## Concours Agrégation, Mathématiques générales

### Leçon 58- Matrices symétriques réelles, hermitiennes.

**Commentaires du jury 2015 :** C'est une leçon transversale. La notion de signature doit bien sûr figurer dans la leçon et on ne doit surtout pas se cantonner au cas des matrices définies positives. L'action du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Curieusement, il est fréquent que le candidat énonce l'existence de la signature d'une matrice symétrique réelle sans en énoncer l'unicité dans sa classe de congruence. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les appli- cations géométriques aux quadriques. On doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.
**Commentaires du jury 2016 :** Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon sans toutefois être un développement consistant. La notion de signature doit être présentée ainsi que son unicité dans la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

**Remarque.** Si $H \in M_n(C)$ est une matrice hermitienne alors $H = S + iA$ avec $S \in Sym_n(R)$ et $A \in Asym_n(R)$. Ainsi pour $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, $f(X,Y) :=^t XH\overline{Y}$ est une forme hermitienne et pour $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $f_1(X,Y) :=^t XSY$ est une forme bilinéaire symétrique et $f_2(X,Y) :=^t XAY$ est une forme bilinéaire antisymétrique et toujours pour $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $f(X,Y) = f_1(X,Y) + if_2(X,Y)$. mais cette décomposition ne passe pas à la classe de congruence ${}^tPH\overline{P}$ pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sauf si $P$ est réelle i.e. un changement de base de l'espace réel $\mathbb{R}^n$ sous-jacent à $\mathbb{C}^n$.

**Bibliographie**


[F. M. 1] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie* (Hermann 2011)
[F. M. 1'] Errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-Alg-Géom.pdf
[F. M. 2] Fresnel J., Matignon M. *Algèbre et Géométrie-81 thèmes pour l'agrégation* (ellipses 2017)
[F. M. 2']Compléments et errata, https ://www.math.u-bordeaux.fr/∼mmatigno/Errata-FM2.pdf
[Fr. B-C-D] Fresnel J. *Espaces quadratiques, euclidiens, hermitiens* (Hermann 1999)
et
[A. F. B] Arnaudies J.M., Fraysse H. *Cours de mathématiques, Algèbre bilinéaire* (Dunod 1987)
[C. G.] Caldero P., Germoni J. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries* (Calvage Mounet 2016)


**Développements conseillés :**

(1) Signature d'une matrice symétrique réelle, [F. M. 1] $n°41$ question 2 p. 98.
(2) Inégalités de Weyl, [F. M. 2] p. 113, [C. G.] tome 1 p. 199 et exercice ci-dessous.
(3) $Herm_n(\mathbb{C}) \to Herm_n^{++}(\mathbb{C})$, [Fr. B-C-D] p. 284 et [F. M. 1] $n°38$ p. 79 pour l'exponentielle. Notez l'application suivante : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est homéomorphe à $U_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (on admet la décomposition polaire, [Fr. B-C-D] p. 284).
(4) Sous-groupes finis ou plus généralement compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, [Fr. B-C-D] exercice 5.22 et 5.23 p. 289 + limite inductive de sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, [Fr. B-C-D] exercice 5.24 p. 290.

**Exercice 1** Semi-continuité de la signature, [F. M. 1] $n°$ 43 p. 100 ; notez une variante utilisant le théorème de continuité des racines d'un polynôme.

**Exercice 2** Signature de la matrice de Hankel associée aux racines d'un polynôme à coefficients réels, [F. M. 1] $n°40$, proposé en développement dans la leçon 44 (Racines d'un polynôme ...).

**Exercice 3** Espace vectoriel de matrices symétriques et signature, [F. M. 2] p. 98.

Soit $n \geq 1$, $V \in M_n(\mathbb{R})$, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de matrices symétriques avec $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 2$. On suppose de plus que tout élément de $V - \{0\}$ est inversible. Si $S \in V - \{0\}$, on note $(p(S), q(S))$ la signature de $S$

(1) Montrer que l'application $S \in V - \{0\} \to (p(S), q(S))$ est localement constante.

*Preuve. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$ avec $S = PD\,{}^tP = PDP^{-1}$ avec $D \in M_n(\mathbb{R})$ la diagonale $\lambda_i$ des racines de $\chi_S$. La loi d'inertie de Sylvester implique que $p(S) = \{i,\ \lambda_i > 0\}$ et $q(S) = \{i,\ \lambda_i < 0\}$. De plus $p(S) + q(S) = n$. Le résultat est alors conséquence du théorème de continuité des racines d'un polynôme puisque $\chi_S(0) \neq 0$. ///*

(2) Exprimer la signature de $-S$ pour $S \in V - \{0\}$.

*Preuve. Puisque $\chi_{-S}(X) = (-1)^n \chi_S(-X)$ et que $\chi_S(0) \neq 0$ il suit que $(p(-S), q(-S)) = (q(S), p(S))$.///*

(3) En déduire que $n \in 2p$ et que les éléments de $V - \{0\}$ sont de signature $(p, p)$.

*Preuve. On remarque que $V - \{0\}$ est connexe puisque $\dim_{\mathbb{R}} V \geq 2$. Ainsi la signature qui est localement constante (i.e. en chaque point il existe un ouvert sur lequel la signature est constante) est constante sur $V - \{0\}$. Et puisque si $S \in V - \{0\}$ alors $-S \in V - \{0\}$ on conclut avec la question précédente.///*

**Exercice 4** Inégalités de Weyl, [F. M. 2] p. 113, [C. G.] tome 1 p. 199.

*Notations.* Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien de dimension $n$. Si $w$ est un endomorphisme symétrique (on dit aussi auto-adjoint) de $E$, on note $\chi_w \in \mathbb{R}[X]$ son polynôme caractéristique. Alors $\chi_w(X) = \prod_{1 \leq i \leq n}(X - \lambda_{w,i})$ avec $\lambda_{w,i} \in \mathbb{R}$ rangés ainsi : $\lambda_{w,1} \geq \lambda_{w,2} \geq ... \geq \lambda_{w,n}$. De plus $(e_{w,i}, 1 \leq i \leq n)$ désigne une BON de $E$ avec $w(e_{w,i}) = \lambda_{w,i} e_{w,i}$.

(1) Soit $x \in E$ avec $(x|x) = 1$. Montrer que $\lambda_{w,n} \leq (x|w(x)) \leq \lambda_{w,1}$.

*Preuve. On écrit $x$ dans la BON $(e_{w,i})_{1 \leq i \leq n}$, $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_{w,i}$. Alors $(x|w(x)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{w,i} x_i^2 \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{w,1} x_i^2 = \lambda_{w,1}$ et $(x|w(x)) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{w,i} x_i^2 \geq \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{w,n} x_i^2 = \lambda_{w,n}$. ///*

(2) Soit $F_1, F_2, F_3$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On suppose que $\dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 > 2n$. Montrer que $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \neq \{0\}$.

*Preuve. Soit $f : F_1 \times F_2 \times F_3 \to E \times E$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2)$. C'est une application linéaire et son noyau $\operatorname{Ker} f = \{(x, x, x))\} \mid x \in F_1 \cap F_2 \cap F_3\}$. Par le théorème du rang, $\dim F_1 \times F_2 \times F_3 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. Ainsi $\dim \operatorname{Ker} f = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 - \dim \operatorname{Im} f \geq \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 - 2 \dim E > 0$. ///*

(3) Soient $u, v$ deux endomorphimes symétriques.

(a) Montrer que $u + v$ est un endomorphime symétrique.

*Preuve. Par l'unicité de l'adjoint on a que $(u + v)^\star = u^\star + v^\star$. ///*

(b) On considère pour $1 \leq i, j \leq n$ avec $i + j - 1 \leq n$, les espaces vectoriels $E_u := \bigoplus_{i \leq k \leq n} \mathbb{R} e_{u,k}$, $E_v := \bigoplus_{j \leq k \leq n} \mathbb{R} e_{v,j}$ et $E_{u+v} := \bigoplus_{1 \leq k \leq i+j-1} \mathbb{R} e_{u+v,k}$. Montrer que $E_u \cap E_v \cap E_{u+v} \neq \{0\}$.

*Preuve. On a $\dim E_u + \dim E_v + \dim E_{u+v} = n - i + 1 + n - j + 1 + i + j - 1 = 2n + 1 > 2n$. D'où le résultat avec la question précédente. ///*

(c) Soit $x \in E_u \cap E_v \cap E_{u+v}$ avec $(x|x) = 1$. En appliquant la question 1 aux restrictions de $u$, $v$ puis $u + v$ à des espaces adaptés, montrer que $\lambda_{u+v,i+j-1} \leq \lambda_{u,i} + \lambda_{v,j}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ avec $i + j - 1 \leq n$.

*Preuve. On applique (1) à $x$ et à la restriction de $u$ à $E_u$ qui est encore un endomorphisme symétrique et les racines de son polynôme caractéristique sont $\lambda_{u,i} \geq \lambda_{u,i+1} \geq ... \geq \lambda_{u,n}$,* *ainsi (1) $\lambda_{u,n} \leq (x|u(x)) \leq \lambda_{u,i}$. De même on obtient (2) $\lambda_{v,n} \leq (x|v(x)) \leq \lambda_{v,j}$ et enfin (3) $\lambda_{u+v,i+j-1} \leq (x|(u+v)(x)) \leq \lambda_{u+v,1}$. Ainsi (3) donne avec (1) et (2) $\lambda_{u+v,i+j-1} \leq (x|(u+v)(x)) = (x|u(x)) + (x|v(x)) \leq \lambda_{u,i} + \lambda_{v,j}$. ///*

(4) Donner en le justifiant un énoncé type *Inégalités de Hermann Weyl* pour des matrices.

*Preuve. On se donne $S, S' \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques, alors $\hat{S}$ définit un endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure d'espace euclidien canonique et $(x|\hat{S}(y)) = (\hat{S}(x)|y)$, ainsi $\hat{S}$ est un endomorphisme symétrique et les inégalités de Weyl traduisent alors des inégalités entre les racines des polynômes carctéristiques de $S, S'$ et $S+S'$. ///*

**Exercice 5** Le théorème d'entrelacement de Cauchy, [F. M. 1] $n°42$ p. 99.

**Exercice 6** Matrice de Gram, inégalité de Hadamard, [F. M. 1] $n°134$ p. 386, [A. F. B] p. 62.

Soit $(\mathbb{R}^n, (.|.))$ muni du produit scalaire canonique. Soit $M := (C_1, ..., C_p) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on note $Gram(C_1, ..., C_p) := {}^tMM = ((C_i|C_j)_{i,j}) \in M_p(\mathbb{R})$ la matrice de Gram des vecteurs colonnes $C_i \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

(1) Soit $\Lambda := (\lambda_i) \in M_{p,1}(\mathbb{R})$, montrer que ${}^t\Lambda Gram(C_1, ..., C_p)\Lambda = \| \sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i C_i \|^2$.

*Preuve. Puisque $Gram(C_1, ..., C_p) := {}^tMM$ et que $M\Lambda = \sum_{1\leq i \leq p} \lambda_i C_i$, le résultat suit. ///*

(2) Montrer que $Gram(C_1, ..., C_p)$ est une matrice symétrique positive.

*Preuve. Il suit de la question précédente que la matrice symétrique $Gram(C_1, ..., C_p)$ définit une forme quadratique $Q$ positive. ///*

(3) Montrer que $Gram(C_1, ..., C_p)$ est une matrice symétrique définie positive si et seulement si rang $M = p$.

*Preuve. En effet $\Lambda$ est un vecteur isotrope pour $Q$ si et seulement si $\sum_{1\leq i\leq p} \lambda_i C_i = 0$. ///*

(4) Décomposition de Cholesky. On suppose que rang $M = p$. Justifier l'existence de la décomposition "LU" pour la matrice $Gram(C_1, ..., C_p)$ et en déduire l'existence de $T = (t_{i,j}) \in GL_p(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure avec $t_{i,i} > 0$ pour $1 \leq i \leq p$ telle que $Gram(C_1, ..., C_p) = {}^tTT$.

*Preuve. Puisque la forme quadratique $Q$ est définie positive il en est de même de sa restriction aux sous espaces de $\mathbb{R}^p$. Ainsi la matrice de Gram des colonnes $(C_1, C_2, ..., C_k)$ pour $1 \leq k \leq p$ est définie positive et c'est la k-ième patrice principale de $Gram(C_1, ..., C_p)$. Puisque le déterminant d'une forme bilinéaire symétrique est défini modulo les carrés (discriminant) et puisque dans une base orthogonale la matrice d'un produit scalaire est diagonale à coefficients $> 0$ il suit que $\det Gram(C_1, C_2, ..., C_k) > 0$ ce qui assure l'existence de la décomposition "LU" $Gram(C_1, ..., C_p) = LDU$ avec ($L$ resp. $U$) triangulaire inférieure (resp. supérieure) avec diagonale l'identité et $D$ une matrice diagonale avec $d_{i,i} = \delta_{i,i}^2$ et $\delta_{i,i} > 0$ puisque congruente à une matrice symétrique définie positive. Puisque $Gram(C_1, ..., C_p)$ est symétrique l'unicité de la décomposition "LU" donne $T := \Delta U$ où $\Delta$ est diagonale et $\Delta_{i,i} = \delta_{i,i}$. ///*

**Remarque.** *C'est aussi une conséquence du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Voir exercice suivant.*

(5) Montrer l'inégalité de Hadamard ; $0 \leq \det Gram(C_1, ..., C_p) \leq \prod_{1\leq i\leq p} (C_i|C_i)$ (dans le cas où rang $M = p$, on exprimera $(C_i|C_i)$ en fonction des coefficients de la matrice $T$).

*Preuve. D'abord $\det Gram(C_1, ..., C_p) = \det T^2 = \prod_{1\leq i\leq p} t_{i,i}^2$. D'autre part $(C_i|C_i) = \sum_{1\leq k\leq i} t_{i,k}^2 \geq t_{i,i}^2$ et donc $0 \leq \det Gram(C_1, ..., C_p) = \prod_{1\leq i \leq p} t_{i,i}^2 \leq \prod_{1\leq i\leq p} (C_i|C_i)$. ///*

(6) Montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la famille $(C_1, ..., C_p)$ est orthogonale.

*Preuve.De plus on a égalité ssi $(C_i|C_i) = \sum_{1\leq k\leq i} t_{i,k}^2 = t_{i,i}^2$ et donc ssi $T = \Delta$. ///*

**Exercice 7** Matrice de Gram, inégalité de Hadamard avec Gram-Schmidt, distance à une sous-variété, [Fr. B-C-D] p. 134, [A. F. B] p. 62 et 86.

Soit $(E, (.|.))$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n$. Pour $(x_1, ..., x_p)$ une famille de $E$, on définit $G(x_1, ..., x_p) := \det((x_i|x_j))_{i\leq p, j\leq p}$ (déterminant de Gram ).

(1) Soit $(e_1, ..., e_p)$ (resp. $(f_1, ...., f_p)$) une famille de $E$, $M = (m_{i,j})_{i,j} \in M_p(\mathbb{R})$ tel que $e_j = m_{1,j}f_1 + .... + m_{p,j}f_p$ pour $1 \leq j \leq p$. Montrer que $((e_i|e_j))_{i,j} = {}^tM((f_i|f_j))_{i,j}M$.

(2) Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille de $E$ que l'on suppose libre. En considérant une BON du sous-espace vectoriel $V = \sum_{i\leq p} \mathbb{R}e_i$ de $(E, (.|.))$ déduire de la question précédente que $G(e_1, ..., e_p) > 0$

(3) Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille de $E$ que l'on suppose liée. Montrer que $G(e_1, ..., e_p) = 0$.

(4) (a) L'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Montrer par récurrence sur $r$ que si $(e_1, ..., e_r)$ une famille libre de $E$ alors il existe une unique famille orthonormale $(g_1, ..., g_r)$ de $E$ telle que $g_1 = a_{1,1}e_1,\ g_2 = a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2,\ g_r = a_{1,r}e_1 + a_{2,r}e_1 + ... + a_{r,r}e_r$ avec $a_{i,i} > 0$ pour $1 \leq i \leq r$.

(b) En déduire que pour toute famille $(e_1, ..., e_p)$ on a $\det((e_i|e_j))_{i,j} \leq \prod_{1\leq i\leq p}(e_i|e_i)$ (inégalité de Hadamard).

(c) Montrer que l'on a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si la famille $(e_1, ..., e_p)$ est orthogonale.

(5) Soit $(e_1, ..., e_p)$ une famille libre de $E$ et $V := \sum_{i\leq p} \mathbb{R}e_i$ et $x \in E$. Montrer que $d(x, V)^2 = \frac{G(e_1,...,e_p,x)}{G(e_1,...,e_p)}$ où $d(x, V)$ désigne la distance de $x$ à $V$ (on pourra calculer $G(e_1, ..., e_p, x)$ en utilisant l'égalité $(x|x) = (y|y) + d(x, V)^2$ où $y$ est la projection orthogonale de $x$ sur $V$), [Fr. B-C-D] p.154.

**Exercice 8** Le déterminant de Catalan ou de Smith, [F. M. 1] $n°86$ question 3 p. 245.

Soit $A$ un anneau commutatif et $\Psi : \mathbb{N}^\star \to A$ une application. Pour $(i, j), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, on définit $m_{i,j} := \sum_{k|i,k|j} \Psi(k)$ et $M := (m_{i,j})_{i,j} \in M_n(A)$.

(1) Soit $L := (\ell_{i,j})_{i,j} \in M_n(A)$ et $D \in M_n(A)$ la matrice diagonale avec $d_{i,i} = \Psi(i)$. Exprimer $({}^tLDL)_{i,j}$.

*Preuve. On a* $({}^tLDL)_{i,j} = \sum_{1\leq k\leq n} \ell_{k,i}d_{k,k}\ell_{k,j}$. ///

(2) Déduire un choix naturel de $L$ triangulaire supérieure strict (i.e. des 1 sur la diagonale) telle que ${}^tLDL = M$.

*Preuve. Si* $L$ *est triangulaire supérieure strict alors* $({}^tLDL)_{i,j} = \sum_{1\leq k\leq \min(i,j)} \ell_{k,i}d_{k,k}\ell_{k,j}$ *; ainsi* $\ell_{k,i} = 1$ *si* $k|i$ *et* $0$ *autrement et* $d_{k,k} = \Psi(k)$ *conviennent.* ///

(3) En déduire $\det M$.

*Preuve.* $\det M = \det{}^t LDL = \det D = \prod_{1\leq k\leq n} \Psi(k)$. ///

(a) On suppose que $m_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à $i$ et $j$. Calculer $\det M$.

*Preuve. Dans ce cas* $\Psi(k) = 1$ *pour* $k \in \mathbb{N}^\star$ *convient. Ainsi* $\det M = 1$. ///

(b) On suppose que $m_{i,j}$ est la somme des diviseurs communs à $i$ et $j$. Calculer $\det M$.

*Preuve. Dans ce cas* $\Psi(k) = k$ *pour* $k \in \mathbb{N}^\star$ *convient. Ainsi* $\det M = n!$. ///

(c) On suppose que $m_{i,j}$ est $(i, j)$, le pgcd de $i$ et $j$. Calculer le déterminant de Catalan ou de Smith $\det M$.

*Preuve. Dans ce cas* $\Psi(k) = \varphi(k)$ *pour* $k \in \mathbb{N}^\star$ *où* $\varphi$ *désigne la fonction indicatrice d'Euler convient. En effet* $\sum_{k|i,k|j} \varphi(k) = \sum_{k|PGCD(i,j)} \varphi(k) = PGCD(i, j)$. *Ainsi* $\det M = \prod_{1\leq k\leq n} \varphi(k)$. ///

**Exercice 9** Décomposition polaire dans $\mathrm{GL}_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, [Fr. B-C-D] exercice 10.25 question 5 p. 148 et exercice 10.26. p. 283 pour $K = \mathbb{C}$.

Rappeler le théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints d'un espace euclidien et sa conséquence sur la réduction des matrices symétriques réelles.

*Preuve. Soit u un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E, alors il existe une base orthonormale de E de vecteurs propres pour u. Autrement dit* $E = \bigoplus^{\perp}(\ker(u - \lambda Id)$ *où* $\lambda$ *parcourt le spectre de u. Si* $S \in M_n(\mathbb{R})$ *est une matrice symétrique réelle, l'endomorphisme* $X \to SX$ *où X est un vecteur colonne de* $\mathbb{R}^n$ *muni de sa structure euclidienne canonique est un endomorphisme autoadjoint (on a* $(SX|Y) = (X|SY)$*) ; ainsi il existe une matrice de changement de base* $O \in O_n(R)$ *et D une matrice diagonale avec* $S = ODO^{-1} = OD\,{}^tO$ *(en particulier S et D sont simultanément semblables et congruentes). Cela montre qu'une matrice symétrique réelle est positive (resp. définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives). ///*

(1) Décomposition polaire.

Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive i.e. ${}^tXSX \geq 0,\ \forall\, {}^tX \in \mathbb{R}^n$.

(a) Montrer qu'il existe $S_1 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive avec $S_1^2 = S$.

*Preuve. Par le théorème de réduction des matrices symétriques réelles on a* $S = ODO^{-1}$ *où D est diagonale de diagonale* $(d_1, ..., d_n)$ *et* $d_i$ *parcourt les valeurs propres. Si* $X_i$ *est un vecteur colone propre non nul avec* $SX_i = d_iX_i$ *alors* $(SX_i|X_i) = d_i(X_i|X_i) \geq 0$ *puisque S est positive et donc* $d_i \geq 0$*. Soit* $D_1$ *la matrice diagonale réelle de diagonale* $(\sqrt{d}_1, ..., \sqrt{d}_n)$ *et* $S_1 := OD_1O^{-1}$*. On a* $S_1^2 = OD_1^2O^{-1} = S$*. Puisque* $O^{-1} = {}^tO$*, il suit que* $S_1$ *est congruente à* $D_1$ *qui est symétrique positive ; il en est donc de même de* $S_1$*. ///*

(b) On suppose désormais que $S_1 \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique positive telle que $S_1^2 = S$. Soit $\Lambda$ (resp. $\Lambda_1$) le spectre de $S$ (resp. $S_1$) . Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ est dans $\Lambda_1$ si et seulement si $\lambda \geq 0$ et $\lambda^2 \in \Lambda$.

*Preuve. On a* $\chi_S(X^2) = \det(X^2Id - S_1^2) = \chi_{S_1}(X)\chi_{S_1}(-X)$*. Et d'autre part* $\chi_S(X^2) = \prod_i(X^2 - d_i)$*. Puisque* $S_1$ *est symétrique positive les racines de* $\chi_{S_1}(X)$ *sont les racines positives de* $\prod_i(X^2 - d_i)$*. ///*

(c) Montrer que si $\lambda \in \Lambda_1$ alors $\ker(S_1 - \lambda Id) \subset \ker(S - \lambda^2 Id)$ et en déduire l'égalité $\ker(S_1 - \lambda Id) = \ker(S - \lambda^2 Id)$.

*Preuve. Si* $S_1(X) = \lambda X$*, on a* $S(X) = S_1^2(X) = \lambda^2 X$ *d'où l'inclusion. Pour l'égalité on a vu (théorme de réduction des matrices symétriques réélles) que* $n = \sum_{\lambda \in \Lambda_1} \dim\ker(S_1 - \lambda Id)$ *et* $n = \sum_{\lambda \in \Lambda} \dim\ker(S - \lambda Id)$*. Enfin puisque par la question précédente* $\Lambda = \{\lambda^2 \mid \lambda \in \Lambda_1\}$ *il suit que* $\dim\ker(S_1 - \lambda Id) = \dim\ker(S - \lambda^2 Id)$*, d'où l'égalité. ///*

(d) Montrer l'unicité de $S' \in M_n(\mathbb{R})$ matrice symétrique positive telle que $S'^2 = S$.

*Preuve. Les mêmes raisonnements qui précèdent montrent que si* $S' \in M_n(\mathbb{R})$ *matrice symétrique positive telle que* $S'^2 = S$ *alors* $\ker(S' - \lambda Id) = \ker(S - \lambda^2 Id)$ *et le spectre de* $S'$ *est l'ensemble des racine carrées positives des éléments du spectre de S. Ainsi* $S'$ *est l'homothétie de rapport* $\sqrt{d}_i$ *sur le sous espace propre* $\ker(S - d_i Id)$ *de S. L'unicité suit alors de légalité* $\mathbb{R}^n = \bigoplus_i \ker(S - d_i Id)$ *.///*

(e) Une disgression. Soit $S_0$ une matrice symétrique réelle. En s'inspirant de ce qui précède résoudre l'équation $S_1^3 = S_0$ avec $S_1$ une matrice symétrique réelle.

*Preuve. On remarque que la condition de positivité a disparu cependant la même méthode fonctionne puisque l'application* $x \to x^3$ *définit une bijection de* $\mathbb{R}$*. L'équation* $S_1^3 = S_0$ *avec* $S_1$ *symétrique réelle admet pour unique solution la matrice de l'endomorphisme dont la restriction sur le sous espace propre* $\ker(S_0 - d_i Id)$ *de* $S_0$ *est l'homothétie de rapport* $d_i^{1/3}$*, l'unique racine réelle de* $x^3 - d_i = 0$ *et ceci pour* $d_i$ *parcourant le spectre de* $S_0$*.*

*Remarque. Si* $m \in 2\mathbb{N}^\star$ *et* $S \in Sym^+(\mathbb{R}^n)$ *on note* $s_1, ..., s_t$ *les valeurs propres distinctes (elles sont* $\geq 0$*) de S et* $\mu_1, ..., \mu_t$ *leurs multiplicités respectives et* $E_{S,s_i}$ *le sous-espace propre correspondant, alors* $\dim E_{S,s_i} = \mu_i$ *et* $E := \mathbb{R}^n = \bigoplus^{\perp}{}_{1 \leq i \leq t} E_{S,s_i}$*. Soit* $B_i$ *une base orthonormale de* $E_{S,s_i}$

*et $B := \cup B_i$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ la matrice de changement de base avec $PS\,{}^tP = D$ et $D$ est la matrice diagonale qui induit l'homothétie de rapport $s_i$ sur $B_i$. Soit $D^{1/m}$ la matrice diagonale qui induit l'homothétie de rapport $s_i^{1/n}$ sur $B_i$. Soit $\Sigma \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $P\Sigma\,{}^tP = D^{1/m}$, elle est congruente à une matrice de $Sym^+(\mathbb{R}^n)$ ; ainsi $\Sigma \in Sym^+(\mathbb{R}^n)$ et par construction $\Sigma^m = S$. Pour l'unicité : soit $\Sigma \in Sym^+(\mathbb{R}^n)$ avec $\Sigma^m = S$. On note $\sigma_1, ..., \sigma_t$ les valeurs propres distinctes (elles sont $\geq 0$) de $\Sigma$ et $\nu_1, ..., \nu_r$ leurs multiplicités respectives et $E_{\Sigma,\sigma_i}$ le sous-espace propre correspondant alors $S$ induit l'homothétie de rapport $\sigma_i^m$ sur $E_{\Sigma,\sigma_i}$. Puisque les $\sigma_i^m$ pour $1 \leq i \leq r$ sont deux à deux distincts et que $E := \mathbb{R}^n = \bigoplus^{\perp}{}_{1\leq i\leq r} E_{\Sigma,\sigma_i}$ il suit que $r = t$ et quitte à ranger les $\sigma_i$, $E_{\Sigma,\sigma_i}$ est le sous-espace propre $E_{S,s_i=\sigma_i^n}$ ; ainsi $\Sigma$ induit l'homothétie de rapport $s_i^{1/n}$ sur $E_{S,s_i}$ et donc $\Sigma$ est uniquement ainsi définie. ///*

(f) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$ déduire des questions précédentes qu'il existe un unique couple $(O, S)$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S$ symétrique définie positive tel que $M = OS$.

*Preuve. Montrons d'abord l'unicité. On a ${}^tMM = S\,{}^tOOS = S^2$. Puisque ${}^tMM$ est symétrique et que $({}^tMMX|X) = (MX|MX) > 0$ pour $X$ un vecteur colonne non nul de $\mathbb{R}^n$, il suit que $S$ est l'unique matrice symétrique réelle positive (de fait définie positive) telle que $S^2 = {}^tMM$. On a alors $O = MS^{-1}$. D'où l'unicité. Ce qui précède donne la clé pour l'existence. Soit $S$ symétrique définie positive avec $S^2 = {}^tMM$ et $O := MS^{-1}$, on a ${}^tOO = S^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = Id$.*

(g) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ déduire de la question précédente qu'il existe un couple $(O, S)$ avec $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S$ symétrique positive tel que $M = OS$.

*Preuve. On considère la suite $M_k := M - \frac{1}{k}Id$. Pour $k >> 0$, $1/k$ évite les valeurs propres de $M$, ainsi $M_k \in GL_n(\mathbb{R})$ et donc $M_k = O_kS_k$ avec $O_k \in O_n(\mathbb{R})$ et $S_k$ symétrique définie positive. Puisque $O_n(\mathbb{R})$ est compact on peut extraire une suite $O_{\varphi(k)}$ convergente vers $O \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $S_{\varphi(k)}$ converge vers $S$ une matrice réelle symétrique et pour $X$ vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$ on a $(S_{\varphi(k)}X|X) \geq 0$ et donc à la limite $(SX|X) \geq 0$. ///*

(2) Décomposition de Cartan.

(a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ déduire de la question précédente qu'il existe $O_1,\ O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D$ une matrice diagonale à coefficients positifs avec $M = O_1DO_2$.

*Preuve. On écrit $M = OS$ et on diagonalise $S$ dans une base orthonormée ainsi $S = O_2^{-1}DO_2$ alors $O_1 := OO_2^{-1}$ convient puisque $D$ est positive. ///*

(b) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M - O$ est inversible.

*Preuve. On écrit $M = O_1DO_2$ avec $O_1,\ O_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D$ une matrice diagonale à coefficients positifs. Ainsi cela revient à trouver $O \in O_n(\mathbb{R})$ avec $D - O_1^{-1}OO_2^{-1}$ inversible. Il suffit de considérer une matrice diagonale $D'$ avec des $1$ ou des $-1$ sur la diagonale de façon que $D - D'$ soit inversible ($D' = -Id$ convient puisque $D$ est positive). Puisque $D' \in O_n(\mathbb{R})$ alors $O := O_1D'O_2$ convient. ///*

**Exercice 10** Une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$ qui n'est pas conditionnée à une norme de $\mathbb{C}^n$, [Fr. B-C-D] p.287.

Soit $E := M_n(\mathbb{C})$ et $\Psi :\ E \times E \to \mathbb{C}$ définie par $\Psi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tA\overline{B})$

(1) Montrer que $\Psi$ est une forme hermitienne définie positive. On note $\|A\| := (\Psi(A, A))^{1/2}$.

*Preuve. La sesquilinéarité est immédiate. Si $A = (a_{i,j}) \in E$ alors $\Psi(A, A) = \sum_{i,j} |a_{i,j}|^2$ ; ainsi $\Psi$ est une forme hermitienne définie positive.///*

(2) Montrer que si $U \in U_n(\mathbb{C})$ et $A \in E$, alors $\|UA\| = \|A\| = \|AU\|$.

*Preuve. On a $\|UA\|^2 = \mathrm{Tr}({}^t(UA)\overline{UA}) = \mathrm{Tr}({}^tA\,{}^tU\overline{UA}) = \|A\|^2$.///*

(a) Soient $D, H$, deux matrices hermitiennes positives avec $D$ diagonale. Montrer que $\mathrm{Tr}(DH) \leq \mathrm{Tr}\, D \,\mathrm{Tr}\, H$.

*Preuve. Si* $(d_1, ..., d_n)$ *est la diagonale de* $D$ *et si* $H = (h_{i,j})$, *on a* $\mathrm{Tr}(DH) = \sum_i d_i h_{i,i}$ *et* $\mathrm{Tr}\, D \,\mathrm{Tr}\, H = \sum_{i,j} d_i h_{j,j}$ *d'où l'inégalité puisque* $d_i \geq 0$ *et* $h_{j,j} \geq 0$*.///*

(b) Soient $H_1, H_2$, deux matrices hermitiennes positives. Montrer que $\mathrm{Tr}(H_1 H_2) \leq \mathrm{Tr}\, H_1 \,\mathrm{Tr}\, H_2$.

*Preuve. Par le théorème spectral il existe* $U \in U_n(\mathbb{C})$ *avec* $H_1 = UD\ {}^t\overline{U}$. *On écrit* $H_2 = UH\ {}^t\overline{U}$ *avec* $H$ *hermitienne positive. Puisque* ${}^t\overline{U} = U^{-1}$ *il suit que* $\mathrm{Tr}\, H_1 = \mathrm{Tr}\, D$ *et* $\mathrm{Tr}\, H_2 = \mathrm{Tr}\, H$. *Alors* $\mathrm{Tr}(H_1 H_2) = \mathrm{Tr}(DH) \leq \mathrm{Tr}\, D \,\mathrm{Tr}\, H = \mathrm{Tr}\, H_1 \,\mathrm{Tr}\, H_2$*.///*

(c) Soient $A, B \in E$, montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

*Preuve. On pose* $H_1 := {}^tA\overline{A}$ *et* $H_2 := \overline{B}\ {}^tB$. *Alors* $\|AB\|^2 = \mathrm{Tr}(\ {}^t(AB)\overline{(AB)}) = \mathrm{Tr}(\ {}^tB\ {}^tA\overline{A}\overline{B}) = \mathrm{Tr}(\overline{B}\ {}^tB\ {}^tA\overline{A} = \mathrm{Tr}(H_1 H_2) \leq \mathrm{Tr}\, H_1 \,\mathrm{Tr}\, H_2 = \|A\|^2 \|B\|^2$ *puisque* $\mathrm{Tr}\, UV = \mathrm{Tr}\, VU$*.///*

(3) Montrer que $\|.\|$ n'est pas induite par une norme de $\mathbb{C}^n$.

*Preuve. Si* $\|.\|'$ *est une norme sur* $\mathbb{C}^n$ *on rappelle que la norme induite sur* $E$ *est* $\|A\|' := \sum_{\|x\|'=1} \|Ax\|'$ *où* $x \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. *Ainsi* $\|Id\|' = 1$. *Or* $\|A\| = n^{1/2}$*.///*

**Exercice 11** Base orthogonale simultanée pour 2 formes bilinéaires symétriques, [A. F. B] p. 115.

Soit $K$ un corps de caractéristique $\neq 2$, $E$ un $K$ espace vectoriel de dimension $n$. Soit $B := (e_i)_i$ une base de $E$ et $f_1, f_2$ deux formes bilinéaires symétriques sur $E$. Soit $S_i$ la matrice de $f_i$ dans la base $B$. On suppose que $f_1$ est non dégénérée.

(1) On suppose qu'il existe $B' = (e'_i)$ une base simultanément orthogonale pour $f_1, f_2$. Montrer que $S_1$ est inversible et que $S_1^{-1} S_2$ est diagonalisable.

*Preuve. Soit* $\theta : E \to E^\star$ *définie par* $\theta(x)(y) = f_1(x, y)$, *alors la matrice* $S_1$ *est aussi la matrice de l'application linéaire* $\theta$ *de la base* $B$ *dans la base duale de* $B$. *On a* $\mathrm{Ker}\, \theta = E^\perp$ *et puisque par définition* $f_1$ *est non dégénérée lorsque* $E^\perp = \{0\}$, *il suit que c'est équivalent au fait que* $S_1$ *est inversible. Si* $P$ *est la matrice de l'identité de la base* $B'$ *dans la base* $B$ *alors* ${}^tPS_1P =: D_1$ *resp.* ${}^tPS_2P =: D_2$ *est la matrice de* $f_1$ *resp.* $f_2$ *dans la base* $B'$ *et puisque c'est une BO pour* $f_1$ *et* $f_2$ *il suit que* $D_1, D_2$ *sont diagonales et* $D_1^{-1} D_2 = P^{-1} S_1^{-1} S_2 P$ *est diagonale. ///*

(2) On suppose $D = S_1^{-1} S_2$ diagonalisable. On écrit $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq s} E_i$ où $E_i = \ker(\tilde{D} - \lambda_i)$ parcourt les sous-espaces propres de l'endomorphisme $\tilde{D}$ induit par $D$.

(a) Soit $x_i \in E_i$ et $x_j \in E_j$. Montrer que $f_2(x_i, x_j) = \lambda_j f_1(x_i, x_j)$.

*Preuve. On écrit* $[X_i]$ *pour la colonne des coordonnées de* $x_i$ *dans la base* $B$. *Ainsi pour* $k = 1, 2$, $f_k(x_i, x_j) = {}^t[X_i] S_k [X_j]$. *Par hypothèse* $S_1^{-1} S_2 [X_j] = \lambda_j [X_j]$ *et donc* $S_2[X_j] = \lambda_j S_1 [X_j]$, *alors* $f_2(x_i, x_j) = \lambda_j\ {}^t[X_i] S_1 [X_j] = \lambda_j f_1(x_i, x_j)$*. ///*

(b) En déduire que pour $i \neq j$ on a $f_1(x_i, x_j) = f_2(x_i, x_j) = 0$.

*Preuve. De même on a* $f_2(x_i, x_j) = \lambda_i f_1(x_i, x_j)$ *et ainsi* $(\lambda_i - \lambda_j) f_1(x_i, x_j) = 0$ *et donc si* $i \neq j$ *on a* $f_1(x_i, x_j) = f_2(x_i, x_j) = 0$*. ///*

(c) Montrer l'existence d'une base simultanément orthogonale pour $f_1, f_2$.

*Preuve. On considère* $B'_i = (e'_{i,j}, j \in I_i)$ *une BO de* $E_i$ *pour* $f_1$, *alors a) montre que* $B'_i$ *est une BO de* $E_i$ *pour* $f_2$. *Soit* $B'$ *la concaténation des famille* $B'i$, *c'est une BO pour* $f_1$ *et* $f_2$ *par b). ///*

(3) On suppose que $(E, f_1)$ est euclidien.

(a) Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{End}\, E$ avec $f_2(x, y) = f_1(u(x), y) = f_1(x, u(y))$.

*Preuve. C'est du cours. L'application linéaire* $E \to E^\star$ *définie par* $x \to f_{1,x}$ *où* $f_{1,x}(y) = f_1(x, y)$ *est bijective. Puisque* $f_{2,x} \in E^\star$, *il existe un unique* $u(x) \in E$ *avec* $f_2(x, y) = f_1(u(x), y)$. *L'unicité de* $u(x)$ *montre que* $u \in \mathrm{End}\, E$. *Enfin* $f_2(y, x) = f_1(u(y), x) = f_1(x, u(y))$ *. ///*

(b) Quelle est la matrice de $u$ dans la base $B$ ? Déduire que $S_1^{-1}S_2$ est diagonalisable.

*Preuve. On a* $f_2(x, y) = {}^t[X]S_2[Y] = {}^t[X][\,{}^tu]_B S_1[Y]$. *Ainsi* $S_2 = [\,{}^tu]_B S_1$ *et donc* $S_1^{-1}S_2 = [\,{}^tu]_B$. *Par le théorème spectral l'endomorphisme symétrique* $u$ *est diagonalisable dans un BON de* $(E, f_1)$. *Remarquons que cette base est une BO simultanée pour* $f_1$ *et* $f_2$ *ce qui illustre dans ce cas l'équivalence montrée en (1) et (2). ///*