta_{(x,\xi)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)}(x,\xi) \partial^{\gamma-\eta}_{(x,\xi)} q_p(s)^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi).$$

Firstly, since the sum in (3.3.25) is over $((\alpha,\beta),k) \in \mathbb{N}^{2n}\times\{0,1\}$ such that $|\alpha|+|\beta|+k \geqslant 2$, then by assumption **(A2')** we have $\partial^\eta_{(x,\xi)} H_k{}^{(\beta)}_{(\alpha)} \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, for all $\eta \in \mathbb{N}^{2n}$.

On the other hand, by the induction hypothesis, there exists a constant $C = C(\gamma,\eta,\alpha,\beta) > 0$ such that for all $s \geqslant 0$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, we have

$$\left\|\partial^{\gamma-\eta}_{(x,\xi)} q_p(s)^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)\right\| \leqslant C\exp\left((2(|\gamma|-|\eta|+|\alpha|+|\beta|)+4p-3)\Gamma s\right). \tag{3.3.27}$$

Thus, taking the supremum over $0 \leqslant |\eta| \leqslant |\gamma|$ and $|\alpha|+|\beta| = r+1-p$ with $0 \leqslant p \leqslant r-1$, we obtain

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} B_r(s,x,\xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\left((2|\gamma|+4r-3)\Gamma s\right),$$

uniformly with respect to $s \geqslant 0$ and $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Consequently, by applying Faá Di Bruno's formula (3.3.12) and using estimate the flow (3.3.15), we get

$$\left\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} B_r\big(s, \phi^{t-s}_{\lambda}(x,\xi)\big)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\big((2|\gamma| + 4r - 3)\Gamma s + |\gamma|\Gamma(t-s)\big), \tag{3.3.28}$$

uniformly for $0 \leqslant s \leqslant t$ and $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Put

$$A_r(t, s, x, \xi) := T^{-1}\big(-s, \phi^t_\lambda(x,\xi)\big) B_r\big(s, \phi^{t-s}_\lambda(x,\xi)\big) T\big(-s, \phi^t_\lambda(x,\xi)\big),$$

and

$$\tilde{A}_r(t, x, \xi) := Q_r\big(\phi^t_\lambda(x,\xi)\big) + \int_0^t A_r(t, s, x, \xi) ds.$$

Performing a similar computation as for A_1 and using estimates (3.3.28) and (3.3.19), we obtain

$$\left\|\int_0^t \partial^{\gamma}_{(x,\xi)} A_r(t, s, x, \xi) ds\right\| \leqslant C_\gamma \exp\big((2|\gamma| + 4r - 3)\Gamma t\big),$$

uniformly for $t \geqslant 0$ and $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Consequently, using the fact that $Q_r \circ \phi^t_\lambda$ satisfies the estimate (3.4.86), we get

$$\left\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} \tilde{A}_r(t, x, \xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\big((2|\gamma| + 4r - 3)\Gamma t\big).$$

Finally, using the Leibniz formula and (3.3.16), we conclude

$$\begin{aligned}\left\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} q_r(t, x, \xi)\right\| \leqslant & \sum_{\beta \leqslant \gamma, \alpha \leqslant \beta} \binom{\gamma}{\beta}\binom{\beta}{\alpha} \left\|\partial^{\alpha}_{(x,\xi)} T^{-1}(t, x, \xi)\right\| \left\|\partial^{\gamma-\beta}_{(x,\xi)} T(t, x, \xi)\right\| \\ & \times \left\|\partial^{\beta-\alpha}_{(x,\xi)} \tilde{A}_r(t, x, \xi)\right\| \\ \leqslant & \, C_\gamma \exp\big((2|\gamma| + 4r - 3)\Gamma t\big),\end{aligned}$$

uniformly for $t \geqslant 0$ and $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Hence (3.3.11) holds for $j = r$. This ends the proof of Proposition 3.3.2. ∎

Remark 3.3.8 *Notice that estimate (3.3.11) on the derivatives of the symbols $q_j(t, x, \xi)$, $j \geqslant 1$, is different from the one proved in the scalar case (see (2.1.11)). This is caused by the derivatives of the term $T(-s, \phi^t_\lambda(x,\xi))$ appearing in the expression (3.3.6) of the symbol $q_j(t)$ which does not exist in the scalar case. Assume that Q is classical, i.e. $Q(x, \xi) = Q_0(x, \xi)$ (as in [17]) and let us explain this difference at the level of sub-principal symbols, i.e. for $j = 1$. We have shown in Remark 3.3.1 that in the case where H_1 is also scalar-valued, the sub-principal symbol $q_{1,sca}(t, x, \xi)$ is given by*

$$q_{1,sca}(t, x, \xi) = \int_0^t B_1\big(s, \phi^{t-s}_\lambda(x,\xi)\big) ds,$$

where B_1 is defined by (3.3.4). Using estimate (3.3.22) on the derivatives of $B_1\big(s, \phi^{t-s}_\lambda(x,\xi)\big)$, one obtains

$$\left|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} q_{1,sca}(t, x, \xi)\right| \leqslant C_\gamma \exp\big((|\gamma| + 1)\Gamma|t|\big), \quad \forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n}, t \in \mathbb{R}, (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{3.3.29}$$

which is the estimate (2.1.11). Now, in the case where H_1 is matrix-valued, according to (3.3.6) (taking into account the fact that $Q_1 = 0$), $q_1(t,x,\xi)$ is given by

$$\begin{aligned} &q_1(t,x,\xi)\\ &= T^{-1}(t,x,\xi)\left(\int_0^t T^{-1}\big(-s,\phi_\lambda^t(x,\xi)\big)B_1\big(s,\phi_\lambda^{t-s}(x,\xi)\big)T\big(-s,\phi_\lambda^t(x,\xi)\big)\,ds\right)T(t,x,\xi). \end{aligned}$$

By going back to estimate (3.3.23), one sees that due to the term $T\big(-s,\phi_\lambda^t(x,\xi)\big)$, when differentiating $q_1(t,x,\xi)$ $|\gamma|$- times with respect to (x,ξ), there is a loss of $\exp\big(|\gamma|\Gamma|t|\big)$ compared to (3.3.29), i.e. we have

$$\left\|\partial_{(x,\xi)}^\gamma q_1(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\big((2|\gamma|+1)\Gamma|t|\big), \quad \forall\gamma\in\mathbb{N}^{2n}, t\in\mathbb{R}, (x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}.$$

As pointed out in (iii) of Remark 3.2.3, this explain the fact that our estimate on the remainder term (3.2.5) is different from the one obtained in the scalar case.

3.3.3 *Proof of Theorem 3.2.1*

The proof of estimate (3.2.5) is based on estimates (3.3.10) and (3.3.11) and the control of the remainder terms in the composition formula of h-pseudodifferential operators. We follow the method of Bouzouina-Robert [17].

For A, B two semiclassical symbols in suitable classes of symbols and $k \in \mathbb{N}$, we define

$$\widetilde{R}_k(A,B) := ih^{-(k+1)}\big(R_k(A,B) - R_k(B,A)\big), \tag{3.3.30}$$

where

$$R_k(A,B,x,\xi;h) := A\#B(x,\xi;h) - \sum_{j=0}^{k} h^j (A\#B)_j(x,\xi)$$

denotes the remainder term of order k in the asymptotic expansion of the symbol $A\#B$ (see appendix A).

For $N \in \mathbb{N}$, we set

$$Q_N(t) := Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j\big(q_j(t)\big)^w(x,hD_x).$$

The first step in the proof of estimate (3.2.5) is the following lemma.

Lemma 3.3.9 *For all $N \in \mathbb{N}$, the following estimate holds*

$$\begin{aligned} &\|Q_N(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}\\ &\leqslant h^{N+1}\left\|\int_0^t U_H(-s)\big(R^{(N+1)}(t-s)\big)^w U_H(s)ds\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} + \mathcal{O}(h^{N+1}), \end{aligned} \tag{3.3.31}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$, with

$$\begin{aligned} R^{(N+1)}(t) &:= \widetilde{R}_{N+1}(H,q_0(t)) + \widetilde{R}_N(H,q_1(t)) + \cdots + \widetilde{R}_1(H,q_N(t))\\ &= \sum_{j=0}^{N}\widetilde{R}_{N+1-j}(H,q_j(t)). \end{aligned} \tag{3.3.32}$$

Proof. Let $N \in \mathbb{N}$ and define

$$q^{(N)}(t,x,\xi;h) := \sum_{j=0}^{N} h^j q_j(t,x,\xi).$$

According to the Cauchy problems $(\mathscr{C}_j)_{j\geqslant 0}$ satisfied by the symbols $q_j(t)$, for all $j \geqslant 0$, we have

$$\frac{d}{dt}q_j(t) = \{H, q_0(t)\}_j^* + \{H, q_1(t)\}_{j-1}^* + \{H, q_2(t)\}_{j-2}^* + \cdots + \{H, q_j(t)\}_0^*, \tag{3.3.33}$$

where we recall that for $0 \leqslant k \leqslant j$, $\{H, q_k(t)\}_{j-k}^*$ denotes the coefficient of h^{j-k} in the asymptotic expansion of the Moyal bracket $\{H, q_k(t)\}^*$ (see appendix A). Then

$$\frac{d}{dt}q^{(N)}(t) = \sum_{j=0}^{N} h^j \frac{d}{dt}q_j(t) = \sum_{j=0}^{N} h^j\{H, q_0(t)\}_j^* + h\sum_{j=0}^{N-1} h^j\{H, q_1(t)\}_j^* + \cdots + h^N\{H, q_N(t)\}_0^*.$$

Using the formula of asymptotic expansion of the Moyal bracket (A.0.8), we obtain

$$\{H, q^{(N)}(t)\}^* = \frac{d}{dt}q^{(N)}(t) + h^{N+1}R^{(N+1)}(t), \tag{3.3.34}$$

with $R^{(N+1)}(t)$ defined by (3.3.32). A simple computation using (3.3.34) yields

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\big(U_H(-s)Q_N(t-s)U_H(s)\big)\\
&\qquad = U_H(-s)\left(\frac{i}{h}[H^w, Q_N(t-s)] - \frac{d}{dt}Q_N(t-s)\right)U_H(s)\\
&\qquad = U_H(-s)\left(\frac{d}{dt}\big(q^{(N)}(t-s)\big)^w - \frac{i}{h}\Big[H^w, \big(q^{(N)}(t-s)\big)^w\Big]\right)U_H(s)\\
&\qquad = -h^{N+1}U_H(-s)\big(R^{(N+1)}(t-s)\big)^w U_H(s).
\end{aligned}$$

Therefore, by integrating in s and using the fact that

$$\begin{aligned}
\|Q_N(0)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} &= \Big\|Q^w(x,hD_x;h) - \sum_{j=0}^{N} h^j Q_j^w(x,hD_x)\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}\\
&= \mathcal{O}(h^{N+1}),
\end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned}
\|Q_N(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} &\leqslant h^{N+1}\left\|\int_0^t U_H(-s)\big(R^{(N+1)}(t-s)\big)^w U_H(s)ds\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}\\
&+ \mathcal{O}(h^{N+1}),
\end{aligned}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$. This ends the proof of the lemma. ∎

End of the proof of Theorem 3.2.1.

It remains now to estimate the $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$-norm of the operator $\big(R^{(N+1)}(t)\big)^w$. For that, we shall employ the Calderón-Vaillancourt theorem (Theorem 1.3). We shall therefore need estimates on the derivatives of the symbol $R^{(N+1)}(t,x,\xi;h)$ with respect to (x,ξ).

Let $N \in \mathbb{N}$ and $0 \leqslant j \leqslant N$. We have

$$\widetilde{R}_{N+1-j}(H, q_j(t)) = \widetilde{R}_{N+1-j}(H_0, q_j(t)) + \widetilde{R}_{N-j}(H_1, q_j(t)). \tag{3.3.35}$$

Let $k \in \{0,1\}$. According to Theorem A.0.2 (combined with Remark A.0.3), for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, there exists a constant $C = C(n, N, j, \gamma, k) > 0$ such that for all $t \in \mathbb{R}$ and all $u \in \mathbb{R}^{2n}$, we have

$$\left\|\partial_u^\gamma \widetilde{R}_{N+1-j-k}(H_k, q_j(t); u)\right\| \leqslant C \sup_{(*)} \left(\left\|\partial_v^{(\alpha,\beta)+\eta} H_k(v+u)\right\| \left\|\partial_w^{(\beta,\alpha)+\kappa} q_j(t, w+u)\right\|\right), \tag{3.3.36}$$

where $\sup_{(*)}$ is the supremum under the conditions

$$(*) : \begin{array}{r} v, w \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \eta, \kappa \in \mathbb{N}^{2n}; \quad |\eta| + |\kappa| \leqslant 4n + 1 + |\gamma| \\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n; \quad |\alpha| + |\beta| = N + 2 - j - k. \end{array}$$

Observe first that by assumption **(A2')**, for $k \in \{0,1\}$, for all multi-indices $((\alpha,\beta),\eta) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{N}^{2n}$ and all $0 \leqslant j \leqslant N$ with $|\alpha| + |\beta| = N + 2 - j - k$, we have

$$\partial_{(x,\xi)}^{(\alpha,\beta)+\eta} H_k \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}).$$

On the other hand, using the estimates given by Proposition 3.3.2, for all $((\alpha,\beta),\kappa) \in \mathbb{N}^{2n} \times \mathbb{N}^{2n}$ and all $j \geqslant 0$, there exists $C_j = C(\alpha,\beta,\kappa,j) > 0$ such that

$$\left\|\partial_{(x,\xi)}^{(\beta,\alpha)+\kappa} q_0(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_0 \exp\left((|\alpha| + |\beta| + |\kappa|)\Gamma|t|\right)$$

and for $j \geqslant 1$

$$\left\|\partial_{(x,\xi)}^{(\beta,\alpha)+\kappa} q_j(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_j \exp\left((2(|\alpha| + |\beta| + |\kappa|) + 4j - 3)\Gamma|t|\right),$$

uniformly for $(t,x,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$.

Therefore, taking the supremum over $(*)$, there exists $C = C(\gamma, N, n, j, k) > 0$ such that for all $t \in \mathbb{R}$ and all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, we have

$$\left\|\partial_{(x,\xi)}^\gamma \widetilde{R}_{N+1-j-k}(H_k, q_j(t); x,\xi)\right\| \leqslant C \exp\left((2|\gamma| + 2N + 8n + 3 + 2j - 2k)\Gamma|t|\right).$$

Now, summing over $j = 0, \ldots, N$, we get

$$\left\|\partial_{(x,\xi)}^\gamma R^{(N+1)}(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_{n,N,\gamma} \exp\left((2|\gamma| + 4N + 8n + 3)\Gamma|t|\right) \tag{3.3.37}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Consequently, using the Calderón-Vaillancourt theorem (Theorem 1.3), we deduce

$$\left\|\left(R^{(N+1)}(t)\right)^w(x, hD_x; h)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} \leqslant C_{n,N} \exp\left((4N + \delta_n)\Gamma|t|\right),$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$, where δ_n is an integer depending only on the dimension n.

By going back to (3.3.31), we obtain

$$\begin{aligned} \|Q_N(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} &\leqslant h^{N+1}\int_0^t \left\|\left(R^{N+1}(t-s)\right)^w\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} ds + \mathcal{O}(h^{N+1}) \\ &\leqslant C_N\, h^{N+1}\int_0^t \exp\left((4N+\delta_n)\Gamma(t-s)\right) ds + \mathcal{O}(h^{N+1}) \\ &\leqslant C'_N\, h^{N+1}\exp\left((4N+\delta_n)\Gamma t\right), \end{aligned}$$

uniformly for $t \geqslant 0$. Analogously, we prove the estimate for $t \leqslant 0$. This ends the proof of Theorem 3.2.1. ∎

3.4 General case

We now turn to the study of the general case where the principal symbol of the Hamiltonian H which generates the time evolution is no longer a scalar multiple of the identity in $M_m(\mathbb{C})$.

Let $H \in S_{sc}(g;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ be an hermitian matrix-valued semiclassical Hamiltonian satisfying **(A0)** and suppose that **(A1)** is fulfilled. We consider the time evolution of a bounded quantum observable $Q^w(x, hD_x; h)$ associated to a semiclassical observable $Q \in S_{sc}(1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ given by

$$Q(t) := U_H(-t)Q^w(x, hD_x; h)U_H(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

As already mentioned in section 3, the first step in the study of $Q(t)$ is the construction of the semiclassical projections associated to $H^w(x, hD_x; h)$.

3.4.1 *Semiclassical projections*

Let us start by proving the following lemma.

Lemma 3.4.1 *Fix $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$. Under the assumptions **(A1)** and **(A2)**, $P_{\nu,0} \in S(1)$ and for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, there exists $C, C_\gamma > 0$ such that for all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, we have*

$$|\lambda_\nu(x,\xi)| \leqslant Cg(x,\xi) \tag{3.4.1}$$

$$\left|\partial^\gamma_{(x,\xi)}\lambda_\nu(x,\xi)\right| \leqslant C_\gamma, \quad \forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n};\ |\gamma| \geqslant 1, \tag{3.4.2}$$

In particular, $\lambda_\nu \in S(g) = S(g;\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$.

Proof. Fix $\nu \in \{1, ..., \ell\}$. Let $\varepsilon(x,\xi) > 0$ be such that

$$0 < \frac{\rho}{2}g(x,\xi) \leqslant \varepsilon(x,\xi) \leqslant \frac{1}{2}\min_{1\leqslant\mu\neq\nu\leqslant\ell}|\lambda_\mu(x,\xi)-\lambda_\nu(x,\xi)|. \tag{3.4.3}$$

We consider the simple closed contour in the complex plane

$$\Upsilon_\nu(x,\xi) := \left\{z \in \mathbb{C};\ |z-\lambda_\nu(x,\xi)| = \varepsilon(x,\xi)\right\}. \tag{3.4.4}$$

Put

$$P_{\nu,0}(x,\xi) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} (H_0(x,\xi)-z)^{-1}dz.$$

By the Cauchy theorem, we see that a small variation of the contour $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ does not change $P_{\nu,0}(x,\xi)$. Let $z \in \Upsilon_\nu(x,\xi)$. According to (3.4.3), $(H_0(x,\xi)-z)^{-1}$ exists for all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ and since $H_0(x,\xi)$ is hermitian it follows that

$$\|(H_0(x,\xi)-z)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\operatorname{dist}\big(z,\sigma(H_0(x,\xi))\big)} \leqslant \frac{2}{\rho}g^{-1}(x,\xi), \tag{3.4.5}$$

where $\sigma(H_0(x,\xi)) := \{\lambda_1(x,\xi),\dots,\lambda_\ell(x,\xi)\}$. Due to the continuity of the map $(x,\xi) \mapsto H_0(x,\xi)$ and the gap condition (3.2.8), in a neighbourhood of a fixed point $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$, the contour $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ can be fixed and does not depends on (x,ξ). Then, we can differentiate $P_{\nu,0}$ with respect to (x,ξ) and get: for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$,

$$\partial^\gamma_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} \partial^\gamma_{(x,\xi)}\big((H_0(x,\xi)-z)^{-1}\big)dz. \tag{3.4.6}$$

Take $\varepsilon(x,\xi) = \frac{\rho}{2}g(x,\xi)$. Combining (3.4.4), (3.4.5) and the fact that $H_0 \in S(g)$, one sees that $P_{\nu,0} \in S(1)$. Moreover, since according to assumption **(A2)**, $\partial^\gamma_{(x,\xi)}H_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ for all $|\gamma| \geqslant 1$, the same arguments imply

$$\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi)\| \leqslant C_\gamma g^{-1}(x,\xi), \quad \forall |\gamma| \geqslant 1. \tag{3.4.7}$$

This property will be used later.

Turn now to the proof of (3.4.1) and (3.4.2). Estimate (3.4.1) is obvious since the eigenvalues are bounded by the matrix norm of H_0 (H_0 is hermitian). To prove (3.4.2), we need first to prove the following identity (which is true for any smooth projection-valued function): for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ with $|\gamma| = 1$, we have

$$P_{\nu,0}(x,\xi)\partial^\gamma_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi) = 0, \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{3.4.8}$$

For instance, take $\gamma = (1,0,\dots,0)$. By differentiating the equation $(P_{\nu,0}(x,\xi))^2 = P_{\nu,0}(x,\xi)$ with respect to x_1, we get

$$\partial_{x_1}P_{\nu,0}(x,\xi) = \partial_{x_1}P_{\nu,0}(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi) + P_{\nu,0}(x,\xi)\partial_{x_1}P_{\nu,0}(x,\xi),$$

which by multiplying from both sides by $P_{\nu,0}(x,\xi)$ yields

$$P_{\nu,0}(x,\xi)\partial_{x_1}P_{\nu,0}(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi) = 2\,P_{\nu,0}(x,\xi)\partial_{x_1}P_{\nu,0}(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi).$$

Thus $P_{\nu,0}\partial_{x_1}P_{\nu,0}P_{\nu,0} = 0$. The same proof works for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ with $|\gamma| = 1$ and hence we get (3.4.8). Turn now to the proof of (3.4.2). We proceed by induction with respect to $|\gamma|$. Let $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ with $|\gamma| = 1$. By differentiating the identity

$$H_0(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi) = \lambda_\nu(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi), \tag{3.4.9}$$

we obtain

$$\begin{aligned}\partial^\gamma_{(x,\xi)}\lambda_\nu(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi) = \partial^\gamma_{(x,\xi)}H_0(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi) + H_0(x,\xi)\partial^\gamma_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi)\\ - \lambda_\nu(x,\xi)\partial^\gamma_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi).\end{aligned}$$

Multiplying from both sides by $P_{\nu,0}$ and using (3.4.8), (3.4.9), we get

$$P_{\nu,0}(x,\xi)\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}\lambda_\nu(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi) = P_{\nu,0}(x,\xi)\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}H_0(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi). \tag{3.4.10}$$

Since $P_{\nu,0} \in S(1)$, it follows that

$$\begin{aligned}\left|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}\lambda_\nu(x,\xi)\right| &= C_0\left\|P_{\nu,0}(x,\xi)\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}\lambda_\nu(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi)\right\| \\ &= C_0\left\|P_{\nu,0}(x,\xi)\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}H_0(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi)\right\| \\ &\leqslant C_1\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}H_0(x,\xi)\| \\ &\leqslant C_2,\end{aligned}$$

for some constants $C_0, C_1, C_2 > 0$, where in the last step we used assumption **(A2)**. Thus we proved (3.4.2) for $|\gamma| = 1$. Let us now assume that (3.4.2) holds for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ with $|\gamma| < r$ and we shall prove it for $|\gamma| = r$. Without any loss of generality we assume that $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n, 0, ..., 0)$ with $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = r$. According to (3.4.10), we have

$$P_{\nu,0}(x,\xi)\partial_{x_n}\lambda_\nu(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi) = P_{\nu,0}(x,\xi)\partial_{x_n}H_0(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi). \tag{3.4.11}$$

Put $\eta = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n - 1, 0, ..., 0) = \gamma - (0, ..., 1, 0, ..., 0)$. By Leibniz formula, we have

$$\begin{aligned}&\partial^{\eta}_{(x,\xi)}\big(P_{\nu,0}(x,\xi)\partial_{x_n}\lambda_\nu(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi)\big) \\ &\quad= \sum_{\beta\leqslant\eta,\alpha\leqslant\beta}\binom{\eta}{\beta}\binom{\beta}{\alpha}\partial^{\beta-\alpha}_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi)\partial^{\alpha}_{(x,\xi)}\partial_{x_n}\lambda_\nu(x,\xi)\partial^{\eta-\beta}_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi).\end{aligned}$$

By extracting the term involving $\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}\lambda_\nu = \partial^{\eta}_{(x,\xi)}\partial_{x_n}\lambda_\nu$ and using (3.4.11), we get

$$\begin{aligned}P_{\nu,0}(x,\xi)\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}\lambda_\nu(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi) &= \partial^{\eta}_{(x,\xi)}\big(P_{\nu,0}(x,\xi)\partial_{x_n}H_0(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi)\big) \\ &- \sum_{\substack{\beta\leqslant\eta,\alpha\leqslant\beta \\ |\beta|<|\eta|=r-1}}\binom{\eta}{\beta}\binom{\beta}{\alpha}\partial^{\beta-\alpha}_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi)\partial^{\alpha}_{(x,\xi)}\partial_{x_n}\lambda_\nu(x,\xi)\partial^{\eta-\beta}_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi).\end{aligned}$$

The fact that $P_{\nu,0} \in S(1)$ and the assumption **(A2)** clearly implies that the first term in the right hand side of the above equation is bounded on $\mathbb{R}^{2n}$. On the other hand, the second term is also bounded by the induction hypothesis and the fact that $P_{\nu,0} \in S(1)$ again. Thus there exists $C_\gamma > 0$ such that

$$\left|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}\lambda_\nu(x,\xi)\right| \leqslant C_\gamma, \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

This ends the proof of the lemma. ∎

3.4.1.1 *Proof of Theorem 3.2.4*

Turn now to the construction of the semiclassical projections associated to the Hamiltonian $H^w(x, hD_x; h)$. As explained in Chapter 2, Theorem 3.2.4 can be proved by two different methods. The first one consists in solving the equations (3.2.10)-(3.2.13) recursively at the level of symbols in the space of formal powers series of h (see [95, 18, 47]). The second method is based on the use of Riesz projectors and the symbolic calculus of h-pseudodifferential operators (see [15, 63, 94]). In the following we give an outline of the proof of this result following the second approach. Firstly, we construct ℓ

h-pseudodifferential operators $\widetilde{P}^w_\nu(x, hD_x; h)$ satisfying the properties (3.2.10)-(3.2.13) modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ in norm $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m))$. Then we shall see that one can modify these operators in order to satisfy (3.2.10) exactly, i.e. not only modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$.

Theorem 3.4.2 *Let **(A1)** and **(A2)** be satisfied. For every $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$, there exists a semiclassical symbol*

$$\widetilde{P}_\nu(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j \widetilde{P}_{\nu,j}(x, \xi) \quad \text{in} \;\; S(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C})),$$

(unique modulo $S^{-\infty}(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$) such that the corresponding h-pseudodifferential operator $\widetilde{P}^w_\nu(x, hD_x; h)$ satisfies the properties (3.2.10)-(3.2.13) modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ in norm $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m))$. In particular, $\widetilde{P}_{\nu,0}(x, \xi) = P_{\nu,0}(x, \xi)$ is the orthogonal projector onto $\ker\big(H_0(x, \xi) - \lambda_\nu(x, \xi)\big)$.

Proof. Fix $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$ and let $\Upsilon_\nu(x, \xi)$ be the contour defined in (3.4.4). According to (3.4.5), for all $z \in \Upsilon_\nu(x, \xi)$, $(H_0(x, \xi) - z)$ is elliptic, i.e., $(H_0(x, \xi) - z)^{-1} \in S(g^{-1})$. By the composition formula (A.0.2), we have

$$\begin{aligned}
(H(x, \xi; h) &- z)\#(H_0(x, \xi) - z)^{-1} \\
&= (H_0(x, \xi) - z)\#(H_0(x, \xi) - z)^{-1} + h\, H_1(x, \xi)\#(H_0(x, \xi) - z)^{-1} \\
&= I_m - hr(x, \xi, z; h),
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

with $r \in S(1)$, uniformly for $z \in \Upsilon_\nu(x, \xi)$. Consequently, using the symbolic calculus of h-pseudodifferential operators, we can construct (see [41, ch. 8]) a parametrix $B \in S(g^{-1})$ such that uniformly for $z \in \Upsilon_\nu(x, \xi)$,

$$B(x, \xi, z; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j B_j(x, \xi, z) \quad \text{in} \;\; S(g^{-1}), \tag{3.4.13}$$

and we have

$$B(x, \xi, z; h)\#(H(x, \xi; h) - z) \sim (H(x, \xi; h) - z)\#B(x, \xi, z; h) \sim I_m \quad \text{in} \;\; S(1). \tag{3.4.14}$$

For all $j \geqslant 0$, the symbol $B_j(x, \xi, z)$ is given by (see equation (8.11) in [41])

$$B_j(x, \xi, z) = (H_0(x, \xi) - z)^{-1} \#^j r(x, \xi, z; h) := (H_0(x, \xi) - z)^{-1} \# r \# r \# \cdots \# r, \tag{3.4.15}$$

with # repeated j-times. In particular $B_0(x, \xi, z) = (z - H_0(x, \xi))^{-1}$.

Formula (3.4.14) implies that for $z, \tilde{z} \in \Upsilon_\nu(x, \xi)$,

$$(H(x, \xi; h) - z)\#\Big[B(x, \xi, z; h) - B(x, \xi, \tilde{z}; h)\Big]\#(H(x, \xi; h) - \tilde{z}) \sim (z - \tilde{z})I_m,$$

$$(H(x, \xi; h) - z)\#B(x, \xi, z; h)\#B(x, \xi, \tilde{z}; h)\#(H(x, \xi; h) - \tilde{z}) \sim I_m,$$

which yields

$$B(x, \xi, z; h) - B(x, \xi, \tilde{z}; h) \sim (z - \tilde{z})B(x, \xi, z; h)\#B(x, \xi, \tilde{z}; h). \tag{3.4.16}$$

Put

$$\widetilde{P}_\nu(x, \xi; h) := \frac{i}{2\pi} \int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} B(x, \xi, z; h)dz \sim \frac{i}{2\pi} \sum_{j \geqslant 0} h^j \int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} B_j(x, \xi, z)dz. \tag{3.4.17}$$

By construction of $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ and $B(x,\xi,z;h)$, we easily see that $\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h) \in S(1)$.

Let us start by proving

$$\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)\#\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h) \sim \widetilde{P}_\nu(x,\xi;h) \sim \big(\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)\big)^* \quad \text{in } S(1). \tag{3.4.18}$$

As we already pointed out in the proof of Lemma 3.4.1, by the Cauchy theorem, a small variation of the contour $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ does not change $\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)$. Then, $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ can be reduced to a slightly smaller contour $\widetilde{\Upsilon}_\nu(x,\xi)$ (included in $\Upsilon_\nu(x,\xi)$) without changing the left hand side of (3.4.17). One can for instance choose

$$\widetilde{\Upsilon}_\nu(x,\xi) := \big\{z \in \mathbb{C};\ |z-\lambda_\nu(x,\xi)| = \kappa(x,\xi)\varepsilon(x,\xi)\big\}$$

with $1-\eta(x,\xi) < \kappa(x,\xi) < 1$, for all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ where $0 < \eta(x,\xi) < \eta_0$, uniformly on $\mathbb{R}^{2n}$ with $\eta_0 > 0$ small enough. Clearly, (3.4.16) remains true for $z \in \Upsilon_\nu(x,\xi)$ and $\tilde{z} \in \widetilde{\Upsilon}_\nu(x,\xi)$ and we get

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)\#\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)\\
&\qquad = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} \int_{\widetilde{\Upsilon}_\nu(x,\xi)} B(x,\xi,z;h)\#B(x,\xi,\tilde{z};h)\,dz\,d\tilde{z}\\
&\qquad \sim \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} \int_{\widetilde{\Upsilon}_\nu(x,\xi)} \left(\frac{1}{z-\tilde{z}}B(x,\xi,z;h) + \frac{1}{\tilde{z}-z}B(x,\xi,\tilde{z};h)\right) dz\,d\tilde{z}\\
&\qquad =: I_1 + I_2,
\end{aligned} \tag{3.4.19}$$

where

$$I_1 := \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} \left(\int_{\widetilde{\Upsilon}_\nu(x,\xi)} \frac{1}{z-\tilde{z}}d\tilde{z}\right) B(x,\xi,z;h)\,dz = 0,$$

$$I_2 := \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\widetilde{\Upsilon}_\nu(x,\xi)} \left(\int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} \frac{1}{\tilde{z}-z}dz\right) B(x,\xi,\tilde{z};h)\,d\tilde{z} = \frac{i}{2\pi}\int_{\widetilde{\Upsilon}_\nu(x,\xi)} B(x,\xi,\tilde{z};h)\,d\tilde{z}.$$

This implies (3.4.18). The fact that $\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h) \sim \big(\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)\big)^*$ follows from the fact that $\big(B(x,\xi,z;h)\big)^* \sim B(x,\xi,\bar{z};h)$ (which is a consequence of (3.4.14) since H is hermitian) and the fact that $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ is symmetric with respect to the real axis. Let us now prove that $H(x,\xi;h)$ commutes (in the Moyal sense) with $\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)$, i.e.,

$$[H,\widetilde{P}_\nu]_\# := H\#\widetilde{P}_\nu - \widetilde{P}_\nu\#H \sim 0 \quad \text{in } S(1). \tag{3.4.20}$$

From (3.4.17), we have uniformly for $z \in \Upsilon_\nu(x,\xi)$,

$$\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)\#B(x,\xi,z;h) \sim B(x,\xi,z;h)\#\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h) \quad \text{in } S(g^{-1}).$$

Then, by conjugating from both sides by $(H(x,\xi;h)-z)$ and using (3.4.14), we get

$$(H(x,\xi;h)-z)\#\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h) \sim \widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)\#(H(x,\xi;h)-z) \quad \text{in } S(1),$$

which clearly implies (3.4.20).

Turn now to the proof of

$$\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)\#\widetilde{P}_\mu(x,\xi;h) \sim 0, \quad \text{in } S(1) \quad \forall 1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell. \tag{3.4.21}$$

This follows by a computation similar to (3.4.19). In fact, let $1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell$ and consider two simple closed contours in the complex plan $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ and $\Upsilon_\mu(x,\xi)$ such that $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ encloses the, and only the, eigenvalue $\lambda_\nu(x,\xi)$, $\Upsilon_\mu(x,\xi)$ encloses the, and only the, eigenvalue $\lambda_\mu(x,\xi)$ and

$$\operatorname{dist}(\Upsilon_\nu(x,\xi),\Upsilon_\mu(x,\xi)) \geqslant c > 0,$$

uniformly for $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. By repeating the same computation as in (3.4.19) with $\Upsilon_\mu(x,\xi)$ instead of $\widetilde{\Upsilon}_\nu(x,\xi)$, we get

$$\begin{aligned}
&\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)\#\widetilde{P}_\mu(x,\xi;h)\\
&\qquad = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)}\int_{\Upsilon_\mu(x,\xi)} B(x,\xi,z;h)\#B(x,\xi,\tilde{z};h)dzd\tilde{z}\\
&\qquad \sim \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)}\int_{\Upsilon_\mu(x,\xi)} \left(\frac{1}{z-\tilde{z}}B(x,\xi,z;h) + \frac{1}{\tilde{z}-z}B(x,\xi,\tilde{z};h)\right)dzd\tilde{z}\\
&\qquad =: J_1 + J_2,
\end{aligned}$$

where

$$J_1 := \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)}\left(\int_{\Upsilon_\mu(x,\xi)} \frac{1}{z-\tilde{z}}d\tilde{z}\right)B(x,\xi,z;h)dz = 0,$$

and

$$J_2 := \left(\frac{i}{2\pi}\right)^2 \int_{\Upsilon_\mu(x,\xi)}\left(\int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} \frac{1}{\tilde{z}-z}dz\right)B(x,\xi,\tilde{z};h)d\tilde{z} = 0.$$

Thus we get (3.4.21).

It remains now to prove that

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} \widetilde{P}_\nu(x,\xi;h) \sim I_m \quad \text{in } S(1). \tag{3.4.22}$$

We have

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} \widetilde{P}_\nu(x,\xi;h) = \sum_{\nu=1}^{\ell} \frac{i}{2\pi}\int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} B(x,\xi,z;h)dz = \frac{i}{2\pi}\int_{\cup_{\nu=1}^{\ell}\Upsilon_\nu(x,\xi)} B(x,\xi,z;h)dz. \tag{3.4.23}$$

According to (3.4.14), (3.4.15), we have in the sense of semiclassical asymptotic expansion in $S(g^{-1})$

$$B(x,\xi,z;h) = (H_0(x,\xi)-z)^{-1} + h(H_0(x,\xi)-z)^{-1}\#r + h^2(H_0(x,\xi)-z)^{-1}\#r\#r + \cdots$$

Since

$$\begin{aligned}
r(x,\xi,z;h) &= \frac{1}{h}\left(I_m - (H(x,\xi;h)-z)\#(H_0(x,\xi)-z)^{-1}\right)\\
&= \frac{1}{h}(I_m - (H_0(x,\xi)-z)\#(H_0(x,\xi)-z)^{-1}) - H_1(x,\xi)\#(H_0(x,\xi)-z)^{-1},
\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

it follows from the composition formula (A.0.2) (see also the proof of Lemma 3.4.4), that the only singularities of $B(x,\xi,z;h)$ are caused by the eigenvalues of $H_0(x,\xi)$. Therefore, by the Cauchy theorem, one can replace the contour $\cup_{\nu=1}^{\ell}\Upsilon_\nu(x,\xi)$ in (3.4.23) by a large circle $\Upsilon(0,R)$ centered at the origin with radius $R>0$ sufficiently large in order to enclose all the eigenvalues of $H_0(x,\xi)$. Then,

$$\sum_{\nu=1}^{\ell}\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)=\frac{i}{2\pi}\int_{\Upsilon(0,R)}B(x,\xi,z;h)dz\sim\sum_{j\geqslant 0}h^j\frac{i}{2\pi}\int_{\Upsilon(0,R)}B_j(x,\xi,z)dz.$$

The value of the above integral does not depend on the particular choice of $\Upsilon(0,R)$ so that one can take the limit $R\to+\infty$ and get

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{\ell}\widetilde{P}_\nu(x,\xi;h)&\sim\lim_{R\to+\infty}\frac{i}{2\pi}\int_{\Upsilon(0,R)}(H_0(x,\xi)-z)^{-1}dz+\lim_{R\to+\infty}\sum_{j\geqslant 1}h^j\frac{i}{2\pi}\int_{\Upsilon(0,R)}B_j(x,\xi,z)dz\\&=I_m.\end{aligned}$$

This ends the proof of Theorem 3.4.2. ∎

Remark 3.4.3 (Quantization) *After quantization of the relations* (3.4.18), (3.4.20), (3.4.21) *and* (3.4.21), *the Calderón-Vaillancourt theorem (see Theorem* 1.3*) ensures that* $\widetilde{P}_\nu^w(x,hD_x;h)$ *satisfies the properties* (3.2.10)-(3.2.13) *modulo* $\mathcal{O}(h^\infty)$ *in* $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$.

Exact projections

For our next purposes, it is more convenient to work with exact projections, i.e. with operators which satisfy (3.2.10) exactly, not only modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ in norm $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$. To do this, we follow an idea from [93] (see also [92, 94, 95]) which consists in introducing the operators

$$\mathscr{P}_\nu:=\frac{i}{2\pi}\int_{|z-1|=\frac{1}{2}}(\widetilde{P}_\nu^w-z)^{-1}dz,\quad 1\leqslant\nu\leqslant\ell.$$

For h small enough, the fact that $\|(\widetilde{P}_\nu^w)^2-\widetilde{P}_\nu^w\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}=\mathcal{O}(h^\infty)$ implies that the spectrum of $\widetilde{P}_\nu^w$ is concentrated near 0 and 1 (see [93]), then $\mathscr{P}_\nu$ is well defined and satisfies

$$\mathscr{P}_\nu\mathscr{P}_\nu=\mathscr{P}_\nu=\mathscr{P}_\nu^*. \tag{3.4.25}$$

By a similar computation as in [93, sec. III], one gets

$$\|\mathscr{P}_\nu-\widetilde{P}_\nu^w\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}=\mathcal{O}(h^\infty). \tag{3.4.26}$$

Then, by Beals's characterization of h-pseudodifferential operators (Theorem 1.7), $\mathscr{P}_\nu$ is an h-pseudodifferential operator with symbol

$$P_\nu(x,\xi;h)\sim\sum_{j\geqslant 0}h^jP_{\nu,j}(x,\xi)\quad\text{in }\ S(1;\mathbb{R}^{2n},M_m(\mathbb{C})),$$

i.e. $\mathscr{P}_\nu = P_\nu^w(x, hD_x; h)$. Moreover, we have

$$\begin{aligned}
[H^w, \mathscr{P}_\nu] &= \frac{i}{2\pi}\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} [H^w, (\widetilde{P}_\nu^w - z)^{-1}]dz \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} (\widetilde{P}_\nu^w - z)^{-1}[H^w, \widetilde{P}_\nu^w](\widetilde{P}_\nu^w - z)^{-1}dz
\end{aligned}$$

which since $\|[\widetilde{P}_\nu^w, H^w]\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}(h^\infty)$ according to Theorem 3.4.2 implies

$$\|[\mathscr{P}_\nu, H^w]\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}\left(\|[\widetilde{P}_\nu^w, H^w]\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}\right) = \mathcal{O}(h^\infty). \tag{3.4.27}$$

Summing up, the operators $(\mathscr{P}_\nu)_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}$ satisfy the properties (3.2.10)-(3.2.13) of Theorem 3.2.4 with (3.2.10) holds exactly. In what follows we shall use the notation P_ν^w for $\mathscr{P}_\nu$.

Estimates on the symbols $(P_{\nu,j})_{j\geqslant 0}$

For now the constructed symbols $P_{\nu,j}$ belongs to the class $S(1)$, for all $j \geqslant 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$. In the following lemma, we give more accurate estimates on their derivatives which we shall need in our proofs. Recall that

$$P_{\nu,j}(x,\xi) = \frac{i}{2\pi}\int_{\Upsilon_\nu(x,\xi)} B_j(x,\xi,z)dz, \quad j \geqslant 0,$$

where B_j is given by (3.4.13).

Lemma 3.4.4 *Under assumptions **(A1)** and **(A2)**, we have*

$$P_{\nu,j} \in S(g^{-j}), \quad \forall j \geqslant 0. \tag{3.4.28}$$

Proof. For all $j \geqslant 0$, according to (3.4.15), we have

$$B_j(x,\xi,z) = (H_0(x,\xi) - z)^{-1}\#^j r := (H_0(x,\xi) - z)^{-1}\#r\#r\cdots\#r,$$

where we recall that

$$\begin{aligned}
r(x,\xi,z;h) &= \frac{1}{h}\left(I_m - (H(x,\xi;h) - z)\#(H_0(x,\xi) - z)^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{h}(I_m - (H_0(x,\xi) - z)\#(H_0(x,\xi) - z)^{-1}) - H_1(x,\xi)\#(H_0(x,\xi) - z)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.4.29}$$

Since $(H_0(x,\xi) - z)^{-1} \in S(g^{-1})$ uniformly for $z \in \Upsilon_\nu(x,\xi)$ according to (3.4.5), it follows from assumption **(A2)** and the composition formula (A.0.2) that $r \in S(g^{-1})$. Indeed, the fact that $H_1 \in S(1)$ by assumption **(A2)** implies

$$H_1(x,\xi)\#(H_0(x,\xi) - z)^{-1} \in S(g^{-1}).$$

On the other hand, by the composition formula (A.0.2), we have

$$(H_0(x,\xi) - z)\#(H_0(x,\xi) - z)^{-1} = I_m + hc_1(x,\xi,z) + \cdots + h^jc_j(x,\xi,z) + \cdots$$

where for $j \geqslant 1$,

$$c_j(x,\xi,z) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{(-1)^{|\beta|}}{(2i)^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!\beta!}\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (H_0(x,\xi)-z)\partial_\xi^\beta\partial_x^\alpha\big((H_0(x,\xi)-z)^{-1}\big).$$

In particular,

$$c_1(x,\xi,z) = \frac{1}{2i}\big\{(H_0(x,\xi)-z),(H_0(x,\xi)-z)^{-1}\big\}.$$

Using the fact that $(H_0(x,\xi)-z)^{-1} \in S(g^{-1})$ and the assumption **(A2)**, we see that $c_j \in S(g^{-(j+1)})$, for all $j \geqslant 1$. It follows that the first term in the left hand side of (3.4.29) belongs to $S(g^{-2})$. Consequently, $r \in S(g^{-1})$. Thus, for all $j \geqslant 0$,

$$B_j(x,\xi,z) = (H_0(x,\xi)-z)^{-1}\#^j r \in S(g^{-(j+1)}),$$

and by taking the radius $\varepsilon(x,\xi)$ of the contour $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ equal to $\frac{\rho}{2}g(x,\xi)$, we deduce that $P_{\nu,j} \in S(g^{-j})$, for all $j \geqslant 0$. ∎

Remark 3.4.5 *We end this section by the following remark where we explain that under assumption **(A2)** on the derivatives of H_0 and H_1, the gap condition (3.2.8) can be weaken in order to construct the semiclassical projections P_ν. Let assumption **(A2)** be satisfied and suppose that*

$$\min_{1\leqslant\mu\neq\nu\leqslant\ell} |\lambda_\mu(x,\xi)-\lambda_\nu(x,\xi)| \geqslant \rho \tag{3.4.30}$$

where $\rho > 0$ is independent of $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. We consider the contour $\Upsilon_\nu(x,\xi)$ defined by (3.4.4) where now $\varepsilon(x,\xi) > 0$ satisfies

$$0 < \frac{\rho}{2} \leqslant \varepsilon(x,\xi) \leqslant \frac{1}{2}\min_{1\leqslant\mu\neq\nu\leqslant\ell}|\lambda_\nu(x,\xi)-\lambda_\mu(x,\xi)|.$$

Due to this condition, for $z \in \Upsilon_\nu(x,\xi)$, $(H_0(x,\xi)-z)$ is invertible and we have

$$\|(H_0(x,\xi)-z)^{-1}\| \leqslant \frac{2}{\rho}.$$

*It follows from assumption **(A2)**, that $(H_0(x,\xi)-z)^{-1} \in S(1)$. Then, using the fact that $H_1 \in S(1)$ according to **(A2)** again and the composition formula (A.0.2), we get*

$$\begin{aligned}(H(x,\xi;h)-z)\#(H_0(x,\xi)-z)^{-1} &= (H_0(x,\xi)-z)\#(H_0(x,\xi)-z)^{-1} + \mathcal{O}(h)\\ &= I_m - hr(x,\xi,z;h),\end{aligned}$$

with $r \in S(1)$, uniformly for $z \in \Upsilon_\nu(x,\xi)$. As in the above proof, this allows us to construct a parametrix $B(x,\xi,z;h) \in S(1)$ for $(H(x,\xi;h)-z)$ and we define the almost projectors $\widetilde{P}_\nu$ by (3.4.17). However, in this case the symbols $\widetilde{P}_{\nu,j} \in S(1)$, for all $j \geqslant 0$, and we don't have (3.4.28) which we will use in the following.

3.4.2 *Block-diagonalization*

We introduce the family of Heisenberg operators $Q_\nu(t)$ defined by

$$Q_\nu(t) := e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} P_\nu^w Q^w P_\nu^w e^{-\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant \ell. \tag{3.4.31}$$

The main result of this paragraph is the following :

Proposition 3.4.6 *Assume that* H *satisfies the assumption of Theorem 3.2.4.*

(i) If $Q \in \mathscr{Q}(1)$*, then the following estimate holds*

$$\Big\|Q(t) - \sum_{\nu=1}^{\ell} Q_\nu(t)\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}\big((1+|t|)h^\infty\big), \tag{3.4.32}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Assume that $Q_0(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_{\nu,0}(x,\xi)\widetilde{Q}(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi)$ *for some* $\widetilde{Q} \in S(1)$*. Then, we have*

$$\Big\|Q(t) - \sum_{\nu=1}^{\ell} Q_\nu(t)\Big\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}\big((1+|t|)h\big), \tag{3.4.33}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$.

The following lemma is the first step in the proof of the above proposition.

Lemma 3.4.7 *For all* $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$*, we have*

$$e^{\frac{it}{h}H^w}P_\nu^w = e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}P_\nu^w + \mathcal{O}_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}(|t|h^\infty), \tag{3.4.34}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$.

Proof. Consider the evolution equations on $\mathrm{Dom}(H^w) = (H^w+i)^{-1}L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m) \subset L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} (hD_t - H^w)U(t) & = & 0 \\ U(0) & = & P_\nu^w \end{array}\right. \tag{3.4.35}$$

and

$$\left\{\begin{array}{rcl} (hD_t - H^w)V(t) & = & I(t) \\ V(0) & = & P_\nu^w, \end{array}\right. \tag{3.4.36}$$

with $\|I(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}(h^\infty)$, uniformly for $t \in \mathbb{R}$.

Fix $\nu \in \{1,\dots,\ell\}$. Obviously $U(t) := e^{\frac{it}{h}H^w}P_\nu^w$ satisfies (3.4.35). Let us prove that $V(t) := e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}P_\nu^w$ satisfies (3.4.36). Put

$$R(t) := V(t) - P_\nu^w e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}.$$

Using (3.4.25), we get

$$\begin{aligned} hD_t R(t) &= e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} P_\nu^w H^w (P_\nu^w)^2 - (P_\nu^w)^2 H^w P_\nu^w e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} \\ &= e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} P_\nu^w H^w P_\nu^w - P_\nu^w H^w P_\nu^w e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.4.37}$$

which together with $R(0) = 0$ yields

$$R(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.4.38}$$

Now, a simple computation gives

$$\begin{aligned} (hD_t - H^w)V(t) &= (P_\nu^w H^w P_\nu^w - H^w) e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} P_\nu^w \\ &= (P_\nu^w H^w P_\nu^w - H^w) P_\nu^w e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} + (P_\nu^w H^w P_\nu^w - H^w) R(t) \\ &= (P_\nu^w H^w P_\nu^w - H^w) P_\nu^w e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} \\ &=: I(t). \end{aligned}$$

According to (3.4.25), we have

$$I(t) = \left(P_\nu^w H^w (P_\nu^w)^2 - H^w P_\nu^w\right) e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} = \left(P_\nu^w H^w P_\nu^w - H^w P_\nu^w\right) e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}. \tag{3.4.39}$$

From (3.4.27), we have $P_\nu^w H^w = H^w P_\nu^w + \mathcal{O}(h^\infty)$ (in $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m))$) which together with the fact that $\|P_\nu^w\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}(1)$ yields

$$P_\nu^w H^w P_\nu^w = H^w (P_\nu^w)^2 + \mathcal{O}(h^\infty) = H^w P_\nu^w + \mathcal{O}(h^\infty), \tag{3.4.40}$$

where in the last step, we used (3.4.25) again. Putting together (3.4.40) and (3.4.39), we obtain

$$\|I(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{3.4.41}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$. Now, according to Duhamel's principle, we have

$$V(t) - U(t) = \frac{1}{h}\int_0^t U(t-s)\mathcal{O}(h^\infty)ds,$$

which yields

$$U(t) - V(t) = \mathcal{O}_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}(|t|h^\infty), \tag{3.4.42}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$. This ends the proof of the lemma. ■

Remark 3.4.8 *By passing to adjoint operators in* (3.4.34), *we get*

$$P_\nu^w e^{-\frac{it}{h}H^w} = P_\nu^w e^{-\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} + \mathcal{O}_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}(|t|h^\infty), \tag{3.4.43}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$.

Turn now to the proof of Proposition 3.4.6.

Proof of Proposition 3.4.6 :
By conjugating $Q(t)$ with $\sum_{\nu=1}^{\ell} P_\nu^w(x, hD_x; h) = \mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)} + \mathcal{O}(h^\infty)$ and using lemma (3.4.7) and the above remark, we get

$$\begin{aligned} Q(t) &= \sum_{\mu,\nu=1}^{\ell} e^{\frac{it}{h}P_\mu^w H^w P_\mu^w} P_\mu^w Q^w P_\nu^w e^{-\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} + \mathcal{O}\big((1+|t|)h^\infty\big) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\ell} Q_\nu(t) + \sum_{\mu\neq\nu=1}^{\ell} e^{\frac{it}{h}P_\mu^w H^w P_\mu^w} P_\mu^w Q^w P_\nu^w e^{-\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} + \mathcal{O}\big((1+|t|)h^\infty\big), \end{aligned} \tag{3.4.44}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$.

Passing from symbols to operators, the assumption $Q \in \mathscr{Q}(1)$ implies

$$Q^w = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_\nu^w Q^w P_\nu^w + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Therefore, using that $P_\mu^w P_\nu^w = \mathcal{O}(h^\infty)$ for $\mu \neq \nu$ (which follows from (3.2.12) and (3.4.26)), we deduce

$$P_\mu^w Q^w P_\nu^w = \mathcal{O}(h^\infty), \quad \forall 1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell. \tag{3.4.45}$$

Consequently, the norm $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$ of the second term in the right hand side of (3.4.44) is equal to $\mathcal{O}(h^\infty)$ uniformly for $t \in \mathbb{R}$. Thus (3.4.32) holds.

Now, assume that

$$Q_0(x,\xi) = \sum_{\nu=1}^{\ell} P_{\nu,0}(x,\xi)\widetilde{Q}(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi)$$

for some arbitrary $\widetilde{Q} \in S(1)$. This implies that

$$[Q_0(x,\xi), P_{\nu,0}(x,\xi)] = 0, \quad \forall 1 \leqslant \nu \leqslant \ell, \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Combining this with the fact that Q^w and P_ν^w are bounded in $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$, we get

$$[Q^w, P_\nu^w] = \mathcal{O}(h), \quad \forall 1 \leqslant \nu \leqslant \ell,$$

which by using that $P_\mu^w P_\nu^w = \mathcal{O}(h^\infty)$ for $\mu \neq \nu$ again, implies $P_\nu^w Q^w P_\mu^w = \mathcal{O}(h)$, for all $1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell$. Thus (3.4.33) holds immediately from (3.4.44). ∎

Remark 3.4.9 *The assumption $Q \in \mathscr{Q}(1)$ allows us to neglect the contribution of the second term in the right hand side of (3.4.44). For $\mu \neq \nu$ and $t \neq 0$, the operator*

$$e^{\frac{it}{h}P_\mu^w H^w P_\mu^w} P_\mu^w Q^w P_\nu^w e^{-\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}$$

is a Fourier integral operator. Since we are interested in the semiclassical approximation for $Q(t)$ in terms of h-pseudodifferential operators, we have to neglect this contribution. In section 3.5, recalling a result from [15], we shall see that this assumption is necessary.

According to estimate (3.4.32), the study of $Q(t)$ is reduced modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$ to that of the blocks $Q_\nu(t)$ defined by (3.4.31). The main property of this reduction lies in the fact that it is preserved up to times of order $h^{-\infty}$ (i.e. of order h^{-k}, for all $k \in \mathbb{N}$) which in particular cover Ehrenfest type times. Thus, the problem of the construction of an asymptotic expansion in powers of h for $Q(t)$ is reduced to the construction of an asymptotic expansion for each block $Q_\nu(t)$. This will be the object of the following paragraph.

Remark 3.4.10 *Recall the expression of* $Q_\nu(t)$*:*

$$Q_\nu(t) := e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w} P_\nu^w Q^w P_\nu^w e^{-\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant \ell.$$

According to (3.4.25)*, we have* $\left(P_\nu^w\right)^j = P_\nu^w, \forall j \geqslant 1$*. This implies in particular that*

$$[P_\nu^w, P_\nu^w H^w P_\nu^w] = 0.$$

Then,

$$\left[P_\nu^w, e^{\frac{it}{h}P_\nu^w H^w P_\nu^w}\right] = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Consequently,

$$(P_\nu^w)^j Q_\nu(t) \left(P_\nu^w\right)^j = Q_\nu(t), \quad \forall j \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

In the following this property will play an important role in the construction of an asymptotic expansion in powers of h *for* $Q_\nu(t)$*.*

3.4.3 *Formal asymptotic expansion for* $Q_\nu(t)$

From now on ν will be fixed in $\{1, ..., \ell\}$. We introduce the following notations for the symbols of the operators $P_\nu^w H^w P_\nu^w$ and $P_\nu^w Q^w P_\nu^w$ respectively,

$$H_\nu := P_\nu \# H \# P_\nu \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j H_{\nu,j} \tag{3.4.46}$$

$$Q_\nu := P_\nu \# Q \# P_\nu \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j Q_{\nu,j}. \tag{3.4.47}$$

The starting point is the following Heisenberg problem

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} Q_\nu(t) &= \frac{i}{h}[H_\nu^w, Q_\nu(t)], \quad (t \in \mathbb{R}) \\ Q_\nu(t)_{|t=0} &= Q_\nu^w(x, hD_x; h), \end{cases} \tag{3.4.48}$$

which we rewrite at the level of symbols as

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} q_\nu(t) &= \{H_\nu, q_\nu(t)\}^*, \quad (t \in \mathbb{R}) \\ q_\nu(t)_{|t=0} &= Q_\nu. \end{cases} \tag{3.4.49}$$

As in section 3.3, considering $q_\nu(t)$ as a formal power series of h of the form $q_\nu(t) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j q_{\nu,j}(t)$ and then equaling equal powers of h in both sides of (3.4.49), we derive the following Cauchy problems

$$(\mathscr{C}_{\nu,j})\begin{cases} \dfrac{d}{dt}q_{\nu,j}(t) &= \{H_\nu, q_\nu(t)\}_j^* \\ q_{\nu,j}(t)_{|t=0} &= Q_{\nu,j}, \end{cases} \tag{3.4.50}$$

where we recall that $\{H_\nu, q_\nu(t)\}_j^* = i\big([H_\nu, q_\nu(t)]_\#\big)_{j+1}$ denotes the coefficient of h^j in the asymptotic expansion of the Moyal bracket $\{H_\nu, q_\nu(t)\}^*$.

Our objective consists in looking for a solution of (3.4.49) of the form

$$q_\nu(t) \sim P_\nu \# \sum_{k\geqslant 0} h^k \widetilde{q}_{\nu,k}(t)\# P_\nu. \tag{3.4.51}$$

More explicitly, using this general form of the solution, we shall derive recursive problems for the $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$. Once these problems are derived and solved, the solution $q_{\nu,j}(t)$ of $(\mathscr{C}_{\nu,j})$ can then be computed using the composition formula (A.0.2) from the general formula

$$q_{\nu,j}(t,x,\xi) = \Big(P_\nu \# \sum_{k\geqslant 0} h^k \widetilde{q}_{\nu,k}(t)\# P_\nu\Big)_j (x,\xi) = \Big(P_\nu \# \sum_{k=0}^{j} h^k \widetilde{q}_{\nu,k}(t)\# P_\nu\Big)_j (x,\xi), \quad \forall j\geqslant 0. \tag{3.4.52}$$

In particular, the principal symbol satisfies

$$q_{\nu,0}(t,x,\xi) = P_{\nu,0}(x,\xi)\widetilde{q}_{\nu,0}(t,x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi). \tag{3.4.53}$$

Let us start by fixing the initial conditions $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)_{|t=0}$.

Lemma 3.4.11 *There exists a sequence of symbols $(\widetilde{Q}_{\nu,k})_{k\geqslant 0}$ in $S(1)$ such that*

$$Q_\nu \sim P_\nu \# \sum_{k\geqslant 0} h^k \widetilde{Q}_{\nu,k}\# P_\nu$$

and

$$P_{\nu,0}\widetilde{Q}_{\nu,k}P_{\nu,0} = \widetilde{Q}_{\nu,k}, \quad \forall k\geqslant 0. \tag{3.4.54}$$

In particular, $\widetilde{Q}_{\nu,0} = Q_{\nu,0} = P_{\nu,0}Q_0P_{\nu,0}$.

Proof. Using the fact that $P_\nu\# P_\nu = P_\nu$ according to (3.4.25), we have

$$\begin{aligned} Q_\nu &= P_\nu\# Q\# P_\nu \\ &= P_\nu\# P_\nu \# Q\# P_\nu\# P_\nu \\ &\sim P_\nu\#(P_{\nu,0}Q_0P_{\nu,0})\# P_\nu + P_\nu\#\Big(\sum_{j\geqslant 1} h^j Q_{\nu,j}\Big)\# P_\nu. \end{aligned}$$

Put

$$\widetilde{Q}_{\nu,0} := P_{\nu,0}Q_0P_{\nu,0} = Q_{\nu,0} \quad \text{and} \quad R_{\nu,0} := P_\nu\#\Big(\sum_{j\geqslant 1} h^j Q_{\nu,j}\Big)\# P_\nu \sim \sum_{j\geqslant 1} h^j (R_{\nu,0})_j.$$

We have

$$\begin{aligned}
R_{\nu,0} &= P_\nu \# P_\nu \# R_{\nu,0} \# P_\nu \# P_\nu \\
&\sim h\, P_\nu \# P_\nu \# (R_{\nu,0})_1 \# P_\nu \# P_\nu + P_\nu \# \sum_{j \geqslant 2} h^j (R_{\nu,0})_j \# P_\nu \\
&\sim h\, P_\nu \# (P_{\nu,0} (R_{\nu,0})_1 P_{\nu,0}) \# P_\nu + R_{\nu,1}
\end{aligned}$$

where $R_{\nu,1} := P_\nu \# \sum_{j \geqslant 2} h^j \Big((P_\nu \# (R_{\nu,0})_1 \# P_\nu)_{j-1} + (R_{\nu,0})_j \Big) \# P_\nu$. We define

$$\widetilde{Q}_{\nu,1} := P_{\nu,0} (R_{\nu,0})_1 P_{\nu,0}.$$

One can iterate this procedure using at each step the fact that $R_{\nu,j} = P_\nu \# P_\nu \# R_{\nu,j} \# P_\nu \# P_\nu$ to construct the symbols $\widetilde{Q}_{\nu,k}$ satisfying the property (3.4.54). The constructed symbols $\widetilde{Q}_{\nu,k}$ are clearly in $S(1)$ since $P_\nu, Q \in S_{sc}(1)$. ■

In view of (3.4.51) and the above lemma, it is thus natural to impose the following initial conditions for the $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$

$$\widetilde{q}_{\nu,j}(t)_{|t=0} = \widetilde{Q}_{\nu,j}, \quad \forall j \geqslant 0. \tag{3.4.55}$$

Now, to derive the equations on the $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$ arising from the Cauchy problems $(\mathscr{C}_{\nu,j})_{j \geqslant 0}$, we express $q_{\nu,j}(t)$ and $\{H_\nu, q_\nu(t)\}_j^*$ with respect to $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$. For $j \geqslant 0$, we define

$$A_{\nu,j-1}(t) := P_\nu \# \sum_{k=0}^{j-1} h^k \widetilde{q}_{\nu,k}(t) \# P_\nu \tag{3.4.56}$$

with the convention $A_{\nu,-1}(t) = 0$. From (3.4.51), we clearly have

$$q_{\nu,j}(t) = P_{\nu,0} \widetilde{q}_{\nu,j}(t) P_{\nu,0} + \big(A_{\nu,j-1}(t)\big)_j, \tag{3.4.57}$$

where $\big(A_{\nu,j-1}(t)\big)_j$ denotes the coefficient of h^j in the asymptotic expansion of $A_{\nu,j-1}(t)$. On the other hand, we have

$$\begin{aligned}
\big([H_\nu, q_\nu(t)]_\#\big)_{j+1} &= [H_{\nu,0}, P_{\nu,0} \widetilde{q}_{\nu,j+1}(t) P_{\nu,0}] + \big([H_\nu, P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,j}(t) \# P_\nu]_\#\big)_1 \\
&\quad + \big([H_\nu, A_{\nu,j-1}(t)]_\#\big)_{j+1}
\end{aligned} \tag{3.4.58}$$

The first term in the right hand side of the above equation vanishes since $H_{\nu,0} = \lambda_\nu P_{\nu,0}$. Then, putting together (3.4.57) and (3.4.58), we deduce the equation on the symbol $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$ arising from $(\mathscr{C}_{\nu,j})$ which reads

$$\frac{d}{dt} P_{\nu,0} \widetilde{q}_{\nu,j}(t) P_{\nu,0} = i \big([H_\nu, P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,j}(t) \# P_\nu]_\#\big)_1 + K_{\nu,j-1}(t), \tag{3.4.59}$$

where

$$K_{\nu,j-1}(t) := i \big([H_\nu, A_{\nu,j-1}(t)]_\#\big)_{j+1} - \frac{d}{dt} \big(A_{\nu,j-1}(t)\big)_j. \tag{3.4.60}$$

Taking into account the initial conditions (3.4.55), we get the following Cauchy problems for $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0} &= i\big([H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\big)_1 + K_{\nu,j-1}(t) \\ \widetilde{q}_{\nu,j}(t)_{|t=0} &= \widetilde{Q}_{\nu,j}. \end{cases} \tag{3.4.61}$$

Notice that $K_{\nu,j-1}(t)$ depends only on the symbols $\widetilde{q}_{\nu,k}(t)$ with $0 \leqslant k \leqslant j-1$. $(K_{\nu,-1}(t) = 0)$.

Proposition 3.4.12 *Let $j \in \mathbb{N}$. The Cauchy problem (3.4.61) is equivalent to the following one*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0} &= \{\lambda_\nu, P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}\} + i[\widetilde{H}_{\nu,1}, P_{\nu,0}\tilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}] + K_{\nu,j-1}(t) \\ \widetilde{q}_{\nu,j}(t)_{|t=0} &= \widetilde{Q}_{\nu,j}, \end{cases} \tag{3.4.62}$$

where $\widetilde{H}_{\nu,1}$ is the $m \times m$ hermitian-valued function defined by

$$\widetilde{H}_{\nu,1} := \frac{\lambda_\nu}{2i}P_{\nu,0}\{P_{\nu,0}, P_{\nu,0}\}P_{\nu,0} - i\big[P_{\nu,0}, \{\lambda_\nu, P_{\nu,0}\}\big] + P_{\nu,0}H_{\nu,1}P_{\nu,0}. \tag{3.4.63}$$

To prove this proposition, we recall the following result from the appendix of [114].

Lemma 3.4.13 *Let $W : \mathbb{R}^{2n} \to M_m(\mathbb{C})$ be such that $[W, P_{\nu,0}] = 0$. We have*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_{\nu,0}\big(\{\lambda_\nu P_{\nu,0}, W\} - \{W, \lambda_\nu P_{\nu,0}\}\big)P_{\nu,0} &= \big\{\lambda_\nu, P_{\nu,0}WP_{\nu,0}\big\} \\ &- \Big[P_{\nu,0}WP_{\nu,0}, \frac{\lambda_\nu}{2}P_{\nu,0}\{P_{\nu,0}, P_{\nu,0}\}P_{\nu,0} + \big[P_{\nu,0}, \{\lambda_\nu, P_{\nu,0}\}\big]\Big]. \end{aligned}$$

Proof of Proposition 3.4.12 :

Let us start by computing $\big([H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\big)_1$. We have

$$P_{\nu,0}\big([H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\big)_1 P_{\nu,0} = \big([H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\big)_1. \tag{3.4.64}$$

Indeed, the fact that $P_\nu\#H_\nu = H_\nu\#P_\nu = H_\nu$ (according to (3.4.25)) implies

$$P_\nu\#[H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\#P_\nu = [H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#. \tag{3.4.65}$$

Consequently, the sub-principal symbols of the two terms in the above equation coincide. Since

$$\big([H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\big)_0 = [H_{\nu,0}, P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}] = 0,$$

it follows that the sub-principal symbol of the left hand side of (3.4.65) is equal to

$$P_{\nu,0}\big([H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\big)_1 P_{\nu,0}.$$

Thus we get (3.4.64). Using this property and formulas (A.0.5) and (A.0.7), we obtain

$$\begin{aligned} \big([H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\big)_1 &= P_{\nu,0}\big([H_\nu, P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\big)_1 P_{\nu,0} \\ &= \frac{1}{2i}P_{\nu,0}\Big(\{H_{\nu,0}, P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}\} - \{P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}, H_{\nu,0}\}\Big)P_{\nu,0} \\ &+ P_{\nu,0}\Big(\big[H_{\nu,0}, \big(P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu\big)_1\big] + \big[H_{\nu,1}, P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}\big]\Big)P_{\nu,0} \\ &= \frac{1}{2i}P_{\nu,0}\Big(\{H_{\nu,0}, P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}\} - \{P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}, H_{\nu,0}\}\Big)P_{\nu,0} \\ &+ \big[P_{\nu,0}H_{\nu,1}P_{\nu,0}, P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}\big], \end{aligned} \tag{3.4.66}$$

where in the last step we used the fact that $P_{\nu,0}\big[H_{\nu,0},\big(P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu\big)_1\big]P_{\nu,0}=0$. Indeed, using formula (A.0.7), we have (keeping in mind that $H_{\nu,0}=H_0P_{\nu,0}=\lambda_\nu P_{\nu,0}$)

$$\begin{aligned}&\big[H_{\nu,0},\big(P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu\big)_1\big]\\&=\frac{1}{2i}\lambda_\nu P_{\nu,0}\big(\{P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t),P_{\nu,0}\}+\{P_{\nu,0},\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\}\big)+\lambda_\nu P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,1}+\lambda_\nu P_{\nu,0}P_{\nu,1}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}\\&-\frac{1}{2i}\lambda_\nu\big(\{P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t),P_{\nu,0}\}+\{P_{\nu,0},\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\}\big)P_{\nu,0}-\lambda_\nu P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,1}P_{\nu,0}-\lambda_\nu P_{\nu,1}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}.\end{aligned}$$

Therefore, by conjugating from both sides by $P_{\nu,0}$ (using the fact that $P_{\nu,0}^2=P_{\nu,0}$), one sees that the right hand side vanishes and we get the desired equality.

Applying Lemma 3.4.13 with $W=P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}$, we get

$$i\big([H_\nu,P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,j}(t)\#P_\nu]_\#\big)_1=\{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}\}+i[\widetilde{H}_{\nu,1},P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}],$$

where $\widetilde{H}_{\nu,1}$ is defined by (3.4.63). This ends the proof of the proposition. ∎

The resolution of the Cauchy problems (3.4.62) will be made by induction on $j\geqslant 0$. Let us start with $j=0$. Since $K_{\nu,-1}(t)=0$, we have

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,0}(t)P_{\nu,0} &= \{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,0}(t)P_{\nu,0}\}+i[\widetilde{H}_{\nu,1},P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,0}(t)P_{\nu,0}]\\ \widetilde{q}_{\nu,0}(t)_{|t=0} &= \widetilde{Q}_{\nu,0}.\end{cases}$$

In Lemma B.0.2, taking into account the fact that $\widetilde{Q}_{\nu,0}=P_{\nu,0}\widetilde{Q}_{\nu,0}P_{\nu,0}$ (see (3.4.54)), we have shown that if $\widetilde{q}_{\nu,0}(t)$ is a solution of the following problem

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,0}(t) &= \{\lambda_\nu,\widetilde{q}_{\nu,0}(t)\}+i[\widetilde{H}_{\nu,1},\widetilde{q}_{\nu,0}(t)]\\ \widetilde{q}_{\nu,0}(t)_{|t=0} &= \widetilde{Q}_{\nu,0},\end{cases}\tag{3.4.67}$$

then at any time t,

$$\widetilde{q}_{\nu,0}(t)=P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,0}(t)P_{\nu,0}.\tag{3.4.68}$$

Applying the result of Appendix B with $\Lambda=\lambda_\nu$ and $A=\widetilde{H}_{\nu,1}$, we obtain the solution of (3.4.67) which reads

$$\widetilde{q}_{\nu,0}(t,x,\xi)=T_\nu^{-1}(t,x,\xi)Q_{\nu,0}\big(\phi_\nu^t(x,\xi)\big)T_\nu(t,x,\xi),\tag{3.4.69}$$

where T_ν in the unitary $(m\times m)$ matrix-valued function solution of the system

$$\frac{d}{dt}T_\nu(t,x,\xi)=-i\widetilde{H}_{\nu,1}\big(\phi_\nu^t(x,\xi)\big)T_\nu(t,x,\xi),\quad T_\nu(0,x,\xi)=I_m.\tag{3.4.70}$$

We recall that $\widetilde{Q}_{\nu,0}=Q_{\nu,0}$ (see Lemma 3.4.11).

Let us now assume that we have solved (3.4.62) until the order $j-1$, i.e. we have constructed the symbols $\widetilde{q}_{\nu,k}(t)$ for $k\in\{0,...,j-1\}$ and that they satisfy

$$\widetilde{q}_{\nu,k}(t)=P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,k}(t)P_{\nu,0},\quad \forall k\in\{0,...,j-1\}.$$

We are going to solve (3.4.62) at the order j and check that the solution $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$ satisfies

$$\widetilde{q}_{\nu,j}(t) = P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}.$$

To apply Lemma B.0.2, we have to prove that

$$P_{\nu,0}K_{\nu,j-1}(t)P_{\nu,0} = K_{\nu,j-1}(t). \tag{3.4.71}$$

Recall that $K_{\nu,j-1}(t)$ defined by (3.4.60) is the j-th term (i.e. the coefficient of h^j) of the symbol

$$E_{\nu,j-1}(t) := \frac{i}{h}[H_\nu, A_{\nu,j-1}(t)]_\# - \frac{d}{dt}A_{\nu,j-1}(t).$$

Definition 3.4.14 *In the following, we say that* $B \sim \sum_{k\geqslant 0} h^k B_k$ *belongs to* $S(h^j)$ *if* $B_k = 0$ *for all* $k < j$.

We claim that

$$E_{\nu,j-1}(t) \in S(h^j). \tag{3.4.72}$$

This will be proven below. Due to (3.4.56) and (3.4.46), we have

$$P_\nu \# E_{\nu,j-1}(t) \# P_\nu = E_{\nu,j-1}(t).$$

By equaling the j-th terms in both sides using (3.4.72) we get (3.4.71). Taking into account (3.4.54) and (3.4.71), according to Lemma B.0.2, if $\widetilde{q}_{\nu,j}(t)$ is a solution of the following problem

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,j}(t) &= \{\lambda_\nu, \widetilde{q}_{\nu,j}(t)\} + i[\widetilde{H}_{\nu,1}, \widetilde{q}_{\nu,j}(t)] + K_{\nu,j-1}(t) \\ \widetilde{q}_{\nu,j}(t)_{|t=0} &= \widetilde{Q}_{\nu,j}, \end{cases} \tag{3.4.73}$$

then

$$\widetilde{q}_{\nu,j}(t) = P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j}(t)P_{\nu,0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

To solve (3.4.73), we apply the result of Appendix B again with $\Lambda = \lambda_\nu$, $A = \widetilde{H}_{\nu,1}$ and $B(t) = K_{\nu,j-1}(t)$. The solution reads

$$\widetilde{q}_{\nu,j}(t,x,\xi) = T_\nu^{-1}(t,x,\xi)\Big(\widetilde{Q}_{\nu,j}(\phi_\nu^t(x,\xi)) + \int_0^t W_{\nu,j}(t,s,x,\xi)ds\Big)T_\nu(t,x,\xi), \tag{3.4.74}$$

with

$$W_{\nu,j}(t,s,x,\xi) := T_\nu^{-1}\big(-s, \phi_\nu^t(x,\xi)\big)K_{\nu,j-1}\big(s, \phi_\nu^{t-s}(x,\xi)\big)T_\nu\big(-s, \phi_\nu^t(x,\xi)\big),$$

where T_ν is given by the system (3.4.70).

It remains now to prove the claim (3.4.72) by induction on j. For $j = 1$, we have

$$\begin{aligned} \big(E_{\nu,0}(t)\big)_0 &= i\big([H_\nu, A_{\nu,0}(t)]_\#\big)_1 - \frac{d}{dt}\big(A_{\nu,0}(t)\big)_0 \\ &= i\big([H_\nu, P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,0}(t) \# P_\nu]_\#\big)_1 - \frac{d}{dt}P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,0}(t)P_{\nu,0} \\ &= 0, \end{aligned}$$

since it is the equation satisfied by $\widetilde{q}_{\nu,0}(t)$ (see (3.4.61)). Thus $E_{\nu,0}(t) \in S(h)$.

We assume that $E_{\nu,j-2}(t) \in S(h^{j-1})$ and let us prove (3.4.72). Using that

$$A_{\nu,j-1}(t) = A_{\nu,j-2}(t) + h^{j-1}\, P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,j-1}(t) \# P_\nu$$

we get

$$\begin{aligned}
E_{\nu,j-1}(t) &= E_{\nu,j-2}(t) - h^{j-1}\frac{d}{dt} P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,j-1}(t)\# P_\nu + i\, h^{j-2}\left[H_\nu, P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,j-1}(t) \# P_\nu\right]_\# \\
&= E_{\nu,j-2}(t) - h^{j-1}\frac{d}{dt} P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j-1}(t)P_{\nu,0} + S(h^j) \\
&+ i h^{j-1}\big(\left[H_\nu, P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,j-1}(t)\# P_\nu\right]_\#\big)_1 + S(h^j) \\
&= E_{\nu,j-2}(t) - h^{j-1}\left(\frac{d}{dt} P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j-1}(t)P_{\nu,0} - i\big(\left[H_\nu, P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,j-1}(t)\# P_\nu\right]_\#\big)_1\right) \\
&+ S(h^j).
\end{aligned} \tag{3.4.75}$$

Notice that to pass from the first to the second equality, we have used the fact that

$$\left[H_\nu, P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,j-1}(t)\# P_\nu\right]_\# \in S(h)$$

since as it was already point out in (3.4.58) its principal symbol vanishes.

On the other hand, combining the definition of $K_{\nu,j-2}(t)$ which is $K_{\nu,j-2}(t) = \big(E_{\nu,j-2}(t)\big)_{j-1}$ and the induction hypothesis $E_{\nu,j-2}(t) \in S(h^{j-1})$, we get

$$E_{\nu,j-2}(t) = h^{j-1}K_{\nu,j-2}(t) + S(h^j).$$

By going back to (3.4.75), we obtain

$$E_{\nu,j-1}(t) = h^{j-1}\left(K_{\nu,j-2}(t) - \frac{d}{dt}P_{\nu,0}\widetilde{q}_{\nu,j-1}(t)P_{\nu,0} + i\big(\left[H_\nu, P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,j-1}(t)\# P_\nu\right]_\#\big)_1\right) + S(h^j).$$

The first term in the right hand side of the above equation vanishes since it is exactly the equation satisfied by $\widetilde{q}_{\nu,j-1}(t)$ (see (3.4.61)). Thus, we proved that $E_{\nu,j-1}(t) \in S(h^j)$. This ends the proof of the claim. ∎

Summing up, we hence have solved the Cauchy problems (3.4.61) for all $j \geqslant 0$. The solutions $(\widetilde{q}_{\nu,j}(t))_{j\geqslant 0}$ are given by formula (3.4.74). In particular, $\widetilde{q}_{\nu,0}(t)$ is given by (3.4.69). As already mentioned in the begining of this paragraph, the solutions $q_{\nu,j}(t)$ of the Cauchy problems $(\mathscr{C}_{\nu,j})_{j\geqslant 0}$ can then be computed using the composition formula (A.0.2) from the general formula (3.4.52). In particular, the principal symbol $q_{\nu,0}(t)$ is given by (3.4.53).

3.4.4 *Uniform estimates and proofs of Theorem 3.2.5 and Corollary 3.2.7*

This section is devoted to the proofs of Theorem 3.2.5 and Corollary 3.2.7. Since the techniques of the proofs are close to those used in the above section, we shall omit some details.

As in section 3.3, we start by estimating the derivatives of the constructed symbols $q_{\nu,j}(t)$, $j \geqslant 0$.

Proposition 3.4.15 *Assume* ***(A1)*** *and* ***(A2)*** *and let $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$. For all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, for all $j \geqslant 0$, there exists $C_{\gamma,\nu,j} > 0$ such that for all $t \in \mathbb{R}$ and all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, we have*

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} q_{\nu,0}(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_{\gamma,\nu,0}\exp\left(|\gamma|\Gamma_\nu|t|\right), \tag{3.4.76}$$

and for $j \geqslant 1$,

$$\left\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} q_{\nu,j}(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_{\gamma,\nu,j} \exp\left((2|\gamma|+4j-2)\Gamma_\nu |t|\right), \tag{3.4.77}$$

where Γ_ν *is defined by* (3.2.14).

Similarly to the proof of Proposition 3.3.2, the proof of the above proposition is based on the following lemmas which give estimates on the derivatives of the Hamiltonian flows ϕ^t_ν generated by the eigenvalues λ_ν and the matrix-valued function T_ν defined in (3.4.70).

From now on we fix $\nu \in \{1, ..., \ell\}$.

Lemma 3.4.16 *We assume that*

$$\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} H_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}), \quad \textit{for } |\gamma| \geqslant 2. \tag{3.4.78}$$

Then, for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}$, *there exists* $C_{\nu,\gamma} > 0$ *such that for all* $t \in \mathbb{R}$ *and all* $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} \phi^t_\nu(x,\xi)\| \leqslant C_{\nu,\gamma} \exp\left(|\gamma|\Gamma_\nu|t|\right). \tag{3.4.79}$$

Proof. According to inequaltiy (3.4.2), (3.4.78) implies that $\partial^{\gamma}_{(x,\xi)}\lambda_\nu \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, for $|\gamma| \geqslant 2$. Thus estimate (3.4.79) can be proved in the same manner as in Lemma 3.3.4 (see [17, Lemma 2.2]). ■

We turn now to the estimation of the derivatives of T_ν solution of the system (3.4.70).

Lemma 3.4.17 *Let assumptions* **(A1)** *and* **(A2)** *be satisfied. For all* $\gamma \in \mathbb{N}^{2n} \setminus \{0\}$ *there exists a constant* $C_{\nu,\gamma} > 0$ *(independent of* $t \in \mathbb{R}$ *and* $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$*) such that*

$$\|\partial^{\gamma}_{(x,\xi)} T_\nu(t,x,\xi)\| \leqslant C_{\nu,\gamma} \exp\left(|\gamma|\Gamma_\nu|t|\right). \tag{3.4.80}$$

Furthermore, the same estimate holds for $T^{-1}_\nu(t,x,\xi)$.

Proof. We recall the expression of the $m \times m$ hermitian-valued function $\widetilde{H}_{\nu,1}$ defined in (3.4.63)

$$\widetilde{H}_{\nu,1} = P_{\nu,0}H_{\nu,1}P_{\nu,0} - i[P_{\nu,0}, \{\lambda_\nu, P_{\nu,0}\}] - \frac{i}{2}\lambda_\nu P_{\nu,0}\{P_{\nu,0}, P_{\nu,0}\}P_{\nu,0} := I^{(1)}_\nu + I^{(2)}_\nu + I^{(3)}_\nu.$$

We claim that under assumptions **(A1)** and **(A2)**, we have $\widetilde{H}_{\nu,1} \in S(1)$. Then, estimate (3.4.80) can be proved by applying exactly the same method as in the proof of Lemma 3.3.5.

To prove the claim let us start by computing $H_{\nu,1}$. From (3.4.27), we have $H_{\nu,1} := (P_\nu \# H \# P_\nu)_1 = (P_\nu \# H)_1$. Then, using formula (A.0.3), we obtain

$$H_{\nu,1} = \frac{1}{2i}\{P_{\nu,0}, H_0\} + P_{\nu,0}H_1 + P_{\nu,1}H_0. \tag{3.4.81}$$

It follows that

$$I^{(1)}_\nu = \frac{1}{2i}P_{\nu,0}\{P_{\nu,0}, H_0\}P_{\nu,0} + P_{\nu,0}H_1P_{\nu,0} + \lambda_\nu P_{\nu,0}P_{\nu,1}P_{\nu,0}.$$

On the other hand, using formula (A.0.3), we get

$$\begin{aligned} P_{\nu,0}P_{\nu,1}P_{\nu,0} &= P_{\nu,0}(P_\nu \# P_\nu)_1 P_{\nu,0} \\ &= \frac{1}{2i}P_{\nu,0}\{P_{\nu,0}, P_{\nu,0}\}P_{\nu,0} + 2P_{\nu,0}P_{\nu,1}P_{\nu,0}, \end{aligned}$$

which yields

$$\lambda_\nu P_{\nu,0}P_{\nu,1}P_{\nu,0} = \frac{i}{2}\lambda_\nu P_{\nu,0}\{P_{\nu,0}, P_{\nu,0}\}P_{\nu,0} = -I_\nu^{(3)}.$$

Consequently,

$$\widetilde{H}_{\nu,1} = \frac{1}{2i}P_{\nu,0}\{P_{\nu,0}, H_0\}P_{\nu,0} + P_{\nu,0}H_1P_{\nu,0} - i\big[P_{\nu,0}, \{\lambda_\nu, P_{\nu,0}\}\big]. \tag{3.4.82}$$

Using assumption **(A2)** and Lemma 3.4.1, we clearly see that $\widetilde{H}_{\nu,1} \in S(1)$. This ends the proof of the lemma. ∎

Remark 3.4.18 *As in Lemma 3.3.7, combining (3.4.79) and (3.4.80) and using the Faá Di Bruno formula (3.3.12), we get the following estimate on the derivatives of $T_\nu\big(s, \phi_\nu^t(x,\xi)\big)$: for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, there exists $C_{\nu,\gamma} > 0$ such that*

$$\big\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}\big(T_\nu(s, \phi_\lambda^t(x,\xi))\big)\big\| \leqslant C_{\nu,\gamma}\exp\big(|\gamma|\Gamma_\nu(|t|+|s|)\big), \tag{3.4.83}$$

uniformly for $t, s \in \mathbb{R}$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. The same estimate remains valid for $T_\nu^{-1}(s, \phi_\lambda^t(x,\xi))$.

We end our series of Lemmas by the following one where we control the derivatives of the symbols $(H_{\nu,j})_{j\geqslant 0}$.

Lemma 3.4.19 *Under assumptions **(A1)** and **(A2)**, for all $j \geqslant 0$ and $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$ with $|\gamma| + j \geqslant 1$, we have*

$$\partial^\gamma_{(x,\xi)}H_{\nu,j} \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n}). \tag{3.4.84}$$

Proof. According to (3.4.7), we have

$$\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}P_{\nu,0}(x,\xi)\| \leqslant C_\gamma g^{-1}(x,\xi), \quad \forall\, |\gamma| \geqslant 1. \tag{3.4.85}$$

Thus, since $H_{\nu,0} = \lambda_\nu P_{\nu,0}$, then (3.4.84) for $j = 0$ follows immediately from (3.4.85) and inequality (3.4.2).

Now, for $j \geqslant 1$, from the composition formula (A.0.2) we have

$$\begin{aligned} H_{\nu,j} = (P_\nu \# H)_j &= \sum_{|\alpha|+|\beta|+k+p=j} \gamma(\alpha,\beta) P_{\nu,k}{}^{(\beta)}_{(\alpha)} H_p{}^{(\alpha)}_{(\beta)} \\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|+k=j} \gamma(\alpha,\beta) P_{\nu,k}{}^{(\beta)}_{(\alpha)} H_0{}^{(\alpha)}_{(\beta)} + \sum_{|\alpha|+|\beta|+k=j-1} \gamma(\alpha,\beta) P_{\nu,k}{}^{(\beta)}_{(\alpha)} H_1{}^{(\alpha)}_{(\beta)}. \end{aligned}$$

According to Lemma 3.4.4, we have $P_{\nu,k} \in S(g^{-k})$, for all $k \geqslant 1$. Then, using **(A2)**, we obtain (3.4.84) for all $j \geqslant 1$. ∎

Now, we are in position to prove Proposition 3.4.15.

Proof of Proposition 3.4.15 :

Let us start by proving estimate (3.4.76). Using formula (3.3.12) and estimate (3.4.79), we see that for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, there exists $C_\gamma > 0$ such that for all $t \in \mathbb{R}$ and all $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}\big(Q_{\nu,0} \circ \varphi^t_\nu(x, \xi)\big)\right\| \leqslant C_{\nu,\gamma} \exp\big(|\gamma|\Gamma_\nu|t|\big). \tag{3.4.86}$$

Consequently, by differentiating $q_{\nu,0}(t)$ $|\gamma|$-times with respect to (x, ξ) using the Leibniz formula, we obtain

$$\begin{aligned}\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} q_{\nu,0}(t, x, \xi)\right\| &\leqslant \sum_{\beta\leqslant\gamma,\alpha\leqslant\beta} \binom{\gamma}{\beta}\binom{\beta}{\alpha} \left\|\partial^\alpha_{(x,\xi)} T^{-1}_\nu(t, x, \xi)\right\| \left\|\partial^{\beta-\alpha}_{(x,\xi)}\big(Q_{\nu,0}\big(\varphi^t_\nu(x, \xi)\big)\big)\right\| \\ &\qquad \times \left\|\partial^{\gamma-\beta}_{(x,\xi)} T_\nu(t, x, \xi)\right\| \\ &\leqslant \sum_{\beta\leqslant\gamma,\alpha\leqslant\beta} C_{\nu,\alpha,\beta,\gamma} \exp\big((|\gamma| + |\alpha| - |\beta|)\Gamma_\nu|t|\big) \exp\big((|\beta| - |\alpha|)\Gamma_\nu|t|\big) \\ &\leqslant C_{\gamma,\nu,0} \exp\big(|\gamma|\Gamma_\nu|t|\big),\end{aligned}$$

uniformly for $(t, x, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}$, where we used estimates (3.4.80). Hence (3.4.76) holds.

Turn now to the proof of estimates (3.4.77). In the following, when it is not precised, all constants $C_\gamma > 0$ are uniform with respect to $t \in \mathbb{R}$ and $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

We start by proving (3.4.77) for the derivatives of $\tilde{q}_{\nu,j}(t)$, $j \geqslant 1$, i.e.,

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} \tilde{q}_{\nu,j}(t, x, \xi)\right\| \leqslant C_{\gamma,\nu,j} \exp\big((2|\gamma| + 4j - 2)\Gamma_\nu|t|\big), \quad \forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n}. \tag{3.4.87}$$

We proceed by induction with respect to j. Recall the expression of $\tilde{q}_{\nu,1}(t)$

$$\tilde{q}_{\nu,1}(t, x, \xi) = T^{-1}_\nu(t, x, \xi)\left(\tilde{Q}_{\nu,1}\big(\varphi^t_\nu(x, \xi)\big) + \int_0^t W_{\nu,1}(t, s, x, \xi)ds\right)T_\nu(t, x, \xi),$$

where

$$W_{\nu,1}(t, s, x, \xi) = T^{-1}_\nu\big(-s, \varphi^t_\nu(x, \xi)\big)K_{\nu,0}\big(s, \varphi^{t-s}_\nu(x, \xi)\big)T_\nu\big(-s, \varphi^t_\nu(x, \xi)\big)$$

$$K_{\nu,0}(t, x, \xi) = i\big(\big[H_\nu(x, \xi; h), A_{\nu,0}(t, x, \xi; h)\big]_\#\big)_2 - \frac{d}{dt}\big(A_{\nu,0}(t, x, \xi; h)\big)_1$$

and

$$A_{\nu,0}(t, x, \xi; h) = \big(P_\nu\#\tilde{q}_{\nu,0}(t)\#P_\nu\big)(x, \xi; h). \tag{3.4.88}$$

Let us estimate the derivatives of $K_{\nu,0}(t, x, \xi)$. Since $H_\nu\#P_\nu = P_\nu\#H_\nu = H_\nu$, it follows that

$$\big[H_\nu, A_{\nu,0}(t)\big]_\# = P_\nu\#\big[H_\nu, \tilde{q}_{\nu,0}(t)\big]_\#\#P_\nu.$$

From this equation, using the composition formula (A.0.2), we see that $\big([H_\nu, A_{\nu,0}(t)]_\#\big)_2$ is a finite linear combination of terms depending on the symbols $P_{\nu,k}, H_{\nu,j}, \widetilde{q}_{\nu,0}(t)$ and theirs derivatives with at most a derivative of order 2 (with respect to (x,ξ)) of $\widetilde{q}_{\nu,0}(t,x,\xi)$. More explicitly, we have

$$\begin{aligned}\big([H_\nu, A_{\nu,0}(t)]_\#\big)_2 &= \big(H_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,0}(t)\#P_\nu\big)_2 - \big(P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,0}(t)\#H_\nu\big)_2\\ &= \sum_{|\alpha|+|\beta|+k+l=2} \gamma(\alpha,\beta) H_{\nu,k}{}^{(\beta)}_{(\alpha)} C_l(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} - \sum_{|\alpha|+|\beta|+k+l=2} \gamma(\alpha,\beta) D_k(t)^{(\beta)}_{(\alpha)} H_{\nu,l}{}^{(\alpha)}_{(\beta)},\end{aligned}$$

where $C(t) := \widetilde{q}_{\nu,0}(t)\#P_\nu$ and $D(t) := P_\nu\#\widetilde{q}_{\nu,0}(t)$. According to Lemma 3.4.19, all terms $H_{\nu,k}{}^{(\beta)}_{(\alpha)}$ with $|\alpha|+|\beta|+k \geqslant 1$ are uniformly bounded on $\mathbb{R}^{2n}$. On the other hand, the term involving $H_{\nu,0}$ (without derivative) is given by

$$H_{\nu,0}C_2(t) - D_2(t)H_{\nu,0}.$$

By the composition formula (A.0.2), we have

$$\begin{aligned}\|C_2(t,x,\xi)\| &= \Big\|\sum_{|\tilde\alpha|+|\tilde\beta|+p=2} \gamma(\alpha,\beta)\widetilde{q}_{\nu,0}(t,x,\xi)^{(\tilde\beta)}_{(\tilde\alpha)} P_{\nu,p}{}^{(\tilde\alpha)}_{(\tilde\beta)}(x,\xi)\Big\|\\ &\leqslant \sum_{|\tilde\alpha|+|\tilde\beta|=2} C_{\tilde\alpha,\tilde\beta}\big\|\widetilde{q}_{\nu,0}(t,x,\xi)^{(\tilde\beta)}_{(\tilde\alpha)} P_{\nu,0}{}^{(\tilde\alpha)}_{(\tilde\beta)}(x,\xi)\big\|\\ &\quad + \sum_{|\tilde\alpha|+|\tilde\beta|=1} C'_{\tilde\alpha,\tilde\beta}\big\|\widetilde{q}_{\nu,0}(t,x,\xi)^{(\tilde\beta)}_{(\tilde\alpha)} P_{\nu,1}{}^{(\tilde\alpha)}_{(\tilde\beta)}(x,\xi)\big\| + \big\|\widetilde{q}_{\nu,0}(t,x,\xi)P_{\nu,2}(x,\xi)\big\|\\ &\leqslant C_0\exp(2\Gamma_\nu|t|)g^{-1}(x,\xi) + C_1\exp(\Gamma_\nu|t|)g^{-1}(x,\xi) + C_2 g^{-2}(x,\xi)\\ &\leqslant C\exp(2\Gamma_\nu|t|)g^{-1}(x,\xi),\end{aligned}$$

uniformly on $t \in \mathbb{R}$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, where in the third step we used (3.4.76) and (3.4.7) and (3.4.28). Then,

$$\|H_{\nu,0}(x,\xi)C_2(t,x,\xi)\| \leqslant C'\exp(2\Gamma_\nu|t|),$$

uniformly on $t \in \mathbb{R}$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. Clearly, we have similar estimate on $D_2(t)H_{\nu,0}$. Consequently, using estimates (3.4.76), (3.4.85), the fact that $P_{\nu,k} \in S(g^{-k})$ (see Lemma 3.4.4) and Lemma 3.4.19, we obtain

$$\Big\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}\big([H_\nu, A_{\nu,0}(t)]_\#\big)_2(x,\xi)\Big\| \leqslant C_\gamma \exp\big((|\gamma|+2)\Gamma_\nu|t|\big), \quad \forall\gamma\in\mathbb{N}^{2n}. \tag{3.4.89}$$

On the other hand, from (3.4.88) we have

$$\frac{d}{dt}\big(A_{\nu,0}(t)\big)_1 = \big(P_\nu\#\frac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,0}(t)\#P_\nu\big)_1.$$

It follows using formula (A.0.7) that

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(A_{\nu,0}(t)\big)_1 = \frac{1}{2i}\Big(\big\{P_{\nu,0}\frac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,0}, P_{\nu,0}\big\} + \big\{P_{\nu,0}, \frac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,0}\big\}P_{\nu,0}\Big)\\ + P_{\nu,0}\frac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,0}P_{\nu,1} + P_{\nu,1}\frac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,0}P_{\nu,0}.\end{aligned}$$

Recall that $\widetilde{q}_{\nu,0}(t)$ satisfies equation (3.4.67), i.e.,

$$\frac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,0}(t) = \{\lambda_\nu, \widetilde{q}_{\nu,0}(t)\} + i[\widetilde{H}_{\nu,1}, \widetilde{q}_{\nu,0}(t)],$$

Recall also that $\widetilde{H}_{\nu,1} \in S(1)$ (see the proof of Lemma 3.4.17) and $\partial^\gamma_{(x,\xi)}\lambda_\nu \in L^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, for all $|\gamma| \geqslant 1$ (see (3.4.2)). Thus it follows from estimate (3.4.76) that for all $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, there exists $C_\gamma > 0$ independent of $t \in \mathbb{R}$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ such that

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}\Big(\frac{d}{dt}\big(A_{\nu,0}(t)\big)_1\Big)(x,\xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\big((|\gamma|+2)\Gamma_\nu|t|\big). \tag{3.4.90}$$

Putting together (3.4.89) and (3.4.90), we obtain

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}K_{\nu,0}(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\big((|\gamma|+2)\Gamma_\nu|t|\big), \quad \forall\gamma \in \mathbb{N}^{2n}.$$

As in the proof of Proposition 3.3.2, using the above estimate, estimate (3.4.79) on the derivatives of the flow ϕ^t_ν, estimate (3.4.80) on the derivatives of $T_\nu(t,x,\xi)$ and the Faá Di Bruno formula (3.3.12), we get

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}\widetilde{q}_{\nu,1}(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_\gamma \exp\big((2|\gamma|+2)\Gamma_\nu|t|\big), \quad \forall\gamma \in \mathbb{N}^{2n}.$$

Thus we proved that (3.4.87) for $j=1$.

Let us now assume that $\widetilde{q}_{\nu,k}(t,x,\xi)$ satisfies (3.4.87) for $k \in \{1,\dots,r-1\}$. Recall the expression of $\widetilde{q}_{\nu,r}(t)$

$$\widetilde{q}_{\nu,r}(t,x,\xi) = T_\nu^{-1}(t,x,\xi)\left(\widetilde{Q}_{\nu,r}\big(\phi^t_\nu(x,\xi)\big) + \int_0^t W_{\nu,r}(t,s,x,\xi)ds\right)T_\nu(t,x,\xi),$$

where

$$W_{\nu,r}(t,s,x,\xi) = T_\nu^{-1}\big(-s,\phi^t_\nu(x,\xi)\big)K_{\nu,r-1}\big(s,\phi^{t-s}_\nu(x,\xi)\big)T_\nu\big(-s,\phi^t_\nu(x,\xi)\big)$$

$$K_{\nu,r-1}(t,x,\xi) = i\big([H_\nu(x,\xi;h), A_{\nu,r-1}(t,x,\xi;h)]_\#\big)_{r+1} - \frac{d}{dt}\big(A_{\nu,r-1}(t,x,\xi;h)\big)_r$$

and

$$A_{\nu,r-1}(t,x,\xi;h) = \Big(P_\nu\#\sum_{k=0}^{r-1}h^k\widetilde{q}_{\nu,k}(t)\#P_\nu\Big)(x,\xi;h).$$

As above, we have

$$[H_\nu, A_{\nu,r-1}(t)]_\# = P_\nu\#\Big[H_\nu, \sum_{k=0}^{r-1}h^k\widetilde{q}_{\nu,k}(t)\Big]_\#\#P_\nu$$

which yields

$$\big([H_\nu, A_{\nu,r-1}(t)]_\#\big)_{r+1} = \sum_{k=0}^{r-1}\big(P_\nu\# \quad [H_\nu, \widetilde{q}_{\nu,k}(t)]_\#\#P_\nu\big)_{r+1-k}.$$

Again, using the composition formula (A.0.2), we see that for all $k \in \{0,\dots,r-1\}$, the symbol $\big(P_\nu\#[H_\nu, \widetilde{q}_{\nu,k}(t)]_\#\#P_\nu\big)_{r+1-k}$ depends at most on a derivative of order $r+1-k$

of $\widetilde{q}_{\nu,k}(t)$ (and on the derivatives of $H_{\nu,j}$ and $P_{\nu,l}$). Fix $k \in \{0, ..., r-1\}$. More explicitly, by the composition formula (A.0.2), we have

$$\begin{aligned}
&\left(P_\nu \# [H_\nu, \widetilde{q}_{\nu,k}(t)]_\# \# P_\nu\right)_{r+1-k} = \left(H_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,k}(t) \# P_\nu\right)_{r+1-k} - \left(P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,k}(t) \# H_\nu\right)_{r+1-k} \\
&= \sum_{|\alpha|+|\beta|+p+l=r+1-k} \gamma(\alpha,\beta) H_{\nu,p}{}^{(\beta)}_{(\alpha)} C_{k,l}(t)^{(\alpha)}_{(\beta)} - \sum_{|\alpha|+|\beta|+p+l=r+1-k} \gamma(\alpha,\beta) D_{k,p}(t)^{(\beta)}_{(\alpha)} H_{\nu,l}{}^{(\alpha)}_{(\beta)} \\
&=: \Xi_{\nu,r+1-k}(t) + \widetilde{\Xi}_{\nu,r+1-k},
\end{aligned}$$

where $C_k(t) := \widetilde{q}_{\nu,k}(t) \# P_\nu$ and $D_k(t) := P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,k}(t)$. Clearly it suffices to estimate only one term in the above difference since the other one can be estimated analogously. For instance, let us focus on $\Xi_{\nu,r+1-k}(t)$. For all $l \geq 0$, we have

$$C_{k,l}(t) = \left(\widetilde{q}_{\nu,k}(t) \# P_\nu\right)_l = \sum_{|\tilde{\alpha}|+|\tilde{\beta}|+p=l} \gamma(\tilde{\alpha},\tilde{\beta}) \widetilde{q}_{\nu,k}(t)^{(\tilde{\beta})}_{(\tilde{\alpha})} P_{\nu,p}{}^{(\tilde{\alpha})}_{(\tilde{\beta})}$$

By the induction hypothesis, we have for all $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^n$,

$$\|\widetilde{q}_{\nu,k}(t)^{(\tilde{\beta})}_{(\tilde{\alpha})}\| \leqslant C_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\nu,k} \exp\left((2(|\tilde{\alpha}|+|\tilde{\beta}|)+4k-2)\Gamma_\nu|t|\right).$$

Since $P_{\nu,p} \in S(1)$ for all $p \geqslant 0$, it follows that for all $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ and $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$,

$$\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} C_{k,l}(t,x,\xi)^{(\alpha)}_{(\beta)}\| \leqslant C_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\nu,k} \exp\left((2(l+|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)+4k-2)\Gamma_\nu|t|\right),$$

uniformly with respect to $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ and $t \in \mathbb{R}$. Consequently, using estimates (3.4.84) on the derivatives of the symbols $H_{\nu,p}$, we get

$$\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} \Xi_{\nu,r+1-k}(t,x,\xi)\| \leqslant C_{\gamma,\nu,r,k} \exp\left((2(r+1-k+|\gamma|)+4k-2)\Gamma_\nu|t|\right)$$

uniformly with respect to $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ and $t \in \mathbb{R}$. Analogously the derivatives of $\widetilde{\Xi}_{\nu,r+1-k}(t)$ satisfy similar estimates. Then, taking the supremum over $k = 0, ..., r-1$, we obtain

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}\left([H_\nu, A_{\nu,r-1}(t)]_\#\right)_{r+1}(x,\xi)\right\| \leqslant C_{\gamma,r} \exp\left((2|\gamma|+4r-2)\Gamma_\nu|t|\right), \quad \forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n}. \tag{3.4.91}$$

Since $\frac{d}{dt}A_{\nu,r-1}(t)$ depends on $\frac{d}{dt}\widetilde{q}_{\nu,k}(t)$, $k \in \{0, ..., r-1\}$, which satisfy equations (3.4.73), it follows that to estimate the derivatives with respect to (x,ξ) of $\left(\frac{d}{dt}A_{\nu,r-1}(t)\right)_r$, one first needs estimates on the derivatives of $K_{\nu,k}(t)$ with $k \in \{0, ..., r-2\}$. This can be made by induction on k and we get that $\left(\frac{d}{dt}A_{\nu,r-1}(t)\right)_r$ satisfies estimate (3.4.91). Consequently, we obtain

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} K_{\nu,r-1}(t,x,\xi)\right\| \leqslant C_{\gamma,r} \exp\left((2|\gamma|+4r-2)\Gamma_\nu|t|\right), \quad \forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n}.$$

We conclude as in the proof of Proposition 3.3.2 using estimates (3.4.79), (3.4.83) and Leibniz formula. Hence,

$$\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} \widetilde{q}_{\nu,j}(t,x,\xi)\| \leqslant C_{\gamma,\nu,j} \exp\left((2|\gamma|+4j-2)\Gamma_\nu|t|\right), \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}^{2n}, \forall j \geqslant 1, \tag{3.4.92}$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$ and $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. This ends the proof of (3.4.87).

Turn now to the proof of estimate (3.4.77). Let $j \geqslant 1$. According to the general form of the solution (3.4.52), we have

$$q_{\nu,j}(t,x,\xi) = \sum_{k=0}^{j} \left(P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,k}(t) \# P_\nu\right)_{j-k}(x,\xi).$$

By the composition formula (A.0.2), each term $\left(P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,k}(t) \# P_\nu\right)_{j-k}(x,\xi)$, $k \in \{0,\dots,j\}$, in the above sum is a finite linear combination of terms depending on $P_{\nu,l}(x,\xi)$, $\widetilde{q}_{\nu,k}(t,x,\xi)$ and theirs derivatives (with respect to (x,ξ)) with at most a derivative of order $j-k$ of $\widetilde{q}_{\nu,k}(t,x,\xi)$. Then, using (3.4.87) and the fact that $P_{\nu,l} \in S(1)$ for all $l \geqslant 0$, we deduce that for all $1 \leqslant k \leqslant j$ and $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$, we have

$$\left\|\partial^\gamma_{(x,\xi)} \left(P_\nu \# \widetilde{q}_{\nu,k}(t) \# P_\nu\right)_{j-k}(x,\xi)\right\| \leqslant C_{j,k,\gamma,\nu} \exp\left(\left(2|\gamma| + 2(j+k) - 2\right)\Gamma_\nu |t|\right). \quad (3.4.93)$$

Taking the supremum over $k \in \{1,\dots,j\}$, we get (3.4.77). This ends the proof of Proposition 3.4.15. ■

3.4.4.1 *Proofs of Theorem 3.2.5 and Corollary 3.2.7*

Proof of Theorem 3.2.5 :

The starting point is the same as in the proof of Theorem 3.2.1. Set

$$U_{H_\nu}(t) := e^{-\frac{it}{h} H_\nu^w} = e^{-\frac{it}{h} P_\nu^w H^w P_\nu^w}, \quad t \in \mathbb{R}, 1 \leqslant \nu \leqslant \ell.$$

For $N \in \mathbb{N}$, let $Q_\nu^{(N)}(t)$ be the remainder term of order N in the asymptotic expansion of $Q_\nu(t)$, i.e.

$$Q_\nu^{(N)}(t) := Q_\nu(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j \left(q_{\nu,j}(t)\right)^w (x, hD_x).$$

Lemma 3.4.20 *Fix $1 \leqslant \nu \leqslant \ell$. For all $N \in \mathbb{N}$, the following estimate holds*

$$\left\|Q_\nu^{(N)}(t)\right\| \leqslant h^{N+1} \left\|\int_0^t U_{H_\nu}(-s) \left(R_\nu^{(N+1)}(t-s)\right)^w U_{H_\nu}(s)ds\right\| + \mathcal{O}(h^{N+1}),$$

uniformly for $t \in \mathbb{R}$, where

$$R_\nu^{(N+1)}(t) := \widetilde{R}_{N+1}(H_\nu, q_{\nu,0}(t)) + \widetilde{R}_N(H_\nu, q_{\nu,1}(t)) + \cdots + \widetilde{R}_1(H_\nu, q_{\nu,N}(t)). \quad (3.4.94)$$

We recall that the notation $\widetilde{R}_k(A,B)$ is introduced in (3.3.30). Here $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}$.

For $N \in \mathbb{N}$, we set

$$Q^{(N)}(t) := Q(t) - \sum_{j=0}^{N} h^j \sum_{\nu=1}^{\ell} \left(q_{\nu,j}(t)\right)^w (x, hD_x).$$

Using Lemma 3.4.20 and Proposition 3.4.6 (i), we obtain

$$\begin{aligned}\|Q^{(N)}(t)\| &\leqslant \sum_{\nu=1}^{\ell}\|Q_\nu^{(N)}(t)\| + \left\|Q(t)-\sum_{\nu=1}^{\ell}Q_\nu(t)\right\| \\ &\leqslant \ell\, h^{N+1}\sup_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}\left\|\int_0^t U_{H_\nu}(-s)\left(R_\nu^{(N+1)}(t-s)\right)^w U_{H_\nu}(s)ds\right\| \\ &+ \mathcal{O}(h^{N+1})+\mathcal{O}\big((1+|t|)h^\infty\big),\end{aligned} \tag{3.4.95}$$

uniformly for $t\in\mathbb{R}$.

As in the end of the proof of Theorem 3.2.1, using the estimates on the symbols $q_{\nu,j}(t)$ given by Proposition 3.4.15, Theorem A.0.2 and the Calderón-Vaillancourt theorem (Theorem 1.3), we prove the following estimate

$$\left\|\left(R_\nu^{(N+1)}(t)\right)^w(x,hD_x;h)\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}\leqslant C_{\nu,n,N}\exp\left((4N+\tilde\delta_n)\Gamma_\nu|t|\right),$$

uniformly for $t\in\mathbb{R}$, where $\tilde\delta_n$ is an integer depending only on the dimension n. We conclude as in the end of the proof of Theorem 3.2.1. ∎

It remains now to prove Corollary 3.2.7.

Proof of Corollary 3.2.7 :

Let $Q(x,\xi)\sim\sum_{j\geqslant 0}h^jQ_j(x,\xi)$ in $S(1)$ and assume that there exists $\widetilde{Q}\in S(1)$ such that

$$Q_0(x,\xi)=\sum_{\nu=1}^{\ell}P_{\nu,0}(x,\xi)\widetilde{Q}(x,\xi)P_{\nu,0}(x,\xi).$$

According to Proposition 3.4.6 (ii), we have

$$\left\|Q(t)-\sum_{\nu=1}^{\ell}Q_\nu(t)\right\|=\mathcal{O}\big((1+|t|)h\big),\quad \text{uniformly for } t\in\mathbb{R}.$$

Thus by rewriting (3.4.95) for $N=0$ and using Lemma 3.4.20, we get

$$\begin{aligned}\|Q^{(0)}(t)\| &\leqslant \sum_{\nu=1}^{\ell}\|Q_\nu^{(0)}(t)\|+\left\|Q(t)-\sum_{\nu=1}^{\ell}Q_\nu(t)\right\| \\ &\leqslant \ell\,h\sup_{1\leqslant\nu\leqslant\ell}\left\|\int_0^t U_{H_\nu}(-s)\big(R_\nu^{(1)}(t-s)\big)^w U_{H_\nu}(s)ds\right\|+\mathcal{O}(h)+\mathcal{O}\big((1+|t|)h\big)\end{aligned}$$

uniformly for $t\in\mathbb{R}$. We conclude as above. ∎

3.5 Some comments and remarks

3.5.1 *The class of observables* $\mathcal{Q}(1)$

In this paragraph, we recall a result from [15] showing that the assumption $Q\in\mathcal{Q}(1)$ is necessary in order to prove that $Q(t)$ is an h-pseudodifferential operator with semiclassical symbol $q(t)\sim\sum_{j\geqslant 0}h^jq_j(t)$ in $S(1)$, for all finite t.

Let H be a semiclassical Hamiltonian satisfying the assumptions of Theorem 3.2.5. It is clear that our Theorem 3.2.5 implies in particular that for $Q\in\mathcal{Q}(1)$, the time evolution of the corresponding quantum observable $Q^w(x, hD_x; h)$ given by $Q(t) := U_H(-t)Q^w U_H(t)$ is an h-pseudodifferential operator with symbol $q(t) \in S_{sc}(1)$, for all finite t. This is a consequence of Beals's characterization of h-pseudodifferential operators (Theorem 1.7). In the following proposition, we recall a result from [15] (which generalizes results from [32, 33, 34]) ensuring the reciprocal result. In other words, the class $\mathscr{Q}(1)$ exhausts all observables $Q \in S_{sc}(1)$ such that the time evolution of the corresponding quantum observable is again an h-pseudodifferential operator with symbol in the class $S_{sc}(1)$.

Proposition 3.5.1 *Let $Q \in S_{sc}(1)$ and assume that for all $t \in \mathbb{R}$, the corresponding Heisenberg observable $Q(t) := U_H(-t)Q^w U_H(t)$ is an h-pseudodifferential operator with symbol*

$$q(t, x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j q_j(t, x, \xi) \quad \text{in } S(1),$$

uniformly for $|t| \leqslant \bar{t}$. Then, uniformly for $|t| \leqslant \bar{t}$, we have

$$P_\nu \# q(t) \# P_\mu \sim 0 \quad \textit{in } S(1), \quad \forall 1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell.$$

In particular, for $t = 0$, this implies that $Q \in \mathscr{Q}(1)$.

Proof : We start by the Heisenberg problem satisfied by $Q(t)$

$$\frac{d}{dt} Q(t) = \frac{i}{h} [H^w, Q(t)], \quad Q(t)_{|t=0} = Q^w,$$

which we rewrite at the level of symbols as

$$\frac{d}{dt} q(t) \sim \frac{i}{h} [H, q(t)]_\# \quad \text{in } S(1), \qquad q(t)_{|t=0} \sim Q \quad \text{in } S(1).$$

Multiplying from both sides by the semiclassical projections P_ν, P_μ, and using the fact that

$$P_\eta \# H \sim H \# P_\eta \quad \text{in } S(1), \quad \forall \eta = 1, ..., \ell,$$

according to (3.2.11), we get

$$\frac{d}{dt} P_\mu \# q(t) \# P_\nu \sim \frac{i}{h} P_\mu \# [H, q(t)]_\# \# P_\nu \sim \frac{i}{h} [H, P_\mu \# q(t) \# P_\nu]_\# \quad \text{in } S(1). \tag{3.5.1}$$

Put

$$q_{\nu\mu}(t) := P_\mu \# q(t) \# P_\nu \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j q_{\nu\mu,j}(t), \quad \mu, \nu = 1, ..., \ell.$$

We shall prove that

$$q_{\nu\mu,j}(t) = 0, \quad \forall j \geqslant 0, \forall 1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell. \tag{3.5.2}$$

Firstly, due to the factor h^{-1} in (3.5.1), at principal symbols level, we must have

$$[H_0, P_{\mu,0} q_0(t) P_{\nu,0}] = (\lambda_\mu - \lambda_\nu) P_{\mu,0} q_0(t) P_{\nu,0} = 0.$$

Since for $1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell$, $\lambda_\mu - \lambda_\nu \neq 0$ by assumption **(A1)**, it follows that

$$q_{\nu\mu,0}(t) = P_{\mu,0} q_0(t) P_{\nu,0} = 0, \quad \forall 1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell. \tag{3.5.3}$$

This gives (3.5.2) for $j = 0$.

Let $1 \leqslant \mu \neq \nu \leqslant \ell$. Using the asymptotic expansion of $q_{\nu\mu}(t)$, we identify the equal powers of h in both sides in (3.5.1), i.e.

$$\frac{d}{dt}\sum_{j\geqslant 0} h^j q_{\nu\mu,j}(t) \sim i\big[H, \sum_{j\geqslant 1} h^{j-1} q_{\nu\mu,j}(t)\big]_{\#} \tag{3.5.4}$$

According to (3.5.3), the principal symbol of the right hand side of the above equation equal to $i[H_0, q_{\nu\mu,1}(t)]$ must vanishes. This is equivalent to the block-diagonal form of $q_{\nu\mu,1}(t)$ with respect to the eigenprojectors $(P_{\eta,0})_{1\leqslant\eta\leqslant\ell}$, that is

$$q_{\nu\mu,1}(t) = \sum_{\eta=1}^{\ell} P_{\eta,0} q_{\nu\mu,1}(t) P_{\eta,0}.$$

For $\eta = 1, \cdots, \ell$, $P_{\eta,0} q_{\nu\mu,1}(t) P_{\eta,0}$ can be seen as the principal symbol of $h^{-1}(P_\eta \#(q_{\nu\mu}(t) - q_{\nu\mu,0}(t))\# P_\eta)$. Since $q_{\nu\mu,0}(t) = 0$ according to (3.5.3), this implies that $q_{\nu\mu,1}(t) = 0$ which gives (3.5.2) for $j = 1$. One can continu this procedure to obtain (3.5.2) for all $j \geqslant 2$ and then see that $q(t)$ must be block-diagonal with respect to the semiclassical projections P_ν, $\nu = 1, ..., \ell$. ■

A

THE MOYAL BRACKET AND REMAINDER ESTIMATE IN THE COMPOSITION FORMULA

Let g_1 and g_2 be two order functions on $\mathbb{R}^{2n}$. We have already seen in Theorem 1.2 in Chapter 1, that for two matrix-valued symbols $A \in S(g_1)$ and $B \in S(g_2)$, the Moyal product $A\#B$ belongs to $S(g_1 g_2)$ and admits an asymptotic expansion in powers of h given by (1.2.10). In this appendix, we precise this result in the case of semiclassical symbols $A(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j A_j(x,\xi)$ in $S(g_1)$ and $B(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j B_j(x,\xi)$ in $S(g_2)$ and we recall the notion of the Moyal bracket. Moreover, we recall a remainder estimate in the composition formula established by Bouzouina-Robert [17] which we use in our proofs.

a.0.1 *Moyal product of semiclassical symbols*

Let $A(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j A_j(x,\xi)$ in $S(g_1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ and $B(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j B_j(x,\xi)$ in $S(g_2;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ be two matrix-valued semiclassical symbols. By ordering the asymptotic expansion (1.2.10), one can easily verify that $A\#B$ is also a semiclassical symbol in $S(g_1 g_2;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$ with asymptotic expansion in powers of h given by

$$A\#B(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j (A\#B)_j(x,\xi) \quad \text{in } S(g_1 g_2), \tag{A.0.1}$$

where for all $j \geqslant 0$,

$$(A\#B)_j(x,\xi) := \sum_{|\alpha|+|\beta|+k+l=j} \gamma(\alpha,\beta) {A_k}^{(\beta)}_{(\alpha)}(x,\xi) {B_l}^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi), \tag{A.0.2}$$

with

$$\gamma(\alpha,\beta) := \frac{(-1)^{|\beta|}}{(2i)^{|\alpha|+|\beta|}\alpha!\beta!}.$$

In particular, the principal symbol and the sub-principal symbol of $A\#B$ are respectively given by

$$(A\#B)_0 = A_0 B_0, \quad (A\#B)_1 = \frac{1}{2i}\{A_0, B_0\} + A_0 B_1 + A_1 B_0. \tag{A.0.3}$$

In the following remark we collect some useful identities which can be easily computed using (A.0.3).

Remark A.0.1 *We recall that the Moyal commutator* $[A,B]_\#$ *of* A *and* B *is defined as*

$$[A,B]_\# := A\#B - B\#A.$$

For $A \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j A_j$, $B \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j B_j$ *and* $C \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j C_j$ *three semiclassical matrix-valued symbols, we have*

$$\left([A,B]_\#\right)_0 = [A_0, B_0] \tag{A.0.4}$$

$$\big([A,B]_{\#}\big)_1 = \frac{1}{2i}\big(\{A_0,B_0\} - \{B_0,A_0\}\big) + [A_0,B_1] + [A_1,B_0] \tag{A.0.5}$$

$$(A\#B\#C)_0 = A_0B_0C_0 \tag{A.0.6}$$

$$(A\#B\#C)_1 = \frac{1}{2i}\{A_0B_0,C_0\} + A_0B_0C_1 + \frac{1}{2i}\{A_0,B_0\}C_0 + A_0B_1C_0 + A_1B_0C_0. \tag{A.0.7}$$

a.0.2 *The Moyal bracket*

Let $A \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j A_j$ in $S(g_1)$ and $B \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j B_j$ in $S(g_2)$ be two matrix-valued semiclassical symbols. The Moyal bracket of A and B denoted $\{A,B\}^*$ is defined as the Weyl symbol of $\frac{i}{h}[A^w, B^w]$. By means of the Moyal product it can be written as

$$\{A,B\}^* := \frac{i}{h}[A,B]_{\#}.$$

If the principal symbols A_0 and B_0 commute, i.e. if $[A_0,B_0] = 0$, then using the rule of asymptotic expansion of the Moyal product of symbols (formula A.0.1), one can expand $\{A,B\}^*$ in a power series of h and gets

$$\{A,B\}^* \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j \{A,B\}^*_j \quad \text{in } \; S(g_1g_2), \tag{A.0.8}$$

with

$$\{A,B\}^*_j = i\big([A,B]_{\#}\big)_{j+1} = i\big((A\#B)_{j+1} - (B\#A)_{j+1}\big), \quad \forall j \geqslant 0.$$

Let $N \geqslant 1$. The remainder term of order $N-1$ in the asymptotic expansion (A.0.8) can be expressed by means of the remainder terms in the asymptotic expansions of $A\#B$ and $B\#A$. More precisely, we have

$$\{A,B\}^* - \sum_{j=0}^{N-1} h^j \{A,B\}^*_j = ih^{-1}(R_N(A,B) - R_N(B,A)), \tag{A.0.9}$$

where

$$R_N(A,B;x,\xi;h) := A\#B(x,\xi;h) - \sum_{j=0}^{N} h^j (A\#B)_j(x,\xi) \tag{A.0.10}$$

denotes the remainder term of order N in the asymptotic expansion of $A\#B$.

a.0.3 *Remainder estimate in the composition formula*

In [17, Theorem A.1], Bouzouina and Robert established the following estimate on the derivatives of $R_N(P,Q)$ in the case of scalar-valued symbols. This result remains true without any change in the case of matrix-valued symbols.

Theorem A.0.2 *There exists a constant $K_n > 0$ such that for every integer $\kappa \geqslant 4n$ and every $s > 4n$, there exists $\tau_{n,\kappa,s} > 0$ such that for every $A, B \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}; M_m(\mathbb{C}))$ we have :*

For every $N \geqslant 1$ *and every* $\gamma \in \mathbb{N}^{2n}$*, the following estimate holds for every* $u \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} \|\partial_u^\gamma R_N(A,B;u;h)\| \leqslant h^{N+1}\tau_{n,\kappa,s} K_n^{N+|\gamma|}(N\,!)^{-1} \\ \times \sup_{\substack{v,w\in\mathbb{R}^{2n} \\ \mu,\nu\in\mathbb{N}^{2n};|\mu|+|\nu|\leqslant\kappa+|\gamma| \\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}^n;|\alpha|+|\beta|=N+1}} \Big(\langle(v,w)\rangle^{s-\kappa}\big\|\partial_v^{(\alpha,\beta)+\mu}A(v+u)\big\|\big\|\partial_w^{(\beta,\alpha)+\nu}B(w+u)\big\|\Big). \end{aligned} \tag{A.0.11}$$

Remark A.0.3 *As it was shown in [17], using the fact that* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n};M_m(\mathbb{C}))$ *is dense in* $S(\langle u\rangle^a;\mathbb{R}^{2n},M_m(\mathbb{C}))$*,* $a \in \mathbb{R}$*, for the topology of the Fréchet spaces* $S(\langle u\rangle^{a+\varepsilon};\mathbb{R}^{2n},M_m(\mathbb{C}))$*, for all* $\varepsilon > 0$*, Theorem A.0.2 can be extended to symbols* $A \in S(\langle u\rangle^a;\mathbb{R}^{2n},M_m(\mathbb{C}))$ *and* $B \in S(\langle u\rangle^b;\mathbb{R}^{2n},M_m(\mathbb{C}))$*, with* $a,b \in \mathbb{R}$ *such that* $\kappa - s \geqslant a + b$ *to get a finite right hand side in (A.0.11).*

B

CAUCHY PROBLEM

Let $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$, $A \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};M_m(\mathbb{C}))$ hermitian-valued and $B \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n};M_m(\mathbb{C}))$. In this paragraph, we give the general solution of the following Cauchy problem

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\psi(t,x,\xi) &= \big\{\Lambda,\psi(t,\cdot,\cdot)\big\}(x,\xi) + i[A(x,\xi),\psi(t,x,\xi)] + B(t,x,\xi) \\ \psi(t,x,\xi)_{|t=0} &= \psi_0(x,\xi), \end{cases} \tag{B.0.1}$$

which arises when we solve the Cauchy problems (3.3.1) and (3.4.61) in sections 3.3 and 3.4, respectively. We assume that the flow $\phi^t_\Lambda(x,\xi)$ exists globally on $\mathbb{R}$ for all $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ since it is the case for ϕ^t_λ and ϕ^t_ν (see section 3).

We introduce the $(m \times m)$ matrix-valued function T solution of the following system

$$\frac{d}{dt}T(t,x,\xi) = -iA\big(\phi^t_\Lambda(x,\xi)\big)T(t,x,\xi), \quad T(0,x,\xi) = I_m. \tag{B.0.2}$$

The following lemma was proved in [18, Proposition 4].

Lemma B.0.1 *The matrix $T(t,x,\xi)$ is unitary and we have*

$$T\big(-t,\phi^t_\Lambda(x,\xi)\big) = T^{-1}(t,x,\xi), \quad \forall t \in \mathbb{R}, (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{B.0.3}$$

Notice that in [18], the quantity $\Gamma(t,x,\xi) = T(-t,\phi^t_\Lambda(x,\xi))$ was considered instead of T.

The equation satisfied by T^{-1} reads

$$\frac{d}{dt}T^{-1}(t,x,\xi) = iT^{-1}(t,x,\xi)A\big(\phi^t_\Lambda(x,\xi)\big). \tag{B.0.4}$$

A simple computation using (B.0.2) and (B.0.4) yields

$$\frac{d}{dt}\Big(T^{-1}(-t,x,\xi)\psi\big(t,\phi^{-t}_\Lambda(x,\xi)\big)T(-t,x,\xi)\Big) = T^{-1}(-t,x,\xi)\mathcal{G}(t,\phi^{-t}_\Lambda(x,\xi))T(-t,x,\xi)$$

with

$$\mathcal{G}(t,x,\xi) := \frac{d}{dt}\psi(t,x,\xi) - \{\Lambda,\psi(t)\}(x,\xi) - i[A,\psi(t)](x,\xi).$$

Consequently, equation (B.0.1) is equivalent to the following one

$$\frac{d}{dt}\Big(T^{-1}(-t,x,\xi)\psi\big(t,\phi^{-t}_\Lambda(x,\xi)\big)T(-t,x,\xi)\Big) = T^{-1}(-t,x,\xi)B\big(t,\phi^{-t}_\Lambda(x,\xi)\big)T(-t,x,\xi).$$

Therefore

$$\begin{aligned} \psi\big(t,\phi^{-t}_\Lambda(x,\xi)\big) =& T(-t,x,\xi)\Big(\psi_0(x,\xi) \\ &+ \int_0^t T^{-1}(-s,x,\xi)B\big(s,\phi^{-s}_\Lambda(x,\xi)\big)T(-s,x,\xi)\,ds\Big)T^{-1}(-t,x,\xi). \end{aligned} \tag{B.0.5}$$

Using Lemma B.0.1, we obtain the solution of (B.0.1) which reads

$$\psi(t,x,\xi) = T^{-1}(t,x,\xi)\Big(\psi_0(\phi^t_\Lambda(x,\xi)) \\ + \int_0^t T^{-1}\big(-s,\phi^t_\Lambda(x,\xi)\big)B\big(s,\phi^{t-s}_\Lambda(x,\xi)\big)T\big(-s,\phi^t_\Lambda(x,\xi)\big)\,ds\Big)T(t,x,\xi).$$

■

The following lemma is used in the proof of Proposition 3.4.12. Similar result was announced in the appendix of [114] (see equation (A.22) therein).

Lemma B.0.2 *Consider the Cauchy problem* (B.0.1) *with* $\Lambda = \lambda_\nu$ *and* $A = \widetilde{H}_{\nu,1}$ *defined by* (3.4.63). *We assume that* ψ_0 *and* $B(t)$ *satisfy*

$$\psi_0 = P_{\nu,0}\psi_0 P_{\nu,0} \quad \textit{and} \quad B(t) = P_{\nu,0}B(t)P_{\nu,0}, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Then the solution $\psi(t)$ *satisfies*

$$\psi(t) = P_{\nu,0}\psi(t)P_{\nu,0}, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

Proof. Put $\overline{P}_{\nu,0} := I_m - P_{\nu,0}$. We shall prove that

$$\overline{P}_{\nu,0}\psi(t) = 0 \quad \text{and} \quad \psi(t)\overline{P}_{\nu,0} = 0, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

We have

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\overline{P}_{\nu,0}\psi(t) &= \overline{P}_{\nu,0}\{\lambda_\nu,\psi(t)\} - \overline{P}_{\nu,0}[\psi(t), i\widetilde{H}_{\nu,1}] \\
&= \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)\} - \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\}\psi(t) - \overline{P}_{\nu,0}[\psi(t), i\widetilde{H}_{\nu,1}] \\
&= \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)\} - \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\}\psi(t) + i\overline{P}_{\nu,0}\widetilde{H}_{\nu,1}\psi(t) - i\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)\widetilde{H}_{\nu,1} \\
&= \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)\} - \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\}\psi(t) + i\overline{P}_{\nu,0}\widetilde{H}_{\nu,1}\psi(t) + \mathcal{O}(\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)),
\end{aligned}$$

where we used the fact that $\widetilde{H}_{\nu,1} \in S(1)$ (see the proof of Lemma 3.4.17). According to the definition of $\widetilde{H}_{\nu,1}$ we have

$$i\overline{P}_{\nu,0}\widetilde{H}_{\nu,1}\psi(t) = \overline{P}_{\nu,0}\big[P_{\nu,0},\{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\}\big]\psi(t) = -\overline{P}_{\nu,0}\{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\}P_{\nu,0}\psi(t). \tag{B.0.6}$$

Next, multiplying the obvious equality $\{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\} = \{\lambda_\nu,P^2_{\nu,0}\} = \{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\}P_{\nu,0} + P_{\nu,0}\{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\}$ on the left and right by $P_{\nu,0}$, gives $P_{\nu,0}\{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\}P_{\nu,0} = 2P_{\nu,0}\{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\}P_{\nu,0}$ and then

$$P_{\nu,0}\{\lambda_\nu,P_{\nu,0}\}P_{\nu,0} = 0.$$

Combining this with (B.0.6), we obtain

$$i\overline{P}_{\nu,0}\widetilde{H}_{\nu,1}\psi(t) = \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\}P_{\nu,0}\psi(t).$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\overline{P}_{\nu,0}\psi(t) &= \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)\} - \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\}\psi(t) + \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\}P_{\nu,0}\psi(t) + \mathcal{O}(\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)) \\
&= \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)\} - \{\lambda_\nu,\overline{P}_{\nu,0}\}\overline{P}_{\nu,0}\psi(t) + \mathcal{O}(\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)),
\end{aligned}$$

which by using the fact that $\{\lambda_\nu, \overline{P}_{\nu,0}\} = \mathcal{O}(1)$ (which follows from assumption **(A2)** and Lemma 3.4.1) gives

$$\frac{d}{dt}\overline{P}_{\nu,0}\psi(t) = \{\lambda_\nu, \overline{P}_{\nu,0}\psi(t)\} + \mathcal{O}(\overline{P}_{\nu,0}\psi(t)).$$

Put $g(t,x,\xi) := \overline{P}_{\nu,0}(x,\xi)\psi(t,x,\xi)$ and $f(t,x,\xi) := g(t, \phi_\nu^{-t}(x,\xi))$. Taking into account the fact that $f(0) = g(0) = \overline{P}_{\nu,0}\psi_0 = 0$ (since $\psi_0 = P_{\nu,0}\psi_0 P_{\nu,0}$ by hypothesis), we have

$$\frac{d}{dt}f(t,x,\xi) = \mathcal{O}\big(f(t,x,\xi)\big), \quad f(0) = 0.$$

Consequently, using Gronwall Lemma, we get

$$f(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hence

$$\overline{P}_{\nu,0}\psi(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

The same arguments show that $\psi(t)\overline{P}_{\nu,0} = 0$, for all $t \in \mathbb{R}$. This ends the proof of the lemma. ■

4

SEMICLASSICAL TRACE FORMULA AND SPECTRAL SHIFT FUNCTION FOR SYSTEMS VIA A STATIONARY APPROACH

Les résultats présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de l'article [4] en collaboration avec Mouez Dimassi et Setsuro Fujiié.

Contents

4.1 Introduction

In this chapter, we establish a semiclassical trace formula in a general framework of microhyperbolic selfadjoint systems of h-pseudodifferential operators, and apply it to study the spectral shift function (SSF for short) associated to a pair of selfadjoint Schrödinger operators with matrix-valued potentials. Such operators appear in molecular physics in the Born-Oppenheimer approximation. The justification of this approximation and a classification of matrix Schrödinger operators can be found in [26, 58, 71, 77].

More precisely, we are concerned with the SSF for the pair of operators $(P_1(h), P_0(h))$ with

$$P_0(h) := -h^2\Delta \otimes I_m + V_\infty, \quad P_1(h) := -h^2\Delta \otimes I_m + V(x), \tag{4.1.1}$$

where $h \in]0,1]$ is the semiclassical parameter, I_m is the identity $m \times m$ matrix, V_∞ is an $m \times m$ constant hermitian matrix and V is a smooth hermitian matrix-valued potential which tends rapidly enough to V_∞ at infinity. The SSF associated to $(P_1(h), P_0(h))$ denoted s_h is defined as distribution (modulo a constant) by the Lifshits-Krein formula

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle = -\mathrm{tr}\big(f(P_1(h)) - f(P_0(h))\big), \quad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}). \tag{4.1.2}$$

In the scalar case $m = 1$, a lot of works have been devoted to the study of the SSF in different asymptotic regimes, see [105, 103, 106, 104, 107, 6, 43, 40] and the references therein. In particular, a Weyl-type asymptotics for the SSF with a sharp remainder estimate and a complete asymptotic expansion of the derivative of the SSF were studied in high energy regime ([104]) and in the semiclassical regime ([105, 106]).

The proofs of these works reduce to the study of the asymptotic behaviour of

$$\mathrm{tr}\,\left(f(P_1(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P_1(h)) - f(P_0(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P_0(h))\right) \tag{4.1.3}$$

where θ is a smooth function of the time with compact support and $\mathcal{F}_h^{-1}$ is the semiclassical Fourier inverse transform defined by (4.2.2). The method in [105] consists in writing (4.1.3) as

$$\frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{it\tau}{h}}\theta(t)\mathrm{tr}\left(f(P_1(h))e^{-\frac{it}{h}P_1(h)} - f(P_0(h))e^{-\frac{it}{h}P_0(h)}\right)dt,$$

and constructing, modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, the Schwartz' Kernel of the evolution operator

$$U_h(t) := f(P_1(h))e^{-\frac{it}{h}P_1(h)}.$$

This construction by means of Fourier integral operators is now standard and well-known for scalar-valued operators $P_1(h)$ (see [66, 70, 102] for problems concerning the asymptotic distribution of eigenvalues, and [104, 105] for the SSF).

For matrix-valued operators, this explicit construction is very complicated (or impossible) even for small t. To avoid this problem, and to study the counting function of eigenvalues of $P_1(h)$, V. Ivrii [70] observed that a rough construction by using the successive approximation method of $U_h(t)$ for $|t| < h^{1-\delta}$ (with $0 < \delta \leqslant 1$) suffices to get a full asymptotic expansion in powers of h of $\mathrm{tr}(f(P_1(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P_1(h)))$. Relying on this observation, Dimassi and Sjöstrand [42] (see also [41, ch. 12]) developed a time-independent approach to get asymptotics of $\mathrm{tr}(f(P_1(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P_1(h)))$ for matrix-valued operator $P_1(h)$. The novelty in this approach consists in expressing the above trace in terms of the resolvent instead of the evolution operator, and studying the (almost) analyticity of its trace near the real axis. This representation is done by means of Helffer-Sjöstrand formula (1.3.4). This method is used in [40] to study the SSF for scalar non semi-bounded operators such as Stark Hamiltonian.

In this chapter, we develop and apply this stationary approach to the study of the SSF for matrix-valued operators.

Organization of the chapter

In the first part of this chapter, we study the semiclassical trace formula associated to a microhyperbolic selfadjoint system of h-pseudodifferential operators. We consider a general matrix-valued h-pseudodifferential operator $H^w := H^w(x, hD_x)$ associated to an $m \times m$ hermitian matrix-valued symbol H and we study the trace of the operator $\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)$ near a fixed energy $\tau_0 \in \mathbb{R}$, where χ is a cutoff function in the phase space, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ with support near τ_0 and $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Under the assumption that $\tau_0 - H$ is microhyperbolic at every point of the support of χ (see Definition 4.2.1), we show that this trace has a full asymptotic expansion in powers of h, provided that θ is supported in a small h-independent neighborhood of 0 (Theorem 4.2.6). This is a consequence of two results. The first one states that the above trace depends, modulo $\mathcal{O}(h^\infty)$, only on the values of the symbol H on the support of χ as long as the support of θ is small enough near 0 (Theorem 4.2.5). This result enables us to modify the symbol $\tau_0 - H$ outside the support of χ and then extend it to a uniformly microhyperbolic symbol in the whole phase space using Theorem C.0.1. The second result ensures that under this uniform microhyperbolicity condition, the constribution of the trace of $\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)$ for large times (larger than $h^{1-\delta}$, $0 < \delta \leqslant 1$) is $\mathcal{O}(h^\infty)$ (Theorem 4.2.3). These results are stated in subsection 4.2.1 and proved in section 4.3.

In the second part, we apply the results of the first part to the study of the SSF associated to the pair of Schrödinger operators with matrix-valued potentials defined in (4.1.1). First, we give a complete asymptotic expansion in powers of h for the derivative of the SSF in the sense of distributions (Theorem 4.2.8). This result is a simple consequence of the h-pseudodifferential symbolic calculus. Then, using Theorem 4.2.6, we show that (4.1.3) has a full asymptotic expansion in powers of h when the support of θ is close enough to the origin (Theorem 4.2.9). Combining this result with a Tauberian argument, we obtain a Weyl-type asymptotic for the SSF with a sharp remainder estimate (Theorem 4.2.11). Finally, we give a pointwise full asymptotic expansion of the derivative of the SSF near energies τ where there exists a scalar escape function associated to the classical Hamiltonian $\xi^2 I_m + V(x)$ (Theorem 4.2.13). This theorem is a generalization to the matrix case of the result of Robert-Tamura [105] near non-trapping energies. These results are stated in subsection 4.2.2 and their proofs will be given in section 4.4.

Notations

Throught this chapter, $\mathcal{H}_m$ denotes the set of $m \times m$ hermitian matrices. We use the same asymptotic notations as in the previous chapters. In particular, we recall that for a function f_h depending on the semiclassical parameter h, the notation $f_h = \mathcal{O}(h^\infty)$ (or $f_h \equiv 0$) means that $f_h = \mathcal{O}(h^N)$, for all $N \in \mathbb{N}$, uniformly for h small enough. The scalar products in $\mathbb{R}^d$ and $\mathbb{C}^m$ will be denoted $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and $(\cdot, \cdot)$, respectively. Finally, the bracket $[a_j]_0^1$ stands for the difference $a_1 - a_0$.

4.2 Statement of the main results

We start by recalling the following notion of microhyperbolicity which will play an important role in this chapter.

Definition 4.2.1 (Microhyperbolicity) *Let* $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathcal{H}_m)$.

(i) *We say that* $H(x,\xi)$ *is microhyperbolic at* $(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^{2n}$ *in the direction* $T=(T_{x_0},T_{\xi_0})\in\mathbb{R}^{2n}$, *if there are constants* $C_0,C_1,C_2>0$ *such that*

$$\big(\langle T,\nabla_{x,\xi}H(x,\xi)\rangle w,w\big)\geqslant C_0|w|^2-C_1|H(x,\xi)w|^2, \tag{4.2.1}$$

for all $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$ *with* $|(x,\xi)-(x_0,\xi_0)|\leqslant\frac{1}{C_2}$ *and all* $w\in\mathbb{C}^m$. *Here* $\nabla_{x,\xi}H=(\partial_xH,\partial_\xi H)$ *and we slightly abuse notation by denoting*

$$\langle T,\nabla_{x,\xi}H(x,\xi)\rangle:=\langle T,\nabla_{x,\xi}\rangle H(x,\xi)=\langle T_{x_0},\partial_x\rangle H(x,\xi)+\langle T_{\xi_0},\partial_\xi\rangle H(x,\xi).$$

(ii) *If for some constants* $C_0,C_1>0$ *the above estimate holds for all* $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$, *we say that* $H(x,\xi)$ *is uniformly microhyperbolic on* $\mathbb{R}^{2n}$ *in the direction* T.

(iii) *In the case where* $H(x,\xi)$ *depends also on an additional parameter, we say that* H *is uniformly microhyperbolic in the direction* T *if* (4.2.1) *is satisfied with* $C_0,C_1>0$ *independent of this parameter.*

Remark 4.2.2 *Clearly the notion of microhyperbolicity is a local notion in the sense that if* H *is microhyperbolic at* $(x_0,\xi_0)\in\mathbb{R}^{2n}$ *is some direction* $T\in\mathbb{R}^{2n}$ *then for* $\eta>0$ *small enough,* H *is microhyperbolic at every point* $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}$ *with* $|(x,\xi)-(x_0,\xi_0)|\leqslant\eta$ *in the same direction* T. *In the appendix* C, *we prove some technical results related to this notion that we shall use in our proofs.*

4.2.1 *Trace formula for systems of* h*-pseudodifferential operators*

Let $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. We recall the semiclassical Fourier inverse operator

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau)=\frac{1}{2\pi h}\int_{\mathbb{R}}e^{\frac{it\tau}{h}}\theta(t)dt. \tag{4.2.2}$$

In the following, for $\varepsilon>0$ possibly depending on h, we set

$$\theta_\varepsilon(t):=\theta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right).$$

Let $A,H\in S(1;\mathbb{R}^{2n},\mathcal{H}_m)$ and $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$. We assume that A together with all its derivatives with respect to (x,ξ) are in $L^1(\mathbb{R}^{2n})$[1]. In particular this implies that A^w is of trace class and we have (see Theorem 1.11)

$$\|A^w\|_{\mathrm{tr}}=\mathcal{O}(h^{-n}).$$

Recall that χ^w is of trace class with norm trace $\mathcal{O}(h^{-n})$. Clearly, for all $f\in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, the operators $\chi^wf(H^w)$ and $A^wf(H^w)$ are of trace class.

Fix $\tau_0\in\mathbb{R}$. We denote by O_{τ_0} the set of open intervals centered at τ_0, i.e.,

$$O_{\tau_0}:=\big\{]\tau_0-\eta,\tau_0+\eta[;\ \ \eta>0\big\}.$$

1 All the following analysis remains true if we assume that $(1+|\xi|^2)^{-a}H\in S(1;\mathbb{R}^{2n},\mathcal{H}_m)$, $a\geqslant 0$. In this case we have to suppose that $A^w(i+H^w)^{-k}$ is a trace class operator for some $k\geqslant 1$, with norm trace $\mathcal{O}(h^{-n})$.

Theorem 4.2.3 *Let $\theta \in C_0^\infty(]\frac{1}{2}, 1[; \mathbb{R})$ and $\kappa > 0$, $\delta \in]0, 1]$ be fixed arbitrarily independent of h. Suppose that there exists $T \in \mathbb{R}^{2n}$ such that $\tau_0 - H(x, \xi)$ is uniformly microhyperbolic with respect to $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ in the direction T. There exists $I \in O_{\tau_0}$ such that for all $f \in C_0^\infty(I; \mathbb{R})$, we have*

$$\operatorname{tr}\ \left(A^w f\big(H^w\big)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon\big(\tau - H^w\big)\right) = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{4.2.3}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon \in [h^{1-\delta}, \kappa[$.

Remark 4.2.4 *The above theorem remains valid if $\operatorname{supp}\theta \subset]-1, -\frac{1}{2}[$.*

Theorem 4.2.5 *Let $H_0, H_1 \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m)$ be such that $H_0 = H_1$ in a neighborhood of $\operatorname{supp}\chi$. There exists $C_0 > 0$ (large enough and independent of h) such that for $\theta \in C_0^\infty(]-\frac{1}{C_0}, \frac{1}{C_0}[; \mathbb{R})$, we have*

$$\operatorname{tr}\ \left(\chi^w \left[f(H_j^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H_j^w)\right]_0^1\right) = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{4.2.4}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$.

The following result is a consequence of the above theorems.

Theorem 4.2.6 *Assume that $\tau_0 - H(x, \xi)$ is microhyperbolic at every point (x, ξ) in $\operatorname{supp}\chi$. There exists $I \in O_{\tau_0}$ and $C > 0$ (large enough and independent of h) such that for $f \in C_0^\infty(I; \mathbb{R})$ and $\theta \in C_0^\infty(]-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}[; \mathbb{R})$ with θ equal to 1 near 0, the following full asymptotic expansion in powers of h holds*

$$\operatorname{tr}\ \left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)\right) \sim (2\pi h)^{-n} f(\tau) \sum_{j \geqslant 0} \gamma_j(\tau) h^j \quad \textit{as}\ \ h \searrow 0, \tag{4.2.5}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$. The coefficients $\gamma_j(\cdot)$ are C^∞ functions of τ, independent of θ and f.

In the following remark, we give the general formulas for the coefficients $\gamma_j(\tau)$ which will be clear from the proof of Theorem 4.2.6.

Remark 4.2.7 *Let*

$$\mathcal{G}(x, \xi, z; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j \mathcal{G}_j(x, \xi, z) \quad \textit{in}\ \ S_\delta^\delta(1; \mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m)$$

be the symbol of the resolvent $(z - H^w)^{-1}$ viewed as an h-pseudodifferential operator in the domain $\{z \in \mathbb{C}; |\Im z| \geqslant h^\delta\}$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, according to Proposition 1.1. In particular $\mathcal{G}_0(x, \xi, z) = (z - H(x, \xi))^{-1}$. For all $j \geqslant 0$, the coefficient $\gamma_j(\tau)$ is given by (see (4.3.55))

$$\gamma_j(\tau) = \frac{i}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x, \xi)\widehat{\operatorname{tr}}\big(\mathcal{G}_j(x, \xi, \tau + i0) - \mathcal{G}_j(x, \xi, \tau - i0)\big)\, dx d\xi, \tag{4.2.6}$$

where we recall that $\widehat{\operatorname{tr}}$ denotes the trace of square matrices and

$$\mathcal{G}_j(x, \xi, \tau \pm i0) := \lim_{s \to 0} \mathcal{G}_j(x, \xi, \tau \pm is).$$

In particular

$$\gamma_0(\tau) = \frac{i}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x, \xi)\, \left(\widehat{\operatorname{tr}}\left((\tau + i0 - H(x, \xi))^{-1} - (\tau - i0 - H(x, \xi))^{-1}\right)\right) dx d\xi.$$

4.2.2 *Application to the SSF for Schrödinger operators with matrix-valued potentials*

In this section we apply the above trace formula to study the spectral shift function associated to the pair of semiclassical Schrödinger operators with matrix-valued potentials

$$P_1(h) := -h^2\Delta \otimes I_m + V(x), \qquad P_0(h) := -h^2\Delta \otimes I_m + V_\infty, \tag{4.2.7}$$

in $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$, where I_m is the $m \times m$ identity matrix and $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathcal{H}_m)$ is an hermitian matrix-valued potential, i.e.,

$$V(x) = (V_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant m}, \quad V_{ij}(x) = \overline{V_{ji}(x)},\ \forall\, 1 \leqslant i,j \leqslant m,$$

which tends to V_∞ as $|x| \to +\infty$. We assume that

$$\exists\, \mu > n; \quad \|\partial_x^\alpha(V(x) - V_\infty)\|_{m\times m} = \mathcal{O}_\alpha(\langle x\rangle^{-\mu-|\alpha|}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.2.8}$$

After making a linear transformation, we may assume that

$$V_\infty = \begin{pmatrix} e_{1,\infty} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_{2,\infty} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e_{m,\infty} \end{pmatrix}, \quad \text{with } \ e_{1,\infty} \leqslant e_{2,\infty} \leqslant \cdots \leqslant e_{m,\infty}.$$

The operator $P_0(h)$ with domain $H^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ is self-adjoint. Its spectrum is

$$\sigma(P_0(h)) = [e_{1,\infty}, +\infty[.$$

Since $V - V_\infty$ is Δ-compact, the operator $P_1(h)$ admits a unique self-adjoint realization in $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ with domain $H^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$. Moreover, the essential spectra of $P_1(h)$ and $P_0(h)$ are the same. The operator $P_1(h)$ may have discrete eigenvalues in $]-\infty, e_{1,\infty}[$ and embedded ones in the interval $[e_{1,\infty}, e_{m,\infty}]$ contained in the continuous spectrum.

The spectral shift function $s_h(\tau)$ associated to the pair $(P_1(h), P_0(h))$ is defined as a real-valued function on $\mathbb{R}$ satisfying the Lifshits-Krein formula

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle = -\operatorname{tr}\big(f(P_1(h)) - f(P_0(h))\big), \quad \forall\, f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}). \tag{4.2.9}$$

By this formula, $s_h(\tau)$ is fixed up to an additive constant and we normalize it so that $s_h(\tau) = 0$ for $\tau < \inf(\sigma(P_1(h))$.

Let us denote by

$$p_1(x,\xi) := \xi^2 I_m + V(x), \quad p_0(x,\xi) := \xi^2 I_m + V_\infty, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{4.2.10}$$

the classical Hamiltonians associated with the operators $P_1(h)$ and $P_0(h)$, respectively. Let $e_1(x) \leqslant e_2(x) \leqslant \cdots \leqslant e_m(x)$ be the eigenvalues of $V(x)$ arranged in increasing order. For all $1 \leqslant j \leqslant m$, $x \mapsto e_j(x)$ is a continuous function over $\mathbb{R}^n$ as a solution of the polynomial equation

$$\det(V(x) - \lambda I_m) = \sum_{k=1}^m a_k(x)\lambda^k = 0, \quad a_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}).$$

Theorem 4.2.8 (Weak asymptotics) *Assume (4.2.8) and let $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. There exists a sequence of real numbers $(c_{2j}(f))_{j\in\mathbb{N}}$ such that*

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle \sim (2\pi h)^{-n} \sum_{j\geqslant 0} c_{2j}(f) h^{2j} \quad \text{as } h \searrow 0, \tag{4.2.11}$$

with

$$c_0(f) = \frac{\omega_n}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{+\infty}\big[f(e_{k,\infty}+\tau) - f(e_k(x)+\tau)\big]\tau^{\frac{n-2}{2}}d\tau dx, \tag{4.2.12}$$

where ω_n is the volume of the unit sphere $\mathbb{S}^{n-1}$.

For $\tau_0 \in \mathbb{R}$, we introduce the corresponding energy level

$$\Sigma_{\tau_0} := \left\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n};\ \det\left(p_1(x,\xi)-\tau_0\right)=0\right\}.$$

We have

$$\Sigma_{\tau_0} = \bigcup_{k=1}^{m}\Sigma_{\tau_0,k}, \quad \text{with} \quad \Sigma_{\tau_0,k} := \left\{(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n};\xi^2 + e_k(x) = \tau_0\right\}.$$

The following theorem is a consequence of Theorem 4.2.6.

Theorem 4.2.9 *Let $\tau_0 \notin \{e_{1,\infty}, e_{2,\infty},\cdots,e_{m,\infty}\}$. Assume (4.2.8) and $\tau_0 - p_1(x,\xi)$ is microhyperbolic at every point $(x,\xi)\in\Sigma_{\tau_0}$. There exist $I \in O_{\tau_0}$ and a large constant $C_0 > 0$ such that for $f \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$ and $\theta \in C_0^\infty(]-\frac{1}{C_0},\frac{1}{C_0}[;\mathbb{R})$ with θ equal to 1 near 0, the following asymptotic formula holds*

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-\cdot)f(\cdot)\rangle \sim (2\pi h)^{-n} f(\tau)\sum_{j\geqslant 0}\gamma_{2j}(\tau)h^{2j} \quad \text{as } h \searrow 0, \tag{4.2.13}$$

uniformly for $\tau\in\mathbb{R}$. The coefficients $\gamma_{2j}(\tau)$ are smooth functions of τ, independent of f and θ. In particular,

$$\gamma_0(\tau) = \frac{\omega_n}{2}\sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n}\left((\tau - e_{k,\infty})_+^{\frac{n-2}{2}} - (\tau - e_k(x))_+^{\frac{n-2}{2}}\right)dx, \tag{4.2.14}$$

where $\tau_+ := \max(\tau, 0)$.

Let us make the following remark on the microhyperbolicity condition required on $\tau_0 - p_1$.

Remark 4.2.10 *According to Definition 4.2.1, the assumption that $\tau_0 - p_1(x,\xi)$ is microhyperbolic at every point $(x,\xi)\in\Sigma_{\tau_0}$ is equivalent to the following condition :*

For $x_0 \in \{x\in\mathbb{R}^n; e_k(x) = \tau_0\}$, $k = 1,\dots,m$, there exists $T_1 \in \mathbb{R}^n$ and $C > 0$ such that

$$\big(\langle T_1, \nabla_x V(x_0)\rangle\omega,\omega\big) \geqslant \frac{1}{C}|\omega|^2, \quad \forall \omega \in \ker(V(x_0) - \tau_0 I_m).$$

In particular, if $e_k(x_0)$ is a simple eigenvalue of $V(x_0)$, this is equivalent to $\nabla_x e_k(x_0) \neq 0$. In fact, assume that $e_k(x_0)$ is a simple eigenvalue of $V(x_0)$. Then there exists $\eta > 0$ small *enough such that for all* $|x - x_0| < \eta$, $e_k(x)$ *is a simple eigenvalue of* $V(x)$. *For* $|x - x_0| < \eta$ *and* $\omega(x) \in \ker(V(x) - e_k(x)I_m)$, *we have*

$$V(x)\omega(x) = e_k(x)\omega(x).$$

It follows that

$$\begin{aligned}\big((\nabla_x V(x))\omega(x), \omega(x)\big) &= \big((\nabla_x e_k(x))\omega(x), \omega(x)\big) + \big((e_k(x) - V(x))\nabla_x \omega(x), \omega(x)\big)\\ &= \nabla_x e_k(x)|\omega(x)|^2 + \big(\nabla_x \omega(x), (e_k(x) - V(x))\omega(x)\big)\\ &= \nabla_x e_k(x)|\omega(x)|^2.\end{aligned}$$

In particular, we have

$$\big((\nabla_x V(x_0))\omega(x_0), \omega(x_0)\big) = \nabla_x e_k(x_0)|\omega(x_0)|^2.$$

Since $\dim\big(\ker(V(x_0) - e_k(x_0)I_m)\big) = 1$, *then*

$$\big((\nabla_x V(x_0))\omega, \omega\big) = \nabla_x e_k(x_0)|\omega|^2, \quad \forall \omega \in \ker(V(x_0) - e_k(x_0)I_m).$$

As a consequence of Theorem 4.2.9, we get a Weyl-type asymptotics with a sharp remainder estimate for the spectral shift function corresponding to the pair $(P_1(h), P_0(h))$.

Theorem 4.2.11 (Weyl-type asymptotics) *Assume that* (4.2.8) *holds with* $V_\infty = 0$. *Let* $\tau_0 \neq 0$ *such that* $\tau_0 - p_1(x, \xi)$ *is microhyperbolic at every point* $(x, \xi) \in \Sigma_{\tau_0}$. *There exists* $I \in O_{\tau_0}$ *such that*

$$s_h(\tau) = (2\pi h)^{-n} a_0(\tau) + \mathcal{O}(h^{-n+1}) \quad \text{as } h \searrow 0, \tag{4.2.15}$$

uniformly for $\tau \in I$, *with*

$$a_0(\tau) = \frac{\omega_n}{n} \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} \big(\tau_+^{\frac{n}{2}} - (\tau - e_k(x))_+^{\frac{n}{2}}\big)\, dx. \tag{4.2.16}$$

As indicated in the introduction, in the scalar case $m = 1$, a complete asymptotic expansion in powers of h of the derivative of the SSF has been obtained under a non-trapping condition on the classical trajectories corresponding to the energy surface Σ_{τ_0} (see [105]). In the present matrix-valued case, the treatment is much more complicated. In fact, since the eigenvalues are not smooth enough in general, the usual definition of the Hamilton flow for a matrix-valued Hamiltonian function does not make sense (see [75]). For this reason, we use here the notion of escape function.

More precisely, we assume that there exists a scalar escape function $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ associated to p_1 at τ_0, i.e.

$$\exists\, C > 0; \qquad \{p_1, G\}(x, \xi) \geqslant C, \quad \forall (x, \xi) \in \Sigma_{\tau_0}, \tag{4.2.17}$$

in the sense of hermitian matrices, where we recall that $\{p_1, G\}$ is the Poisson bracket of p_1, G defined by

$$\{p_1, G\} := \partial_x G \cdot \partial_\xi p_1 - \partial_\xi G \cdot \partial_x p_1.$$

Remark 4.2.12 *As pointed out in Chapter 2, in the scalar case, the assumption (4.2.17) is equivalent to the condition that τ_0 is non-trapping for the classical Hamiltonian p_1. Moreover, (4.2.17) implies that $\tau_0 - p_1(x,\xi)$ is microhyperbolic at every point $(x,\xi) \in \Sigma_{\tau_0}$ in the direction of the Hamiltonian vector field $(\partial_\xi G(x,\xi), -\partial_x G(x,\xi))$.*

Our main result is the following pointwise asymptotic expansion of the derivatives of the SSF near τ_0 which generalizes the result of [105].

Theorem 4.2.13 (Pointwise asymptotics) *Fix an energy $\tau_0 > e_{m,\infty}$. Assume that (4.2.8) and (4.2.17) are satisfied. Then, there exists $I \in O_{\tau_0}$ such that $s'_h(\cdot)$ has a complete asymptotic expansion in powers of h of the form*

$$s'_h(\tau) \sim (2\pi h)^{-n} \sum_{j\geqslant 0} \gamma_{2j}(\tau) h^{2j} \quad \textit{as } h \searrow 0, \tag{4.2.18}$$

uniformly for $\tau \in I$, where the coefficients $\gamma_{2j}(\tau)$ are given in Theorem 4.2.9.

4.2.3 *Examples and Further generalizations*

Notice that, we don't require any condition on the multiplicities of the eigenvalues of the potential $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_m)$. The pointwise asymptotics (4.2.18) holds whenever the assumption (4.2.17) on the existence of a scalar escape function associated to p_1 at τ_0 is satisfied. For example, for $G(x,\xi) = x \cdot \xi$, this assumption is equivalent to

$$2(\tau_0 - e_k(x)) - x \cdot \nabla V(x) \geqslant C, \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n;\ \tau_0 - e_k(x) \geqslant 0\}, k = 1, \cdots, m. \tag{4.2.19}$$

Thus, under the assumption (4.2.8), the asymptotics (4.2.18) holds near any large τ_0 with

$$\tau_0 > \frac{1}{2} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|x \cdot \nabla V(x)\|_{m\times m} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|V(x)\|_{m\times m}.$$

Our results extend to the case of potentials depending on h, i.e. $V(x;h) = V_0(x) + hV_1(x;h)$. In such a case, we assume (4.2.8) uniformly with respect to h. In particular, as a simple example, we can consider the case where $V_0(x)$ is a diagonal matrix, i.e.,

$$V_0(x) = \mathrm{diag}\,(e_1(x), \dots, e_m(x)).$$

If each $e_k(x)$ satisfies

$$2(\tau_0 - e_k(x)) - x \cdot \nabla_x e_k(x) \geqslant c_k > 0, \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n;\ \tau_0 - e_k(x) \geqslant 0\},$$

then (4.2.19) is satisfied for h small enough and (4.2.18) holds.

More generally, we can treat the spectral shift function associated to a pair of self-adjoint systems of h-pseudodifferential operators $(P_1(h), P_0(h))$ provided that the SSF is well defined and the existence of a scalar escape function holds.

4.3 Proofs of the results of subsection 4.2.1

This section is devoted to the proofs of Theorems 4.2.3, 4.2.5 and 4.2.6 concerning the semiclassical trace formula.

We start by the following remarks which will be used throughout our proofs. In the following by $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ we always denote an almost analytic extension of $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ with

$$\operatorname{supp} \tilde{f} \subset \{z \in \mathbb{C};\ |\Im z| \leqslant 1\}.$$

Remark 4.3.1 *(i) Let* P *be a selfadjoint operator acting in some Hilbert space. By Helffer-Sjöstrand formula (1.3.4), if* g *is real analytic near* $\operatorname{supp}\tilde{f}$*, then*

$$f(P)g(P) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)g(z)(z-P)^{-1}L(dz). \tag{4.3.1}$$

(ii) Let $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *and* $\tau \in \mathbb{R}$*. We introduce*

$$\mathcal{I}_{\tilde{f}}(\tau;h) := -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-z)K(z;h)L(dz), \tag{4.3.2}$$

where K *is a complex-valued function. We assume that there exists a neighborhood* U *of* $\operatorname{supp}\tilde{f}$ *such that* K *is analytic in* $\widetilde{U} := U \cap \{z \in \mathbb{C}; \Im z \neq 0\}$ *and* $K(z;h) = \mathcal{O}(|\Im z|^{-1})$*, uniformly for* $z \in \widetilde{U}$ *and* h *fixed. By Stokes's formula we have*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\tilde{f}}(\tau;h) &= \lim_{s\searrow 0} -\frac{1}{\pi}\int_{|\Im z|>s} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-z)K(z;h)L(dz)\\ &= \lim_{s\searrow 0} \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left[\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-z)K(z;h)\right]_{z=t-is}^{z=t+is} dt.\end{aligned}$$

From the above equation we deduce that if $\tilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im z|^\infty)$*, then* $\mathcal{I}_{\tilde{f}}(\tau;h) = 0$*. Consequently, using Remark 1.1 which asserts that the difference of two almost analytic extensions of the same function is a* $\mathcal{O}(|\Im z|^\infty)$*, this implies that (4.3.2) does not depend on the choice of the almost analytic extension* $\tilde{f}$ *of* f*. In particular, for* $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *with* $\psi = 1$ *near* 0*, if we define*

$$\psi_L(z) := \psi\left(\frac{\Im z}{L}\right), \quad L > 0, \tag{4.3.3}$$

then $\tilde{f}\psi_L$ *is also an almost analytic extension of* f*, and we have*

$$\mathcal{I}_{\tilde{f}}(\tau;h) = \mathcal{I}_{\tilde{f}\psi_L}(\tau;h). \tag{4.3.4}$$

In the following, we shall use repeatedly this remark by inserting functions of the type (4.3.3) into integrals of the form (4.3.2).

4.3.1 *Proof of Theorem 4.2.3*

For $\tau \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon > 0$, we define

$$\mathcal{I}(\tau,\varepsilon;h) := \operatorname{tr}\left(A^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon\left(\tau - H^w\right)\right). \tag{4.3.5}$$

Using (4.3.1) with $g(z) := \mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)$, we get

$$f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - H^w) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)(z - H^w)^{-1}L(dz).$$

Put

$$K(z;h) := \operatorname{tr}\left(A^w(z - H^w)^{-1}\right), \quad \Im z \neq 0. \tag{4.3.6}$$

Then, we have

$$\mathcal{I}(\tau,\varepsilon;h) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)K(z;h)L(dz). \tag{4.3.7}$$

From now on $M > 0$ is a constant independent of h and we put

$$\zeta(h) := h\log(\frac{1}{h}), \quad L(h) = L := \frac{M\zeta(h)}{\varepsilon}. \tag{4.3.8}$$

Let $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$ be such that

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{for} \quad |t| \geqslant 2 \end{cases} \tag{4.3.9}$$

and we define ψ_L according to (4.3.3). Using (4.3.4), we insert ψ_L into (4.3.7) to get

$$\mathcal{I}(\tau,\varepsilon;h) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)K(z;h)L(dz). \tag{4.3.10}$$

We shall firstly prove that

$$\mathcal{I}(\tau,\varepsilon;h) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\{|\Im z| \geqslant L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)K(z;h)L(dz), \tag{4.3.11}$$

uniformly for $0 < \varepsilon \leqslant ch^{-\nu}$, for all arbitrary fixed constants ν and $c > 0$. In fact, using that $\bar{\partial}\tilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im z|^\infty)$ and the definition of ψ_L, we deduce

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z) &= \bar{\partial}\tilde{f}(z)\psi_L(z) + \tilde{f}(z)\bar{\partial}\psi_L(z) \\
&= \mathcal{O}(|\Im z|^\infty)\psi_L(z) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)\tilde{f}(z)1_{[-2,-1]\cup[1,2]}\left(\frac{\Im z}{L}\right) \\
&= \mathcal{O}(h^\infty)\psi_L(z) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{L}\right)\tilde{f}(z)1_{[-2,-1]\cup[1,2]}\left(\frac{\Im z}{L}\right).
\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

In particular for $|\Im z| < L$, we have

$$\bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z) = \mathcal{O}\left(|\Im z|^\infty\right)\psi_L(z) = \mathcal{O}(h^\infty)\psi_L(z). \tag{4.3.13}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} |K(z;h)| &= \left|\mathrm{tr}\left(A^w(z-H^w)^{-1}\right)\right| \\ &\leqslant \|A^w\|_{\mathrm{tr}}\|(z-H^w)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} \\ &= \mathcal{O}(h^{-n}|\Im z|^{-1}), \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

uniformly for $\Im z \neq 0$. Combining (4.3.13), (4.3.14) with the estimate (see Lemma D.0.3)

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau-z) = \mathcal{O}(\frac{\varepsilon}{h}e^{\frac{\varepsilon|\Im z|}{h}}) = \mathcal{O}(\varepsilon h^{-M-1}), \quad \forall z \in \{|\Im z| < L\},$$

we get

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\{|\Im z|<L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau-z)K(z;h)L(dz) = \mathcal{O}(h^\infty),$$

uniformly for $0 < \varepsilon \leqslant ch^{-\nu}$. Thus, we proved (4.3.11).

We define

$$\mathcal{I}_\pm(\tau,\varepsilon;h) := -\frac{1}{\pi}\int_{\{\pm\Im z \geqslant L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau-z)\,K(z;h)L(dz). \tag{4.3.15}$$

According to (4.3.11), we have

$$\mathcal{I}(\tau,\varepsilon;h) \equiv \mathcal{I}_+(\tau,\varepsilon;h) + \mathcal{I}_-(\tau,\varepsilon;h),$$

uniformly for $0 < \varepsilon \leqslant ch^{-\nu}$.

In the following, we shall study the behaviour of $\mathcal{I}_-(\tau,\varepsilon;h)$ and $\mathcal{I}_+(\tau,\varepsilon;h)$ as $h \searrow 0$.

- **Study of** $\mathcal{I}_-(\tau,\varepsilon;h)$ **:**

According to the Paley-Wiener estimate (D.0.2), since supp $\theta \subset]\frac{1}{2},1[$, we have uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau-z) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{h}e^{\frac{\varepsilon\Im z}{h}}\right) & \text{for} \quad \Im z > 0 \\ \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{h}e^{\frac{\varepsilon\Im z}{2h}}\right) & \text{for} \quad \Im z < 0. \end{cases} \tag{4.3.16}$$

In particular, for $\Im z \leqslant -L$, we get

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau-z) = \mathcal{O}(\varepsilon h^{\frac{M}{2}-1}).$$

On the other hand, (4.3.12) and (4.3.14) yield, for $\Im z \leqslant -L$,

$$\bar{\partial}(\tilde{f}\psi_L)(z)K(z;h) = \mathcal{O}(h^\infty) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2 h^{-n-2}\log(\frac{1}{h})^{-2}\right).$$

Therefore,

$$\mathcal{I}_-(\tau,\varepsilon;h) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^3 h^{\frac{M}{2}-n-3}\log(\frac{1}{h})^{-2}\right). \tag{4.3.17}$$

Since $M > 0$ is arbitrary, this implies that

$$\mathcal{I}_-(\tau,\varepsilon;h) \equiv 0, \tag{4.3.18}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon \in [h^{1-\delta}, \kappa[$, for all $\kappa > 0$ and $\delta \in]0,1]$. Notice that (4.3.18) remains true if ε is at most of polynomial order in h.

• **Study of** $\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h)$ **:**

Turn now to the study of $\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h)$. We have

$$\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h) = -\frac{1}{\pi}\int_{\{\Im z \geqslant L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)\, K(z;h)L(dz). \tag{4.3.19}$$

By assumption, there exists $T = (T_1, T_2) \in \mathbb{R}^{2n}$ such that $\tau_0 - H(x,\xi)$ is uniformly microhyperbolic in the direction T with respect to $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$. This remains true in a small neighbourhood of τ_0, that is, there exists $I \in O_{\tau_0}$ such that $\tau - H(x,\xi)$ is uniformly microhyperbolic in the direction T with respect to $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ and $\tau \in I$. In fact, by the Definition 4.2.1, the uniform microhyperbolicity condition of $\tau_0 - H(x,\xi)$ in the direction T means that there exists $C_0, C_1 > 0$ independent of $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ and τ_0 such that for all $w \in \mathbb{C}^m$, we have

$$\big(\langle T, \nabla_{x,\xi}(\tau_0 - H(x,\xi))\rangle w, w\big) \geqslant C_0|w|^2 - C_1\big|(\tau_0 - H(x,\xi))w\big|^2.$$

Using that $\big|(\tau_0 - H(x,\xi))\omega\big|^2 \leqslant 2\big|(\tau - \tau_0)\omega\big|^2 + 2\big|(\tau - H(x,\xi))\omega\big|^2$, we get

$$\big(\langle T, \nabla_{x,\xi}(\tau - H(x,\xi))\rangle w, w\big) \geqslant (C_0 - 2C_1(\tau_0 - \tau)^2)|w|^2 - 2C_1\big|(\tau - H(x,\xi))w\big|^2,$$

which by choosing $|\tau - \tau_0|$ small enough implies that $\tau - H(x,\xi)$ is uniformly microhyperbolic in the direction T with respect to $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ and τ.

For $t \in \mathbb{R}$, we define the unitary operator

$$U_t := e^{\frac{it}{h}(T_2 \cdot x - T_1 \cdot hD_x)}.$$

Clearly, we have

$$H_t^w := U_t^{-1}H^w(x, hD_x)U_t = H^w\big((x, hD_x) + tT\big) = H^w(x + tT_1, hD_x + tT_2)$$

and

$$A_t^w := U_t^{-1}A^w(x, hD_x)U_t = A^w\big((x, hD_x) + tT\big) = A^w(x + tT_1, hD_x + tT_2).$$

Let $\widetilde{H}, \widetilde{A}$ be two almost analytic extensions of H and A respectively, which are bounded together with all their derivatives. That is, $\widetilde{H}$ and $\widetilde{A}$ satisfy

$$\widetilde{H}_{|\mathbb{R}^{2n}} = H, \quad \widetilde{A}_{|\mathbb{R}^{2n}} = A,$$

and

$$\bar{\partial}_z\widetilde{H}(z), \bar{\partial}_z\widetilde{A}(z) = \mathcal{O}(|\Im z|^\infty), \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2n} + i\overline{\Omega} \subset \mathbb{C}^{2n}, \tag{4.3.20}$$

where $\overline{\Omega}$ is some compact subset in $\mathbb{R}^{2n}$. For $t \in \mathbb{C}$ with small imaginary part, we define

$$\widetilde{H}_t^w := \widetilde{H}^w((x, hD_x) + tT) \quad \text{and} \quad \widetilde{A}_t^w := \widetilde{A}^w((x, hD_x) + tT).$$

By Taylor's formula (with respect to $\Im t$), we have

$$\begin{aligned} z-\widetilde{H}_t(x,\xi) &= z-\widetilde{H}\big((x,\xi)+\Re t T+i\Im t T\big) \\ &= z-H\big((x,\xi)+\Re t T\big)-i\Im t\langle T,\nabla_{x,\xi}H\big((x,\xi)+\Re t T\big)\rangle+\mathcal{O}(|\Im t|^2). \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Then,

$$z-\widetilde{H}_t^w=(z-H^w_{\Re t})\Big[I-(z-H^w_{\Re t})^{-1}\Big(i\Im t\,\mathrm{Op}_h^w\big(\langle T,\nabla_{x,\xi}H\big((x,\xi)+\Re t T\big)\rangle\big)+\mathcal{O}(|\Im t|^2)\Big)\Big].$$

Thus, one easily sees by using the Calderón-Vaillancourt Theorem (Theorem 1.3) that there exists a constant $C_0>0$ depending only on the L^∞-norms of a finite numbers of derivatives of H such that $(z-\widetilde{H}_t^w)^{-1}$ exists for $|\Im z|\geqslant C_0|\Im t|$ and we have

$$\|(z-\widetilde{H}_t^w)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))}=\mathcal{O}(|\Im z|^{-1}), \tag{4.3.22}$$

uniformly for $|\Im z|\geqslant C_0|\Im t|$.

Set

$$\widetilde{K}_t(z;h):=\operatorname{tr}\big(\widetilde{A}_t^w(z-\widetilde{H}_t^w)^{-1}\big),\quad |\Im z|\geqslant C_0|\Im t|.$$

Since $\widetilde{A}$ and $\widetilde{H}$ are almost analytic extensions of A and H respectively, it follows from (4.3.20) that

$$\bar{\partial}_t\widetilde{H}_t,\bar{\partial}_t\widetilde{A}_t=\mathcal{O}(|\Im t|^\infty). \tag{4.3.23}$$

By Taylor's formula, we have

$$\widetilde{A}_t(x,\xi)=A\big((x,\xi)+\Re t T\big)+i\Im t\langle T,\nabla_{x,\xi}A\big((x,\xi)+\Re t T\big)\rangle+R(t,x,\xi),$$

where the remainder term R satisfies $\|R(t,\cdot,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi})}=\mathcal{O}(|\Im t|^2)$ and since by assumption $\partial^\gamma_{(x,\xi)}A\in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ for all $\gamma\in\mathbb{N}^{2n}$, R and its derivatives at any order with respect to (x,ξ) belong to $L^1(\mathbb{R}^{2n})$. It follows that for $|\Im t|$ small enough, $\widetilde{A}_t^w$ is a trace class operator with norm trace $\mathcal{O}(h^{-n})$ (see Theorem 1.11).

Then, using (4.3.22) and (4.3.23), we obtain

$$\begin{aligned} |\bar{\partial}_t\widetilde{K}_t(z;h)| &= \operatorname{tr}\big(\bar{\partial}_t\widetilde{A}_t^w(z-\widetilde{H}_t^w)^{-1}+\widetilde{A}_t^w\bar{\partial}_t\widetilde{H}_t^w(z-\widetilde{H}_t^w)^{-2}\big) \\ &\leqslant \|\bar{\partial}_t\widetilde{A}_t^w\|_{\mathrm{tr}}\|(z-\widetilde{H}_t^w)^{-1}\|+\|\widetilde{A}_t^w\|_{\mathrm{tr}}\|\bar{\partial}_t\widetilde{H}_t^w(z-\widetilde{H}_t^w)^{-2}\| \\ &= \mathcal{O}\Big(\frac{h^{-n}|\Im t|^\infty}{|\Im z|^2}\Big), \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

uniformly on $\{z\in\operatorname{supp}\tilde{f};\ |\Im z|\geqslant C_0|\Im t|\}$. On the other hand, since U_t is unitary for $t\in\mathbb{R}$, it follows from the cyclicity of the trace that $\widetilde{K}_t$ is independent of $\Re t$. This implies that

$$\bar{\partial}_t\widetilde{K}_t(z;h)=\frac{i}{2}\partial_{\Im t}\widetilde{K}_t(z;h)\quad\text{and}\quad\widetilde{K}_t(z;h)=K(z;h),\quad\forall t\in\mathbb{R}. \tag{4.3.25}$$

We have, uniformly for $|\Im z| \geqslant C_0|\Im t|$,

$$
\begin{aligned}
K(z;h) - \widetilde{K}_{i\Im t}(z;h) &= \widetilde{K}_{\Re t}(z;h) - \widetilde{K}_{\Re t + i\Im t}(z;h) \\
&= -\int_0^{\Im t} \frac{d}{ds}\widetilde{K}_{\Re t + is}(z;h)ds \\
&= \int_0^{\Im t} \mathcal{O}\left(\frac{h^{-n}|s|^{\infty}}{|\Im z|^2}\right)ds \\
&= \mathcal{O}\left(\frac{h^{-n}|\Im t|^{\infty}}{|\Im z|^2}\right),
\end{aligned}
\tag{4.3.26}
$$

where the third estimate follows immediately from (4.3.24).

Fix $t_0 \in \mathbb{C}$ with $\Im t_0 = \frac{L}{C_0} = \frac{M}{C_0 \varepsilon}\zeta(h)$ and put $\beta := i\Im t_0$. By the preceding estimate, we have

$$
K(z;h) - \widetilde{K}_{\beta}(z;h) = \mathcal{O}(h^{\infty}),
\tag{4.3.27}
$$

uniformly for $z \in \{z \in \mathbb{C};\, |\Im z| \geqslant L\}$ and $\varepsilon \in [h^{1-\delta}, \kappa[$. Therefore, by going back to (4.3.19), we have

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{+}(\tau,\varepsilon;h) &\equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\{\Im z \geqslant L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\varepsilon}(\tau - z)K(z;h)L(dz), \\
&\equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\{\Im z \geqslant L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\varepsilon}(\tau - z)\widetilde{K}_{\beta}(z;h)L(dz),
\end{aligned}
\tag{4.3.28}
$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon \in [h^{1-\delta}, \kappa[$.

Lemma 4.3.2 *Let $\beta = \frac{iL}{C_0} = \frac{iM}{C_0\varepsilon}\zeta(h)$ be as above. The function $z \mapsto \widetilde{K}_{\beta}(z;h)$ extends as a holomorphic function to the zone $\left\{z \in \mathbb{C};\, \Im z \geqslant -\frac{|\beta|}{2}\right\}$.*

Proof. As in (4.3.21), by Taylor's formula we have

$$
z - \widetilde{H}_{\beta}(x,\xi) = z - H(x,\xi) - \beta\langle T, \nabla_{x,\xi}H(x,\xi)\rangle + \mathcal{O}(|\beta|^2),
$$

which yields

$$
\Im(z - \widetilde{H}_{\beta}(x,\xi)) = \Im z - |\beta|\langle T, \nabla_{x,\xi}H(x,\xi)\rangle + \mathcal{O}(|\beta|^2).
$$

The global microhyperbolicity condition in the direction T implies

$$
-|\beta|\langle T, \nabla_{x,\xi}H(x,\xi)\rangle \geqslant c|\beta|\, I_m - C|\beta|\, (\Re z - H(x,\xi))^{*}\, (\Re z - H(x,\xi))
$$

uniformly for $\Re z \in I$, where $C, c > 0$ are independent of M and h. Here $*$ stands for the usual complex adjoint. Then, we obtain for small h (see (C.0.8) for more details)

$$
\Im(z - \widetilde{H}_{\beta}(x,\xi)) + C|\beta|(z - \widetilde{H}_{\beta}(x,\xi))^{*}(z - \widetilde{H}_{\beta}(x,\xi)) \geqslant c(|\beta| + \Im z)I_m,
\tag{4.3.29}
$$

uniformly on $\{z \in \mathbb{C};\ \Im z > 0,\ \Re z \in I\}$.

Now we pass from the symbolic calculus level to the h-pseudodifferential calculus. The semiclassical version of the sharp Gårding inequality (see Theorem 1.5) and (4.3.29) imply

$$\begin{aligned}
\Im\big(\mathrm{Op}_h^w(z-\widetilde{H}_\beta)u,u\big) &+ C|\beta|\,\|\mathrm{Op}_h^w(z-\widetilde{H}_\beta)u\|^2 \\
&= \big(\mathrm{Op}_h^w\big(\Im(z-\widetilde{H}_\beta)+C|\beta|(z-\widetilde{H}_\beta)^*(z-\widetilde{H}_\beta)\big)u,u\big) \\
&\geqslant c(|\beta|+\Im z)\|u\|^2-\mathcal{O}(h)\|u\|^2 \\
&\geqslant \frac{c}{3}(|\beta|+\Im z)\|u\|^2, \qquad (4.3.30)
\end{aligned}$$

for all $u \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ and h small enough. Here we used the fact that $h = o(|\beta|)$. Combining (4.3.30) with the inequality $ab \leqslant \frac{c|\beta|}{6}a^2 + \frac{3}{2c|\beta|}b^2$, we obtain

$$\begin{aligned}
\frac{c}{3}(|\beta|+\Im z)\|u\|^2 &\leqslant \|\mathrm{Op}_h^w(z-\widetilde{H}_\beta)u\|\|u\| + C|\beta|\|\mathrm{Op}_h^w(z-\widetilde{H}_\beta)u\|^2 \\
&\leqslant \frac{c|\beta|}{6}\|u\|^2 + \big(\frac{3}{2c|\beta|}+C|\beta|\big)\|\mathrm{Op}_h^w(z-\widetilde{H}_\beta)u\|^2
\end{aligned}$$

which yields

$$\frac{c}{6}(|\beta|+\Im z)\|u\|^2 \leqslant \big(\frac{3}{2c|\beta|}+C|\beta|\big)\|\mathrm{Op}_h^w(z-\widetilde{H}_\beta)u\|^2, \qquad \forall u \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m).$$

We conclude that $z \mapsto (z-\widetilde{H}_\beta^w)^{-1}$ extends as a holomorphic function to the zone $\left\{z \in \mathbb{C};\ \Im z \geqslant -\frac{|\beta|}{2}\right\}$ and we have

$$\|(z-\widetilde{H}_\beta^w)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}(|\Im z|^{-1}), \qquad (4.3.31)$$

uniformly on $\left\{z \in \mathbb{C};\ \Im z \geqslant -\frac{|\beta|}{2}, \Im z \neq 0\right\}$. This ends the proof of the lemma. ■

Let $\widetilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ be such that $\widetilde{\psi}(s) = \psi(s)$ for $s > 0$, $\widetilde{\psi}(s) = 1$ for $-\frac{1}{4C_0} < s < 0$, and $\widetilde{\psi}(s) = 0$ for $s < -\frac{1}{2C_0}$, and define $\widetilde{\psi}_L$ as in (4.3.3). Then, by going back to (4.3.28), we get

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_+(\tau,\epsilon;h) &\equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\{\Im z \geqslant L\}} \bar{\partial}\big(\tilde{f}\psi_L\big)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\epsilon(\tau-z)\widetilde{K}_\beta(z;h)L(dz) \\
&\equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\{\Im z > 0\}} \bar{\partial}\big(\tilde{f}\psi_L\big)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\epsilon(\tau-z)\widetilde{K}_\beta(z;h)L(dz) \\
&\equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\{\Im z > 0\}} \bar{\partial}\big(\tilde{f}\psi_L\widetilde{\psi}_L\big)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\epsilon(\tau-z)\widetilde{K}_\beta(z;h)L(dz) \\
&\equiv \frac{1}{\pi}\int_{\{\Im z < 0\}} \bar{\partial}\big(\tilde{f}\psi_L\widetilde{\psi}_L\big)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\epsilon(\tau-z)\widetilde{K}_\beta(z;h)L(dz), \qquad (4.3.32)
\end{aligned}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$ and $\epsilon \in [h^{1-\delta},\kappa[$. Notice that to pass from the first equation to the second we used (4.3.12) and the fact that

$$\widetilde{K}_\beta(z;h) = \mathcal{O}(h^{-n}|\Im z|^{-1}), \qquad (4.3.33)$$

uniformly for $\{z \in \operatorname{supp} \tilde{f}; \Im z \geqslant -\frac{|\beta|}{2}, \Im z \neq 0\}$ which follows from (4.3.31). To pass from the second to the third equation we used the definition of $\widetilde{\psi}_L$ while the last equation follows from the Cauchy formula for analytic functions.

Now, with the same arguments as for $\mathcal{I}_-(\tau, \varepsilon; h)$, we see that

$$\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h) = \mathcal{O}\left(\varepsilon^3 h^{\frac{M}{2}-n-3} \log(\frac{1}{h})^{-2}\right),$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon \in [h^{1-\delta}, \kappa[$, which gives the result since $M > 0$ is arbitrary. This ends the proof of Theorem 4.2.3. ∎

Remark 4.3.3 *We clearly see that the above proof works for $\theta \in C_0^\infty(]-1, -\frac{1}{2}[; \mathbb{R})$ and then Theorem 4.2.3 remains valid in this case.*

In the following corollary, we show how (4.2.3) can be extended to $\varepsilon \in [\kappa, h^{-\nu}[$, with $\kappa > 0$ and $\nu \in \mathbb{N}$ fixed.

Corollary 4.3.4 *Let U be an open bounded complex set such that $\operatorname{supp} \tilde{f} \subset U$. We assume that the function $U \cap \{\Im z > 0\} \ni z \mapsto K(z; h)$ defined by (4.3.6) extends as a holomorphic function $\widetilde{K}(z; h)$ to the zone $U_N(h) := U \cap \{\Im z \geqslant -N\zeta(h)\}$ for all $N \in \mathbb{N}$ (see Figure 1) and satisfies an estimate of the type*

$$\widetilde{K}(z; h) = \mathcal{O}(h^{-d(n)}),$$

uniformly for $z \in U_N(h)$, with $d(n)$ depends only on the dimension. Then (4.2.3) remains true uniformly for $\varepsilon \in [\kappa, h^{-\nu}[$ with $\kappa > 0$ and $\nu \in \mathbb{N}$ fixed arbitrarily. More precisely, we have

$$\operatorname{tr}\left(A^w f(H^w) \mathcal{F}_h^{-1} \theta_\varepsilon(\tau - H^w)\right) = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{4.3.34}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon \in [\kappa, h^{-\nu}[$.

Proof. First, since ν is fixed and M is arbitrary then (4.3.17) yields

$$\mathcal{I}_-(\tau, \varepsilon; h) \equiv 0, \tag{4.3.35}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon \in [\kappa, h^{-\nu}[$.

Next, since $\operatorname{supp} \psi_L \subset \left\{z \in \mathbb{C}; |\Im z| \leqslant \frac{2M}{\kappa}\zeta(h)\right\}$, for all $\varepsilon \in [\kappa, h^{-\nu}[$, it follows from our assumption on $z \mapsto K(z; h)$ with $N > \frac{2M}{\kappa}$ and the Cauchy formula that

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\{\Im z > 0\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z) \mathcal{F}_h^{-1} \theta_\varepsilon(\tau - z) K(z; h) L(dz) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\{\Im z < 0\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z) \mathcal{F}_h^{-1} \theta_\varepsilon(\tau - z) \widetilde{K}(z; h) L(dz).
\end{aligned}$$

Then, the same arguments as for $\mathcal{I}_-(\tau, \varepsilon; h)$ yield

$$\mathcal{I}_+(\tau, \varepsilon; h) \equiv 0,$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon \in [\kappa, h^{-\nu}[$, which together with (4.3.35) imply (4.3.34). ∎

Remark 4.3.5 *Later, in the application to the study of the SSF, we shall show that the assumption (4.2.17) on the existence of an escape function associated to p_1 at τ_0 implies that the function σ_h defined by (4.4.10) satisfies the conditions assumed on $K(z; h)$ in an open complex neighborhood U of the energy τ_0 (see Lemma 4.4.5). This will be crucial for the proof of the pointwise asymptotics (4.2.18).*

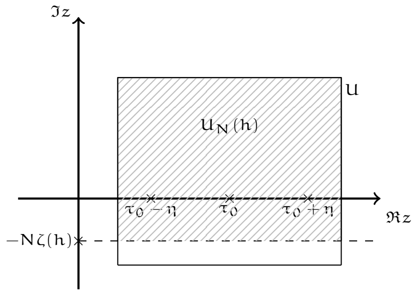

Figure 1: Analytic extension region of $z \mapsto K(z;h)$

4.3.2 *Proof of Theorem 4.2.5*

Let $\theta \in C_0^\infty(]-1,1[;\mathbb{R})$ and put $\varepsilon = \frac{1}{C_0}$, with $C_0 > 0$ a large constant which will be fixed later. We define

$$\mathcal{I}(\tau;h) := \mathrm{tr}\left(\chi^w\left[f(H_j^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - H_j^w)\right]_0^1\right),$$

where we recall that $[a_j]_0^1 := a_1 - a_0$. As in the above proof, applying (4.3.1) with $g(z) := \mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)$, we get

$$\mathcal{I}(\tau;h) = -\frac{1}{\pi}\int \bar{\partial}(\tilde{f}\psi_L)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)\mathrm{tr}\left(\chi^w\left[(z-H_j^w)^{-1}\right]_0^1\right)L(dz), \tag{4.3.36}$$

where $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ is as in (4.3.9) and ψ_L defined by (4.3.3) (with L given by (4.3.8)). According to the Paley-Wiener estimate (D.0.1), we have

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z) = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{h}e^{\frac{\varepsilon|\Im z|}{h}}\right), \tag{4.3.37}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$. In particular, in the support of ψ_L, we have

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z) = \mathcal{O}(h^{-2M-1}). \tag{4.3.38}$$

On the other hand, using the fact that $\|\chi^w\|_{\mathrm{tr}} = \mathcal{O}(h^{-n})$ and

$$\|(z-H_j^w)^{-1}\| = \mathcal{O}(|\Im z|^{-1}), \quad j = 0,1,$$

in norm $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$, we get

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{tr}\left(\chi^w\left[(z-H_j^w)^{-1}\right]_0^1\right)\right| &\leqslant \|\chi^w\|_{\mathrm{tr}}\left(\left\|(z-H_1^w)^{-1}\right\| + \left\|(z-H_0^w)^{-1}\right\|\right)\\ &= \mathcal{O}(h^{-n}|\Im z|^{-1}).\end{aligned} \tag{4.3.39}$$

It follows using (4.3.12) and the above estimate that

$$\mathcal{I}(\tau;h) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\{L\leqslant|\Im z|\leqslant 2L\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_L\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)\mathrm{tr}\left(\chi^w\left[(z-H_j^w)^{-1}\right]_0^1\right)L(dz), \tag{4.3.40}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$. Let $B_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ be such that

$$B_0 = \begin{cases} 1 & \text{near} \quad \operatorname{supp}\chi \\ 0 & \text{near} \quad \operatorname{supp}(H_1 - H_0). \end{cases} \tag{4.3.41}$$

Let $\alpha > 0$ be a fixed constant (which will be choosen later) and put

$$B(x,\xi) := \alpha B_0(x,\xi) \quad \text{and} \quad b(x,\xi) := e^{B(x,\xi)\log\frac{1}{h}}, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

For all $\delta > 0$ and $l := \alpha\|B_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2n})}$, we clearly see that $b \in S^l_\delta(1;\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$. Let us denote by $e^{B\log\frac{1}{h}}$ the corresponding h-pseudodifferential operator which is bounded, elliptic and has an inverse operator $(e^{B\log\frac{1}{h}})^{-1}$ with symbol $\widetilde{b} = \widetilde{b}(x,\xi;h)$ in the same class. The symbol $\widetilde{b}$ admits an asymptotic expansion in powers of h of the form (see Theorem 1.4)

$$\widetilde{b}(x,\xi;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j \widetilde{b}_j(x,\xi) \quad \text{in } S^l_\delta(1;\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R}),$$

where $\widetilde{b}_0(x,\xi) = (b(x,\xi))^{-1}$ and for $j \geqslant 1$, $\widetilde{b}_j$ is a finite linear combination of terms of the form

$$(b(x,\xi))^{-1} r_1(x,\xi)(b(x,\xi))^{-1} r_2(x,\xi)\cdots r_k(x,\xi)(b(x,\xi))^{-1}$$

with $k < 2j+1$ and the functions r_k depend on b and its derivatives. Using the h-pseudodifferential calculus as well as the Calderón-Vaillancourt theorem (see chapter 1 and Appendix A of chapter 3), we see that for some $k \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned} e^{B\log\frac{1}{h}}(z - H_1^w)(e^{B\log\frac{1}{h}})^{-1} &= \operatorname{Op}_h^w\big(b(x,\xi)\#(z - H_1(x,\xi))\#\widetilde{b}(x,\xi;h)\big) \\ &= z - H_1^w + \mathcal{O}(\alpha\zeta(h))\|\nabla B_0\|_{C^k}, \end{aligned} \tag{4.3.42}$$

in norm $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))$, for $h \leqslant h(\alpha)$, where $h(\alpha) > 0$.

It follows that for $|\Im z| \geqslant C\alpha\zeta(h)$ (where C depends only on $\|H_1\|_{C^k}$ and $\|B_0\|_{C^k}$) the right hand side of (4.3.42) is invertible and we have

$$\left\| e^{B\log\frac{1}{h}}(z - H_1^w)^{-1}(e^{B\log\frac{1}{h}})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m))} = \mathcal{O}(|\Im z|^{-1}). \tag{4.3.43}$$

On the other hand, since $B = \alpha$ near $\operatorname{supp}\chi$ and $B = 0$ near $\operatorname{supp}(H_1 - H_0)$, it follows from the h-pseudodifferential calculus again that

$$(e^{B\log\frac{1}{h}})^{-1}(H_1^w - H_0^w) = (H_1^w - H_0^w) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

$$\chi^w e^{B\log\frac{1}{h}} = e^{\alpha\log\frac{1}{h}}\chi^w + \mathcal{O}(h^\infty)$$

in operator norm and trace norm respectively. Thus

$$\begin{aligned} & e^{\alpha\log\frac{1}{h}} \operatorname{tr}\left(\chi^w(z - H_1^w)^{-1}(H_1^w - H_0^w)(z - H_0^w)^{-1}\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\chi^w e^{B\log\frac{1}{h}}(z - H_1^w)^{-1}(e^{B\log\frac{1}{h}})^{-1}(H_1^w - H_0^w)(z - H_0^w)^{-1}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{h^\infty}{|\Im z|^2}\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\chi^w(z - e^{B\log\frac{1}{h}}H_1^w(e^{B\log\frac{1}{h}})^{-1})^{-1}(H_1^w - H_0^w)(z - H_0^w)^{-1}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{h^\infty}{|\Im z|^2}\right). \end{aligned}$$

Using the resolvent identity and combining the above equality with (4.3.43), we deduce that for $|\Im z| \geqslant C\alpha\zeta(h)$, we have

$$\operatorname{tr}\left(\chi^w\left[(z-H_j^w)^{-1}\right]_0^1\right) = \mathcal{O}\left(\frac{h^{\alpha-n}}{|\Im z|^2}\right). \tag{4.3.44}$$

We choose $\alpha = \frac{M}{C\varepsilon} = \frac{MC_0}{C}$. It follows using (4.3.38), (4.3.40) and (4.3.44) that

$$\mathcal{I}(\tau;h) = \mathcal{O}\big(h^{M(\frac{C_0}{C}-2)-n-3}\log(\frac{1}{h})^{-2}\big).$$

Next, we choose C_0 large enough so that $C_0 > 2C$. This ends the proof of Theorem 4.2.5 since M is arbitrary. We recall that C depends only on $\|H_1\|_{C^k}$ and $\|B_0\|_{C^k}$. ■

Turn now to the proof of Theorem 4.2.6.

4.3.3 *Proof of Theorem 4.2.6*

Let $\theta \in C_0^\infty(]-\frac{1}{C},\frac{1}{C}[;\mathbb{R})$ be equal to one near zero, with $C > 0$ large enough. Without any loss of generality, we may assume that χ is supported in a small neighborhood of a fixed point $(x_0,\xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$. In fact, we may write

$$\chi(x,\xi) = \sum_{j\in J}\chi(x,\xi)\chi_j(x,\xi),$$

where J is a finite index set, $\sum_{j\in J}\chi_j = 1$ near $\operatorname{supp}\chi$ and each χ_j has its support in a small neigbourhood of a fixed point $(x_j,\xi_j) \in \operatorname{supp}\chi$.

By assumption, $\tau_0 - H(x,\xi)$ is microhyperbolic near (x_0,ξ_0). Since, modifying H outside the support of χ leads to an error of order $\mathcal{O}(h^\infty)$ in the trace of $\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)$ according to Theorem 4.2.5, then choosing the support of χ small enough and using Theorem C.0.1, we may assume that $\tau - H(x,\xi)$ is uniformly microhyperbolic with respect to $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ and τ near τ_0 in some fixed direction T.

Let N be an integer such that $2^{-N} \sim h^{1-\delta}$ with $\delta \in]0,\frac{1}{2}[$ and put $\tilde{\varepsilon} = 2^{-N}$. In the following we shall represent the difference $\theta - \theta_{\tilde{\varepsilon}}$ as a finite sum of functions appearing in Theorem 4.2.3 and Remark 4.2.4. We write

$$\theta(t) - \theta_{\tilde{\varepsilon}}(t) = \sum_{i=1}^{N}\Psi(2^{i-1}t),$$

where $\Psi(t) := \theta(t) - \theta(2t) \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Clearly, $\Psi(t) = \Psi_1(t) + \Psi_2(t)$, where Ψ_1 and Ψ_2 are equal to 0 near zero and for some $C' > 0$, we have

$$\operatorname{supp}\Psi_1 \subset]0,\frac{1}{C'}[\quad \text{and} \quad \operatorname{supp}\Psi_2 \subset]-\frac{1}{C'},0[.$$

For $i \in \{1,\dots,N\}$ and $j \in \{1,2\}$, put

$$\Psi_{j,\varepsilon_i}(t) := \Psi_j\left(\frac{t}{\varepsilon_i}\right), \quad \varepsilon_i := 2^{1-i}.$$

We have

$$\theta(t) - \theta_{\tilde{\varepsilon}}(t) = \sum_{i=1}^{N} \Psi_{1,\varepsilon_i}(t) + \Psi_{2,\varepsilon_i}(t).$$

Applying Theorem 4.2.3 (resp. Remark 4.2.4) to Ψ_{1,ε_i} (resp. Ψ_{2,ε_i}), $i = 1, ..., N$, we see that there exists $I \in O_{\tau_0}$ such that for all $f \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$, we have

$$\mathrm{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}(\theta-\theta_{\tilde{\varepsilon}})(\tau - H^w)\right) = \mathcal{O}(h^\infty),$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$. Thus, writing $\theta = \theta_{\tilde{\varepsilon}} + \theta - \theta_{\tilde{\varepsilon}}$, we get

$$\mathrm{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)\right) \equiv \mathrm{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau - H^w)\right), \tag{4.3.45}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$.

As in the above proofs, using Helffer-Sjöstrand formula (see (1.3.4), (4.3.1)), we obtain

$$\mathrm{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)\right) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau - z)\mathrm{tr}\left(\chi^w(z-H^w)^{-1}\right) L(dz). \tag{4.3.46}$$

Let $\psi \in C_0^\infty(]-2,2[;\mathbb{R})$ with $\psi(t) = 1$ for $|t| \leqslant 1$ and put

$$\psi_{h^\delta}(z) := \psi\left(\frac{\Im z}{h^\delta}\right), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.3.47}$$

Then,

$$\mathrm{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)\right) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_{h^\delta}\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau - z)\mathrm{tr}\left(\chi^w(z-H^w)^{-1}\right) L(dz), \tag{4.3.48}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$. Using Paley-Wiener estimate (D.0.2), property (1.3.2) and the following estimates

$$\mathrm{tr}\left(\chi^w(z-H^w)^{-1}\right) = \mathcal{O}(h^{-n}|\Im z|^{-1})$$

$$\bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_{h^\delta}\right)(z) = \mathcal{O}(h^\infty)\psi_{h^\delta}(z) + \mathcal{O}(h^{-\delta})\tilde{f}(z)1_{[1,2]}\left(\frac{|\Im z|}{h^\delta}\right),$$

we see that the restriction of the right hand side of (4.3.48) to the domain $\{|\Im z| < h^\delta\}$ is $\mathcal{O}(h^\infty)$. Thus, we get

$$\mathrm{tr}\left(\chi^w f(H^w)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - H^w)\right) \equiv -\frac{1}{\pi}\int_{\{\Im z \geqslant h^\delta\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_{h^\delta}\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau - z)\mathrm{tr}\left(\chi^w(z-H^w)^{-1}\right) L(dz), \tag{4.3.49}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$.

Now for $z \in \Omega_\delta := \{z \in \mathrm{supp}\,\tilde{f};\, |\Im z| \geqslant h^\delta\}$, according to Proposition 1.1, the resolvent $(z - H^w)^{-1}$ is an h-pseudodifferential operator with matrix-valued symbol in the class $S_\delta^\delta(1;\mathbb{R}^{2n},\mathcal{H}_m)$, i.e. there exists a matrix-valued symbol $(x,\xi) \mapsto \mathcal{G}(x,\xi,z;h)$ such that

$$\|\partial^\gamma_{(x,\xi)}\mathcal{G}(x,\xi,z;h)\| \leqslant C_\gamma h^{-\delta(1+|\gamma|)}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n},$$

uniformly for $z \in \Omega_\delta$ and

$$(z - H^w)^{-1} = \mathcal{G}^w(x, hD_x, z; h), \quad \forall z \in \Omega_\delta.$$

The principal symbol of $\mathcal{G}$ is given by $\mathcal{G}_0(x, \xi, z) = (z - H(x, \xi))^{-1}$ and we have the following asymptotic expansion in powers of h

$$\mathcal{G}(x, \xi, z; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j \mathcal{G}_j(x, \xi, z) \quad \text{in } S^\delta_\delta(1; \mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m), \tag{4.3.50}$$

with $\mathcal{G}_j(x, \xi, z)$ is a finite sum of terms of the form

$$(z - H(x, \xi))^{-1} B_1(x, \xi, z)(z - H(x, \xi))^{-1} B_2(x, \xi, z)(z - H(x, \xi))^{-1} \cdots B_k(x, \xi, z)(z - H(x, \xi))^{-1}, \tag{4.3.51}$$

with $k < 2j + 1$, $B_l(x, \xi, z) \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m)$ is holomorphic in z near supp $\tilde{f}$. In particular, for all $N \in \mathbb{N}$, there exists $C_N > 0$ such that

$$\left\| \mathcal{G}(x, \xi, z; h) - \sum_{j=0}^{N} h^j \mathcal{G}_j(x, \xi, z) \right\| \leqslant C_N h^{(N+1)(1-2\delta)} \tag{4.3.52}$$

uniformly for $z \in \Omega_\delta$. By a classical result on trace class h-pseudodifferential operators (see Theorem 1.13), we have for $z \in \Omega_\delta$,

$$\operatorname{tr}(\chi^w (z - H^w)^{-1}) = (2\pi h)^{-n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x, \xi) \widehat{\operatorname{tr}}(\mathcal{G}(x, \xi, z; h)) dx d\xi,$$

where we recall that $\widehat{\operatorname{tr}}$ denotes the trace of square matrices. It follows from (4.3.52) that for all $N \in \mathbb{N}$, there exists $C_N > 0$ such that

$$\left| \operatorname{tr}(\chi^w (z - H^w)^{-1}) - (2\pi h)^{-n} \sum_{j=0}^{N} h^j \widehat{e}_j(z) \right| \leqslant C_N h^{(N+1)(1-2\delta)-n}$$

uniformly for $z \in \Omega_\delta$, where

$$\widehat{e}_j(z) := \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x, \xi) \, \widehat{\operatorname{tr}} \left(\mathcal{G}_j(x, \xi, z) \right) dx d\xi. \tag{4.3.53}$$

It follows that for all $N \in \mathbb{N}$, we have

$$\operatorname{tr} \left(\chi^w f(H^w) \mathcal{F}_h^{-1} \theta(\tau - H^w) \right) = (2\pi h)^{-n} \sum_{j=0}^{N} h^j a_j(\tau; h) + \mathcal{O}(h^{(N+1)(1-2\delta)-n}),$$

where

$$a_j(\tau; h) := -\frac{1}{\pi} \int \bar{\partial} \left(\tilde{f} \psi_{h^\delta} \right)(z) \mathcal{F}_h^{-1} \theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau - z) \, \widehat{e}_j(z) \, L(dz). \tag{4.3.54}$$

The microhyperbolicity assumption implies that there exists $I \in O_{\tau_0}$ such that for all $j = 0, 1, \ldots, N$, the function

$$I \ni \tau \mapsto \widehat{e}_j(\tau \pm i0) := \lim_{s \searrow 0} \widehat{e}_j(\tau \pm is)$$

is C^∞ (see Proposition C.0.4). Set

$$\gamma_j(\tau) := \frac{i}{2\pi}\big(\widehat{e}_j(\tau+i0)-\widehat{e}_j(\tau-i0)\big). \tag{4.3.55}$$

Now the following lemma ends the proof of Theorem 4.2.6.

Lemma 4.3.6 *For all* $j = 1, \cdots, N$, *we have*

$$a_j(\tau;h) = f(\tau)\gamma_j(\tau) + \mathcal{O}(h^\infty).$$

Proof. Since the function $z \mapsto \mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau - z)\widehat{e}_j(z)$ is holomorphic in the complex domains $\{z \in \mathbb{C};\ \pm\Im z > 0\}$, it follows from the Green formula that

$$\begin{aligned}
a_j(\tau;h) &= -\frac{1}{\pi}\lim_{s\searrow 0}\int_{\{\Im z>s\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_{h^\delta}\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau-z)\,\widehat{e}_j(z)\,L(dz)\\
&\quad - \frac{1}{\pi}\lim_{s\searrow 0}\int_{\{\Im z<-s\}} \bar{\partial}\left(\tilde{f}\psi_{h^\delta}\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau-z)\,\widehat{e}_j(z)\,L(dz)\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau-\lambda)\Big(\widehat{e}_j(\tau+i0)-\widehat{e}_j(\tau-i0)\Big)d\lambda\\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_h^{-1}\theta_{\tilde{\varepsilon}}(\tau-\lambda)f(\lambda)\gamma_j(\lambda)d\lambda\\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\theta(\lambda)f(\tau-h^\delta\lambda)\gamma_j(\tau-h^\delta\lambda)d\lambda,
\end{aligned}$$

where the last equality follows by a change of variable. Here $\mathcal{F}^{-1} := \mathcal{F}_1^{-1}$. Applying Taylor's formula to the function $\lambda \mapsto f(\tau-h^\delta\lambda)\gamma_j(\tau-h^\delta\lambda)$ at $\lambda = 0$ and using the fact that

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\theta(\lambda)(-i\lambda)^k d\lambda = \theta^{(k)}(0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

we obtain the lemma. We recall that $\theta = 1$ near 0. ∎

4.4 Proofs of the results of subsection 4.2.2

In this section, we prove the results of subsection 4.2.2 concerning the application to the study of the spectral shift function.

Remark 4.4.1 *Notice that in the application to the study of the SSF, the assumption* $H \in S(1;\mathbb{R}^{2n},\mathcal{H}_m)$ *required in the first part is not important since we can reduce the study of* $s_h(\tau;P_1(h),P_0(h))$ *to the study of* $s_h(\tau;(P_1(h)-z_0)^{-q},(P_0(h)-z_0)^{-q})$ *where* $z_0 \notin \sigma(P_0(h))\cup\sigma(P_1(h))$ *and* $q \in \mathbb{N}$ *is chosen large enough so that the operator* $(P_1(h)-z_0)^{-q} - (P_0(h)-z_0)^{-q}$ *is of trace class. See e.g. [100] for more details.*

4.4.1 *Preliminaries*

Let $f, \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ and $\tau \in \mathbb{R}$. Let us start by representing the quantities

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle = -\mathrm{tr}\left(\big[f(P_j(h))\big]_0^1\right) \tag{4.4.1}$$

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-\cdot)f(\cdot)\rangle = -\mathrm{tr}\left(\left[f(P_j(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-P_j(h))\right]_0^1\right) \tag{4.4.2}$$

using the Helffer-Sjöstrand formula (1.3.4). Fix $z_0 \notin \sigma(P_0(h)) \cup \sigma(P_1(h))$. Set

$$\widetilde{g}(z) := (z-z_0)^q f(z),$$

where $q \in \mathbb{N}$ is to be chosen later. Using (4.3.1) with $g(z) := (z-z_0)^q$, we get

$$\widetilde{g}(P_j(h)) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)(z-z_0)^q (z-P_j(h))^{-1} L(dz), \quad j=0,1.$$

Therefore,

$$\begin{aligned} f(P_j(h)) &= (P_j(h)-z_0)^{-q}\widetilde{g}(P_j(h)) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)(z-z_0)^q (P_j(h)-z_0)^{-q}(z-P_j(h))^{-1} L(dz). \end{aligned}$$

It follows that

$$\left[f(P_j(h))\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)(z-z_0)^q \left[(P_j(h)-z_0)^{-q}(z-P_j(h))^{-1}\right]_0^1 L(dz). \tag{4.4.3}$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned} &\left[f(P_j(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-P_j(h))\right]_0^1 \\ &\quad = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau-z)(z-z_0)^q \left[(P_j(h)-z_0)^{-q}(z-P_j(h))^{-1}\right]_0^1 L(dz). \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

Lemma 4.4.2 *Assume* (4.2.8). *For* $q > \frac{n}{2}$, *the operator*

$$\left[(P_j(h)-z_0)^{-q}(z-P_j(h))^{-1}\right]_0^1$$

is of trace class and its norm trace satisfies

$$\left\|\left[(P_j(h)-z_0)^{-q}(z-P_j(h))^{-1}\right]_0^1\right\|_{tr} = \mathcal{O}\left(\frac{h^{-n}(1+|\Im z|)}{|\Im z|^2}\right), \tag{4.4.5}$$

uniformly for $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Proof. We have

$$\left[(P_j(h)-z_0)^{-q}(z-P_j(h))^{-1}\right]_0^1 = \mathscr{I}_1(z;h) + \mathscr{I}_2(z;h), \tag{4.4.6}$$

where

$$\mathscr{I}_1(z;h) := \left((P_1(h)-z_0)^{-q} - (P_0(h)-z_0)^{-q}\right)(z-P_1(h))^{-1}$$

and

$$\mathscr{I}_2(z;h) := (P_0(h)-z_0)^{-q}\left((z-P_1(h))^{-1} - (z-P_0(h))^{-1}\right).$$

Let us examine the first term $\mathscr{I}_1(z;h)$. Taking $(q-1)$ derivatives with respect to z in the resolvent identity

$$(P_1(h)-z)^{-1} - (P_0(h)-z)^{-1} = (P_1(h)-z)^{-1}(V(x)-V_\infty)(P_0(h)-z)^{-1}$$

and setting $z = z_0$, we see that $(P_1(h) - z_0)^{-q} - (P_0(h) - z_0)^{-q}$ is a finite linear combination of terms

$$(P_1(h) - z_0)^{-j}(V(x) - V_\infty)(P_0(h) - z_0)^{-(q+1-j)}$$

with $1 \leqslant j \leqslant q$. Since $(P_k(h) - z_0)^{-1} \in \mathrm{Op}_h^w\big(S(\langle\xi\rangle^{-2})\big)$ for $k = 0, 1$, and $V - V_\infty \in S(\langle x\rangle^{-\mu})$ according to (4.2.8), it follows that $(P_1(h) - z_0)^{-q} - (P_0(h) - z_0)^{-q}$ is an h-pseudodifferential operator with symbol in the class $S(\langle x\rangle^{-\mu}\langle\xi\rangle^{-2q-2})$. Then, since $\mu > n$, we see that for $q > \frac{n}{2} - 1$, the operator $\mathscr{I}_1(z; h)$ is of trace class (see Theorem 1.11) and we have

$$\|\mathscr{I}_1(z; h)\|_{tr} = \mathcal{O}\left(\frac{h^{-n}}{|\Im z|}\right), \tag{4.4.7}$$

uniformly for $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

On the other hand, using the resolvent identity, $\mathscr{I}_2(z; h)$ can be rewritten as

$$\mathscr{I}_2(z; h) = (z - P_0(h))^{-1}(P_0(h) - z_0)^{-q}(V - V_\infty)(z - P_1(h))^{-1}. \tag{4.4.8}$$

The operator $(P_0(h) - z_0)^{-q}$ is an h-pseudodifferential operator with symbol in $S(\langle\xi\rangle^{-2q})$. Then, using (4.2.8), we see that for $q > \frac{n}{2}$, $(P_0(h) - z_0)^{-q}(V - V_\infty)$ is a trace class operator and we have

$$\|(P_0(h) - z_0)^{-q}(V - V_\infty)\|_{tr} = \mathcal{O}(h^{-n}).$$

Thus, we deduce

$$\|\mathscr{I}_2(z; h)\|_{tr} = \mathcal{O}\left(\frac{h^{-n}}{|\Im z|^2}\right), \tag{4.4.9}$$

uniformly for $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Putting together (4.4.7) and (4.4.9) we get (4.4.5). ∎

From now on we fix $q \in \mathbb{N}$ with $q > \dfrac{n}{2}$ and we introduce the following function

$$\sigma_h(z) := (z - z_0)^q \operatorname{tr}\left(\left[(P_j(h) - z_0)^{-q}(z - P_j(h))^{-1}\right]_0^1\right), \quad \Im z \neq 0. \tag{4.4.10}$$

Combining (4.4.3) and (4.4.4) with the Lifshits-Krein formulas (4.4.1) and (4.4.2) respectively, we get, for all $f, \theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ and $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\langle s_h'(.), f(.)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar\partial\tilde f(z)\sigma_h(z)L(dz), \tag{4.4.11}$$

$$\langle s_h'(.), \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - \cdot)f(.)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar\partial\tilde f(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - z)\sigma_h(z)L(dz). \tag{4.4.12}$$

4.4.2 *Proof of Theorem 4.2.8*

This is a classical result and follows from the functional calculus of h-pseudodifferential operators. Let $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. According to (4.4.11), we have

$$\langle s_h'(.), f(.)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\sigma_h(z)L(dz). \tag{4.4.13}$$

For the simplicity of the notations, we assume that $q = 0$ and we refer to Remark 4.4.3 for the general case. Fix $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$. If we restrict the integral in the right hand side of (4.4.13) to the domain $\{|\Im z| < h^\delta\}$, then using the fact that $\bar{\partial}\tilde{f}(z) = \mathcal{O}(|\Im z|^\infty)$ and (4.4.5), we get a term $\mathcal{O}(h^\infty)$. Thus

$$\langle s_h'(.), f(.)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\Omega_\delta} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\sigma_h(z)L(dz) + \mathcal{O}(h^\infty),$$

where $\Omega_\delta := \{z \in \operatorname{supp}\tilde{f};\ |\Im z| \geqslant h^\delta\}$. For $z \in \Omega_\delta$ and $k \in \{0,1\}$, according to Proposition 1.1, $(z - P_k(h))^{-1}$ is an h-pseudodifferential operator with symbol $\mathcal{G}_k(x,\xi,z;h)$ admitting a complete asymptotic expansion in powers of h (see (4.3.50), (4.3.51))

$$\mathcal{G}_k(x,\xi,z;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j \mathcal{G}_{j,k}(x,\xi,z) \text{ in } S_\delta^\delta(1;\mathbb{R}^{2n},\mathcal{H}_m).$$

In particular, the principal symbol is given by

$$\mathcal{G}_{0,k}(x,\xi,z) = (z - p_k(x,\xi))^{-1}, \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, z \in \Omega_\delta, \tag{4.4.14}$$

where p_k is the symbol of $P_k(h)$, $k = 0,1$, see (4.2.10). Using Theorem 1.11 on the trace of h-pseudodifferential operators, this gives (4.2.11) with

$$c_j(f) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\widehat{\operatorname{tr}}\left(\mathcal{G}_{j,1}(x,\xi,z) - \mathcal{G}_{j,0}(x,\xi,z)\right) L(dz)\right) dx\,d\xi, \quad \forall j \geqslant 0.$$

In particular, according to (4.4.14), the leading term $c_0(f)$ is given by

$$c_0(f) = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\ \widehat{\operatorname{tr}}\left((z - p_1(x,\xi))^{-1} - (z - p_0(x,\xi))^{-1}\right) L(dz)\right) dx\,d\xi.$$

We have

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\widehat{\operatorname{tr}}\left((z - p_1(x,\xi))^{-1} - (z - p_0(x,\xi))^{-1}\right) L(dz)\\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\left((z - \xi^2 - e_i(x))^{-1} - (z - \xi^2 - e_{i,\infty})^{-1}\right) L(dz)\\
&= \sum_{i=1}^{m} f(\xi^2 + e_{i,\infty}) - f(\xi^2 + e_i(x))
\end{aligned}$$

where the last equality follows from the identity

$$f(a) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)(z-a)^{-1}L(dz), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Hence

$$c_0(f) = \sum_{i=1}^{m} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} f(\xi^2 + e_{i,\infty}) - f(\xi^2 + e_i(x))dxd\xi. \qquad (4.4.15)$$

Now, (4.2.12) follows immediately from (4.4.15) by a change a variable.

To see that $c_{2j+1}(f) = 0$, for all $j \geqslant 0$, observe first that the h-pseudodifferential calculus can be extended to $h < 0$ and we get: for all $N \in \mathbb{N}$,

$$\left| |2\pi h|^n \langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle - \sum_{j=0}^{N} c_j(f)h^j \right| \leqslant C_N |h|^{N+1}, \quad \forall h \in]-h_N, h_N[\setminus\{0\}.$$

It suffices now to notice that

$$|2\pi h|^n \mathrm{tr}\big(f(P_1(h)) - f(P_0(h)\big) = |2\pi h|^n \mathrm{tr}\big(f(P_1(-h)) - f(P_0(-h)\big).$$

since $P_j(h) = P_j(-h)$, $j = 0, 1$. This ends the proof of Theorem 4.2.8. ∎

Remark 4.4.3 *For the general case $q \neq 0$, we repeat the same arguments using the decomposition (4.4.6) and the fact that $(P_k(h) - z_0)^{-q}$ are h-pseudodifferential operators, $k = 0, 1$.*

4.4.3 *Proof of Theorem 4.2.9*

In this paragraph, we prove the weak asymptotics (4.2.13). The starting point is the representation (4.4.12) and the proof is quite similar to that of Theorem 4.2.6. The main difference is that the energy level

$$\Sigma_{\tau_0} = \big\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ \det(p_1(x,\xi) - \tau_0 I) = 0\big\}$$

is not a compact set in $\mathbb{R}^{2n}$. In this case, we have to justify that we can cover Σ_{τ_0} by finite open sets $O_1, \cdots, O_\ell \subset \mathbb{R}^{2n}$, in which we can construct symbols $\widetilde{p}_{1,k}(x,\xi)$ and $T_k \in \mathbb{R}^{2n}$ such that for all $k = 1, \cdots, \ell$, we have

- $\widetilde{p}_{1,k}(x,\xi) - \tau_0$ is uniformly microhyperbolic on $\mathbb{R}^{2n}$ in the direction T_k.
- $\widetilde{p}_{1,k}(x,\xi) = p_1(x,\xi)$, for all $(x,\xi) \in O_k$.

First, notice that since $\lim_{|\xi|\to\infty} \det(p_1(x,\xi) - \tau_0) = +\infty$, then there exists $R_0 > 0$ large enough such that

$$\Sigma_{\tau_0} = \Sigma_{\tau_0} \cap \{|\xi| \leqslant R_0\}.$$

Next, fix $R_1 > 0$ large such that

$$\inf_{|x|>R_1} |\det(V(x) - \tau_0)| > 0.$$

This is possible since $\tau_0 \notin \sigma(V_\infty) := \{e_{1,\infty}, \cdots, e_{m,\infty}\}$ and $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = V_\infty$. Put

$$\Sigma_{\tau_0,R_1} := \Sigma_{\tau_0} \cap \{|x| > R_1\}.$$

On the compact set $\Sigma_{\tau_0} \cap \{|x| \leqslant R_1\}$, we can apply Theorem 4.2.6 without any modification. On the other hand, by construction of R_1, we have

$$\nabla(|\xi|^2) \neq 0, \quad \forall \xi \in \pi_\xi \Sigma_{\tau_0,R_1},$$

where $\pi_\xi : (x,\xi) \mapsto \xi$. Thus, we can find finite open covers $o_1, o_2, ..., o_\ell$ in $\mathbb{R}^n$, $\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2, ..., \widetilde{T}_\ell \in \mathbb{R}^n$ and $c_1, ..., c_\ell > 0$ such that

$$\pi_\xi \Sigma_{\tau_0, R_1} \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} o_k \quad \text{and} \quad \langle \widetilde{T}_k, \nabla(|\xi|^2)\rangle \geqslant c_k,$$

uniformly for $\xi \in o_k$, for each $k = 1, ..., \ell$. Now using Theorem C.0.1, we construct $\widetilde{p}_{1,k}(x,\xi)$ such that $\widetilde{p}_{1,k}(x,\xi) - \tau_0$ is uniformly microhyperbolic on $\mathbb{R}^{2n}$ in the direction $T_k = (0, \widetilde{T}_k)$ and

$$\widetilde{p}_{1,k}(x,\xi) = p_1(x,\xi), \quad \forall\, (x,\xi) \in \{|x| > R_1\} \times o_k, \forall\, k = 1, \cdots, \ell.$$

We can now proceed analogously to the proof of Theorem 4.2.6. ∎

4.4.4 *Proof of Theorem 4.2.11*

For the proof of Theorem 4.2.11, assume that $\tau \mapsto s_h(\tau)$ is monotonic (i.e., $s'_h(\cdot)$ is positive or negative in the sense of distributions). In this case Theorem 4.2.11 is a simple consequence of Theorem 4.2.9 by standard Tauberian arguments (see [41], [70], [102, Theorem V.13]).

For the general case, we use a trick due to Robert [107] which consists in writing $s_h(\tau)$ as the difference of two monotonic distributions, i.e.,

$$s_h(\tau) = s_{1,h}(\tau) - s_{2,h}(\tau), \tag{4.4.16}$$

where $\tau \mapsto s_{i,h}(\tau)$, $i = 1, 2$, are monotonic. Robert's trick applies to Schrödinger operators with matrix-valued potential under the assumption (4.2.8) with scalar matrix V_∞. Assume that $V_\infty = 0$ and we introduce

$$\mathscr{A} := \frac{1}{2}(x \cdot \nabla_x + \nabla_x \cdot x).$$

From $[-\Delta, \mathscr{A}] = -2\Delta$, we deduce the relations

$$[P_0(h), \mathscr{A}] = 2P_0(h),$$

and

$$[P_1(h), \mathscr{A}] = -2P_1(h) + 2V + [V, A] = -2P_1(h) + 2V - x \cdot \nabla_x V.$$

Then, using the cyclicity of the trace, we obtain (see [107, Appendix A])

$$\operatorname{tr}\big(P_1(h) f(P_1(h)) - P_0(h) f(P_0(h))\big) = \operatorname{tr}\big((V - \frac{1}{2} x \cdot \nabla_x V) f(P_1(h))\big).$$

It follows from the Lifshits-Krein formula (4.2.9) that

$$\langle s'_h(\cdot), f(\cdot)\rangle = -\operatorname{tr}\left(\big(V - \frac{1}{2} x \cdot \nabla_x V(x)\big) P_1(h)^{-1} f(P_1(h))\right), \quad \forall f \in C_0^\infty(]0, +\infty[; \mathbb{R}).$$

Of course the operator $P_1(h)^{-1}$ is not well defined, however for $f \in C_0^\infty(]0,+\infty[;\mathbb{R})$, we can define $P_1(h)^{-1}f(P_1(h))$ as the operator $\varphi(P_1(h))$ where $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfies $\varphi(\tau) = \tau^{-1}f(\tau)$ for $\tau \neq 0$ and $\varphi(0) = 0$. Using the above formula, we follow [107] to get the decomposition (4.4.16), and then it suffices to apply the Tauberian arguments to each $s_{i,h}(\tau)$, $i = 1, 2$.

4.4.5 *Proof of Theorem 4.2.13*

This paragraph is devoted to the proof of the pointwise asymptotics (4.2.18).

Let us start by the following representation of the derivative of the SSF.

Lemma 4.4.4 *Under the assumption (4.2.8), we have*

$$s_h'(\tau) = \frac{1}{\pi}\Im(\sigma_h)(\tau + i0) \quad \text{in} \ \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{4.4.17}$$

i.e., for all $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$,

$$\langle s_h'(\cdot), f(\cdot)\rangle = \frac{1}{\pi}\lim_{s\searrow 0}\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\Im(\sigma_h)(\tau + is)d\tau,$$

where $\Im(\sigma_h)$ *denotes the imaginary part of* σ_h.

This representation has been used many times in the litterature (see for instance [40]). The proof is an easy consequence of formula (4.4.11) and Green's formula.

Proof. Let $f \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$. According to (4.4.11), we have

$$\langle s_h'(.), f(.)\rangle = \lim_{s\to 0}\frac{1}{\pi}\left(\int_{\Im z>0}\bar\partial\tilde f(z)\sigma_h(z+is)L(dz) + \int_{\Im z<0}\bar\partial\tilde f(z)\sigma_h(z-is)L(dz)\right).$$

The functions $z \mapsto \sigma_h(z+is)$ and $z \mapsto \sigma_h(z-is)$ are respectively holomorphic on $\{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$ and $\{z \in \mathbb{C}; \Im z < 0\}$. Consequently, Green's formula yields

$$\langle s_h'(.), f(.)\rangle = \frac{1}{2i\pi}\lim_{s\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(\tau)\big(\sigma_h(\tau+is) - \sigma_h(\tau - is)\big)d\tau,$$

which gives (4.4.17) since $\bar\sigma_h(z) = \sigma_h(\bar z)$.

■

Let $I =]\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta[\in O_{\tau_0}$ be such that the assumption (4.2.17) holds on Σ_τ for all $\tau \in I$. For $M \geqslant 0$, we introduce the following h-dependent set (see Figure 2)

$$\Gamma_M := \big\{z \in \mathbb{C}; \Re z \in I \text{ and } \Im z > -M\zeta(h)\big\}, \tag{4.4.18}$$

where we recall that $\zeta(h) = h\log(\frac{1}{h})$.

Main steps of the proof

The proof of Theorem 4.2.13 relies on the following steps :

Step 1 : The first (and main) step is Lemma 4.4.5 where we prove that under the assumption (4.2.17) on the existence of an escape function associated to p_1 at τ_0, the

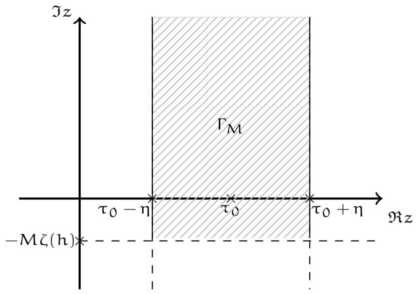

Figure 2: Γ_M

function $z \mapsto \sigma_h(z)$ extends analytically from Γ_0 to Γ_M, for any $M > 0$ and h small enough. Moreover, its derivatives satisfy the estimates (4.4.19). The ideas of the proof of this result come from the theory of resonances and is based on the method of analytic distortion. We refer to [68, 113, 112] for more details concerning this method. Firstly, we shall prove this result assuming that $V(x) - V_\infty \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_m)$ and then using an idea from [88] we will show how to dispense with this assumption. An important consequence of this result and the representation (4.4.17) are the estimates (4.4.20) on the derivatives of the SSF.

Step 2 : The second step is Lemma 4.4.8 which is a consequence of the result described in the first step and Corollary 4.3.4. From these results, we deduce that the contribution of $\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\varphi(\tau - \cdot) f(\cdot)\rangle$ for large times, that is for $\operatorname{supp}\varphi \subset \{\mu_0 < |t| < \mu h^{-k}\}$, for all $\mu > \mu_0 > 0$ and $k \in \mathbb{N}$ fixed, is a $\mathcal{O}(h^\infty)$.

Step 3 : In the third and last step, using the result of step 2 and the estimates (4.4.20) on the derivatives of the SSF, we deduce by making some computations using Taylor's formula that the pointwise asymptotics (4.2.18) follows from the weak asymptotics (4.2.13).

Lemma 4.4.5 *In addition to the assumptions* (4.2.8) *and* (4.2.17)*, we assume that* $V(x) - V_\infty \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_m)$. *For any* $M > 0$*, the function* $z \mapsto \sigma_h(z)$ *has an analytic extension from* Γ_0 *to* Γ_M*. Moreover, we have*

$$\sigma_h^{(k)}(z) = \mathcal{O}\big(h^{-n}\zeta(h)^{-k-1}\big), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{4.4.19}$$

uniformly for $z \in \Gamma_M$ *and* h *small enough. In particular,*

$$s_h^{(k+1)}(\tau) = \mathcal{O}\big(h^{-n}\zeta(h)^{-k-1}\big), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{4.4.20}$$

uniformly for $\tau \in I$ *and* h *small enough.*

Proof. For $\omega \in \mathbb{R}$ small enough, we introduce the family of unitary operators

$$U_\omega : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$$

defined by

$$U_\omega \phi(x) := |\det(1 + \omega \nabla F(x))|^{\frac{1}{2}} \phi(x + \omega F(x)), \tag{4.4.21}$$

where $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is a smooth vector field such that $F = 0$ in a neighborhood of $\operatorname{supp}(V - V_\infty)$ and $F(x) = x$ for $|x|$ large enough.

Set

$$P_{j,\omega}(h) := U_\omega P_j(h)(U_\omega)^{-1}, \quad j = 0, 1.$$

The operators $P_{j,\omega}(h)$, $j = 0, 1$, are differential operators with analytic coefficients with respect to ω, and can be analytically continued to small enough complex values of ω. It follows from the analytic perturbation theory (see [75]) that for $\omega_0 \in \mathbb{R}$ small enough,

$$]-\omega_0, \omega_0[\ni \omega \mapsto P_{j,\omega}(h), \quad j = 0, 1,$$

extends to an analytic type $\mathscr{A}$-family of operators on $D(0, \omega_0) := \{t \in \mathbb{C}; |t| < \omega_0\}$ with domain $H^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$.

We set

$$\sigma_{h,\omega}(z) := (z - z_0)^q \operatorname{tr}\left(\left[(P_{j,\omega}(h) - z_0)^{-q}(z - P_{j,\omega}(h))^{-1}\right]_0^1\right), \quad \Im z > 0. \tag{4.4.22}$$

Since U_ω is unitary for real ω, it follows from the cyclicity of the trace that

$$\sigma_h(z) = \sigma_{h,\omega}(z), \quad \forall\, \omega \in]-\omega_0, \omega_0[, \forall\, \Im z > 0. \tag{4.4.23}$$

On the other hand, for $\Im z > M_0 \zeta(h)$ for a given h-independent $M_0 > 0$, the function $\omega \mapsto \sigma_{h,\omega}(z)$ is analytic in $D(0, 2cM_0\zeta(h))$ with some $c > 0$ independent of M_0 and h. Thus, by the uniqueness theorem of analytic continuation, the equality (4.4.23) remains true for $\Im z > M_0\zeta(h)$ and $\omega \in D(0, 2cM_0\zeta(h))$, i.e.,

$$\sigma_h(z) = \sigma_{h,\omega}(z), \quad \forall\, \omega \in D\big(0, 2cM_0\zeta(h)\big), \forall\, \Im z > M_0\zeta(h). \tag{4.4.24}$$

From now on we fix $M = cM_0$ and $\omega_1 = iM\zeta(h)$.

By assumption (4.2.17), there exists $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ an escape function associated to p_1 at τ_0. Since $\tau_0 > e_{m,\infty}$, then $x \cdot \xi$ is an escape function associated to p_1 for $|(x, \xi)|$ large enough. Thus, without any loss of generality we may assume that $G(x, \xi) = x \cdot \xi$ for $|(x, \xi)|$ large enough. Then,

$$\widetilde{G}(x, \xi) := G(x, \xi) - F(x) \cdot \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R}).$$

In particular, by the Calderón-Vaillancourt Theorem (Theorem 1.3), $\widetilde{G}^w(x, hD_x)$ is L^2-bounded and the operators $e^{\pm \frac{M\zeta(h)}{h} \widetilde{G}^w(x, hD_x)}$ are well-defined.

Let us define

$$\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) := e^{-\frac{M\zeta(h)}{h}\widetilde{G}^w(x,hD_x)} P_{j,\omega_1}(h) e^{\frac{M\zeta(h)}{h}\widetilde{G}^w(x,hD_x)}, \quad j = 0, 1. \tag{4.4.25}$$

Lemma 4.4.6 *There exists $c > 0$ such that for all $M > 0$, the operator $\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) - z$ is invertible for $z \in \Gamma_{cM}$. Moreover, we have the estimate*

$$\|(z - \widetilde{P}_{j,\omega_1}(h))^{-1}\| = \mathcal{O}(\zeta(h)^{-1}), \tag{4.4.26}$$

uniformly for $z \in \Gamma_{cM}$ and h small enough.

Proof. For $j = 0, 1$, we have

$$\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) = e^{-\frac{M\zeta(h)}{h}\mathrm{ad}_{\widetilde{G}^w}} P_{j,\omega_1}(h) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-M\zeta(h))^k}{k!} \left(\frac{1}{h}\mathrm{ad}_{\widetilde{G}^w}\right)^k P_{j,\omega_1}(h), \tag{4.4.27}$$

where we use the usual notation $\mathrm{ad}_A B := [A, B] = A \circ B - B \circ A$. Thanks to the fact that $\widetilde{G}$ is scalar-valued and compactly supported, by the Calderón-Vaillancourt theorem, we have

$$\mathrm{ad}_{\widetilde{G}^w} P_{j,\omega_1}(h) = [\widetilde{G}^w(x, hD_x), P_{j,\omega_1}(h)] = \mathcal{O}(h). \tag{4.4.28}$$

This together with the fact that $\zeta(h)$ tends to 0 as $h \searrow 0$ show that the asymptotic expansion (4.4.27) makes sense.

In particular, we have

$$\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) = P_{j,\omega_1}(h) - \frac{M\zeta(h)}{h}\left[\widetilde{G}^w(x, hD_x), P_{j,\omega_1}(h)\right] + \mathcal{O}(M^2\zeta(h)^2).$$

Let p_{j,ω_1} and $\widetilde{p}_{j,\omega_1}$ be the Weyl symbols of $P_{j,\omega_1}(h)$ and $\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)$ respectively. By the h-pseudodifferential calculus, we have

$$\widetilde{p}_{j,\omega_1}(x,\xi) = p_{j,\omega_1}(x,\xi) - iM\zeta(h)\{p_{j,\omega_1}, \widetilde{G}\}(x,\xi) + \mathcal{O}(M^2\zeta(h)^2).$$

Then,

$$\mathfrak{I}(\widetilde{p}_{j,\omega_1})(x,\xi) = \mathfrak{I}(p_{j,\omega_1})(x,\xi) - M\zeta(h)\{\mathfrak{R}(p_{j,\omega_1}), \widetilde{G}\}(x,\xi) + \mathcal{O}(M^2\zeta(h)^2), \tag{4.4.29}$$

$$\mathfrak{R}(\widetilde{p}_{j,\omega_1})(x,\xi) = \mathfrak{R}(p_{j,\omega_1})(x,\xi) + M\zeta(h)\{\mathfrak{I}(p_{j,\omega_1}), \widetilde{G}\}(x,\xi) + \mathcal{O}(M^2\zeta(h)^2). \tag{4.4.30}$$

On the other hand, using the Taylor expansion of p_{j,ω_1} with respect to ω_1, we get

$$p_{j,\omega_1}(x,\xi) = p_j(x,\xi) - iM\zeta(h)\{p_j, F(x)\cdot\xi\}(x,\xi) + \mathcal{O}(M^2\zeta(h)^2).$$

Combining this with (4.4.29) and (4.4.30), we obtain

$$\mathfrak{I}(\widetilde{p}_{j,\omega_1})(x,\xi) = -M\zeta(h)\{p_j, \widetilde{G} + F(x).\xi\}(x,\xi) + \mathcal{O}(M^2\zeta(h)^2). \tag{4.4.31}$$

$$\mathfrak{R}(\widetilde{p}_{j,\omega_1})(x,\xi) = p_j(x,\xi) + \mathcal{O}(M\zeta(h)). \tag{4.4.32}$$

Since $G(x,\xi) = \widetilde{G}(x,\xi) + F(x)\cdot\xi$ satisfies the assumption (4.2.17), it follows from (4.4.31) and (4.4.32) that there exists $C > 0$ and $I \in O_{\tau_0}$ such that

$$-\mathfrak{I}(\widetilde{p}_{1,\omega_1})(x,\xi) \geqslant CM\zeta(h), \quad \forall (x,\xi) \in \Sigma_I^1, \tag{4.4.33}$$

where for $j = 0, 1$,

$$\Sigma_I^j := \bigcup_{\tau\in I} \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ \det\left(p_j(x,\xi) - \tau\right) = 0\right\}.$$

Of course, the same estimate holds also for $\Im(\widetilde{p}_{0,\omega_1})(x,\xi)$ on Σ_I^0 since (4.2.17) always holds for p_0 with $G(x,\xi) = x\cdot\xi$ for any $\tau_0 > e_{m,\infty}$.

We write $\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) - z = A_{j,\omega_1}(h) - \Re z + i(B_{j,\omega_1}(h) - \Im z)$, with

$$A_{j,\omega_1}(h) := \frac{1}{2}\big(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) + \big(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)\big)^*\big), \quad B_{j,\omega_1}(h) := \frac{1}{2i}\big(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) - \big(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)\big)^*\big).$$

Let $\psi_{j,1}, \psi_{j,2} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ be such that for $I' \Subset I$,

$$\psi_{j,1}^2 + \psi_{j,2}^2 = 1, \quad \psi_{j,1} = 1 \text{ on } \Sigma_{I'}^j, \quad \operatorname{supp}(\psi_{j,1}) \subset \Sigma_I^j.$$

According to Lemma D.0.2, there exists two self-adjoint operators $\Psi_{j,1}$ and $\Psi_{j,2}$ with principal symbols respectively $\psi_{j,1}$ and $\psi_{j,2}$ such that

$$(\Psi_{j,1})^2 + (\Psi_{j,2})^2 = \mathrm{Id} + \mathcal{O}(h^\infty) \quad \text{in } \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n)). \tag{4.4.34}$$

We denote by the same letters the operators $\Psi_{j,i} := \Psi_{j,i} I_m$, $i = 1,2$. On the support of $\psi_{j,1}$, we see from (4.4.33) that the principal symbol of $-B_{j,\omega_1}(h)$ equals to $-\Im(\widetilde{P}_{j,\omega_1})$ is bounded from below by $CM\zeta(h)$, i.e.

$$-\Im(\widetilde{P}_{j,\omega_1})(x,\xi) + \Im z \geqslant CM\zeta(h) + \Im z, \quad \forall (x,\xi) \in \operatorname{supp}\psi_{j,1}.$$

Then passing from symbols to operators and applying the Gårding inequality we obtain

$$\begin{aligned}
\|(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) - z)\Psi_{j,1}u\|.\|\Psi_{j,1}u\| &\geqslant |\langle(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) - z)\Psi_{j,1}u, \Psi_{j,1}u\rangle| \\
&\geqslant |\langle(\Im(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)) - \Im z)\Psi_{j,1}u, \Psi_{j,1}u\rangle| \\
&= \langle(\Im z - B_{j,\omega_1}(h))\Psi_{j,1}u, \Psi_{j,1}u\rangle \\
&\geqslant (\Im z + CM\zeta(h) - \mathcal{O}(h))\|\Psi_{j,1}u\|^2 \\
&\geqslant \frac{C}{3}M\zeta(h)\|\Psi_{j,1}u\|^2,
\end{aligned} \tag{4.4.35}$$

uniformly on $\left\{z \in \mathbb{C};\, \Re z \in I',\, \Im z > -\frac{C}{3}M\zeta(h)\right\}$.

On the other hand, since $A_{j,\omega_1}(h) - \Re z$ is uniformly elliptic on the support of $\psi_{j,2}$ and $\Re z \in I$, the symbolic calculus permits us to construct a parametrix $R \in S(\langle\xi\rangle^{-2})$ of $A_{j,\omega_1}(h) - \Re z$ such that in the sense of symbols,

$$R\#(A_{j,\omega_1}(h) - \Re z)\psi_{j,2} = \psi_{j,2} + \mathcal{O}(h^\infty),$$

where # stands for the Moyal product of symbols (see Chapter 1). As a consequence, we obtain

$$\|(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h) - z)\Psi_{j,2}u\| \geqslant \frac{1}{C'}\|\Psi_{j,2}u\| - \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2. \tag{4.4.36}$$

Furthermore, by means of standard elliptic arguments, one can easily prove the following semiclassical inequality

$$\|[\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h), \Psi_{j,i}]u\| \leqslant C''h(\|\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)u\| + \|u\|), \quad \forall u \in H^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m). \tag{4.4.37}$$

Combining (4.4.34), (4.4.35), (4.4.36), and (4.4.37) with the estimate

$$\begin{aligned}\|(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)-z)u\|^2 &= \sum_{i=1}^{2}\|\Psi_{j,i}(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)-z)u\|^2-\mathcal{O}(h^\infty)\|(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)-z)u\|^2\\ &\geqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\|(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)-z)\Psi_{j,i}u\|^2-\sum_{i=1}^{2}\|[\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h),\Psi_{j,i}]u\|^2\\ &- \mathcal{O}(h^\infty)\|(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)-z)u\|^2, \end{aligned}\tag{4.4.38}$$

we deduce for $z\in\Gamma_{cM}$ (with $c>0$ independent of M and h) and h small enough,

$$\|(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)-z)u\|\geqslant\frac{\zeta(h)}{C}\|u\|.\tag{4.4.39}$$

By the same arguments, we prove an estimate similar to (4.4.39) for the adjoint operator $\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)^*-\bar{z}$ and we conclude that $\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)-z$ is invertible for every $z\in\Gamma_{cM}$. Moreover (4.4.39) yields

$$\|\big(z-\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)\big)^{-1}\|=\mathcal{O}\big(\zeta(h)^{-1}\big),\tag{4.4.40}$$

uniformly for $z\in\Gamma_{cM}$ and h small enough. This ends the proof of Lemma 4.4.6. ∎

Remark 4.4.7 *The fact that* G *is scalar-valued was only used to get* (4.4.28).

End of the proof of Lemma 4.4.5 :

Set

$$\widetilde{\sigma}_{h,\omega_1}(z):=(z-z_0)^q\mathrm{tr}\Big(\Big[\big(\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)-z_0\big)^{-q}\big(z-\widetilde{P}_{j,\omega_1}(h)\big)^{-1}\Big]_0^1\Big).\tag{4.4.41}$$

Obviously, $z\mapsto\widetilde{\sigma}_{h,\omega_1}(z)$ is analytic in Γ_{cM}. By the Calderón-Vaillancourt theorem, the operators $e^{\pm\frac{M\zeta(h)}{h}\widetilde{G}^w(x,hD_x)}$ are bounded in $L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$. It follows from the cyclicity of the trace that

$$\widetilde{\sigma}_{h,\omega_1}(z)=\sigma_{h,\omega_1}(z),\quad\forall z\in\Gamma_{cM}.$$

Then, (4.4.24) yields

$$\widetilde{\sigma}_{h,\omega_1}(z)=\sigma_h(z),\quad\forall z\in\Gamma_{cM}.\tag{4.4.42}$$

Since $z\mapsto\widetilde{\sigma}_{h,\omega_1}(z)$ and $z\mapsto\sigma_h(z)$ are analytic in $\{z\in\mathbb{C};\Im z>0\}$, we deduce by the uniqueness theorem of analytic continuation that (4.4.42) holds for $\Im z>0$, i.e.

$$\widetilde{\sigma}_{h,\omega_1}(z)=\sigma_h(z),\quad\forall z\in\Gamma_0.$$

Thus, $z\mapsto\sigma_h(z)$ extends to an analytic function from Γ_0 to Γ_{cM}. Combining this with the resolvent estimate (4.4.40) and using the fact that the norm trace of an h-pseudodifferential operator with symbol in a suitable class is a $\mathcal{O}(h^{-n})$ (see Theorem 1.11), we obtain

$$\sigma_h(z)=\mathcal{O}(h^{-n}\zeta(h)^{-1}),$$

uniformly for $z\in\Gamma_{cM}$ and h small enough. This yields (4.4.19) for $k=0$. Next, taking the derivative of (4.4.41) and using (4.4.40) we obtain (4.4.19) for $k\geqslant1$.

Finally, estimate (4.4.20) follows immediately from (4.4.19) and the representation of the derivative of the SSF (4.4.17).

■

Continuation in the proof of Theorem 4.2.13 :

Lemma 4.4.8 *Let* $\varphi \in C_0^\infty(]\pm\frac{1}{2}, \pm 1[;\mathbb{R})$ *and let* $\mu > \mu_0 > 0$ *and* $\nu \in \mathbb{N}$ *be fixed arbitrarily. Under the assumptions of Lemma 4.4.5, there exists* $I \in O_{\tau_0}$ *such that for* $f \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$*, we have*

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\varphi_\varepsilon(\tau - \cdot)f(\cdot)\rangle = \mathcal{O}(h^\infty), \tag{4.4.43}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$ *and* $\varepsilon \in]\mu_0, \mu h^{-\nu}[$.

Proof. Taking into account Lemma 4.4.5, this result is an immediate consequence of Theorem 4.2.3 and Corollary 4.3.4. In fact, by (4.4.12), we have

$$\langle s_h'(.), \mathcal{F}_h^{-1}\varphi_\varepsilon(\tau - \cdot)f(.)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\mathcal{F}_h^{-1}\varphi_\varepsilon(\tau - z)\sigma_h(z)L(dz).$$

According to Lemma 4.4.5, the function $z \mapsto \sigma_h(z)$ defined in the upper half plane extends to a holomorphic function to the zone Γ_M for all $M > 0$, and satisfies estimate (4.4.19). This means that $z \mapsto \sigma_h(z)$ satisfies the conditions assumed on $K(z;h)$ in Corollary 4.3.4. Thus the lemma holds according to Theorem 4.2.3 and Corollary 4.3.4. ■

Now let $\varphi \in C_0^\infty(]-\frac{1}{C}, \frac{1}{C}[;\mathbb{R})$ equal to one near 0 with $C > 0$ a large constant. Let $f \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$ be as in the above lemma. Set $\kappa := \kappa(h) = h^{-\nu}$, with $\nu \in \mathbb{N}$ arbitrarily large. Repeating the same construction as in the proof of Theorem 4.2.6, we represent the difference $\varphi - \varphi_\kappa$ as a finite sum, i.e.

$$\varphi - \varphi_\kappa = \sum_{j=0}^{N(h)} \widetilde{\varphi}_{\varepsilon_j}, \quad \text{with } N(h) = \mathcal{O}(h^{-\nu}),$$

of functions $\widetilde{\varphi}_{\varepsilon_j}$ of the type appearing in (4.4.43). Applying Lemma 4.4.8 to each term, we get

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\varphi(\tau - \cdot)f(\cdot)\rangle = \langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\varphi_\kappa(\tau - \cdot)f(\cdot)\rangle + \mathcal{O}(h^\infty), \tag{4.4.44}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$.

We have

$$\begin{aligned}
\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\varphi_\kappa(\tau - \cdot)f(\cdot)\rangle &= \int_{\mathbb{R}} s_h'(t)f(t)\mathcal{F}_h^{-1}\varphi_\kappa(\tau - t)dt \\
&= h^{-(\nu+1)}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\varphi(h^{-(\nu+1)}(\tau - t))s_h'(t)f(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\varphi(t)s_h'(\tau - h^{\nu+1}t)f(\tau - h^{\nu+1}t)dt.
\end{aligned}$$

Applying Taylor's formula to the function $t \mapsto (s_h' f)(\tau - h^{\nu+1}t)$ at $t = 0$ and using (4.4.20) with $k = 1$, we get

$$\langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\varphi_\kappa(\tau - \cdot)f(\cdot)\rangle = s_h'(\tau)f(\tau) + \mathcal{O}(h^{\nu+1-n}\zeta(h)^{-2}), \tag{4.4.45}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$. We recall that $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\varphi(t)dt = \varphi(0) = 1$.

Putting together (4.4.44) and (4.4.45), we deduce

$$s_h'(\tau)f(\tau) = \langle s_h'(\cdot), \mathcal{F}_h^{-1}\varphi(\tau-\cdot)f(\cdot)\rangle + \mathcal{O}(h^{\nu+1-n}\zeta(h)^{-2}). \tag{4.4.46}$$

Since ν is arbitrary, the pointwise asymptotics (4.2.18) follows from the weak asymptotics (4.2.13) by choosing f equal to 1 near τ_0.

This ends the proof of Theorem 4.2.13 under the assumption $V - V_\infty \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_m)$. ■

It remains now to show how to dispense with the assumption on the support of V. Notice that the assumption $V - V_\infty \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_m)$ has been used exclusively in the proof of Lemma 4.4.5. Except for this lemma, all the steps of the proof of Theorem 4.2.13 remain valid under the assumptions (4.2.8) and (4.2.17).

According to Proposition 4.2 in [88], if V satisfies (4.2.8), then for any $\varkappa > 0$ and $\tilde{\mu} \in]0, \mu[$, we can construct $V_\varkappa \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathcal{H}_m)$ such that $V_\varkappa$ can be extended into a holomorphic function of $r = |x|$ in the sector

$$\Sigma(2\varkappa) := \{r \in \mathbb{C};\ \Re r \geqslant 1, |\Im r| < 2\varkappa \Re r\},$$

and for any multi-index $\alpha \in \mathbb{N}^n$, it satisfies

$$\|\partial_x^\alpha(V_\varkappa(x) - V(x))\|_{m\times m} = \mathcal{O}_\alpha(\langle x\rangle^{-\tilde{\mu}-|\alpha|}\varkappa^\infty), \tag{4.4.47}$$

uniformly with respect to $x \in \mathbb{R}^n$ and $\varkappa > 0$ small enough. $V_\varkappa$ is called a $|x|$-analytic $(\varkappa, \tilde{\mu})$-approximation of V.

As in [88], we fix $\varkappa = h^s$ with $s \in]0, 1[$. Let us denote by $\sigma_h(z, \varkappa)$ the right hand side of (4.4.10) when we replace V by $V_\varkappa$ in $P_1(h)$, that is

$$\sigma_h(z,\varkappa) := (z - z_0)^q \operatorname{tr}\left(\left[(P_{j,\varkappa}(h) - z_0)^{-q}(z - P_{j,\varkappa}(h))^{-1}\right]_0^1\right),$$

where

$$P_{1,\varkappa}(h) := -h^2\Delta \otimes I_m + V_\varkappa(x), \quad P_{0,\varkappa}(h) := P_0(h).$$

The operator $P_{1,\varkappa}(h)$ can be distorded analytically into $\widetilde{P}_{1,\nu}(h) = U_\nu P_{1,\varkappa}(h)(U_\nu)^{-1}$ (see [88]). Now, the proof of Lemma 4.4.5 show that (4.4.19) remains true for $\sigma_h(z, \varkappa)$.

On the other hand, according to (4.4.6), we have

$$\sigma_h(z,\varkappa) - \sigma_h(z) = (z - z_0)^q \operatorname{tr}(\mathscr{I}_1(z,\varkappa;h)) + \operatorname{tr}(\mathscr{I}_2(z,\varkappa;h))$$

with

$$\mathscr{I}_1(z,\varkappa;h) := \left((P_{1,\varkappa}(h) - z_0)^{-q} - (P_1(h) - z_0)^{-q}\right)(z - P_{1,\varkappa}(h))^{-1}$$
$$\mathscr{I}_2(z,\varkappa;h) := (P_1(h) - z_0)^{-q}\left((z - P_{1,\varkappa}(h))^{-1} - (z - P_1(h))^{-1}\right).$$

Using the resolvent identity and (4.4.47), we get

$$\sigma_h(z,\varkappa) - \sigma_h(z) = \mathcal{O}(\varkappa^\infty) = \mathcal{O}(h^\infty),$$

uniformly for $z \in \Gamma_0$. Consequently, Lemma 4.4.5 remains true under the assumptions (4.2.8) and (4.2.17).

This ends the proof of Theorem 4.2.13 under the assumptions (4.2.8) and (4.2.17). ■

C

MICROHYPERBOLIC FUNCTIONS

In this appendix, we prove some technical results on the notion of microhyperbolicity used in our proofs.

The first main result of this appendix is the following

Theorem C.0.1 *Let* $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathcal{H}_m)$. *Assume that* H *is microhyperbolic near* $\rho_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ *in the direction* T. *There exists* $\widetilde{H} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathcal{H}_m)$ *such that* $\widetilde{H} = H$ *near* ρ_0 *and* $\widetilde{H}$ *is microhyperbolic at every point* $\rho \in \mathbb{R}^{2n}$ *in the direction* T. *Moreover, we can choose* $\widetilde{H}$ *bounded together with all its derivatives in* $\mathbb{R}^{2n}$, *i.e.* $\widetilde{H} \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m)$.

To prove this theorem we need the following two lemmas.

Lemma C.0.2 *Let* $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathcal{H}_m)$. *The following statements are equivalents*

(1) H *is microhyperbolic at* $\rho_0 \in \mathbb{R}^{2n}$ *in the direction* $T \in \mathbb{R}^{2n}$.

(2) $\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle_{|\ker H(\rho_0)}$ *is strictly positive in the sense of hermitian matrices, i.e. there exists* $C > 0$ *such that*

$$\big(\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle \omega, \omega\big) \geqslant C|\omega|^2, \quad \forall \omega \in \ker H(\rho_0). \tag{C.0.1}$$

Proof. Obviously (1) $\Longrightarrow$ (2) by the definition 4.2.1. Assume that (2) is satisfied and let us prove (1). Let $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \mathbb{C}^m$, with $\omega_1 \in \ker H(\rho_0)$ and $\omega_2 \in \ker H(\rho_0)^\perp$. We have

$$\begin{aligned}\big(\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle \omega, \omega\big) &= \big(\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle \omega_1, \omega_1\big) + \big(\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle \omega_2, \omega_2\big) \\ &+ \sum_{i \neq j = 1}^{2} \big(\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle \omega_i, \omega_j\big) =: I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

By hypothesis, I_1 satisfies

$$|I_1| \geqslant C|\omega_1|^2. \tag{C.0.2}$$

On the other hand, we have

$$|I_2| \leqslant C'|\omega_2|^2 \quad \text{and} \quad |I_3| \leqslant C''|\omega_1||\omega_2| < \varepsilon C''|\omega_1|^2 + \frac{C''}{\varepsilon}|\omega_2|^2, \tag{C.0.3}$$

for $\varepsilon > 0$ small enough and $C', C'' > 0$. Putting together (C.0.2), (C.0.3), we obtain

$$(\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle \omega, \omega) \geqslant \frac{C}{2}|\omega|^2 - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)|\omega_2|^2. \tag{C.0.4}$$

Now, the fact that $H(\rho_0) : \ker H(\rho_0)^\perp \to \ker H(\rho_0)^\perp$ is bijective, implies

$$|H(\rho_0)\omega_2| \geqslant \tilde{C}|\omega_2|, \quad \forall \omega_2 \in \ker H(\rho_0)^\perp.$$

Combining this with (C.0.4), we get

$$(\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle \omega, \omega) \geqslant \frac{C}{2}|\omega|^2 - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)|H(\rho_0)\omega_2|^2,$$

which together with the fact that $H(\rho_0)\omega_2 = H(\rho_0)\omega$ implies

$$(\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle \omega, \omega) \geqslant \frac{C}{2}|\omega|^2 - \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)|H(\rho_0)\omega|^2.$$

By continuity, the above estimate extends to a small neighbourhood of ρ_0 and then implies that H is microhyperbolic at ρ_0 in the direction T. ∎

Lemma C.0.3 *Let $F \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathcal{H}_{m-r})$ and $a(0) \in \mathcal{H}_r$ invertible, $r \geqslant 1$. Assume that for $\rho_0 \in \mathbb{R}^{2n}$, there exists $T \in \mathbb{R}^{2n}$ and $C_0 > 0$ such that*

$$\big(\langle T, \nabla_\rho F(\rho_0)\rangle \omega, \omega\big) \geqslant C_0|\omega|^2, \quad \forall \omega \in \mathbb{C}^{m-r}. \tag{C.0.5}$$

Then

(1) $H(\rho) = \left(\begin{array}{c|c} F(\rho) & 0 \\ \hline 0 & a(0) \end{array}\right)$ *is microhyperbolic at ρ_0 in the direction T.*

(2) *If (C.0.5) holds at $\rho_0 = 0$ and $A \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m)$ with*

$$A(\rho) = \begin{pmatrix} \mathcal{O}(|\rho|^2) & \mathcal{O}(|\rho|) \\ \mathcal{O}(|\rho|) & \mathcal{O}(|\rho|) \end{pmatrix}$$

then $H + A$ is microhyperbolic near $\rho_0 = 0$ in the direction T.

Proof.

(1) Since $\langle T, \nabla_\rho H(\rho_0)\rangle = \begin{pmatrix} \langle T, \nabla_\rho F(\rho_0)\rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $\ker H(\rho_0) \subset \mathbb{C}^{m-r} \times \{0_r\}$, then (1) follows immediately from Lemma C.0.2.

(2) We have

$$\langle T, \nabla_\rho H(0)\rangle + \langle T, \nabla_\rho A(0)\rangle = \begin{pmatrix} \langle T, \nabla_\rho F(0)\rangle & \mathcal{O}(1) \\ \mathcal{O}(1) & \mathcal{O}(1) \end{pmatrix}.$$

Therefore

$$(\langle T, \nabla_\rho H(0)\rangle \omega, \omega) + (\langle T, \nabla_\rho A(0)\rangle \omega, \omega) = (\langle T, \nabla_\rho F(0)\rangle \omega, \omega) \geqslant C_0|\omega|^2, \quad \forall \omega \in \mathbb{C}^{m-r}.$$

Since $\ker(H(0) + A(0)) = \ker(H(0)) \subset \mathbb{C}^{m-r}$, it follows from Lemma C.0.2 that $H + A$ is microhyperbolic at $\rho_0 = 0$ in the direction T. Then, $H + A$ is microhyperbolic near 0 in the direction T. ∎

We are now ready to prove Theorem C.0.1.

Proof of Theorem C.0.1 : Without any loss of generality, we may assume that $\rho_0 = 0$. We know that there exists P such that

$$PH(0)P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \tag{C.0.6}$$

with a_{22} is diagonal and invertible. Replacing $H(\rho)$ by $PH(\rho)P^{-1}$, [1] we may assume that

$$H(\rho) = \begin{pmatrix} a_{11}(\rho) & a_{21}(\rho) \\ a_{12}(\rho) & a_{22}(\rho) \end{pmatrix}$$

with $a_{11}(0) = 0$, $a_{12}(0) = 0$, $a_{21}(0) = 0$ and $a_{22}(0) = a_{22}$. We have

$$\ker\left(H(0)\right) \subset \{(\omega_1, 0);\ \omega_1 \in \mathbb{C}^{m-r}\}, \quad \text{with } r = \dim \operatorname{Im}\left(a_{22}\right).$$

Since H is microhyperbolic at 0 in the direction T, it follows from Lemma C.0.2 that

$$\left(\begin{pmatrix} \langle T, \nabla_\rho a_{11}(0)\rangle & \langle T, \nabla_\rho a_{21}(0)\rangle \\ \langle T, \nabla_\rho a_{12}(0)\rangle & \langle T, \nabla_\rho a_{22}(0)\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\langle T, \nabla_\rho a_{11}(0)\rangle \omega_1, \omega_1\right) \geqslant C|\omega_1|^2. \tag{C.0.7}$$

Set

$$H_0(\rho) = \begin{pmatrix} \nabla_\rho a_{11}(0)\rho & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Applying the assertion (1) of Lemma C.0.3 (with $F(\rho) = \nabla_\rho a_{11}(0)\rho$ and $a(0) = a_{22}$) using (C.0.7) we see that H_0 is microhyperbolic at every point $\rho \in \mathbb{R}^{2n}$ in the direction T. Let $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ be such that $\chi(\rho) = 1$ for $|\rho| \leqslant 1$ and $\chi(\rho) = 0$ for $|\rho| \geqslant 2$. For $\delta > 0$, set $\chi_\delta(\rho) = \chi\left(\frac{\rho}{\delta}\right)$. We define

$$H_\delta(\rho) = \chi_\delta(\rho)\big(H(\rho) - H_0(\rho)\big) + H_0(\rho).$$

We claim that for δ small enough, H_δ is microhyperbolic at every point $\rho \in \mathbb{R}^{2n}$ in the direction T. In fact, for $|\rho| \leqslant \delta$, $H_\delta(\rho) = H(\rho)$ is microhyperbolic at $\rho_0 = 0$ and then at every $\rho \in \mathbb{R}^{2n}$ with $|\rho| \leqslant \delta$. For $|\rho| \geqslant 2\delta$, $H_\delta(\rho) = H_0(\rho)$ which is microhyperbolic at every point $\rho \in \mathbb{R}^{2n}$ in the direction T. For $\delta < |\rho| < 2\delta$, we have

$$H_\delta(\rho) = H_0(\rho) + \begin{pmatrix} \mathcal{O}(|\rho|^2) & \mathcal{O}(|\rho|) \\ \mathcal{O}(|\rho|) & \mathcal{O}(|\rho|) \end{pmatrix}.$$

Thus, the assertion (2) of Lemma C.0.3 implies that H_δ is microhyperbolic in the direction T for δ small enough. Consequently H_δ is microhyperbolic at every point $\rho \in \mathbb{R}^{2n}$ in the direction T. To see that we can choose $\widetilde{H} \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m)$, let $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ such

1 This does not affect the microhyperbolicity because P is unitary and independent of ρ, then

$$\left(\langle T, \nabla_\rho (PH(\rho)P^{-1})\rangle \omega, \omega\right) = \left(P\langle T, \nabla_\rho H(\rho)\rangle \omega, P\omega\right) = \left(\langle T, \nabla_\rho H(\rho)\rangle \omega, \omega\right), \quad \forall \rho \in \mathbb{R}^{2n}, \forall\, \omega \in \mathbb{C}^m.$$

that $f(t) = t$ for $|t| < 1$, $|f(t)| \geqslant 1$ on $|t| \geqslant 1$ and $f(t)$ is constant at $\pm\infty$, i.e., $|f(t)| = c > 1$ for $|t| \geqslant A$, for some $A > 0$ large enough. Put $\widetilde{H}(\rho) = f(H_\delta(\rho))$. By the functional calculus of self-adjoint operator, one can prove that $\widetilde{H}$ satisfies the desired properties (see [41, Ch. 12, Proposition A.3] for the details).

■

The second main result of this appendix in the following

Proposition C.0.4 *Let $H \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathcal{H}_m)$, $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{R})$ and $\tau_0 \in \mathbb{R}$. Assume that $\tau_0 - H(\rho)$ is microhyperbolic at every point $\rho \in \operatorname{supp}\chi$. Let $G(\rho, z)$ be a $m \times m$ matrix-valued function (not necessary Hermitian) smooth with respect to ρ and holomorphic with respect to z in a neighborhood of τ_0. Set*

$$F_\pm(z) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (z - H(\rho))^{-1} G(\rho, z)(z - H(\rho))^{-1} \chi(\rho) d\rho, \quad \pm\Im z > 0.$$

Then, for real τ near τ_0, the limit $F_\pm(\tau \pm i0) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} F_\pm(\tau \pm i\varepsilon)$ exists and $\tau \to F_\pm(\tau \pm i0)$ is C^∞ near τ_0.

Proof. We prove the result for F_+. The proof of F_- is similar. Writing χ as a finite sum of functions χ_i with small supports, we may assume using Theorem C.0.1 that $\tau - H(\rho)$ is uniformly microhyperbolic with respect to $\rho \in \mathbb{R}^{2n}$ and τ near τ_0 in the direction $T \in \mathbb{R}^{2n}$. We may also assume that $G, H \in S(1; \mathbb{R}^{2n}, \mathcal{H}_m)$.

Let $\widetilde{H}, \widetilde{G}$ and $\widetilde{\chi}$ be three almost analytic extensions of H, G and χ respectively, which are bounded together with all their derivatives. Put

$$\widetilde{H}(\rho, t) := \widetilde{H}(\rho + itT), \quad \widetilde{G}(\rho, t, z) := \widetilde{G}(\rho + itT, z), \quad \widetilde{\chi}(\rho, t) := \widetilde{\chi}(\rho + itT), \quad t \in \mathbb{R}.$$

We assert that for small enough $\Im z \geqslant 0, t \geqslant 0$ with $\Im z + t > 0$ and for $\Re z \in]\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta[$ with $\eta > 0$ small enough, there exists $C, c > 0$ such that

$$\Im\big((z - \widetilde{H}(\rho, t))\omega, \omega\big) + Ct\big|(z - \widetilde{H}(\rho, t))\omega\big|^2 \geqslant c(t + \Im z)|\omega|^2, \quad \forall \omega \in \mathbb{C}^m. \tag{C.0.8}$$

In fact, by Taylor's formula we have

$$\big((z - \widetilde{H}(\rho, t))\omega, \omega\big) = \big((z - H(\rho))\omega, \omega\big) - it\big(\langle T, \nabla_\rho H(\rho)\rangle \omega, \omega\big) + \mathcal{O}(t^2)|\omega|^2,$$

which yields

$$\Im\big((z - \widetilde{H}(\rho, t))\omega, \omega\big) = \Im z|\omega|^2 - t\big(\langle T, \nabla_\rho H(\rho)\rangle \omega, \omega\big) + \mathcal{O}(t^2)|\omega|^2. \tag{C.0.9}$$

On the other hand, the global microhyperbolicity condition (see (4.2.1)) implies, for some constants $c, C > 0$,

$$-t\big(\langle T, \nabla_\rho H(\rho)\rangle \omega, \omega\big) \geqslant ct|\omega|^2 - Ct\big|(\Re z - H(\rho))\omega\big|^2, \tag{C.0.10}$$

uniformly for $\Re z \in]\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta[$, for small enough $\eta > 0$. Putting together (C.0.9) and (C.0.10), we get, for all $\omega \in \mathbb{C}^m$,

$$\Im\big((z - \widetilde{H}(\rho, t))\omega, \omega\big) \geqslant (\Im z + ct)|\omega|^2 - \mathcal{O}(t)\big|(\Re z - H(\rho))\omega\big|^2 + \mathcal{O}(t^2)|\omega|^2.$$

By Taylor's formula again, we have for small $t \geqslant 0$

$$z - \widetilde{H}(\rho, t) = z - H(\rho) + \mathcal{O}(t).$$

It follows that

$$\begin{aligned} |(\Re z - H(\rho))\omega|^2 &= \left|\big(z - \widetilde{H}(\rho, t) - i\Im z - \mathcal{O}(t)\big)\omega\right|^2 \\ &\leqslant \mathcal{O}(1)\left|\big(z - \widetilde{H}(\rho, t)\big)\omega\right|^2 + \mathcal{O}((\Im z)^2)|\omega|^2 + \mathcal{O}(t^2)|\omega|^2. \end{aligned}$$

Then we deduce that for small enough $\Im z \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ and $\Re z \in]\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta[$, and for some constants $c, C_1, C_2 > 0$, we have

$$\Im\big((z - \widetilde{H}(\rho, t))\omega, \omega\big) \geqslant c(\Im z + t - C_1(\Im z)^2 - C_2 t^2)|\omega|^2 - \mathcal{O}(t)\left|(z - \widetilde{H}(\rho, t))\omega\right|^2.$$

Thus, (C.0.8) follows from this inequality.

Applying Cauchy-Schwarz inequality to the first term of (C.0.8) we easily obtain

$$\|(z - \widetilde{H}(\rho, t))\|_{m\times m} + Ct\|(z - \widetilde{H}(\rho, t))\|^2_{m\times m} \geqslant c(\Im z + t). \tag{C.0.11}$$

This shows that $(z - \widetilde{H}(\rho, t))^{-1}$ exists and

$$\|(z - \widetilde{H}(\rho, t))^{-1}\|_{m\times m} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right), \tag{C.0.12}$$

for $t > 0$, $\Im z \geqslant 0$ and $\Re z \in]\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta[$. In particular, for $\Im z = 0$, $(\tau - \widetilde{H}(\rho, t))^{-1}$ exists for $\tau \in]\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta[$ and satisfies (C.0.12), i.e.,

$$\|(\tau - \widetilde{H}(\rho, t))^{-1}\|_{m\times m} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right), \tag{C.0.13}$$

for $t > 0$. For the simplicity of the notation, assume $T = (1, 0, \cdots, 0)$. Put $\rho = (\rho_1, \rho') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n-1}$ and fix $t_0 > 0$. By Stoke's formula, we have

$$\begin{aligned} F_+(z) = &\int_{\mathbb{R}^{2n}} (z - \widetilde{H}(\rho_1 + it_0, \rho'))^{-1}\widetilde{G}(\rho_1 + it_0, \rho', z)(z - \widetilde{H}(\rho_1 + it_0, \rho'))^{-1}\widetilde{\chi}(\rho_1 + it_0, \rho')d\rho \\ &- \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times[0,t_0]} \frac{1}{2}(\partial_{\rho_1} + i\partial_t)\Big[(z - \widetilde{H}(\rho, t))^{-1}\widetilde{G}(\rho, t, z)(z - \widetilde{H}(\rho, t))^{-1}\widetilde{\chi}(\rho, t)\Big]dtd\rho \\ &=: I_+(z) - J_+(z). \end{aligned}$$

Using (C.0.13), we get

$$\begin{aligned} &\left\|(\tau - \widetilde{H}(\rho_1 + it_0, \rho'))^{-1}\widetilde{G}(\rho_1 + it_0, \rho', \tau)(\tau - \widetilde{H}(\rho_1 + it_0, \rho'))^{-1}\widetilde{\chi}(\rho_1 + it_0, \rho')\right\|_{m\times m} \\ &= \mathcal{O}(t_0^{-2})\|\widetilde{\chi}(\rho_1 + it_0, \rho')\|_{m\times m}, \end{aligned}$$

uniformly for $\tau \in]\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta[$. Since $\rho = (\rho_1, \rho') \mapsto \widetilde{\chi}(\rho_1 + it_0, \rho') \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, it follows that $I_+(\tau + i0)$ exists and by a similar argument, we clearly see that $z \mapsto I_+(z)$ extends to a C^∞ function on $]\tau_0 - \eta, \tau_0 + \eta[+i[0, \beta[$, for some $\beta > 0$.

On the other hand, we have

$$J_+(z) = \frac{1}{2}(J_+^{(1)}(z) + iJ_+^{(2)}(z))$$

where

$$J_+^{(1)}(z) := \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times[0,t_0]} \partial_{\rho_1}\left[(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{G}(\rho,t,z)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{\chi}(\rho,t)\right]dtd\rho$$

and

$$J_+^{(2)}(z) := \iint_{\mathbb{R}^{2n}\times[0,t_0]} \partial_{t}\left[(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{G}(\rho,t,z)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{\chi}(\rho,t)\right]dtd\rho.$$

Let us first focus on $J_+^{(1)}(z)$. We have

$$\begin{aligned}
&\partial_{\rho_1}\left[(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{G}(\rho,t,z)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{\chi}(\rho,t)\right]\\
&=\partial_{\rho_1}\widetilde{H}(\rho,t)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-2}\widetilde{G}(\rho,t,z)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{\chi}(\rho,t)\\
&+(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\partial_{\rho_1}\widetilde{G}(\rho,t,z)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{\chi}(\rho,t)\\
&+(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{G}(\rho,t,z)\partial_{\rho_1}\widetilde{H}(\rho,t)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-2}\widetilde{\chi}(\rho,t)\\
&+(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{G}(\rho,t,z)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\partial_{\rho_1}\widetilde{\chi}(\rho,t).
\end{aligned}\tag{C.0.14}$$

Using the fact

$$\partial_{\rho_1}\widetilde{H},\partial_{\rho_1}\widetilde{G},\partial_{\rho_1}\widetilde{\chi}=\mathcal{O}(t^\infty),\tag{C.0.15}$$

together with the fact that for $\tau\in]\tau_0-\eta,\tau_0+\eta[$ and $t>0$, we have (see (C.0.13))

$$\|(\tau-\widetilde{H}(\rho,t))^{-k}\|_{m\times m}=\mathcal{O}(t^{-k}),\quad \forall k\geqslant 1\tag{C.0.16}$$

we get

$$\begin{aligned}
&\left\|\partial_{\rho_1}\left[(\tau-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{G}(\rho,t,\tau)(\tau-\widetilde{H}(\rho,t))^{-1}\widetilde{\chi}(\rho,t)\right]\right\|_{m\times m}\\
&=\mathcal{O}(t^\infty)\|\widetilde{\chi}(\rho,t)\|_{m\times m}\in L^1([0,t_0]\times\mathbb{R}^{2n}),
\end{aligned}$$

uniformly for $\tau\in]\tau_0-\eta,\tau_0+\eta[$. This implies that $J_+^{(1)}(\tau+i0)$ exists for $\tau\in]\tau_0-\eta,\tau_0+\eta[$. By differentiating (C.0.14) k-times with respect to z we get a finite linear combination of terms of the form

$$\begin{aligned}
&\partial_{\rho_1}\widetilde{H}(\rho,t)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-j_0}\partial_z^{s_0}\widetilde{G}(\rho,t,z)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-r_0}\widetilde{\chi}(\rho,t)\\
&+(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-j_1}\partial_z^{s_1}\partial_{\rho_1}\widetilde{G}(\rho,t,z)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-r_1}\widetilde{\chi}(\rho,t)\\
&+(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-j_3}\partial_z^{s_3}\widetilde{G}(\rho,t,z)\partial_{\rho_1}\widetilde{H}(\rho,t)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-r_3}\widetilde{\chi}(\rho,t)\\
&+(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-j_4}\partial_z^{s_4}\widetilde{G}(\rho,t,z)(z-\widetilde{H}(\rho,t))^{-r_4}\partial_{\rho_1}\widetilde{\chi}(\rho,t),
\end{aligned}$$

where the powers $j_i,s_i,r_i\in\mathbb{N}$, $i=0,\dots,4$, and the order (which depends on k) is not important here. By setting $z=\tau\in]\tau_0-\eta,\tau_0+\eta[$ and using the same arguments as above, more precisely, estimates (C.0.15) and (C.0.16), we see that $z\mapsto J_+^{(1)}(z)$ extends to a C^k function on $]\tau_0-\eta,\tau_0+\eta[+i[0,\beta[$. Since k is arbitrary, $z\mapsto J_+^{(1)}(z)$ extends to a C^∞ function on $]\tau_0-\eta,\tau_0+\eta[+i[0,\beta[$.

The proof for $J_+^{(2)}(z)$ can be done analogously using the estimates

$$\partial_t\widetilde{H},\partial_t\widetilde{G},\partial_t\widetilde{\chi}=\mathcal{O}(t^\infty),$$

instead of (C.0.15). This ends the proof of the proposition. ∎

D

SOME AUXILIARY RESULTS

In this section, we regroup some technical lemmas used throught our proofs.

Lemma D.0.1 *[119, Th. 8.6] Let* g *be an order function, and suppose* $G \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ *satisfies*

$$G(x,\xi) - \log(g(x,\xi)) = \mathcal{O}(1),$$

and

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta G(x,\xi) = \mathcal{O}(1),\ (\alpha,\beta) \neq (0,0).$$

Then for $|t|$ *sufficiently small there exists* $b_t \in S(g^t;\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ *such that*

$$\exp(tG^w) = \mathrm{Op}_h^w(b_t).$$

Here $\exp(tG^w)$ *is defined as the unique solution to the ordinary differential equation*

$$\partial_t U_t - G^w U_t = 0,\ U(0) = I.$$

Lemma D.0.2 *[113, Lemma 3.2] Let* $\psi_1, \psi_2 \in S(1;\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ *such that* $\operatorname{supp}\psi_1 \subset \{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}; |\xi| \leqslant C\}$ *and* $\psi_1^2 + \psi_2^2 = 1$. *There exists* $\Psi_1 \in S(\langle\xi\rangle^{-\infty};\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ *and* $\Psi_2 \in S(1;\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ *with principal symbols* ψ_1 *and* ψ_2 *respectively, such that*

$$\Psi_1^w \circ \Psi_1^w + \Psi_2^w \circ \Psi_2^w = I + R^w, \quad (\Psi_j^w)^* = \Psi_j^w,$$

where $R \in S^{-\infty}(\langle\xi\rangle^{-\infty};\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$.

Lemma D.0.3 (Paley-Wiener) *Let* $\theta \in C_0^\infty(]a,b[;\mathbb{R})$, $0 < a < b$ *two real numbers. For all* $\tau \in \mathbb{R}$, *the function* $z \mapsto \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - z)$ *is analytic for* $z \in \mathbb{C}$ *and we have the following estimate*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \quad \left|\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)\right| \leqslant C_N |\tau - z|^{-N} \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{N-1} \sup_{t\in[\varepsilon a,\varepsilon b]} e^{\frac{t\Im z}{h}}, \quad \text{(D.0.1)}$$

uniformly for $\tau \in \mathbb{R}$. *Here* $\theta_\varepsilon(t) := \theta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$. *In particular, for* $N = 0$, *we have*

$$\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{h} e^{\frac{\varepsilon b \Im z}{h}}\right) & \textit{for} \quad \Im z > 0 \\ \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{h} e^{\frac{\varepsilon a \Im z}{h}}\right) & \textit{for} \quad \Im z < 0. \end{cases} \quad \text{(D.0.2)}$$

Despite the proof of this result is elementary, we give it for completeness.

Proof. The analyticity of $z \mapsto \mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - z)$ follows from standard result of complex analysis. Let $N \in \mathbb{N}$ and $\varepsilon > 0$. Performing N integrations by part using that $(hD_t)^N\left(e^{\frac{it}{h}(\tau - z)}\right) = (\tau - z)^N e^{\frac{it}{h}(\tau - z)}$, we get

$$\begin{aligned}(\tau - z)^N \mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z) &= \frac{(-1)^N}{2\pi h}\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} e^{\frac{it}{h}(\tau - z)} (hD_t)^N \theta_\varepsilon(t)\, dt \\ &= \frac{(-1)^N}{2\pi h}\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} e^{\frac{t\Im z}{h}} e^{\frac{it}{h}(\tau - \Re z)} (hD_t)^N \theta_\varepsilon(t)\, dt.\end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned}
|\tau - z|^N |\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi h} \sup_{t\in[\varepsilon a, \varepsilon b]} e^{\frac{t\Im z}{h}} \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} |(hD_t)^N \theta_\varepsilon(t)|\, dt \\
&\leqslant \frac{\varepsilon(b-a)}{2\pi h} \sup_{t\in[\varepsilon a, \varepsilon b]} e^{\frac{t\Im z}{h}} \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^N \|\partial_t^N \theta\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C_N \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^{N-1} \sup_{t\in[\varepsilon a, \varepsilon b]} e^{\frac{t\Im z}{h}},
\end{aligned}$$

which obviously implies (D.0.1). ■

5

REMARQUES ET PERSPECTIVES

5.1 Remarque sur la fonction de comptage des valeurs propres pour des systèmes non-microhyperboliques

Dans cette dernière partie, on donne une remarque concernant l'étude de la distribution asymptotique des valeurs propres discrètes d'un système d'opérateurs h-pseudodifférentiels auto-adjoint sans condition de microhyperbolicité. Cette remarque motive un problème qui sera l'une de nos perspectives.

Reprenons la discussion du début de la section 0.3 dans l'introduction. On considère un système d'opérateurs h-pseudodifférentiels $P(h) := p^w(x, hD_x; h)$ auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$ de symbole hermitien

$$p(x, \xi; h) \sim \sum_{j \geqslant 0} h^j p_j(x, \xi) \quad \text{dans} \;\; S(1; \mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C})).$$

Soient $e_1(x, \xi) \leqslant e_2(x, \xi) \leqslant \cdots \leqslant e_m(x, \xi)$ les valeurs propres du symbole principal $p_0(x, \xi)$, $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, et $a < b$ deux réels. Nous avons déjà rappelé que s'il existe $\eta > 0$ assez petit tel que $e_j^{-1}([a - \eta, b + \eta])$ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, alors pour h assez petit, le spectre de $P(h)$ dans $[a - \eta, b + \eta]$ est discret (voir [102, Proposition III.13]). On introduit la fonction de comptage

$$N_h(a, b) := \# \left\{ j; \mu_j(h) \in [a, b] \right\}$$

où $\mu_1(h) \leqslant \mu_2(h) \leqslant \cdots \leqslant \mu_{N(h)}(h)$ désignent les valeurs propres de $P(h)$ répétées suivants leurs multiplicités.

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, si l'on veut établir une asymptotique de type Weyl avec reste optimal $\mathcal{O}(h^{-n+1})$ pour $N_h(a, b)$, le point essentiel consiste à étudier le comportement asymptotique quand $h \searrow 0$ de la trace de l'opérateur $f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P(h))$, avec $f \in C_0^\infty(]\tau - \eta, \tau + \eta[; \mathbb{R})$, $\tau \in \{a, b\}$ et $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, où $\mathcal{F}_h^{-1}$ est l'opérateur de Fourier inverse semi-classique défini par (0.3.2).

Pour des systèmes microhyperboliques, Dimassi et Sjöstrand [42] (voir aussi Ivrii [70]) ont prouvé le résultat suivant généralisant l'asymptotique (0.3.4) au cas matriciel.

Théorème 5.1 (Ivrii [70], Dimassi-Sjöstrand [42]) *Sous l'hypothèse que $p_0 - \tau$ est microhyperbolique dans une certaine direction en tout point de Σ_τ, $\tau \in \{a, b\}$, on a*

$$N_h(a, b) = (2\pi h)^{-n} \alpha_0 + \mathcal{O}(h^{-n+1}), \quad h \searrow 0,$$

avec

$$\alpha_0 = \sum_{j=1}^{m} \iint_{e_j^{-1}([a,b])} dx d\xi.$$

On rappelle que pour $\tau \in \mathbb{R}$, Σ_τ désigne le niveau d'énergie correspondant défini par

$$\Sigma_\tau := \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ \det\left(p_0(x,\xi) - \tau\right) = 0\right\} = \bigcup_{j=1}^{m} \left\{(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n};\ e_j(x,\xi) = \tau\right\}.$$

Notons que pour $\tau \in [a-\eta, b+\eta]$, Σ_τ est un compact de $\mathbb{R}^{2n}$.

L'objectif de la présente remarque est de montrer que sans l'hypothèse de microhyperbolicité, en utilisant uniquement le calcul symbolique h-pseudodifférentiel, l'étude du comportement asymptotique de $\mathrm{tr}\left(f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - P(h))\right)$ se ramène à l'étude du comportement asymptotique d'une intégrale oscillante. Ce type de résultat peut mener à des asymptotiques sur la fonction de comptage de type

$$N_h(a,b) = (2\pi h)^{-n}\alpha_0 + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}-\delta-n}), \quad \delta > 0. \tag{5.1.1}$$

Dans la suite, on utilise les mêmes notations du chapitre précédent. Soient $\tau_0 \in \{a,b\}$ et $f \in C_0^\infty(]\tau_0-\eta, \tau_0+\eta[;\mathbb{R})$. Pour tout $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, $\tau \in \mathbb{R}$, l'opérateur $f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P(h))$ est de classe trace et on a (voir [42])

$$\mathrm{tr}\left(f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P(h))\right) \equiv \mathrm{tr}\left(\chi^w f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta(\tau - P(h))\right),$$

avec $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{R})$ égale à 1 au voisinage de

$$\Sigma_{[\tau_0-\eta,\tau_0+\eta]} := \bigcup_{\tau\in[\tau_0-\eta,\tau_0+\eta]} \Sigma_\tau.$$

Proposition 5.1.1 *Soit $\theta \in C_0^\infty(]-1,1[;\mathbb{R})$ égale à 1 près de 0. On fixe $\varepsilon = h^{1-\delta}$, avec $\delta \in]0,\frac{1}{2}[$. On a*

$$\mathrm{tr}\left(f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - P(h))\right) = (2\pi h)^{-n}\sum_{j=1}^{m} \mathscr{I}_j(\tau;h) + \mathcal{O}(h^{1-2\delta-n}), \tag{5.1.2}$$

uniformément pour $\tau \in \mathbb{R}$, avec pour $j = 1, \cdots, m$, $\mathscr{I}_j(\tau;h)$ est l'intégrale oscillante définie par

$$\mathscr{I}_j(\tau;h) := \frac{1}{2\pi h^\delta}\iint_{\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}}\int_{\mathbb{R}_t} e^{\frac{i}{h^\delta}t(\tau - e_j(x,\xi))}\theta(t) f(e_j(x,\xi))\chi(x,\xi)\,dt\,dx\,d\xi. \tag{5.1.3}$$

Preuve : En revenant à la preuve du Théorème 4.2.6 dans le chapitre précédent, plus précisément à partir de l'équation (4.3.45), on voit qu'en utilisant le calcul symbolique h-pseudodifférentiel, on a montré que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{tr}\left(f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - P(h))\right) = (2\pi h)^{-n}\sum_{j=0}^{N} h^j a_j(\tau;h) + \mathcal{O}(h^{(N+1)(1-2\delta)-n}), \tag{5.1.4}$$

avec

$$a_j(\tau;h) := -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar\partial\left(\tilde f \psi_{h^\delta}\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau - z)\left(\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x,\xi)\widehat{\mathrm{tr}}(\mathcal{G}_j(x,\xi,z))dxd\xi\right) L(dz),$$

où $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ est une extension presque analytique de f, ψ_{h^δ} définie par (4.3.47) et

$$\mathcal{G}(x,\xi,z;h) \sim \sum_{j\geqslant 0} h^j \mathcal{G}_j(x,\xi,z) \quad \text{dans} \ \ S_\delta^\delta(1;\mathbb{R}^{2n}, M_m(\mathbb{C}))$$

est le symbole de la résolvante $(z-P(h))^{-1}$ comme opérateur h-pseudodifférentiel dans la région $\{z \in \mathbb{C};\, |\Im z| \geqslant h^\delta\}$, (voir Proposition 1.1). En particulier, $\mathcal{G}_0(x,\xi,z) = (z-p_0(x,\xi))^{-1}$. Nous insistons ici sur le fait que pour obtenir (5.1.4), nous n'avons utilisé aucune hypothèse de microhyperbolicité.

Pour $N=0$, (5.1.4) implique en particulier

$$\operatorname{tr}\left(f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau-P(h))\right) = (2\pi h)^{-n} a_0(\tau;h) + \mathcal{O}(h^{1-2\delta-n}).$$

On calcule maintenant $a_0(\tau;h)$. On a

$$\begin{aligned} a_0(\tau;h) &= -\frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^m \int_{\mathbb{C}} \bar\partial\left(\tilde f\psi_{h^\delta}\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau-z)\left(\iint_{\mathbb{R}^{2n}} \chi(x,\xi)(z-e_j(x,\xi))^{-1}dxd\xi\right)L(dz) \\ &= \sum_{j=1}^m \iint_{\mathbb{R}^{2n}}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \bar\partial\left(\tilde f\psi_{h^\delta}\right)(z)\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau-z)(z-e_j(x,\xi))^{-1}L(dz)\right)\chi(x,\xi)dxd\xi. \end{aligned}$$

En intégrant par parties en utilisant

$$\frac{1}{\pi}\bar\partial\left((z-e_j(x,\xi))^{-1}\right) = \delta(\cdot - e_j(x,\xi)),$$

on obtient

$$\begin{aligned} a_0(\tau;h) &= \sum_{j=1}^m \iint_{\mathbb{R}^{2n}} f(e_j(x,\xi))\mathcal{F}_h^{-1}\theta_\varepsilon(\tau-e_j(x,\xi))\chi(x,\xi)dxd\xi \\ &= \frac{1}{2\pi h}\sum_{j=1}^m \iint_{\mathbb{R}^{2n}_{x,\xi}}\int_{\mathbb{R}_t} e^{\frac{it}{h}(\tau-e_j(x,\xi))}\theta_\varepsilon(t)f(e_j(x,\xi))\chi(x,\xi)\,dtdxd\xi. \end{aligned}$$

Ainsi par un changement de variable, on voit que

$$a_0(\tau;h) = \sum_{j=1}^m \mathscr{I}_j(\tau;h).$$

■

La formule (5.1.2) assure que pour un système d'opérateurs h-pseudodifférentiels non nécessairement microhyperboliques, l'étude du comportement asymptotique de la trace de l'opérateur $f(P(h))\mathcal{F}_h^{-1}\theta_{h^{1-\delta}}(\tau-P(h))$ se ramène à l'étude du comportement asymptotique des intégrales oscillantes (5.1.3). Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, ce type de résultat peut conduire à des asymptotiques de la fonction de comptage de type (5.1.1). Une des questions que nous souhaitons étudier prochainement est de voir si l'on peut établir des asymptotiques de type de Weyl avec reste optimal pour la fonction de comptage des valeurs propres d'un système non-microhyperbolique.

BIBLIOGRAPHY

[1] S. Agmon, *Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **4**, (1975) 151-218.

[2] J. Aguilar, J. M. Combes, *A class of analytic perturbation for one-body Schrödinger Hamiltonians*, Comm. Math. Phys, **22** (1971), 269-279.

[3] M. Assal, *Long time semiclassical Egorov theorem for* h*-pseudodifferential systems*, Asymptotic Analysis, vol **101**, no 1-2 (2017), 17-67.

[4] M. Assal, M. Dimassi, S. Fujiié, *Semiclassical trace formula and spectral shift function for systems via a stationary approach*, accepted for publication in Int. Math. Res. Not. (2017), preprint on [arXiv 1702.07880].

[5] M. Assal, M. Dimassi, *Discrete spectrum and Lieb-Thirring inequality for slowly varying perturbations of the periodic Schrödinger operator*, in preparation.

[6] R. Assel, M. Dimassi, *Spectral Shift Function for the perturbations of Schrödinger operators at high energy*, Serdica Math. J., **34** (2008), 253-266.

[7] E. Balslev, B. Helffer, *Limiting absorption principle and resonances for the Dirac operator* Adv. in Appl. Math. **13** (1992) 186-215.

[8] B. Bambusi, S. Graffi, T. Paul, *Long time semiclassical approximation of quantum flows : A proof of the Ehrenfest time*, Asymptot. Anal. **21** (1999), 149-160.

[9] R. Beals, *Characterization of pseudodifferential operators and application*, Duke Math. J. **44** (1977), 45-57.

[10] M. S. Birman, M. G, Krein, *On the theory of wave operators and scattering operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **144** (1962), 475-478.

[11] M. S. Birman, D. R. Yafaev, *On the trace-class method in potential scattering theory*, J. Soviet Math, **56**, no 2 (1993), 2285-2299.

[12] M. S. Birman, D. R. Yafaev, *The spectral shift function. The work of M. G. Krein and its further development*, Algebra i Analiz **4**, no 5 (1992), 1-44, English trans in St Petersburgh Math J. **4**, no 5 (1993).

[13] N. Bohr, *Über die Serienspektra der Elemente*, Zeitschrift für Physik, vol **2**, Issue 5 (1920), 423-469.

[14] J. Bolte, R. Glaser, *Quantum ergodicity for Pauli Hamiltonians with spin* $1/2$, Nonlinearity **13** (2000), 1987-2003.

[15] J. Bolte, R. Glaser, *A semiclassical Egorov theorem and quantum ergodicity for matrix valued operators*, Commun. Math. Phys. **247** (2004), 391-419.

[16] J.F. Bony, N. Burq, T.Ramond, *Minoration de la résolvante dans le cas captif*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **348**, (2010) 1279-1282.

[17] A. Bouzouina, D. Robert, *Uniform semiclassical estimates for the propagation of quantum observables*, Duke Math. J., **111**(2) (2002).

[18] R. Brummelhuis, J. Nourrigat, *Scattering amplitude for Dirac operators*, Commun. Part. Diff. Equations **24** (1999), 377-394.

[19] R. Brummelhuis, T. Paul, A. Uribe, *Spectral estimates around a critical level*, Duke Math. J **78** (1995), 477-530.

[20] V. Bruneau, D. Robert, *Asymptotics of the scattering phase for the Dirac operator" High energy, semi-classical and non-relativistic limits*, Ark. Mat. 37, (199), 1–32.

[21] P. Calderón, R. Vaillancourt, *On the boundedness of pseudo-differential operators*, J. Math. Soc. Japan **23** (1971), 374-378.

[22] B. Camus, *A semclassical trace formula at a non-degenerate critical level*, J. Func. Anal. **208** (204), 446-481.

[23] B. Camus, *A semi-classical trace formula at a totally degenerate critical level. Contributions of local extremum*, Communications in Mathematical Physics 247 (2004) no. 2, 513-526.

[24] J. Chazarain, *Spectre d'un Hamiltonien quantique et mécanique classique*, Comm. in Part. Diff. Equ., n 6 (1980), 595-644.

[25] B. V. Chirikov, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Phys. Rep. **52** (1979), 264-379.

[26] J. M. Combes, P. Duclos, R. Seiler, *The Born-Oppenheimer Approximation*, ed. C. G. Velo and A. Wightman, Plenum Press, New York, (1981).

[27] M. Combescure, J. Ralston, D. Robert, *A proof of the Gutzwiller semi-classical trace formula using coherent states decomposition*, Comm. Math. Phys., 202 **(2)** (1999), 463-480.

[28] M. Combescure, D. Robert, *Coherent states and application in Mathematical Physics*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer (2012).

[29] M. Combescure, D. Robert, *Semiclassical spreading of quantum waves packets and applications near unstable fixed points of the classical flow*, Asymptot. Anal **14** (1997), 377-404.

[30] G. M. Constantine, T. H. Savits, *A multivariate Faá Di Bruno formula with applications*, Transaction of the A. M. S, vol 348, no 2, (1996).

[31] H. O. Cordes, *A version of Egorov's theorem for systems of hyperbolic pseudo-differential equations*, Journal of Funct. Anal., **48** (1982), 285-300.

[32] H. O. Cordes, *A pseudo-algebra for observables for the Dirac equation*, Manuscripta Math. **(45)**, (1983) 77-105.

[33] H. O. Cordes, *On Dirac observables*, Progr. Nonlinear Diff. Equ. Appl. **(42)** (2000), 61-77.

[34] H. O. Cordes, *Dirac algebra and Foldy-Wouthuysen transform*, Evolution Equations and their Applications in Physical and Life Sciences, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol **(215)**, New York, Dekker, (2001) 335-346.

[35] M. Dauge, D. Robert, *Weyl's formula for a class of pseudodifferential operators with negative order on* $L^2(\mathbb{R}^n)$, Pseudodifferential operators, Lecture Notes in Mathematics vol **1256**, Springer, Berlin (1987), 91-122.

[36] J. Derezinski, C. Gérard, *Scattering Theory of Classical and Quantum N-Particle Systems*, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1997.

[37] M. Dimassi, *Resonances for Slowly Varying Perturbations of a Periodic Schrödinger Operator*, Canad. Journal. Math. **54** (2002), 998-1037.

[38] M. Dimassi, *Développements asymptotiques des perturbations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique*, Commun. in Partial differential equations **18** (5 et 6), (1993), 771-803.

[39] M. Dimassi, *Trace asymptotics formulas and some applications*, Asymptotic Analysis **18** (1998), 1-32.

[40] M. Dimassi, S. Fujiié, *A time-independent approach for the study of the spectral shift function and an application to Stark Hamiltonians*, Comm. in Part. Diff. Equ., vol **40**, Issue 10 (2015), 1787-1814.

[41] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Mathematical Society, Lecture Note Series **268** (1999).

[42] M. Dimassi, J. Sjöstrand, *Trace asymptotics via almost analytic extension*, Partial differential equations and Mathematical physics. Prog. Nonlin. Diff. Eq. Appl. **21** (1996), 126-142, Birkhäuser, Boston.

[43] M. Dimassi, M. Zerzeri, *A time-independent approach for the study of spectral shift function*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **350** (2012), 375-378.

[44] S. Dozias, *Opérateurs* h*-pseudodifférentiel à flots périodiques*, Thèse de Doctorat, Paris nord (1994).

[45] T. Duyckaerts, C. Fermanian-Kammerer, T. Jecko, *Degenerate codimension 1 crossings and resolvent estimates*, Asymp. Anal. **65** (2009), no 3-4, 147-174.

[46] Yu. V. Egorov, *On canonical transformations of pseudodifferential operators*, Uspekhi Mat. Nauk **24**, no.5 (1969), 235-236, (in russian).

[47] C. Emmrich, A. Weinstein, *Geometry of the transport equation in multicomponent WKB approximations*, Commun. Math. Pyhs, **176** (1996), 701-711.

[48] F. Faure, *Semi-classical formula beyond the Ehrenfest time in quantum chaos. (I) Trace formula.*, Annales de l'institut de Fourier, Tome 57, no 7 (2007), 2525-2599.

[49] F. Faure, J. Sjöstrand, *Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows*, Comm. Math. Phys. **308** no. 2, (2011), 325-364.

[50] B. Fedosov, *Deformation quantization and index theory*, **9**, Akademie Verlag, 1996.

[51] R. L. Franck, E. H. Lieb, R. Seiringer *Number of bound states of Schrödinger operators with matrix-valued potentials*, Letter in Math. Phys. **(82)**, 2 (2007), 107-116

[52] C. Gérard, *A proof of the abstract limiting absorption principle by energy estimates*, J. Funct. Anal. **254** (2008), 2707-2724.

[53] C. Gérard, A. Martinez, *Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée*, C.R. Acad. Sci. **306** (1987), 121-123.

[54] C. Gérard, A. Martinez, J. Sjöstrand, *A Mathematical Approach to the effective Hamiltonian in perturbed periodic problems*, Commun. Math. Phys. **142** (1991), 217-244.

[55] V. Guillemin, A. Uribe, *Circular symmetry and the trace formula*, Invent. Math. **96** (1989), 385-423.

[56] M. Gutzwiller, *Periodic orbits and classical quantizations conditions*, J. Math. Phys. **12** (1971) 343-358.

[57] G. A. Hagedorn, *A time dependent Born-Oppenheimer approximation*, Comm. Math. Phys **77** (1980), 1-19.

[58] G. A. Hagedorn, *Molecular propagation through electron energy level crossing*, Mem. Amer. Math. Soc. **111** (1994), no 536.

[59] G. A. Hagedorn, A. Joye, *Semiclassical dynamics with exponentially small error estimates*, Commun. Math. Phys., **207** (1999), 439-465.

[60] G. A. Hagedorn, A. Joye, *Exponentially Accurate Semiclassical Dynamics : Propagation, Localization, Ehrenfest times, Scattering, and more general states*, Ann. Henri Poincaré **1-5** (2000), 837-883.

[61] B. Helffer, D. Robert, *Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles*. J. Funct. Anal. **53** (1983), no 3, 246-268.

[62] B. Helffer, D. Robert, *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques*, Annales de l'institut Fourier, tome **31** n 3 (2) (1981), 169-223.

[63] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Analyse semiclassique pour l'équation de Harper II*, Mém. Soc. Math. France (N. S.), **40** (1990), 1-139.

[64] B. Helffer, J. Sjöstrand, *Équation de Schrödinger avec champs magnétique et equation de Harper*, (Snderborg, 1988) eds. H. Holden and A. Jensen, Lecture Notes in Phys., vol. 345, Springer-Verlag, Berlin, 1989, pp. 118-197.

[65] P.D. Hislop, I.M, Sigal, *Introduction to Spectral Theory with applications to Schrödinger operators*, Applied Mathematical Sciences, vol 113, Springer-Verlag, New York (1996).

[66] L. Hörmander, *Fourier intergal operators I*, Acta Math, **127** (1971), 79-183.

[67] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, vol I-IV, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York (1985).

[68] W. Hunziker, *Distortion analyticity and molecular curves*, Annales de L'I.H.P (Section Physique Théorique) (1986).

[69] H. Isozaki, H. Kitada, *Modified wave operators with time independent modifiers*, J. Math. Phys **7** (1983), 137-143.

[70] V. Ivrii, *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics*, Springer-Verlag, Berlin, (1998).

[71] T. Jecko, *Estimation de la résolvante pour une molécule diatomique dans l'approximation de Born-Oppenheimer*, Comm. Math. Phys. **195** (3) (1998), 585-612.

[72] T. Jecko, *Semiclassical resolvent estimates for Schrödinger matrix operators with eigenvalues crossing*, Math. Nachr., vol **257**, Issue 1 (2003), 36-54.

[73] T. Jecko, *Non-trapping condition for semiclassical Schrödinger operators with matrix-valued potentials*, Math. Phys. Elec. J., vol **11**, (2005)

[74] T. Jecko, *On the mathematical treatment of the Born-Oppenheimer approximation*, Journal of Math. Physics **(55)** (2014).

[75] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag (1995).

[76] A. Khochman, *Resonances and spectral shift function for the semiclassical Dirac operators*, Rev. Math. Phys. **19** (10) (2007), 1071-1115.

[77] M. Klein, A. Martinez, R. Seiler, X. P. Wang, *On the Born-Oppenheimer expansion for polyatomic molecules*, Comm. Math. Phys. **143** (1992), 607-639.

[78] M. G. Krein, *On certain new studies in the perturbation theory for self-adjoint operators*, Topics in Differential and Integral Equations and Operators Theory, I Gohberg, Birkhaüser, Basel (1983).

[79] M. G. Krein, *On the trace formula in perturbation theory*, Mat. Sb, **33** (75) (1953), 597-626 (in russian).

[80] M. G. Krein, V. A. Javrjan, *On spectral shift functions arising in perturbation of a positive operator*, J. Operator. Th. **6** (1981), 155-191 (in russian).

[81] E. Korotyaev, A. Pushinitski *Trace formulae and high energy asymptotics for the Stark operator*, Comm. Part. Diff. Eqs. **28** (2003), 817-842

[82] V. V. Kučerenko, *Asymptotics of the solution of the system* $A(x, -ih\partial_x)u = 0$ *as* $h \to 0$ *in the case of characteristics of variable multiplicity*, Math. USSR Izvestija, **vol 8** no 3 (1974), 631-666.

[83] R. P, Leipnik, C.E. M. Pearce, *The multivariate Faá Di Bruno formula and multivariate Taylor expansions with explicit integral remainder term*, Anziam. J. **48**, (2007) 327-41.

[84] I. M. Lifshits, *On a problem of perturbation theory*, Uspekhi Mat. Nauk. **7**, no 1, **143** (1952), 171-180.

[85] I. M. Lifshits, *Some problems of the dynamic theory nonideal crystal lattices*, Nuovo Cimento Suppl. **3** (1956), 716-734.

[86] Ph.A. Martin, G. Nenciu, *Semiclassical inelastic S-matrix for one dimensional N-states systems*, Rev. Math. Phys. **7** (1995), 193-242.

[87] A. Martinez, *An Introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[88] A. Martinez, T. Ramond, J. Sjöstrand, *Resonance for non-analytic potentials*, Analysis and PDE, vol 2 (2009) No 1, 29-60.

[89] L. Nedelec, *Resonances for matrix Schrödinger operators*, Duke Math. J., vol 106, **2**, (2001), 209-236.

[90] L. Nedelec, *Résonances pour l'opérateur de Schrödinger matriciel*, Ann. IHP, vol 65, **2**, (1996), 129-162.

[91] E. Nelson, *Topics in Dynamics I*, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1970).

[92] G. Nenciu, *Linear adiabatic theory, exponential estimates*, Chem. Phys. **152**, (1993) 479-496.

[93] G. Nenciu, *On asymptotic perturbation theory for quantum mechanics : almost invariant subspaces and gauge invariant magnetic perturbation theory*, J. Math. Phys. **43**, 1273-1298 (2002).

[94] G. Nenciu, V. Sordoni, *Semiclassical limit for multistate Klein-Gordon systems : almost invariant subspaces and scattering theory*, Journal of Math. Phys. **45** No. 9 (2004), 3676-3696.

[95] G. Panati, H. Spohn, S. Teufel, *Space-adiabatic perturbation theory*, Adv. Theor. Math. Phys. **7** (2003), 145-204.

[96] T. Paul, A. Uribe, *Sur la formule semi-classique des traces*, Comptes Rendus Séances Acad. Sci. Sér I **313** (5) (1991), 217-222.

[97] T. Paul, A. Uribe, *The semiclassical trace formula and propagation of wave packets*, J. Funct. Anal. **132** (1) (1995), 192-249.

[98] T. Paul, A. Uribe, *A construction of quasi-modes using coherent states*, Ann. I.H.P. Sect. A., Physique théorique **59**, (1993), 357-381.

[99] V. Petkov, G. Popov, *Semiclassical trace formula and clustering of the eigenvalues for Schrödinger operators*, Ann. Inst. Henri Poincaré Phys. Théorique 86 **(1)** (1998), 17-83.

[100] A. Pushnitski, *The spectral shift function and the invariance principle*, J. of Funct. Anal. **183** (2), (2001), 269-320

[101] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Tome II, Fourier Analysis, Self-adjointness, Academic Press (1979).

[102] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Mathematics **68** (1987), Birkhäuser.

[103] D. Robert, *Semiclassical asymptotics for the Spectral Shift Function*, Amer. Math. Soc. Trans. **189** (1999).

[104] D. Robert, *Relative time-delay for perturbations of elliptic operators and semiclassical asymptotics*, J. Funct. Anal **126** (1994), 36-82.

[105] D. Robert, H. Tamura, *Semiclassical bounds for resolvents of Schrödinger operators and asymptotics for scattering phases*, Comm. Part. Diff. Equ. **9**, no 10, (1984), 1017-1058.

[106] D. Robert, H. Tamura, *Semiclassical asymptotics for local spectral densities and time delay problems in scattering processus*, J. Funct. Anal. **80** (1) (1988), 124-147.

[107] D. Robert, *Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du laplacien*, Ann. Scient. de l'ENS, 4-ème série, tome **25**, no. 2 (1992), 107-134.

[108] D. Robert, H. Tamura, *Semiclassical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross-sections*, Ann. Inst. H. Poincaré Physique. Théorique. **46** no 4 (1987), 415-442.

[109] D. Robert, X-P. Wang Time-delay and spectral density for Stark hamiltonians (II). Asymptotics of trace formulae. Chin. Ann. Math. (1991) 358-384

[110] B. Simon, *Trace ideals and their applications* London Mathematical Society, Lecture Note Series **35** (1979).

[111] J. Sjöstrand, *A trace formula and review of some estimates for resonances, in Micorlocal Analysis and Spectral Theory (Lucca, 1996), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci **490**, Kluwer, Dordrecht, 1997.*

[112] J. Sjöstrand, M. Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 729-769.

[113] J. Sjöstrand, M. Zworski, *Fractal upper bounds on the density of semiclassical resonances*, Duke Math, J. **137** (2007), no 3, 381-459.

[114] H. Spohn, *Semiclassical limit of the Dirac equation and spin precession*, Annals of Physics **282** (2000), 420-431.

[115] H. Spohn, S. Teufel, *adiabatic decoupling and time-dependent Born-Oppenheimer theory*, Comm. Math. Phys. **224** (2001), 113-132.

[116] X-P. Wang, *Approximation semi-classique de l'equation de Heisenberg*, Commun. in Math. Phys., **104** (1986), 77-86.

[117] D. Yafaev, *Mathematical Scattering Theory*, Translation of Mathematical monographs, AMS **105**, Providence RI, (1992).

[118] G. M. Zaslavsky, *Stochasticity in quantum systems*, Phys. Rep. **80** (1981), 157-250.

[119] M. Zworski, *Semiclassical Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, **138**, AMS 2012.