Concours Agrégation, Mathématiques générales

Leçon 53- Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Commentaires du jury 2015 : Cette leçon est souvent choisie pour son lien avec la réduction, toutefois, le jury ne souhaite pas que le candidat présente un catalogue de résultats autour de la réduction, mais seulement ce qui a trait aux polynômes d'endomorphismes. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $K[u]$, connaître sa dimension sans hésiter. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs. Le jury souhaiterait voir certains liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $K[u]$. Le candidat peut s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect applications est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, rappelons que pour calculer A^k, il n'est pas nécessaire en général de faire la réduction de A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit bien souvent).
Commentaires du jury 2016 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomor- phisme en dimension finie. Applications. Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre Krus, connaître sa dimension sans hésiter ; s'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite s'intéresser à ses propriétés globales. Les liens entre réduction d'un endomorphisme u et la structure de l'algèbre $K[u]$ sont importants, tout comme ceux entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques. Il faut bien préciser que, dans la réduction de Dunford, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect applications est trop souvent négligé. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est souhaitable que les candidats ne fassent pas la confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, rappelons que pour calculer A^k , il n'est pas nécessaire en général de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent).

Bibliographie

[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
Errata, https://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
Compléments et errata, https://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. A] Fresnel J. *Algèbre des matrices* (Hermann 2011)
et
[Go.] Gourdon X. *Algèbre* (ellipses 2009)

Développements conseillés :

(1) Théorème de Cayley Hamilton (version forte), [Fr. A] p. 151.
(2) Décomposition de Dunford Jordan.
   1. Une preuve avec les projecteurs, [Go] pp 192 et 191.
   2. Une preuve algorithmique, [F. M. 1] $n°11$ p 18 en caractéristique 0 due à C. Chevalley
(3) Décomposition de Frobenius, [F. M. 2] p. 11.

Exercice 1 Idempotents de l'anneau $K[X]/(P)$, [F. M. 1] $n°38$ p. 88. Application.
On suppose que A est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et que $P(A) = 0$ avec $P(X) := (X-1)^2(X+1)^2(X-2)$

(1) Montrer que $\frac{1}{P} = \frac{N_1(X)}{(X-1)^2} + \frac{N_2(X)}{(X+1)^2} + \frac{N_3(X)}{X-2}$ avec $deg(N_1) \leq 1, deg(N_2) \leq 1, \deg(N_2) \leq 0$ (on trouve $N_1 = -1/4$, $N_2 = (-4/9)(7X+4)$ et $N_3 = (-1/9)$).

(2) On pose $e_1 := N_1 \frac{P}{(X-1)^2}$, $e_2 := N_2 \frac{P}{(X+1)^2}$ et $e_3 := N_3 \frac{P}{X-2}$. En déduire que $Id = e_1(A) + e_2(A) + e_3(A)$ et que $e_i(A)e_j(A) = \delta_{i,j} e_i(A)$.

(3) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ on a $A^k = (Id + k(A - Id))e_1(A) + ((-1)^k Id + (-1)^{k-1} k(A + Id))e_2(A) + 2^k e_3(A)$ et en déduire que pour $t \in \mathbb{C}$ on a l'identité :

$exp(tA) = e^t(Id + t(A - Id))e_1(A) + e^{-t}(Id + t(A + Id))e_2(A) + e^{2t} e_3(A)$

Exercice 2 Une décomposition en sous-espaces stables, [F. M. 1] $n°7$ p. 12

Exercice 3 Soit $E \neq \{0\}$ un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in End_k(E)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ avec $E = k[u](x)$. Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par u. On note v resp. w l'endomorphisme de F resp. $\frac{E}{F}$ induit par u. On rappelle que $ppcm(m_v, m_w) | m_u | m_v m_w$ où m_u, m_v, m_w désignent les polynômes minimaux de u, v, w.

(1) Rappeler pourquoi on a $\chi_u = \chi_v \chi_w$ où χ_u est le polynôme caractéristique de u.

Preuve. Soit B une base de F que l'on complète en une base de E en relevant une base B' de E/F. Il suit que la matrice de u dans cette base est triangulaire supérieure par blocs avec sur la diagonale un bloc constitué de la matrice de v dans B et un bloc qui est la matrice w dans la base B'. Il suit que $\chi_u = \chi_v \chi_w$ (développement du déterminent d'une matrice triangulaire par blocs). ///

(2) Montrer que $\chi_v = m_v$ et en déduire que F est un sous-espace monogène de (E, u).

Preuve. On a $\chi_u = m_u | m_v m_w | \chi_v \chi_w = \chi_u$ ainsi $m_u | m_v m_w$ et donc $1 = \frac{\chi_u}{m_u} = \frac{\chi_v}{m_v} \frac{\chi_w}{m_w}$ ce qui avec Cayley-Hamilton est une identité polynomiale et montre que $\chi_v = m_v$ mais aussi $\chi_w = m_w$ et donc que (F, v) et $(\frac{E}{F}, w)$ sont monogènes. Ainsi il existe $y \in F$ avec $F = k[v](y)$ et donc $F = k[u](y)$ est un sous-espace monogène de (E, u).///

(3) Montrer qu'il existe $P \in k[X]$ avec $F = P(u)k[u](x)$ et en déduire que $F = P_F(u)k[u](x)$ avec $P_F \in k[X]$ unitaire et $P_F | m_u$ (considérer le PGCD de P et de m_u).

Preuve. On a $F = k[u](y)$. Puisque $E = k[u](x)$ il suit que $y = P(u)(x)$ où $P \in k[X]$. Ainsi $F = P(u)k[u](x)$. Soit $\delta = PGCD(P, m_u)$, alors $\delta(u)k[u] = P(u)k[u] + m_u(u)k[u] = P(u)k[u]$. Ainsi $P_F := \delta$ convient. ///

(4) En considérant $I_F := \{Q \in k[X] \mid Q(u)(F) = 0\}$, montrer que $P_F = \frac{m_u}{m_v}$. Ainsi $F = k[u](\frac{m_u}{m_v})(u)(x)$.

Preuve. Puisque $Q(u)(F) = 0$ équivaut à $Q(u)P_F(u)(x) = 0$, c'est à dire à $m_u | QP_F$, il suit que $I_F = \frac{m_u}{P_F} k[X]$, ainsi $m_v = \frac{m_u}{P_F}$. ///

(5) Soit $D \in k[X]$ un diviseur unitaire de m_u et $F := k[u](y)$ avec $y = P(u)(x)$ et $P := \frac{m_u}{D}$. Montrer que $m_v = D$ où v est l'endomorphisme de F induit par u.

Preuve. On applique ce qui précède à F et $P_F := P$. ///

(6) Exprimer le cardinal de l'ensemble des sous-espaces de E stables par u en fonction de la décomposition en irréductibles de m_u

Preuve. Puisque les sous-espaces stables de E sont en bijection avec les diviseurs unitaires de m_u, il suffit de remarquer que m_u n'a qu'un nombre fini de diviseurs unitaires. Notez que si $m_u = \prod_{1 \leq i \leq s} P_i^{\alpha_i}$ est la décomposition en irréductibles de m_u alors ce nombre est $\prod_{1 \leq i \leq s} (\alpha_i + 1)$. ///

(7) Caractériser les espaces monogènes (E, u) qui admettent seulement deux sous-espaces stables.

Preuve. D'abord $E \neq 0$, ainsi $m_u \neq 1$. Par la question précédente ce sont les espaces monogènes tels que m_u est irréductible. ///

(8) Supplémentaire stable. Pour une généralisation voir [F. M. 2] par. 1.3.2. p. 18.

(a) Soit $F \subset E$ un sous-espace stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u. Montrer que si F admet un supplémentaire G qui est stable par u alors $(m_v, \frac{m_u}{m_v}) = 1$.

Preuve. Si $E = F \bigoplus G$ avec G stable par u et si w est la restriction de u à G alors $\chi_u = \chi_v \chi_w$ et $m_u = ppcm(m_v, m_w)$. Puisque (E, u), (F, v) et (G, w) sont des espaces monogènes par les questions précédentes, il suit que $m_u = m_v m_w$ et que $(m_v, m_w) = 1$. ///

(b) Réciproquement soit $F \subset E$ un sous-espace stable par u et v l'endomorphisme de F induit par u. On suppose que $(m_v, \frac{m_u}{m_v}) = 1$, montrer que F admet un et un seul supplémentaire G qui est stable par u.
Preuve. Par (4) $F = k[u](\frac{m_u}{m_v})(u)(x)$. Soit $G := k[u](m_v)(u)(x)$ alors si w désigne l'endomorphisme de G induit par u, avec (4) on a $m_w = \frac{m_u}{m_v}$. Soit $x \in F \cap G$ alors $m_v(u)(x) = 0$ et $m_w(u)(x) = 0$ et puisque $1 = Am_v + Bm_w$ pour $A, B \in k[X]$ il suit que $x = 0$. Puisque $\deg m_v + \deg m_w = \deg m_u = \dim E$, il suit que $E = F \bigoplus G$. L'unicité du supplémentaire stable suit de la caractérisation d'un sous-espace stable G de E par le polynôme minimal de l'endomorphisme de G induit par u. ///

(c) Dénombrer les sous-espaces stable de E qui admettent un supplémentaire stable.
Preuve. Cela revient à compter le cardinal de $\mathcal{P} := \{P \in k[X], P | m_u,\ pgcd(P, \frac{m_u}{P}) = 1$ et unitaires. Si $m_u = \prod_{1 \le i \le s} P_i^{\alpha_i}$ est la décomposition en irréductibles de m_u, on note pour P unitaire qui divise m_u, $I_P := \{i, \mid 1 \le i \le s,\ P_i | P\}$. Si $P \in \mathcal{P}$ alors $P_i | P$ si et seulement si $P_i^{\alpha_i} | P$; ainsi $P = \prod_{i \in I_P} P_i^{\alpha_i}$. Il suit que l'application qui à $P\mathcal{P}$ associe I_P définit une bijection de $\mathcal{P}$ sur l'ensemble des parties de $\{1 \le i \le s\}$; ainsi $|\mathcal{P}| = 2^{s+1}$. ///
Remarque. *Ce calcul rappelle le dénombrement des idempotents de l'algèbre $k[u]$. De fait si $e \in k[u]$ est un idempotent de $k[u]$, alors $E = F \bigoplus G$ avec $F = eE$ et $G = (1 - e)E$. Réciproquement si $E = F \bigoplus G$ avec F, G des sous-espaces stables alors $F = k[u](\frac{m_u}{m_v})(u)(x)$ et $G := k[u](m_v)(u)(x)$ avec $m_v | m_u$ et $(m_v, \frac{m_u}{m_v}) = 1$. Soit $1 = Am_v + B\frac{m_u}{m_v})$ avec $A, B \in k[X]$ alors si $1 - e := (Am_v)(u)$ alors $e = (B\frac{m_u}{m_v})(u)$ est un idempotent et $(1 - e)E = A(u)G \subset G$ et $eE = B(u)F \subset F$. Puisque $E = F \bigoplus G$, il suit que l'on a les égalités $F = eE$ et $G = (1 - e)E$. On aurait pu aussi remarquer que $1 = Am_v \mod \frac{m_u}{m_v}$ et ainsi $A(u)$ induit un automorphisme de G.*

(d) Montrer que (E, u) n'est pas somme directe de 2 sous-espaces stables non triviaux (on dit alors que E est indécomposable) si et seulement si m_u est puissance d'un irréductible.
Preuve. L'espace monogène (E, u) est indécomposable ssi les seules décompositions en somme directe de sous-espaces stable sont $E = E \bigoplus \{0\}$ et $E = \{0\} \bigoplus E$ i.e. $s = 1$. ///

Exercice 4 Sur les endomorphismes u du K-espace vectoriel de dimension finie E tels que pour tout sous-espace $F \subset$ stable par u il existe $P \in K[X]$ avec $F = \operatorname{Ker} P(u)$, resp. $F = \operatorname{Im} P(u)$.

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \operatorname{End}_k(E)$. On note $m_u \in k[X]$ le polynôme minimal de u. On rappelle qu'il existe $x \in E$ tel que m_u est aussi le polynôme minimal m_x de la restriction de u à $k[u](x)$ (c'est le lemme fondamental).

(1) On suppose que pour tout sous-espace F stable par u il existe $P_F \in k[X]$ avec $F = \operatorname{Ker} P_F(u)$. Montrer que E est un espace monogène.
Preuve. Soit donc $x \in E$ tel que m_u est aussi le polynôme minimal de la restriction de u à $k[u](x)$ et montrons que $E = k[u](x)$. Par hypothèse il existe $P \in k[X]$ avec $k[u](x) = \operatorname{Ker} P(u)$. Ainsi $P(u)(x) = 0$ et donc par définition de m_x on a $P = Qm_x = Qm_u$ et donc $P(u)$ est l'endomorphisme nul.///

(2) On suppose que pour tout sous-espace F stable par u il existe $Q \in k[X]$ avec $F = \operatorname{Im} Q(u)$.
(a) Soit $Q \in k[x]$ et $\delta := PGCD(Q, m_u)$. Montrer que $Q(u)(E) = \delta(u)(E)$.
Preuve. Immédiat puisque $Id \in k[u]$ il suit que $k[u](E) = E$ et donc $\delta(u)(E) = (\delta(u)k[u])(E) = (Q(u)k[u] + m(u)k[u])(E) = Q(u)(E)$. Ainsi si $Q \neq 0$ on peut supposer que Q divise m_u. ///
(b) Montrer que E est un espace monogène.

Preuve. Soit donc $x \in E$ tel que m_u est aussi le polynôme minimal de la restriction de u à $k[u](x)$ et montrons que $E = k[u](x)$. Si $E = \{0\}$ c'est bon. On suppose donc que $E \neq \{0\}$. Par hypothèse il existe $Q \in k[X] - \{0\}$ avec $k[u](x) = \operatorname{Im} Q(u)$ et par la question précédente on peut supposer que $Q(X)$ est unitaire et divise m_u. Ainsi $x = Q(u)(y)$ et donc $\frac{m_u}{Q}(u)(x) = m_u(u)(y) = 0$. Ainsi m_x divise $\frac{m_u}{Q}$ et puisque $m_x = m_u$, il suit que $Q = 1$ et donc $\operatorname{Im} Q(u) = E$.///

Remarque. En utilisant l'exercice précédent on vérifie que si (E, u) est monogène alors si F est un sous-espace stable par u c'est le noyau et l'image de polynômes d'endomorphismes de u.

Exercice 5 Sur les sous-espaces d'un espace monogène qui admettent un supplémentaire stable. Pour une généralisation voir [F. M. 2] par. 1.3.2. p. 18.

Soit $E := K[u](x)$, un espace monogène de dimension finie. Soit $F \subset E$ un sous-espace stable et v la restriction de u à F. Montrer que F admet un supplémentaire stable ssi $(m_v, \frac{m_u}{m_v}) = 1$.

Preuve. Si $E = F \bigoplus G$ avec G stable par u et si w est la restriction de u à G alors ([Fr. A] p. 143) $\chi_u = \chi_v \chi_w$ et $m_u = ppcm(m_v, m_w)$. Puisque (E, u), (F, v) et (G, w) sont des espaces monogènes (exercice précédent) il suit que $m_u = m_v m_w$ et que $(m_v, m_w) = 1$.

La réciproque. Avec les notations de l'exercice précédent, soit $G := F_{\frac{m_u}{m_v}}$ et w la restriction de u à G. Alors $m_w = \frac{m_u}{m_v}$. Soit $x \in F \cap G$ alors $m_v(u)(x) = 0$ et $m_w(u)(x) = 0$ et puisque $1 = Am_v + Bm_w$ pour $A, B \in K[X]$ il suit que $x = 0$. Puisque $\deg m_v + \deg m_w = \deg m_u = \dim E$ le résultat suit. ///

Exercice 6 Commutant d'un endomorphisme, [Fr. A] p. 192 et [F. M. 2] p. 46.

Exercice 7 Composantes connexes de l'ensemble des matrices racines d'un polynôme, [Fr. A] par. 5.7.40 et 41 p. 280 dans le cas du corps des nombres complexes.

Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Si $M \in M_n(\mathbb{C})$ on note $\chi_M(X)$ (resp. $m_M(X)$) son polynôme caractéristique (resp. minimal). On note $\mathbb{C}[X]_n$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$. On munit $M_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}[X]_n$ de leur topologie canonique de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie.

(1) Montrer que l'application $M \in M_n(\mathbb{C}) \to \chi_M(X) \in \mathbb{C}[X]_n$ est continue pour les topologies de $M_n(\mathbb{C})$ et de $\mathbb{C}[X]_n$.
Preuve. Les coefficients de $\chi_M(X)$ sont des fonctions polynomiale des coefficients de M. ///

(2) L'application $M \in M_n(\mathbb{C}) \to m_M(X) \in \mathbb{C}[X]_n$ est-elle continue ?
Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on considère la matrice $M_k := \begin{bmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & -1/k \end{bmatrix}$. Alors $m_{M_k} = X^2 - 1/k^2$ sa limite est $X^2 \neq m_{0_{M_2(\mathbb{C})}}$. Pour $n > 2$ on complète la matrice M_k précédente par un tableau diagonale de 1. Ainsi l'application n'est pas continue si $n > 1$. ///

(3) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices diagonalisables. Montrer qu'elles sont semblables si et seulement si $\chi_A(X) = \chi_B(X)$.

(4) Soit $P(X) := X^3 - 1 \in \mathbb{C}[X]$ et $D(P) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = 0\}$.

   (a) Montrer que $D(P)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$.
   Preuve. La condition est fermée puisque les coefficients de M^3- sont des fonctions polynômiales des coefficients de M. ///

   (b) Rappelez brièvement pourquoi $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.
   Preuve. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, par le pivot de Gauss sur les lignes on montre que $A = TD(\det A)$ où T est un produit de matrices de transvections $B_{i,j}(\lambda)$. L'application $t \in [0, 1] \to B_{i,j}(t\lambda)$ définit un chemin continu de l'identité à $B_{i,j}(\lambda)$; ainsi en composant les chemins on obtient un chemin continu de l'identité à T. Enfin puisque $\mathbb{C}^\star$ est connexe par arc on déduit un chemin continu de l'identité à $TD(\det A)$. ///

(c) Soit $M \in D(P)$, montrer que la classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Preuve. La classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ est PMP^{-1} avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit $t \in [0,1] \to P_t$ un chemin continu dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ de P à l'identité. Puisque l'application $Q \to Q^{-1}$ est continue dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ (pensez à la formule $Q^{-1} = (\det Q)^{-1}\ {}^t com(Q)$), l'application $t \in [0,1] \to P_t M P_t^{-1}$ est un chemin continu dans la classe de similitude de M. ///

(d) Soit $M \in D(P)$, montrer que la classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ coincide avec la composante connexe de M dans $D(P)$.

Preuve. Soit $M \in D(P)$ alors $m_M | X^3 - 1$ ainsi M est diagonalisable. Considérons l'application $\phi\ : D(P) \to \mathbb{C}[X]_n$ définie par $\phi(M) = \chi_M$. Elle est continue (c'est 1.), ainsi l'image de la composante connexe de $M \in D(P)$ est réduite au polynôme χ_M. Or $\phi^{-1}(\chi_M)$ est inclus dans la classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ (c'est 3.). Inversement si $M' \in M_n(\mathbb{C})$ est semblable à $M \in D(P)$ alors $P(M') = 0$, ainsi $M' \in D(P)$. Finalement $\phi^{-1}(\chi_M)$ est la classe de similitude de M dans $M_n(\mathbb{C})$ est c'est aussi la composante connexe de M dans $D(P)$. ///

(e) Calculer le nombre de composantes connexes de $D(P)$ pour $n = 5$ puis pour n quelconque.

Preuve. Par ce qui précède cela revient à compter les polynômes caractéristiques possibles i.e. les polynômes unitaires de degré n ayant leurs racines dans $\{1, j, j^2\}$; ce sont les polynômes $(X-1)^a(X-j)^b(X-j^2)^c$ avec $a+b+c = n$. Cela revient à compter le nombre de possibilités à choisir 2 boîtes en positions respectives $a+1$, $a+b+2$ parmi $n+2$ boîtes rangées de 1 à $n+2$. Il y en a donc $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. ///

(5) Soit $P(X) := X^3 \in \mathbb{C}[X]$ et $D(P) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid P(M) = 0\}$.

(a) Calculer le nombre de classes de similitude dans $D(P)$ pour $n = 4$.

Preuve. Les matrices dans $D(P)$ sont les matrices nilpotentes d'ordre de nilpotence ≤ 3. Un système de représentants des classes de similitude est donné par les tableaux de réduites de Jordan $J_{\ell_i}(0)$ de tailles croissantes dans $\{1,2,3\}$. Si α_i est le nombre de tableaux de taille i, le nombre de classes de similitude de $M_n(\mathbb{C})$ dans $D(X^3)$ est donc le nombre de triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$ avec $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = n$. ///

(b) On considère la fraction rationnelle $F(X) := \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)}$. Montrer que le coefficient de X^n dans le développement de $F(X)$ en série formelle $\in \mathbb{Z}[[X]]$ coincide avec le nombre de classes de similitude de $M_n(\mathbb{C})$ dans $D(X^3)$. En déduire un équivalent pour $n >> 0$.

Preuve. En effet dans $\mathbb{Z}[[X]]$ on calcule $(1-X)\sum_{0 \leq i} X^i = \sum_{0 \leq i} X^i - \sum_{0 \leq i} X^{i+1} = 1$. Ainsi $F(X) = (\sum_{0 \leq \alpha_1} X^{\alpha_1})(\sum_{0 \leq \alpha_2} X^{2\alpha_2})(\sum_{0 \leq \alpha_3} X^{3\alpha_3}) = \sum_{n \in \mathbb{N}}(\sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = n} X^n)$. D'autre part la décomposition en éléments simples de $F(X)$ est $\frac{a}{1-X} + \frac{b}{(1-X)^2} + \frac{c}{(1-X)^3} + \frac{d}{1+X} + \frac{e}{1-jX} + \frac{e}{1-j^2X}$ et dans cette écriture le coefficient de X^n est $a + b(n+1) + c\frac{(n+2)(n+1)}{2} - d + ej^n + fj^{2n}$. Puisque $c = ((1-X)^3F(X))(X=1) = \frac{1}{6}$ il suit qu'un équivalent pour $n >> 0$ est donc $\frac{1}{12}n^2$. ///

Exercice 8 Sur les espaces irréductibles sous un endomorphisme, [Fr. A] p. 189.

Exercice 9 Espaces indécomposables sous un endomorphisme, [Fr. A] p. 189.