manuscripta math. 58, 179 - 214 (1987)

manuscripta mathematica

GENRE ET GENRE RESIDUEL DES CORPS DE FONCTIONS VALUES

Michel MATIGNON

Let L be a function field of one variable over a valued field $(K,|.|)$, and $(|.|_i)$, $1\leqslant i\leqslant s$, be distinct absolute values over L extending $|.|$ such that the residue fields $\overline{L}^i$ are function fields of one variable over the residue field $\overline{K}$ of $(K,|.|)$. We define the defect of the valued function fields $(L,|.|_i)/(K,|.|)$ and prove an inequality between the genus of L/K and that's of $\overline{L}^i/\overline{K}$ which takes into account the defect, the ramification index of $(L,|.|_i)/(K,|.|)$ and the constant field of $\overline{L}^i/\overline{K}$. Our inequality is better than Mathieu's inequality in discretely valued case.

0.0. Introduction

Dans tout ce travail les valeurs absolues sont ultramétriques et non triviales.

On s'intéresse aux corps de fonctions d'une variable valués, $(L/K,|.|)$ tels que $\overline{L}/\overline{K}$ soit un corps de fonctions d'une variable où $\overline{L}$ (resp. $\overline{K}$) est le corps résiduel de L (resp. K) pour la valeur absolue $|.|$. Cette étude a été inaugurée par Deuring [8], [9] et reprise par plusieurs auteurs [18], [19], [26], [32] dans le cas où $|.|$ est discrète. Le résultat le plus fin (sous cette hypothèse) était dû à H. Mathieu en 1968 [20], [21]. Il s'énonce ainsi : soient L/K un corps de fonctions d'une variable sur K dont K est le corps des constantes, $(|.|_i)1\leqslant i\leqslant s$ des valeurs absolues sur L discrètes, distinctes qui coïncident sur K en une valeur absolue $|.|$. On suppose que $\overline{L}^i/\overline{K}$ est un corps de fonctions d'une variable pour $1\leqslant i\leqslant s$ où $\overline{L}^i$ est le corps résiduel de L pour $|.|_i$. Soient e_i l'indice de ramification de l'extension valuée $(L,|.|_i)/(K,|.|)$, r_i le degré sur $\overline{K}$

du corps des constantes de $\overline{L}^i$, $g(L/K)$ (resp. $g(\overline{L}^i/\overline{K})$) le genre de L/K (resp. $\overline{L}^i/\overline{K}$). Alors on a l'inégalité :

(A) $$g(L/K)-1 \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i r_i \,(g(\overline{L}^i/\overline{K})-1).$$

Avant Mathieu les résultats obtenus supposaient l'hypothèse :

(B) Il existe $T \in L$ tel que $|T|_i=1$, $1\leqslant i\leqslant s$ et que l'image de T dans $\overline{L}^i$ est transcendante sur $\overline{K}$ (ainsi $|\cdot|_i$ induit sur $K(T)$ la valeur absolue de Gauss $|\cdot|_g$) et $|\cdot|_i$ pour $1\leqslant i\leqslant s$ sont exactement les prolongements à L de $|\cdot|_g$.

Nous nous proposons de généraliser la formule (A) au cas où le corps de base K est muni d'une valeur absolue quelconque. Pour cela on définit le défaut des corps de fonctions valués, cette notion nouvelle généralise la notion de défaut d'Ostrowski des extensions algébriques valuées. Elle permet de comparer les sous-K-espaces vectoriels de L et les sous-$\overline{K}$-espaces vectoriels de $\prod_{1\leqslant i\leqslant s} \overline{L}^i$ (en reprenant les notations de (A) et $|\cdot|$ quelconque). On obtient des résultats nouveaux qui généralisent les résultats de Gruson sur les corps stables [15].

Nous pouvons énoncer le résultat principal. Pour cela nous reprenons les hypothèses de (A), mais $|\cdot|$ n'est pas nécessairement discrète, alors on a l'inégalité :

(C) $$g(L)-1 \geqslant s-1 + \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i\, d_i\, r_i \,(g(\overline{L}^i)-1)$$

où d_i est le défaut du corps de fonction valué $(L,|\cdot|_i)/(K,|\cdot|)$, ce défaut est 1 si car.$\overline{K}=0$, et si car.$\overline{K}=p>0$, $d_i\in\mathbb{N}$ est une puissance de p, de plus $d_i=1$ si $|\cdot|$ est discrète, ainsi (C) améliore (A) dans le cas de valuation discrète.

Disons quelques mots sur la démonstration. D'abord le cas général se déduit de la situation où $(K,|\cdot|)$ est complet, on montre alors que l'hypothèse (B) est réalisée. Ce résultat nouveau s'obtient en utilisant un théorème de structure des ouverts affinoïdes d'une courbe algébrique. On considère ensuite l'unique courbe $\mathcal{C}$ sur K projective non singulière telle que $L=\mathcal{R}(\mathcal{C})$ (le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$) ; on associe alors à T satisfaisant (B) un recouvrement pur de $\mathcal{C}$ qui permet de définir une réduction analytique $r:\mathscr{C}\to\mathscr{E}$. Il existe une bijection canonique entre les composantes irréductibles $\{\mathscr{E}_i\}$, $1\leq i\leq s$, de $\mathscr{E}$ et les valeurs absolues $\{|\cdot|_i\}$, $1\leq i\leq s$, par le fait que $\mathscr{R}(\mathscr{E}_i)=\overline{L}^i$. D'abord le nombre $(s-1)$ dans (C) est issu de la connexité de $\mathscr{E}$, ensuite la ramification permet de définir des faisceaux inversibles $\mathscr{L}_{ij}$ sur $\mathscr{E}_i'$ la normalisation de $\mathscr{E}_i$ pour $1\leq j\leq e_i$, chaque faisceau ayant un degré négatif ou nul, enfin la notion de défaut des corps de fonctions valués permet de comparer la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}$ et des faisceaux $\mathscr{L}_{ij}$ en faisant intervenir les d_i, cette comparaison n'est autre chose que la formule (C).

Le dernier paragraphe illustre la formule (C), plus particulièrement on s'intéresse aux cas d'égalité. Signalons pour terminer que dans un prochain article nous donnerons une interprétation de la formule (C) en termes de famille de courbes algébriques sur $\mathbb{C}$ (c'est le cas où $|\cdot|$ est discrète et $\overline{K}=\mathbb{C}$), on retrouve ainsi un résultat d'Albanèse [1] remis au goût du jour par Nobile [27], [28].

Je tiens à remercier Jean Fresnel : beaucoup de ses idées se retrouvent ici et il m'a aidé tout au long de ce travail.

0. Notations

Soit $(K,|\cdot|)$ un corps valué, on note $K^0=\{x\in K \mid |x|\leq 1\}$, $K^{00}=\{x\in K \mid |x|<1\}$, $(\overline{K,|\cdot|})$ ou plus simplement $\overline{K}$ son corps résiduel, $|K^\times| = \{|x| \mid x\in K^\times\}$ le groupe des valeurs, $(K,|\cdot|)^\wedge$ ou plus simplement $K^\wedge$ son complété.

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $(K,|\cdot|)$, pour $\nu\in\mathbb{R}_{>0}$ on note $(\overline{E,\|\cdot\|})^\nu = \{x\in E \mid \|x\| \leq \nu\} / \{x\in E \mid \|x\|<\nu\}$ c'est un $\overline{K}$-espace vectoriel. Si E est une K-algèbre normée, $\overline{E}^\nu$ est un $\overline{E}^1$-module.

Soient $(L,|\cdot|)$ un corps valué, $K\subset L$ un sous-corps, on note $f(L/K,|\cdot|) = [\overline{L} : \overline{K}]$ le degré résiduel et $e(L/K,|\cdot|) = \mathrm{card}(|L^\times|/|K^\times|)$ l'indice de ramification. Si L/K est fini et si K est complet le quotient $[L : K] / e(L/K)f(L/K)$ est un entier, appelé le défaut de L/K pour la valeur absolue $|\cdot|$ et noté $d(L/K,|\cdot|)$ ou plus simplement $d(L/K)$, si $\mathrm{car}.\overline{K} =0$ on a $d(L/K)=1$, si $\mathrm{car}.\overline{K} =p>0$, on a $d(L/K)=p^\delta$ avec

$\delta \in \mathbb{N}$ ([30], p.355). Notons que $d(L/K)=1$ si et seulement si le K-espace vectoriel normé L admet une base orthogonale ([3] p.104, prop.4,p.159).

I. Le défaut des corps de fonctions valués

I.1. La valeur absolue de Gauss

DEFINITION 1 : Soit $(K,|.|)$ un corps valué, $K(T)=K(T_1,..,T_n)$ le corps des fractions rationnelles à n variables. On appelle valeur absolue de Gauss sur K(T) associée à $|.|$ et à $T=(T_1,..,T_n)$ la valeur absolue notée $|.|_g$ définie sur K[T] par $|\Sigma\, a_{i_1\dots i_n} T_1^{i_1}\dots T_n^{i_n}|=\max|a_{i_1\dots i_n}|$. Il suit que $|K(T)^\times|_g=|K^\times|$ et que $\overline{(K(T),|.|_g)}=\overline{K}(T_1,\dots T_n)$ le corps des fractions rationnelles à n variables.

PROPOSITION 1 : Soit $(K,|.|)$ un corps valué complet.

1) (existence de bases orthonormales[1]). Soit $K(T)=K(T_1,\dots,T_n)$, $|.|_g$ la valeur absolue de Gauss sur K(T) associée à $|.|$ et T. Alors $K(T)^\wedge=(K(T),|.|_g)^\wedge$ admet une base orthonormale sur K.

2) (extension des salaires). Soient L une extension algébrique finie de K, $|.|'$ l'unique valeur absolue de L prolongeant $|.|$, $|.|'_g$ la valeur absolue de Gauss sur $L(T)=L(T_1,\dots,T_n)$ associée à $|.|'$ et T. Alors la restriction de $|.|'_g$ à K(T) est $|.|_g$ et toute base orthonormale de $K(T)^\wedge$ sur K est une base orthonormale de $L(T)^\wedge=(L(T),|.|'_g)^\wedge$ sur L en plus $|.|'_g$ est l'unique valeur absolue de L(T) prolongeant $|.|_g$.

3) (linéaire disjonction avec K^{alg}). Le corps étant défini en 2), on a $[L(T)^\wedge:K(T)^\wedge]=[L(T):K(T)]=[L:K]$, et donc

---

[1] Soient $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé complet sur un corps valué complet K, une partie $\mathcal{B}$ de E est appelée base orthogonale (resp. orthonormale) de E si les propriétés suivantes sont satisfaites :
1) pour toute partie dénombrable $\mathcal{C}\subset\mathcal{B}$ et toute suite $(u(b))_{b\in\mathcal{C}}$ de K avec $\lim_{b\in\mathcal{C}}|u(b)|\,\|b\|=0$ on a $\|\sum_{b\in\mathcal{C}} u(b)b\|=\max_{b\in\mathcal{C}}|u(b)|\,\|b\|$ (resp. $\|\sum_{b\in\mathcal{C}} u(b)b\|=\max_{b\in\mathcal{C}}|u(b)|$).
2) pour tout $x\in E$ il existe une partie dénombrable $\mathcal{D}\subset\mathcal{B}$, une suite $(x(b))_{b\in\mathcal{D}}$ avec $\lim_{b\in\mathcal{D}}|x(b)|\,\|b\|=0$ et $x=\sum_{b\in\mathcal{D}} x(b)b$.

canoniquement $L(T)^\wedge \simeq L(T) \otimes_{K(T)} K(T)^\wedge$, $L(T)^\wedge \simeq L \otimes_K K(T)^\wedge$.

Démonstration. 1) Le cas $n=1$. Soit $\mathcal{P}$ une famille de polynômes unitaires de $K^0[T]$ telle que $\{\overline{P} | P\in\mathcal{P}\}$ (1) soit l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles de $\overline{K}[T]$ et non constants. Soit $Q\in K[T]$ irréductible, $|Q|_g=1$, le lemme de Hensel montre que $\overline{Q}$ est de la forme $\overline{P}^t$ où $P\in\mathcal{P}$, ainsi $\mathcal{B} \stackrel{def}{=} \{T^m, T^\ell/P^n \mid m\geqslant 0,\ n\geqslant 1,\ 0\leqslant \ell < \deg P,\ P\in\mathcal{P}\}$ est une base orthonormale de $K(T)^\wedge$ sur K. Le cas général s'en déduit par récurrence sur n.

2) Clairement $|\cdot|_g$ est la restriction à $K(T)$ de $|\cdot|'_g$. On a $L=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r} Kf_i$ et donc $L(T)^\wedge = \sum_{1\leqslant i\leqslant r} K(T)^\wedge f_i$, ainsi une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $K(T)^\wedge$ est une famille topologiquement génératrice de $L(T)^\wedge$ sur L. Comme $\{\overline{b} \mid b\in\mathcal{B}\}$ est une famille de $\overline{K}(T)$ libre sur $\overline{K}$, c'est aussi une famille de $\overline{L}(T)$ libre sur $\overline{L}$ ainsi $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de $L(T)^\wedge$ sur L.

La partie 3) est élémentaire.

COROLLAIRE 1 : On reprend les hypothèses de la proposition $1_{1)}$. Soit L une extension finie de $K(T)$, $\{|\cdot|_i, 1\leqslant i\leqslant s\}$ l'ensemble des prolongements à L de $|\cdot|_g$, $\|\cdot\| = \max_{1\leqslant i\leqslant s} |\cdot|_i$, $e_i = e(L/K(T), |\cdot|_i)$, $f_i = f(L/K(T), |\cdot|_i)$, $d_i = d((L, |\cdot|_i)^\wedge / K(T)^\wedge)$. Alors $K(T)^\wedge$ est une $K(T)$-algèbre séparable, ainsi: $[L:K(T)] = [(L,\|\cdot\|)^\wedge : (K(T), |\cdot|_g)^\wedge] = \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i\, f_i\, d_i$.

Démonstration. Si $p=\mathrm{car}.\overline{K}>0$, $K(T)^{1/p} \otimes_{K(T)} K(T)^\wedge$ est sans nilpotents comme il suit facilement de la proposition $1_{3)}$, ainsi $K(T)^\wedge/K(T)$ est séparable, le reste s'en déduit avec [5] prop.11, § 7.7 et la définition du défaut (cf. § 0).

PROPOSITION 2 : Soient $(K, |\cdot|)$ un corps valué complet, $K(T)=K(T_1,\ldots,T_n)$ le corps des fractions rationnelles à n variables, $n\geqslant 1$, $|\cdot|_g$ la valeur absolue de Gauss sur $K(T)$ associée à $|\cdot|$ et T, $K(T)^\wedge = (K(T), |\cdot|_g)^\wedge$. Soient $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ des extensions algébriques finies de $K(T)^\wedge$, $|\cdot|_i$ la valeur absolue sur M_i prolongeant $|\cdot|_g$, $M=\prod_{1\leqslant i\leqslant s} M_i$, $\varepsilon_i : M\to M_i$ la projection canonique et $\|\cdot\|$ la norme sur M définie par $\|x\| = \max_{1\leqslant i\leqslant s} |\varepsilon_i(x)|_i$; enfin on suppose que $|M_1^\times|_1 = \ldots = |M_s^\times|_s$.

(1) $\overline{P}$ est l'image canonique de P dans $\overline{K}[T]$.

1) Soit $e=e(M_1/K,|\cdot|_1)$, alors il existe $\pi_1,\ldots,\pi_e \in M$ tels que $|\varepsilon_1(\pi_j)|_1=\ldots=|\varepsilon_s(\pi_j)|_s$ pour $1\leqslant j\leqslant e$ et que $\{\|\pi_i\| \,\big|\, 1\leqslant i\leqslant e\}$ soit un système de représentants de $|M_1^\times|_1$ mod. $|K^\times|$.

2) Soient W un sous-$\overline{K}$-espace vectoriel de dimension finie de $\overline{M}=\overline{(M,\|\cdot\|)}$; $\overline{\varepsilon}_i:\overline{M}\to\overline{M}_i$ la projection canonique. Alors il existe un entier $m\geqslant 1$ tel que l'homomorphisme canonique de $\overline{K}(T^m)\otimes_{\overline{K}}\overline{\varepsilon}_i(W)$ dans $\overline{K}(T^m).\overline{\varepsilon}_i(W)$ soit bijectif pour $1\leqslant i\leqslant s$; $\overline{K}(T^m)=\overline{K}(T_1^m,\ldots,T_n^m)$.

3) Soient F un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de M, $\overline{F\pi_j}=:\{(x/\pi_j)^- \in \overline{M} \mid x\in F, \|x\|\leqslant\|\pi_j\|\}$ et $m\geqslant 1$ tel que l'homomorphisme canonique de $\overline{K}(T^m)\otimes_{\overline{K}}(\sum_j \overline{F\pi_j})$ dans $\overline{K}(T^m).(\sum_j \overline{F\pi_j})$ soit bijectif. Alors l'homomorphisme de $K(T^m)^\wedge\otimes_K F$ dans $K(T^m)^\wedge F$ est bijectif et isométrique, $K(T^m)^\wedge\otimes_K F$ étant muni de la norme tensorielle, $K(T^m)^\wedge F$ de celle de M et $K(T^m)^\wedge=K(T_1^m,\ldots,T_n^m)^\wedge$.

Démonstration. 1) est immédiat, 2) suit de l'égalité $\bigcap_{u\in\mathbb{N}^\times}\overline{K}(T^{um})=\overline{K}$ pour tout $m\in\mathbb{N}$. Montrons 3). Soit $\varphi:K(T^m)^\wedge\otimes_K F\to K(T^m)^\wedge F$ l'homomorphisme canonique. Clairement φ est surjectif. Il suffit donc de montrer que φ est isométrique. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $K(T^m)^\wedge$ sur K (prop. $1_{1)}$), $\mathscr{C}$ une partie dénombrable de $\mathscr{B}$, $(u(b))_{b\in\mathscr{C}}$ une suite non nulle de F telle que $\lim\|u(b)\|=0$. Il existe $\pi\in K^\times$ et $1\leqslant j\leqslant e$ tel que $|\pi|\,\|\pi_j\|=\max_{b\in\mathscr{C}}\|u(b)\|$. Montrons que $\|\sum_{b\in\mathscr{C}}u(b)b\|=$ $=\max_{b\in\mathscr{C}}\|u(b)\|=|\pi|\,\|\pi_j\|$. On a $(u(b)/\pi\pi_j)^-\in\overline{F\pi_j}$ et il existe $b_0\in\mathscr{C}$ avec $(u(b_0)/\pi\pi_j)^-\neq 0$. Comme $\{\overline{b}\mid b\in\mathscr{C}\}$ est une famille libre de $\overline{K}(T^m)$ et que $\overline{F\pi_j}\otimes_{\overline{K}}\overline{K}(T^m)$ est isomorphe à $\overline{F\pi_j}\,\overline{K}(T^m)$, on a donc $\sum_{b\in\mathscr{C}}(u(b)/\pi\pi_j)^-\,\overline{b}\neq 0$. Ainsi $\|\sum_{b\in\mathscr{C}}u(b)b\|=|\pi|\,\|\pi_j\|$ puisque $\|a\pi_j\|=\|a\|\,\|\pi_j\|$ pour tout $a\in M$. Ceci montre 3).

I.2. L'inégalité fondamentale

THEOREME 1 : Soient K un corps valué complet, $K(T)=$ $=K(T_1,\ldots,T_n)$ le corps des fractions rationnelles à n variables, $n\geqslant 1$, muni de la valeur absolue de Gauss $|\cdot|_g$ associée à T, $K(T)^\wedge$ son complété, $(L_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ des extensions algébriques finies de $K(T)^\wedge$, $|\cdot|_i$ la valeur absolue de L_i prolongeant $|\cdot|_g$, $d_i=d(L_i/K(T)^\wedge)$ le défaut. Soient $L=$

$=\prod_{1\leq i\leq s} L_i$ l'algèbre normée par $\|(x_1,\dots,x_s)\|=\max_{1\leq i\leq s}|x_i|_i$, $\nu\in\mathbb{R}$, $\nu>0$, $\bar{\varepsilon}_i^\nu:\overline{(L,\|.\|)}^\nu=\prod_{1\leq j\leq s}\overline{(L_j,|.|_j)}^\nu\to\overline{(L_i,|.|_i)}^\nu$ la projection canonique. Soient E un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de L, $\mathscr{V}$ un système de représentants de $\|L^\times\|=\bigcup_{1\leq i\leq s}|L_i^\times|$ mod. $|K^\times|$. Alors on a les relations suivantes :

(1) $\dim_K E+\sum_{\nu\in\mathscr{V}}\dim_{\bar{K}}[\bigoplus_{1\leq i\leq s}\bar{\varepsilon}_i^\nu(\bar{E}^\nu)]/\bar{E}^\nu\leq\sum_{1\leq i\leq s} d_i[\sum_{\nu\in\mathscr{V}}\dim_{\bar{K}}\bar{\varepsilon}_i^\nu(\bar{E}^\nu)]$

si de plus $d_i=1$ pour $1\leq i\leq s$, on a

(2) $\dim_K E+\sum_{\nu\in\mathscr{V}}\dim_{\bar{K}}[\bigoplus_{1\leq i\leq s}\bar{\varepsilon}_i^\nu(\bar{E}^\nu)]/\bar{E}^\nu=\sum_{1\leq i\leq s}\sum_{\nu\in\mathscr{V}}\dim_{\bar{K}}\bar{\varepsilon}_i^\nu(\bar{E}^\nu)$.

Démonstration : A) On suppose que $|L_1^\times|=\dots=|L_s^\times|$. Soient $e=e(L_1/K,|.|_1)$, ainsi il existe $\pi_1,\dots,\pi_e\in L^\times$ tels que $|\varepsilon_1(\pi_\nu)|_1=\dots=|\varepsilon_s(\pi_\nu)|_s$ pour $1\leq\nu\leq e$ et que $\{\|\pi_i\|,1\leq i\leq e\}=\mathscr{V}$ soit un système de représentants de $|L_1^\times|$mod.$|K^\times|$ (prop.$2_{1)}$, §I.1), (où ε_i est la projection $\prod_{1\leq j\leq s}L_j\to L_i$).

$A_{\alpha)}$ Soit V un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de L, alors $\overline{V\pi_\nu}=:\{\overline{(x/\pi_\nu)}\in\bar{L}\mid x\in V,\ \|x\|\leq|\pi_\nu|\}$ est un sous-$\bar{K}$-espace vectoriel de dimension finie de $\bar{L}$ et on a $\dim_K V\leq$ $\leq e\sum_{1\leq i\leq s} d_i\dim_{\bar{K}}\bar{\varepsilon}_i(\sum_{\mathscr{V}}\overline{V\pi_\nu})$.

Montrons cela. Pour simplifier les notations posons $W_i=\bar{\varepsilon}_i(\sum_{\mathscr{V}}\overline{V\pi_\nu})$ et $\alpha_i=\dim_{\bar{K}}W_i$. Soient $J=\{i\mid 1\leq i\leq s$ et $\alpha_i\neq 0\}$, $f_i=[\bar{L}_i:\overline{K(T)}]$, $N=\prod_{j\in J}f_j$, $m_i=:N\alpha_i/f_i$ si $i\in J$ et $m_i=1$ si $i\notin J$. Comme $\bar{L}_i$ est un corps de fonctions, il existe un corps extension de degré m_i de $\bar{L}_i$ (engendré par un élément), ainsi il existe un corps M_i extension de L_i avec $m_i=$ $=[M_i:L]=[\bar{M}_i:\bar{L}_i]$. Soit $m\leq 1$ un entier tel que l'homomorphisme canonique de $W_i\otimes_{\bar{K}}\bar{K}(T^m)$ dans $W_i\bar{K}(T^m)$ soit bijectif, (prop.$2_{2)}$, §I.1). On déduit de cela que $\alpha_i=\dim_{\bar{K}(T^m)}W_i\bar{K}(T^m)$. Si $i\in J$ on peut appliquer le lemme fin § I.2, à l'extension $\bar{M}_i/\bar{K}(T^m)$ et au $\bar{K}(T^m)$-espace vectoriel $W_i\bar{K}(T^m)$; ainsi il existe (a_k^i), $1\leq k\leq m^nN$, des éléments de $\bar{M}_i$ avec (3) $\bar{M}_i=$ $=\bigoplus_{1\leq k\leq m^nN}a_k^i\,W_i\bar{K}(T^m)$. Soient $A_k\in\prod_{1\leq i\leq s}M_i$ avec $\|A_k\|=1$, $\bar{\varepsilon}_i(\bar{A}_k)=$ $=a_k^i$ pour $i\in J$ et $\varepsilon_i(A_k)=0$ pour $i\notin J$. Montrons que (4) $\sum_{1\leq k\leq m^nN}A_kK(T^m)^\wedge V=\bigoplus_{1\leq k\leq m^nN}A_kK(T^m)^\wedge V$. Soient $v_k\in K(T^m)^\wedge V$, il suffit de montrer que (4') $\|\sum_k A_kv_k\|=\max_k\|v_k\|$. Quitte à multiplier les v_k par un élément de K on peut supposer qu'il existe ν_0 avec $\max_k \|v_k\| = \|\pi_{\nu_0}\|$. Il suit de la prop.$2_{3)}$ § I.1) que v_k s'écrit $v_k = \sum_j \lambda_{k,j} v_{k,j}$ avec $\lambda_{k,j} \in K(T^m)^\wedge$, $v_{k,j} \in V$; $\|\lambda_{k,j}\| \leqslant 1$ et $\|v_{k,j}\| \leqslant \|\pi_{\nu_0}\|$. Il suit de cela que $(v_k/\pi_{\nu_0})^- \in \overline{K}(T^m)\overline{V}\pi_{\nu_0}$. Comme il existe k_0 avec $(v_{k_0}/\pi_{\nu_0})^- \neq 0$, on a donc $\overline{\varepsilon}_{i_0}(v_{k_0}/\pi_{\nu_0})^- \neq 0$ pour un $i_0 \in J$. Par suite (3) montre que $\sum_k a_k^i \overline{\varepsilon}_{i_0}(v_{k_0}/\pi_{\nu_0})^- \neq 0$ ainsi $\|\sum_k A_k v_k\| = \|\pi_{\nu_0}\|$. Ce qui montre (4). La formule (4') montre que la multiplication par A_k est un isomorphisme $K(T^m)^\wedge$-linéaire de $K(T^m)^\wedge V$ sur $A_k K(T^m)^\wedge V$. Les définitions de J et A_k montrent que $\bigoplus_k A_k K(T^m)^\wedge V \subset \prod_{i \in J} M_i$. Alors un calcul de dimension de $K(T^m)^\wedge$-espaces vectoriels montre que (5) $m^n N \dim_K V \leqslant m^n N e \sum_{i \in J} \sum_{i \in J} d_i \alpha_i$, cela résulte des formules suivantes, $\dim_{K(T^m)^\wedge} \bigoplus_k A_k K(T^m)^\wedge V = m^n N \dim_{K(T^m)^\wedge} K(T^m)^\wedge V$, $\dim_{K(T^m)^\wedge} K(T^m)^\wedge V = \dim_K V$ (prop.$2_{3)}$, §I.1), $[M_i : K(T^m)^\wedge] = [M_i : L_i][L_i : K(T)^\wedge][K(T)^\wedge : K(T^m)^\wedge] = m_i e f_i d_i m^n = m^n N d_i \alpha_i$. Ainsi $A_{\alpha)}$ qui est (5) est montré.

$A_{\beta)}$ <u>Soient $|L_i^\times|/|K^\times| = C_1 \times \ldots \times C_r$ la décomposition du groupe abélien $|L_i^\times|/|K^\times|$ en produit de groupes cycliques et $N \geqslant 1$ un entier. Alors il existe $\rho_1, \ldots, \rho_r \in L^\times$ avec les propriétés suivantes</u> : $\beta_{1)}$ <u>pour $1 \leqslant j \leqslant r$ on a $\|\rho_j\| = |\varepsilon_1(\rho_j)|_1 = \ldots = |\varepsilon_s(\rho_j)|_s$ et $\|\rho_j\|$ induit un générateur de C_j</u>, $\beta_{2)}$ <u>si $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$, on note $\underline{\rho}^{\underline{n}}$ l'élément $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r} \rho_i^{n_i}$ et $\overline{E}_{\underline{\rho}^{\underline{n}}} = := \{(x/\underline{\rho}^{\underline{n}})^- \in \overline{L} \mid x \in E$ et $\|x\| \leqslant \|\underline{\rho}^{\underline{n}}\|\}$. Alors on a pour $1 \leqslant i \leqslant s$, $\overline{\varepsilon}_i(\sum_{-Ne_j \leqslant \underline{n}_j < e_j} \overline{E}_{\underline{\rho}^{\underline{n}}}) = \bigoplus_{-Ne_j \leqslant \underline{n}_j < e_j} \overline{\varepsilon}_i(\overline{E}_{\underline{\rho}^{\underline{n}}})$ où $e_j = \mathrm{card}.C_j$.</u>

Clairement il existe $\rho'_1, \ldots, \rho'_r \in L$ satisfaisant $\beta_{1)}$, ensuite il existe $m \geqslant 1$ tel que (6) l'homomorphisme canonique de $\overline{K}(T^m) \otimes_{\overline{K}} \overline{\varepsilon}_i(\sum_{-Ne_j \leqslant \underline{n}_j < e_j} \overline{E}_{\underline{\rho}',\underline{n}})$ dans $\overline{K}(T^m)\overline{\varepsilon}_i((\sum_{-Ne_j \leqslant \underline{n}_j < e_j} \overline{E}_{\underline{\rho}',\underline{n}})$ soit bijectif (prop $2_{2)}$, §I.1). Il existe $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que les éléments $\underline{g}.\underline{n} =: \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} g_j n_j$ soient tous distincts pour $-Ne_j \leqslant n_j < e_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Il suit de (6) que (7) $\overline{\varepsilon}_i(\sum_{-Ne_j \leqslant \underline{n}_j < e_j} T^{m(\underline{g}\cdot\underline{n})}\overline{E}_{\underline{\rho}',\underline{n}}) = \bigoplus_{-Ne_j \leqslant \underline{n}_j < e_j} \overline{\varepsilon}_i(T^{m(\underline{g}\cdot\underline{n})}\overline{E}_{\underline{\rho}',n})$ où $T^{m(\underline{g}\cdot\underline{n})} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} T_i^{m(\underline{g}\cdot\underline{n})}$. Posons $\rho_j = T^{-mg_j}\rho'_j$, ainsi $\underline{\rho}^{\underline{n}} = T^{-m(\underline{g}\cdot\underline{n})}\underline{\rho}'^{\underline{n}}$ et $\overline{E}_{\underline{\rho}^{\underline{n}}} = T^{m(\underline{g}\cdot\underline{n})}\overline{E}_{\underline{\rho}',\underline{n}}$. Alors (7) montre $\beta_{2)}$ et il est clair que ρ_i satisfait $\beta_{1)}$.

$A_{\gamma)}$ <u>Soit E un sous-K-espace vectoriel de dimension finie</u>

de L, on a $\dim_K E \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} d_i \sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\bar K} \bar{\varepsilon}_i^\nu(\bar E^\nu)$.

Soient $N\geqslant 1$ un entier, $\underline{\rho}$ défini par $A_{\beta)}$, $F=\sum_{0\leqslant n_j\leqslant Ne_j} \underline{\rho}^{\underline{n}}E$, $\underline{a}=(a_1,\ldots,a_r)\in\mathbb{N}^r$ avec $0\leqslant a_j<e_j$. Il suit de $\beta_{2)}$ que $F=$ $=\bigoplus_{0\leqslant n_j\leqslant Ne_j} \underline{\rho}^{\underline{n}}E$, que $\bar F_{\underline{\rho}^{\underline{a}}}=\bigoplus_{0\leqslant n_j\leqslant Ne_j} \bar E_{\underline{\rho}^{\underline{a}-\underline{n}}}$ et que (8) $\bar\varepsilon_i(\sum_{0\leqslant a_j<e_j} \bar F_{\underline{\rho}^{\underline{a}}})=\bigoplus_{-Ne_j\leqslant n_j<e_j} \bar\varepsilon_i(\bar E_{\underline{\rho}^{\underline{n}}})$. Ainsi (9) $\dim_K F=$ $=[\prod_{1\leqslant j\leqslant r}(Ne_j+1)]\dim_K E$. Comme $\bar E_{\underline{\rho}^{\underline{n}}}$ est $\bar K$-isomorphe à $\bar E_{\underline{\rho}^{\underline{n}+\underline{e}}}$, pour $\underline{e}=(e_1,\ldots,e_r)$, on a (10) $\dim_{\bar K}\bar\varepsilon_i(\sum_{0\leqslant a_j\leqslant e_j}\bar F_{\underline{\rho}^{\underline{a}}})=$ $=(N+1)^r\sum_{0\leqslant a_j<e_j}\dim_{\bar K}\bar\varepsilon_i(\bar E_{\underline{\rho}^{\underline{a}}})$ en utilisant (8). Sachant que $\{\|\underline{\rho}^{\underline{a}}\|\,|\,0\leqslant a_j<e_j, 1\leqslant j\leqslant r\}$ est un système $\mathscr{V}$ de représentants de $|L_1^\times|/|K^\times|$, on peut appliquer $A_{\alpha)}$ à $V=F$. Compte tenu de (9), (10) et de ce que $e=e_1\ldots e_r$ on a (11) $\dim_K E\leqslant$ $\leqslant[\prod_{1\leqslant j\leqslant r}(Ne_j+e_j/Ne_j+1)]\sum_{1\leqslant i\leqslant s} d_i(\sum_{0\leqslant a_j<e_j}\dim_{\bar K}\bar\varepsilon_i(\bar E_{\underline{\rho}^{\underline{a}}}))$. Comme N est arbitraire et que $\bar\varepsilon_i(\bar E_{\underline{\rho}^{\underline{a}}})$ est $\bar K$-isomorphe à $\bar\varepsilon_i^\nu(\bar E^\nu)$ pour $\nu=\|\underline{\rho}^{\underline{a}}\|$, on déduit $A_{\gamma)}$ de (11).

$A_{\delta)}$ l'inégalité (1). Montrons qu'il existe un sous-K-espace vectoriel F de L avec les propriétés suivantes : $E+F=$ $=E\oplus F$, $(\overline{E+F})^\nu=\bar E^\nu\oplus\bar F^\nu=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant s}\bar\varepsilon_i^\nu(\bar E^\nu)$ et $\dim_K F=\sum_{\nu\in\mathscr{V}}\dim_{\bar K}\bar F^\nu$. On procède comme suit. Il existe $f_{\nu,1},\ldots,f_{\nu,r_\nu}\in L$ avec $\|f_{\nu,j}\|=$ $=\nu$ et $\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant s}\bar\varepsilon_i^\nu(\bar E^\nu)=\bar E^\nu\oplus\{\bigoplus_{1\leqslant j\leqslant r_\nu}\bar K\,\bar f_{\nu,j}^\nu\}$. Soient $F_\nu=$ $=\sum_{1\leqslant j\leqslant r_\nu} Kf_{\nu,j}$, $F=\sum_{\nu\in\mathscr{V}} F_\nu$, il est facile de montrer que $F=\bigoplus_{\nu\in\mathscr{V}} F_\nu$, que $\bar F^\nu=\bar F_\nu$ et que F satisfait les propriétés indiquées. Il suit que $A_{\gamma)}$ appliqué à l'espace vectoriel $E+F$ donne $A_{\delta)}$ pour l'espace vectoriel E.

B) Le cas général. Il existe un sous-groupe G de $\mathbb{R}^\times_{>0}$ tel que $|L_i^\times|_i\subset G$ et que G mod.$|L_i^\times|_i$ soit fini pour $1\leqslant i\leqslant s$. Il existe un corps M_i extension finie de L_i avec $|M_i^\times|_i=G$ et $[M_i:L_i]=\mathrm{card}.G/|L_i^\times|_i$. Il suit de cela que $d(M_i/K(T)^\wedge)=$ $=d(L_i/K(T)^\wedge)=d_i$. Ainsi $M=\prod_{1\leqslant i\leqslant s} M_i$ satisfait A) et l'injection canonique $(L,\|\cdot\|)\to(M,\|\cdot\|)$ est isométrique. Soit E un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de L, donc de M. Par A) on a (12) $\dim_K E+\sum_{\nu\in\mathscr{W}}\dim_{\bar K}[\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant s}\bar\varepsilon_i^\nu(\bar E^\nu)]/\bar E^\nu\leqslant$ $\sum_{1\leqslant i\leqslant s} d_i\sum_{\nu\in\mathscr{W}}\dim_{\bar K}\bar\varepsilon_i^\nu(\bar E^\nu)$, où $\mathscr{W}$ est un système de représentants de $G/|K^\times|$. Il existe une partie $\mathscr{V}\subset\mathscr{W}$ qui soit un système de représentants de $\|L^\times\| = \bigcup_{1\leq i\leq s} |L_i^\times|_i$. Si $\nu \in \mathcal{W}-\mathcal{V}$ on a $\overline{E}^\nu=\{0\}$, ainsi (12) est (1).

C) <u>Le cas où</u> $d_1=\ldots=d_s=1$. Cela veut dire que $(L,\|.\|)$ admet une base orthogonale sur $K(T)^\wedge$ [3] prop.4,p.159. Comme $K(T)^\wedge$ a une base orthonormale sur K (prop 1_1) § I.1) il suit que $(L,\|.\|)$ admet une base orthogonale sur K, ce qui implique (13) $\dim_K V = \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{V}^\nu$. Soient E un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de L satisfaisant : $E+F=E\oplus F$, $\overline{(E+F)}^\nu=\overline{E}^\nu\oplus\overline{F}^\nu = \bigoplus_{1\leq i\leq s} \overline{\varepsilon}_i^\nu(\overline{E}^\nu)$, $\dim_K F = \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{F}^\nu$ (l'existence en est montrée en $A_{8)}$). Alors (13) appliqué à V=E+F est le théorème $1_{2)}$.

<u>COROLLAIRE</u> : <u>Soient K un corps valué complet</u>, $(L_i)_{1\leq i\leq s}$ <u>des extensions algébriques finies de K</u> ; $|.|_i$ <u>la valeur absolue de</u> L_i <u>prolongeant celle de</u> K, $d_i=d(L_i/K)$. <u>Soient</u> $L=\prod_{1\leq i\leq s} L_i$, $\|.\|$ <u>la norme sur L définie par</u> $\|(x_1,\ldots,x_s)\| = \max_{1\leq i\leq s} |x_i|_i$. <u>Soient</u> $\nu\in\mathbb{R}$, $\nu>0$, $\overline{\varepsilon}_i^\nu : \overline{(L,\|.\|)}^\nu = \prod_{1\leq j\leq s} \overline{(L_j,|.|_j)}^\nu \to \overline{(L_i,|.|_i)}^\nu$. <u>la projection canonique</u>, $\mathcal{V}$ <u>un système multiplicatif de représentants de</u> $\|L^\times\| = \bigcup_{1\leq i\leq s} |L_i^\times|_i$ mod. $|K^\times|$, E <u>un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de</u> L. <u>Alors on a les relations suivantes</u> :

$$\dim_K E + \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} [\bigoplus_{1\leq i\leq s} \overline{\varepsilon}_i^\nu(\overline{E}^\nu)]/\overline{E}^\nu \leq \sum_{1\leq i\leq s} d_i(\sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{\varepsilon}_i^\nu(\overline{E}^\nu)),$$

$$\dim_K E + \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} [\bigoplus_{1\leq i\leq s} \overline{\varepsilon}_i^\nu(\overline{E}^\nu)]/\overline{E}^\nu = \sum_{1\leq i\leq s} \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{\varepsilon}_i^\nu(\overline{E}^\nu).$$

<u>Démonstration</u>. Soit $|.|_i'$ la valeur absolue de Gauss sur $L_i(T)$ associée à $|.|_i$ et à $T=T_1$. On a $[\overline{L_i(T)}:\overline{K(T)}] = [\overline{L}_i(T):\overline{K}(T)] = [\overline{L}_i:\overline{K}]$, $e(L_i(T)/K(T),|.|_i') = e(L_i/K,|.|_i)$ et $[L_i(T)^\wedge:K(T)^\wedge] = [L_i:K]$ (prop.1_3) §I.1). Il suit de cela que $d(L_i(T)^\wedge/K(T)^\wedge) = d(L_i/K)$. Comme L s'injecte isométriquement dans $\prod_{1\leq i\leq s} L_i(T)^\wedge$, le théorème 1 appliqué au sous-K-espace vectoriel E de $\prod_{1\leq i\leq s} L_i(T)^\wedge$ montre le corollaire(1).

<u>Un exemple</u>. Soient $\mathbb{F}_2$ le corps à 2 éléments, $\mathbb{F}_2^{alg}$ une clôture algébrique, $\mathbb{F}_2^{alg}(T)$ le corps des fractions rationnelles, $|.|$ une valeur absolue avec $0<|T|<1$, alors $|.|$ se prolonge de façon unique au corps $\bigcup_{n\geq 0} \mathbb{F}_2^{alg}(T^{1/2^n})$ en une

(1) Noter que la démonstration proposée nécessite le passage à un sur-corps transcendant ; nous ne connaissons pas de démonstration "directe"

valeur absolue toujours notée $|.|$; soit $(K,|.|)$ son complété. Soit $L=K[T^{1/3},x]$ avec $x^2+x=T^{(1/3)-1}$. On a $e(L/K,|.|)=3$, $d(L/K,|.|)=2$. On peut montrer que pour tout sous-K-espace vectoriel E de L avec $1=\sum_{\nu\in\mathscr{V}}\dim_{\overline{K}}\overline{E}^{\nu}$ on a $\dim_K E<d(L/K)$! (où $\mathscr{V}$ est un système de représentants de $(|L^{\times}|\mathrm{mod}.|K^{\times}|)$.

<u>LEMME</u> : <u>Soient $k\subset\ell$, deux corps, E,F deux sous-k-espaces vectoriels du k-espace vectoriel ℓ tels que E soit de dimension finie et que $\dim_k \ell/F\geqslant\dim_k E$. Alors il existe $x\in\ell^{\times}$ tel que $F\cap xE=\{0\}$. Si la dimension de ℓ sur k est finie, si G est un sous-k-espace vectoriel de ℓ tel que $\dim_k G$ divise $\dim_k\ell$, alors il existe $x_1,\ldots,x_r\in\ell^{\times}$ tels que $k=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}x_iG$ avec $r.\dim_k G=\dim_k\ell$.</u>

<u>Démonstration</u> : Nous le démontrons dans le cas où k est infini (seul ce cas est utilisé ici). On suppose le lemme montré lorsque $\dim_k E\leqslant r-1$. Supposons maintenant que $\dim_k E=r$. Soit $\{e_1,\ldots,e_{r-1}\}$ une famille libre de E, par hypothèse de récurrence il existe $a\in\ell^{\times}$ avec $a(ke_1\oplus\ldots\oplus\oplus ke_{r-1})\cap F=\{0\}$. Si $aE\cap F=\{0\}$, c'est fini. Sinon il existe $e_r\in E-\bigoplus_{1\leqslant i<r}ke_i$ et $ae_r\in F$; en particulier $\{e_1,\ldots e_r\}$ est une base de E. Soit $\varphi:\ell\to\ell/F$ la surjection canonique, on a $\varphi(aE)=\varphi(a(ke_1\oplus\ldots\oplus ke_{r-1}))$, $\{\varphi(ae_1),\ldots,\varphi(ae_{r-1})\}$ est une famille libre et $\dim_k\varphi(aE)=r-1$. Soient $g\in\ell$ tel que $\{\varphi(ae_1),\ldots,\varphi(ae_{r-1}),\varphi(g)\}$ soit une famille libre de ℓ/F, G le sous-espace vectoriel de ℓ/F engendré par $\{\varphi(ae_1),\ldots,\varphi(ae_{r-1}),\varphi(g)\}$ et $b=g/e_r$. Soient $c\in\ell^{\times}$, $\hat{c}:E\to G$ défini par $\hat{c}(x)=p\circ\varphi(cx)$ où $p:\ell/F\to G$ est une projection satisfaisant $p(g)=g$ pour tout $g\in G$. Soient $\lambda\in k$, M la matrice de $\lambda\hat{a}+\hat{b}$ avec $\{e_1,\ldots,e_r\}$ pour base de E, $\{\varphi(ae_1),\ldots,\varphi(ae_{r-1}),\varphi(g)\}$ pour base de G. On a donc $\det(M)=\det(\lambda I_{r-1}+S)=P(\lambda)$ où S est une matrice $(r-1).(r-1)$ à coefficients dans k, et I_{r-1} est la matrice unité ; ainsi $P(\lambda)$ est un polynôme unitaire en λ de degré r-1 à coefficients dans k. Comme k est infini il existe $\lambda_0\in k$ tel que $P(\lambda_0)\neq0$. Ainsi $\lambda_0\hat{a}+\hat{b}=(\lambda_0a+b)\hat{}$ est injectif, ce qui veut dire que $((\lambda_0a+b)E)\cap F=\{0\}$. Le lemme est donc montré.

I.3. Le défaut des corps de fonctions valués

THEOREME 2. *Soient $(K,|.|)$ un corps valué complet, $K(T)$ le corps des fractions rationnelles à n variables, $n\geq 1$, $|.|_g$ la valeur absolue de Gauss sur $K(T)$ associée à $|.|$ et à T, L une extension finie de $(K(T),|.|_g)^\wedge$, $|.|'$ le prolongement à L de $|.|_g$, $d(L/K(T)^\wedge)$ le défaut, $\mathcal{V}$ un système de représentants de $|L^\times|/|K^\times|$. Alors on a $d(L/K(T)^\wedge)=\sup_E \dim_K E / \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{E}^\nu$, où le supremum est pris sur tous les sous-K-espaces vectoriels $E\neq\{0\}$ de L de dimension finie.*

Démonstration. α) *Il existe un corps M extension algébrique finie de $K(T)$ avec les propriétés suivantes : la valeur absolue $|.|_g$ de $K(T)$ admet un unique prolongement $|.|''$ à M, on a $[M:K(T)]=[M^\wedge:K(T)^\wedge]$, il existe une bijection $K(T)^\wedge$-linéaire, isométrique de $(L,|.|')$ sur $(M^\wedge,|.|'')$; ainsi* $d(L,K(T)^\wedge)=d(M^\wedge/K(T)^\wedge)$.

Pour cela on utilise le résultat classique suivant : soient $E\supset K(T)$, $N\supset K(T)$, 2 sous-corps de $(K(T)^{\wedge alg},|.|)$ avec E complet, $\varphi:E\to N^\wedge$ une bijection $K(T)^\wedge$-linéaire avec $|x-\varphi(x)|<\varepsilon|x|$, $(0<\varepsilon<1)$. Soit $a\in K(T)^{\wedge alg}$ de degré r sur E, $|a|<1$, $c>0$ avec $c\max|\lambda_i|\leq|\sum_{0<i<r}\lambda_i a^i|$ pour tout $\lambda_i\in E$. On suppose que $(\varepsilon^{1/r}/c)<1$. Alors il existe $b\in K(T)^{\wedge alg}$, algébrique de degré r sur N et $N^\wedge$ tel que l'application $\psi:E[a]\to N^\wedge[b]$ définie par $\psi[\sum_{0<i<r}\lambda_i a^i]=\sum_{0<i<r}\varphi(\lambda_i)b^i$, $\lambda_i\in E$, soit une bijection $K(T)^\wedge$-linéaire et que $|\psi(y)-y|<(\varepsilon^{1/r}/c)|y|$ pour tout $y\in E[a]$.

Montrons α). Il existe une suite finie de corps $K(T)^\wedge= =L_0\subset\ldots\subset L_s=L$ avec $L_i=L_{i-1}[a_i]$, $|a_i|\leq 1$. Soient $r_i=[L_i:L_{i-1}]$, $c_i>0$ tel que $c_i\max|\rho_j|\leq|\sum_{0\leq j<r_i}\rho_j a_i^j|$ pour tout $\rho_j\in L_{i-1}$. Soient $r=r_1\ldots r_s$, $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon^{1/r}<c_1^{r_1/r}\ldots c_s^{r_1\ldots r_s/r}$, $N_0= K(T)$, $\varphi_0:L_0\to N_0^\wedge$ l'identité ; on a bien $|\varphi_0(x)-x|<\varepsilon|x|$ pour tout $x\in L_0$. En utilisant ce qui précède on a une suite de sous-corps de $K(T)^{\wedge alg}$, $N_0\subset\ldots\subset N_s$ avec $[N_s:N_0]=[N_s^\wedge:N_0^\wedge]=r= r_1..r_s$ et il existe $\psi:L_s\to N_s^\wedge$ une application $K(T)^\wedge$-linéaire bijective avec $|\psi(y)-y|<|y|$ pour $y\in L_s$. Ceci montre α).

β) *Soient M/K défini en α), v la valeur absolue sur $K(T)$ définie par $v(P)=\exp\deg P$ pour $P\in K[T]$ où $\deg P$ est le degré total de P. Soient (v_i), $1\leq i\leq s$ les prolongements de v à M,*

$w=\max v_i$, A la clôture intégrale de $K[T]$ dans M, $m\in\mathbb{N}$ et $A_M(m)=:\{a\in A \mid w(a)\leqslant \exp m\}$ alors on a $d(M^\wedge/K(T)^\wedge, |.|'')=$ $=\lim_{m\to\infty} \dim_K A_M(m)/\sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{A_M(m)}^\nu$, où $\mathscr{V}$ est un système de représentants de $|M^\times| \bmod . |K^\times|$.

Soient $\nu\in\mathscr{V}$, alors il existe $f_\nu\in M$ entier sur $K[T]$ avec $|f_\nu|=1/\nu$; ainsi il existe $m_0\geqslant 1$ tel que $f_\nu\in A_M(m_0)$ pour tout $\nu\in\mathscr{V}$. Il suit que (1) $f_\nu A_M(m)\subset A_M(m+m_0)$ et que $\overline{f_\nu A_M(m)}\subset$ $\subset\overline{A_M(m+m_0)}\subset A_{\overline{M}}(m+m_0)$, (où $A_{\overline{M}}(m)$ est défini comme $A_M(m)$ par l'extension $\overline{M}/\overline{K(T)}$), cf [3] lemme 6 p.170 pour la dernière clusion. Comme il existe une bijection $\overline{K}$-linéaire de $\overline{A_M(m)}^\nu$ sur $\overline{f_\nu A_M(m)}$, on déduit de la relation (1) que $\sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{A_M(m)}^\nu \leqslant e(M/K(T)) \dim_{\overline{K}} A_{\overline{M}}(m+m_0)$. Ensuite les égalités $[M:K(T)]=n!\lim_{m\to\infty} m^{-n} \dim_K A_M(m)$ et $[\overline{M}:\overline{K}(T)]=$ $=n!\lim_{m\to\infty}(m+m_0)^{-n}\dim_{\overline{K}} A_{\overline{M}}(m+m_0)$, [3] lemme 4 p.216, montrent que $d(M^\wedge/K(T)^\wedge)\geqslant \lim_{m\to\infty} \dim_K A_M(m)/\sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{A_M(m)}^\nu$. Enfin le théorème 1 § I.2. donne l'autre inégalité d'où β).

γ) Conclusion. Par le théorème 1 § I.2. on a $d(L/K(T)^\wedge)\geqslant$ $\geqslant\sup_E \dim_K E/\sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{E}^\nu$. En utilisant β), l'isométrie entre $M^\wedge$ et L, la relation $d(L/K(T)^\wedge)=d(M^\wedge/K(T)^\wedge)$, on a une suite $(E_m)_{m\geqslant 1}$ avec $d(L/K(T)^\wedge)=\lim_{m\to\infty} \dim_K E_m/\sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{E}_m^\nu$. Ce qui montre le théorème.

COROLLAIRE 1 (définition du défaut): Soient L/K un corps de fonctions à n variables, $n\geqslant 1$, $|.|$ une valeur absolue sur L telle que $\overline{L}/\overline{K}$ soit un corps de fonctions à n variables, $T_1,\ldots,T_n\in L$ tels que $|T_i|=1$ et que les images résiduelles de $T_1,\ldots,T_n$ soient algébriquement indépendantes sur $\overline{K}$, $\mathscr{V}$ un système de représentants de $|L^\times|/|K^\times|$, alors on a (1) $d(L^\wedge/K(T)^\wedge)=\sup_E \dim_{K^\wedge} E/\sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{E}^\nu$, où le supremum est pris sur les sous-$K^\wedge$-espaces vectoriels $E\neq\{0\}$ de $L^\wedge$, de dimension finie. Si de plus K est complet, on a aussi (2) $d(L^\wedge/K(T)^\wedge)=$ $=\sup_F \dim_K F/\sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{F}^\nu$, où le supremum est pris sur les sous-K-espaces vectoriels $F\neq\{0\}$ de L, de dimension finie. L'entier défini en (1) par $\sup_E \dim_{K^\wedge} E/\sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{E}^\nu$ s'appelle le défaut de L/K pour $|.|$ et se note $d(L/K,|.|)$.

Démonstration. Il est immédiat que $T_1,\ldots,T_n$ sont algébriquement indépendants et que la restriction à $K(T)=$ $=K(T_1,\dots,T_n)$ de $|.|$ est la valeur absolue de Gauss ; ainsi L est fini sur $K(T)$, donc $L^\wedge$ est fini sur $K(T)^\wedge$ et (1) est le théorème 2. Supposons K complet. Soit $E=\bigoplus_{1\leqslant j\leqslant r} Kf_j$ un sous-espace vectoriel de $L^\wedge$, $c>0$ tel que $c \max_j |\lambda_j||f_j| \leqslant$ $\leqslant |\sum_j \lambda_j f_j|$, $g_j \in L$ avec $|g_j - f_j| < c|f_j|$. Alors $\sum_j \lambda_j f_j \to \sum_j \lambda_j g_j$ est une bijection K-linéaire, isométrique de $\bigoplus_j Kf_j$ sur $\bigoplus_j Kg_j$. Ce qui montre (2) avec (1).

COROLLAIRE 2 : Soient L/K un corps de fonctions à n variables, $(|.|_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ des valeurs absolues sur L qui coïncident sur K en une valeur absolue $|.|$. On suppose que $\overline{(L,|.|_i)}/$ $/\overline{(K,|.|)}$ est un corps de fonctions à n variables pour $1\leqslant i\leqslant s$ et que $(K,|.|)$ est complet. Soient $d_i = d(L/K,|.|_i)$ le défaut de L/K pour la valeur absolue $|.|_i$, $\|.\|$ la norme sur L définie par $\|x\| = \max |x|_i$, $\mathscr{V}$ un système de représentants de $\|L^\times\| = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant s} |L^\times|_i \bmod. |K^\times|$, $\bar{\varepsilon}_i^\nu : \overline{(L,\|.\|)}^\nu \to \overline{(L,|.|_i)}^\nu$ la projection canonique pour $\nu\in\mathscr{V}$. Soient E un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de L et $\overline{E}^\nu = \overline{(E,\|.\|)}^\nu$. Alors on a $\dim_K E + \sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} [\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant s} \bar{\varepsilon}_i^\nu(\overline{E}^\nu)]/\overline{E}^\nu \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} d_i (\sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \bar{\varepsilon}_i^\nu(\overline{E}^\nu))$, si de plus $d_1 = \dots = d_s = 1$, on a

$$\dim_K E + \sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} [\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant s} \bar{\varepsilon}_i^\nu(\overline{E}^\nu)]/\overline{E}^\nu = \sum_{1\leqslant i\leqslant s}\ \sum_{\nu\in\mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} \bar{\varepsilon}_i^\nu(\overline{E}^\nu).$$

Démonstration. Comme $\overline{(L,|.|_i)}/\overline{(K,|.|)}$ est un corps de fonctions à n variables il existe $Z_{i1},\dots,Z_{in}\in L$ tels que $|Z_{ij}|_i=$ $=1$ pour $1\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant s$ et que les images résiduelles de Z_{ij} dans $\overline{(L,|.|_i)}$ soient algébriquement indépendantes sur $\overline{K}$. Par [5], th.2, § 7.3, il existe $T_j \in L$, $1\leqslant j\leqslant n$ avec $|T_j - Z_{ij}|_i < 1$ pour $1\leqslant i\leqslant s$. Il est alors facile de montrer que la restriction à $K(T)$ de $|.|_i$ est la valeur absolue de Gauss associée à T et à $|.|$. Notons $K(T)^\wedge$ le complété pour $|.|_i$, $1\leqslant i\leqslant s$. Par le corollaire 1 on a $d(L/K,|.|_i)=$ $=d((L,|.|_i)^\wedge/K(T)^\wedge)$. Soient $L_i = (L,|.|_i)^\wedge$, alors $(L,\|.\|)$ s'injecte isométriquement dans $\prod_{1\leqslant i\leqslant s} L_i$ muni de $\|.\|' =$ $=\max |.|_i$. Ainsi le corollaire n'est autre chose que le théorème 1 § I.2.

Nous indiquons maintenant quelques corollaires, nous renvoyons à [23] pour les démonstrations.

COROLLAIRE 3 : Soient $(L/K,|.|)$ un corps de fonctions valué à n variables tel que $\overline{(L,|.|)}/\overline{(K,|.|)}$ soit un corps de fonctions à n variables.

1) Soit $L \supset K' \supset K$ un corps intermédiaire, algébrique (fini) sur K. Alors $d(L/K,|.|)=d(L/K',|.|).d(K'/K,|.|)$.

2) Soit $L \supset L' \supset K$ un corps intermédiaire avec L algébrique (fini) sur L'. Alors $\overline{(L',|.|)}/\overline{(K,|.|)}$ est un corps de fonctions à n variables et $d(L/K,|.|)=d(L/L',|.|).d(L'/K,|.|)$.

COROLLAIRE 4 : (Le théorème de Grauert et Remmert [13], p.119). Soit $(L/K,|.|)$ un corps de fonctions à n variables tel que K soit algébriquement clos, que $(K,|.|)$ soit complet et que $\overline{(L,|.|)}/\overline{(K,|.|)}$ soit un corps de fonctions à n variables. Alors on a $d(L/K,|.|)=1$.

COROLLAIRE 5 : Soient L/K un corps de fonctions à n variables, $n\geqslant 1$, $|.|$ une valeur absolue sur L telle que K soit complet et que $\overline{L}/\overline{K}$ soit un corps de fonctions à n variables ; $K^{alg\wedge}$ le complété de la clôture algébrique de K (pour l'unique valeur absolue $|.|_0$ de K^{alg} prolongeant la restriction de $|.|$ à K). Alors il existe un corps K_0 extension algébrique finie de K avec les propriétés suivantes : pour tout sous-corps fermé K' de $K^{alg\wedge}$ avec $K_0 \subset K'$, pour toute valeur absolue $|.|'$ de L^{alg} qui prolonge $|.|$, on a $K'L/K'$ qui est un corps de fonctions à n variables (où K'L désigne le compositum de $K' \subset K^{alg\wedge} \subset (L^{alg},|.|')^\wedge$ et de L dans $(L^{alg},|.|')^\wedge$), $\overline{(K'L,|.|')}/\overline{K'}$ est un corps de fonctions à n variables, $1=e(K'L/K',|.|')$, $1=d(K'L/K',|.|')$.

COROLLAIRE 6 : (Le théorème de Gruson [15], th.3, p.66). Soient $(K,|.|)$ un corps valué complet, $n\geqslant 1$ un entier. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) Le corps $(K,|.|)$ est stable,[1]

ii) Le corps $K(T_1,\dots,T_n)=K(T)$ des fractions rationnelles à n variables muni de la valeur absolue de Gauss associée à T et à $|.|$ est stable.

II. Genre et genre résiduel des corps de fonctions valués.

Nous rassemblons dans le paragraphe qui suit les

[1] voir [3] p.156

éléments de géométrie analytique rigide qui seront utilisés (pour plus de détails nous renvoyons à [2],[3],[10],[12]).

II.1. Réduction des espaces analytiques, analytification des variétés algébriques

Dans ce paragraphe K est un corps valué complet.

Soient A une K-algèbre affinoïde, $\|\cdot\|_{sp}$ la semi-norme spectrale sur A, $A^0=\{f\in A \mid \|f\|_{sp}\leqslant 1\}$, $A^{00}=\{f\in A \mid \|f\|_{sp}<1\}$, $\overline{A}=A^0/A^{00}$, alors $\overline{A}$ est une $\overline{K}$-algèbre de type fini réduite. L'application $r:X=\mathrm{Spm}A\to\overline{X}^c=\mathrm{Spm}\overline{A}$ définie par $r(\mathfrak{M})=s(\sqrt{\mathfrak{M}\cap A^0+A^{00}})$ (où $s:A^0\to\overline{A}$ est la surjection canonique) est surjective. On dit que $r:X\to\overline{X}^c$ est la réduction canonique de l'affinoïde X. Une partie U de X est appelée ouvert pur (ou formel) de X si $U=r^{-1}(W)$ où W est un ouvert (de Zariski) de $\overline{X}^c$; un ouvert formel est en particulier une réunion finie de parties rationnelles (donc affinoïdes) de X. Si W est un ouvert affine de $\overline{X}^c$, $U=r^{-1}(W)$ est une partie affinoïde de X et la réduction canonique $\overline{U}^c$ de U s'identifie canoniquement à W ([3], th.3.1,p.20). Un espace analytique formel $(X,\mathcal{U})$ est la donnée d'un espace topologique X, d'un recouvrement $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ de X par des ouverts affinoïdes U_i tel que pour tout $i,j\in I$ la partie $U_i\cap U_j$ est ouvert pur de U_i (les situations considérées dans la suite seront élémentaires en ce sens que le recouvrement sera fini et que $U_i\cap U_j$ sera affinoïde). A un espace formel $(X,\mathcal{U})$ on associe une réduction analytique. Les variétés algébriques affines réduites $\overline{U}_i^c$ se recollent le long de $\overline{U_i\cap U_j}^c$ en un schéma localement de type fini réduit sur $\overline{K}$, noté $\overline{(X,\mathcal{U})}$; les applications réductions $r_i:U_i\to\overline{U}_i^c$ se recollent en une application $r:X\to\overline{(X,\mathcal{U})}$ (si $\mathcal{U}$ est fini, $\overline{(X,\mathcal{U})}$ est donc une variété algébrique réduite). On dit que $r:X\to\overline{(X,\mathcal{U})}$ est la réduction analytique de X associée au recouvrement pur $\mathcal{U}$ (ou la réduction analytique de l'espace formel $(X,\mathcal{U})$).

Dans tout ce qui suit le mot variété algébrique sur un corps K signifie schéma de type fini sur K, séparé. Par point d'une variété on entendra toujours point fermé.

Pour analytifier une variété algébrique $(X,\mathcal{O}_X)$ sur K, on définit sur X une topologie de Grothendieck $\mathcal{G}$ et un faisceau structural $\mathcal{O}_{X^{an}}$ sur $(X,\mathcal{G})$. Une partie U de X est dite admissible si U=X ou s'il existe $Y\subset X$ un ouvert affine, $f_1,\dots f_r\in\mathcal{O}_X(Y)$ tels que la K-algèbre $\mathcal{O}_X(Y)$ soit engendrée par $f_1,\dots,f_r$ avec $U=\{x\in Y \mid |f_i(x)|\leqslant 1 \text{ pour } 1\leqslant i\leqslant r\}$. Soit $\varphi:K[T_1,\dots T_r]\to\mathcal{O}_X(Y)$ l'homomorphisme défini par $\varphi(T_i)=f_i$ et $\mathfrak{A}=\ker\varphi$, on pose alors $\mathcal{O}_{X^{an}}(U)=:K\langle T_1,\dots,T_r\rangle/\mathfrak{A}K\langle T_1,\dots,T_r\rangle$ où $K\langle T_1,\dots,T_r\rangle$ est l'algèbre des séries convergentes sur le polydisque unité, on peut montrer que $\mathcal{O}_{X^{an}}(U)$ ne dépend pas de la représentation de U par le choix des f_i. Si $V\subset U \subsetneq X$ sont admissibles, l'application restriction $\mathcal{O}_{X^{an}}(U)\to\mathcal{O}_{X^{an}}(V)$ est induite par les applications restriction du faisceau $\mathcal{O}_X$. Enfin on pose $\mathcal{O}_{X^{an}}(X)=\varprojlim \mathcal{O}_{X^{an}}(U)$ où la limite projective est prise sur tous les admissibles $U\neq X$. Soit U admissible, un recouvrement $\{U_i\}_{i\in I}$ de U est dit admissible si chaque U_i est admissible, si pour tout $V\neq X$ admissible, $V\subset U$, il existe une partie finie $F_{(V)}\subset I$ telle que $V\subset \bigcup_{i\in F(V)} U_i$.

Alors les admissibles et les recouvrements admissibles définissent sur X une topologie de Grothendieck $\mathcal{G}$. On montre alors que $\mathcal{O}_{X^{an}}$ est un faisceau sur $(X,\mathcal{G})$ et que le triplet $(X,\mathcal{G},\mathcal{O}_{X^{an}})$ est un espace analytique. C'est l'analytification de X et on le note X^{an}. Soient X une variété algébrique réduite, $Y\subset X$ un ouvert affine, $f_1,f_2,\dots,f_r\in\mathcal{O}_X(Y)$ avec $\mathcal{O}_X(Y)=K[f_1,\dots,f_r]$, $U=\{x\in Y\mid |f_i(x)|\leqslant 1$ pour $1\leqslant i\leqslant r\}$. Alors $\|\cdot\|_U$ défini sur $\mathcal{O}_X(Y)$ par $\|f\|_U=:\sup_{x\in U}|f(x)|$ est une norme et on a canoniquement $\mathcal{O}_{X^{an}}(U)\simeq(\mathcal{O}_X(Y),\|\cdot\|_U)^\wedge$ et $\|\cdot\|_U$ n'est autre chose que la norme spectrale de l'algèbre affinoïde $\mathcal{O}_{X^{an}}(U)$.

II.2. Réduction des courbes algébriques et corps de fonctions valués.

PROPOSITION 3 : Soient $(K,|\cdot|)$ un corps valué complet, $\mathcal{C}$ une courbe algébrique projective sur K, irréductible et non singulière, $L=\mathcal{R}(\mathcal{C})$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^{an}$ l'analytification de $\mathcal{C}$. Soient $T\in L$ transcendant sur K, $Z(T)=\{x\in\mathcal{C}\mid T\in\mathcal{O}_{\mathcal{C},x}\}$, $Z(T^{-1})=\{x\in\mathcal{C}\mid T^{-1}\in\mathcal{O}_{\mathcal{C},x}\}$, $U(T)=\{x\in Z(T)\mid |T(x)|\leqslant 1\}$, $U(T^{-1})=\{x\in Z(T^{-1})\mid |T^{-1}(x)|\leqslant 1\}$, $R=\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(Z(T))$, $S=\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(Z(T^{-1}))$, $\|\cdot\|^{sp}_{U(T)}$ (resp. $\|\cdot\|^{sp}_{U(1/T)}$) la norme définie sur R (resp. S) par $\|f\|^{sp}_{U(T)}=\max_{x\in U(T)}|f(x)|$ (resp. $\|f\|^{sp}_{U(1/T)}=\max_{x\in U(1/T)}|f(x)|$), $\overline{R}=\overline{(R,\|\cdot\|^{sp}_{U(1/T)})}$, $\overline{S}=\overline{(S,\|\cdot\|^{sp}_{U(1/T)})}$. Soient $\{|\cdot|_i, 1\leqslant i\leqslant s\}$ les valeurs absolues sur L qui prolongent la valeur absolue de Gauss $|\cdot|_g$ sur K(T) associée à T et à $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ la norme sur L définie par $\|f\|=\max_{1\leqslant i\leqslant s}|f|_i$. Alors on a les résultats qui suivent :

1) Soient $f\in R$ (resp. S), $a_0(T)+a_1(T)X+\dots+X^r$ (resp. $a_0(T^{-1})+a_1(T^{-1})X+\dots+X^r$) le polynôme irréductible de f sur K(T), donc sur K[T] (resp. $K[T^{-1}]$), alors $\|f\|=\max_{0\leqslant j<r}|a_j(T)|_g^{1/r-j}=\|f\|^{sp}_{U(T)}$ (resp. $\max_{0\leqslant j<r}|a_j(T^{-1})|_g^{1/r-j}=\|f\|^{sp}_{U(1/T)}$).

2) On a $\overline{L}=Fr(\overline{R})=Fr(\overline{S})=\overline{L}^1\times\overline{L}^2\times\dots\times\overline{L}^s$ où $\overline{L}^i=\overline{(L,|\cdot|_i)}$, $\overline{L}=\overline{(L,\|\cdot\|)}$.

3) Les parties $U(T),U(T^{-1})$ sont des parties affinoïdes admissibles de $\mathcal{C}^{an}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}}(U(T))=(R,\|\cdot\|^{sp}_{U(T)})^\wedge$, $\mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}}(U(T^{-1}))=(S,\|\cdot\|^{sp}_{U(1/T)})^\wedge$ et $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}}(U(T))}=\overline{R}$, $\overline{\mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}}(U(T^{-1}))}=\overline{S}$.

4) La famille $\mathcal{U}=\{U(T),U(T^{-1})\}$ est un recouvrement pur de

$\mathscr{C}^{an}$ et la réduction $r:\mathscr{C}^{an}\to(\overline{\mathscr{C}^{an},\mathscr{U}})=\mathscr{E}$ est une courbe algébrique, projective, réduite connexe. On a $r(U(T)\cap U(T^{-1}))$ qui est dense dans $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}(\mathscr{E})=\overline{L}=\overline{L}^1\times\overline{L}^2\times\ldots\times\overline{L}^s$.

5) Soient $1\leqslant i\leqslant s$, $\mathscr{E}_i$ l'unique composante irréductible de $\mathscr{E}$ telle que $\overline{L}^i=\mathscr{R}(\mathscr{E}_i)$, $W_i=D(\overline{f}_i)\subset r(U(T))\cap\mathscr{E}_i$ un ouvert principal non vide de $r(U(T))$, $\|\cdot\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}$ la norme spectrale sur l'ouvert affinoïde admissible $r^{-1}(W_i)$. Alors on a pour tout $f\in R$, $|f|_i=\|f\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}$, ainsi $\|\cdot\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}$ induit sur $L\subset$ $\subset Fr(\mathscr{O}_{\mathscr{C}^{an}}(r^{-1}(W_i)))$ une valeur absolue, c'est $|\cdot|_i$ (on a donc une bijection explicite entre les valeurs absolues $\{|\cdot|_i\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ et les composantes irréductibles de $\mathscr{E}$ (resp. les composantes irréductibles de $r(U(T))$).

Démonstration. 1) On peut consulter [10] p.56,12,55.

2) C'est une conséquence du théorème d'approximation des valeurs absolues.

3) L'algèbre R est la clôture intégrale de $K[T]$ dans L, c'est donc un $K[T]$-module de type fini, i.e. $R=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant t} K[T]e_i$. Chaque e_i est entier sur $K[T]$, quitte à changer e_i en λe_i avec $\lambda\in K$ et $|\lambda|$ assez petit, on peut supposer que e_i est entier sur $K^0[T]$. On a donc $R=K[T,e_1,\ldots,e_t]$ avec e_i entier sur $K^0[T]$. Il suit facilement de cela que $U(T)=\{x\in Z(T)\,\big|\,|T(x)|\leqslant 1\}=\{x\in Z(T)\,\big|\,|T(x)|\leqslant 1, |e_i(x)|\leqslant 1, 1\leqslant i\leqslant t\}$. Ce qui montre que $U(T)$ est admissible (affinoïde) de $\mathscr{C}^{an}$ (§II.1).

4) On a $U(T)\cap U(T^{-1})=\{x\in U(T)\,\big|\,|T(x)|=1\}$. Soient $r_1:U(T)\to$ $\to\overline{U(T)}^c$ la réduction canonique de l'affinoïde $U(T)$, $D(\overline{T})$ l'ouvert principal de $\overline{U(T)}^c$ associé à $\overline{T}$ (l'image de T dans $\overline{\mathscr{O}_{\mathscr{C}^{an}}(U(T))}$ alors on a $U(T)\cap U(T^{-1})=r_1^{-1}(D(\overline{T}))$; ce qui montre que $U(T)\cap U(T^{-1})$ est ouvert formel de $U(T)$. On a de même $U(T)\cap U(T^{-1})$ qui est un ouvert formel de $U(T^{-1})$. Comme $\mathscr{C}$ est non singulière, $\mathscr{U}=\{U(T), U(T^{-1})\}$ est un recouvrement de $\mathscr{C}$, donc c'est un recouvrement pur. Soit $r:\mathscr{C}^{an}\to(\overline{\mathscr{C}^{an},\mathscr{U}})=\mathscr{E}$ la réduction de $\mathscr{C}^{an}$ selon le recouvrement pur $\mathscr{U}$. Il suit de GA GA ([35],[17]) que $\mathscr{C}^{an}$ est connexe et donc $\mathscr{E}$ est connexe [10] p.318. Enfin $\mathscr{C}$ projectif implique $\mathscr{E}$ projectif ([11], cor.1 th.5, § 2.5.); on donnera à la prop.4 § II.4. une démonstration directe de cela. De la formule (1) $\|P(T)f\|=|P(T)|_g\cdot\|f\|$ pour tout $P(T)\in K(T)$,

$f \in L$, il suit que $\overline{T}(\mathrm{resp}.\overline{T}^{-1})$ ne divise pas zéro dans $\overline{R}(\mathrm{resp}.\overline{S})$. Ainsi $r(U(T) \cap U(T^{-1}))$ est ouvert dense de $r(U(T))(\mathrm{resp}.r(U(T^{-1})))$ donc est ouvert dense de $\mathcal{E}$. Il suit de cela que $\mathcal{R}(\mathcal{E})=\mathrm{Fr}(\overline{R})=\mathrm{Fr}(\overline{S})=\overline{L}^1\times\ldots\times\overline{L}^s$.

5) Soient $1\leqslant i\leqslant s$, $\mathcal{E}_i$ l'unique composante irréductible de $\mathcal{E}$ telle que $\overline{L}^i=\mathcal{R}(\mathcal{E}_i)$, $W_i=D(\overline{f}_i) \subset r(U(T)) \cap \mathcal{E}_i$ un ouvert principal non vide de $r(U(T))$, $\|\cdot\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}$ la norme spectrale sur l'affinoïde admissible $r^{-1}(W_i)$: ainsi $\overline{f}_{i\,|\,r(U(T))\cap\mathcal{E}_i}\neq 0$ et $\overline{f}_{i\,|\,r(U(T))\cap\mathcal{E}_j}=0$ pour $j\neq i$, ce qui veut dire que (2) $|f_i|_i=1$, $|f_i|_j<1$ pour $j\neq i$. Comme W_i est irréductible on a $\|uv\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}=\|u\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}\|v\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}$ pour tout u, $v \in R$, ainsi $\|\cdot\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}$ induit sur $L \subset \mathrm{Fr}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}an}(r^{-1}(W_i)))$ une valeur absolue notée $|\cdot|_0$. La formule (1) montre que pour $P(T) \in K[T]$ on a $\|P(T).f_i^n\|=|P(T)|_g\|f_i^n\|$ et donc que $\overline{T}_{|W_i}$ est transcendant sur $\overline{K}$. Ainsi on a $\|\Sigma a_iT^i\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}=$ $=\max|a_i|=|\Sigma\, a_iT^i|_g$. Ce qui montre que $|\cdot|_0$ prolonge $|\cdot|_g$; ainsi il existe j avec $|\cdot|_0=|\cdot|_j$. Comme on a $|f_i|_0=1$ il suit de (2) que $|\cdot|_0=|\cdot|_i$.

II.3. <u>Sur les prolongements de la valeur absolue de Gauss</u>

Le théorème qui suit est un résultat clé pour montrer le théorème 4 § II.5.

<u>THEORME 3. Soient L/K un corps de fonctions d'une variable $\{|\cdot|_i\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ des valeurs absolues indépendantes sur L qui coïncident sur K en une valeur absolue notée $|\cdot|$. On suppose que $(K,|\cdot|)$ est complet et que $(\overline{L,|\cdot|_i})/(\overline{K,|\cdot|})$ est un corps de fonctions d'une variable pour $1\leqslant i\leqslant s$. Alors il existe $T \in L$ transcendant sur K tel que $\{|\cdot|_i\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ soient exactement les prolongements à L de la valeur absolue de Gauss $|\cdot|_g$ sur $K(T)$ associée à T et à $|\cdot|$.</u>

<u>Démonstration</u>. Il existe $T_i \in L$ tel que $|T_i|_i=1$ et que l'image résiduelle de T_i dans $\overline{L}^i=(\overline{L,|\cdot|_i})$ soit transcendant sur $\overline{K}$. Par le théorème d'approximation des valeurs absolues il existe $T' \in L$ avec $|T'-T_i|_i<1$ pour $1\leqslant i\leqslant s$; il suit de cela que T' est transcendant sur K et que la restriction à $K(T')$ de $|\cdot|_i$ est la valeur absolue de Gauss $|\cdot|_g$ associée à T' et $|\cdot|$. Soient $\{|\cdot|_i\}_{1\leqslant i\leqslant s+s'}$ les prolongements à L de $|\cdot|_g$, où $|\cdot|_i$ pour $i\leqslant s$ sont les valeurs absolues données

par l'hypothèse du théorème. Si $s'=0$, le théorème est montré. Supposons $s'>0$. Soient $\mathscr{C}$ l'unique courbe projective sur K non singulière (connexe) dont L est le corps des fonctions rationnelles ([14],chap.II,7.4.18), $\mathscr{U}'=\{U(T'),U(T'^{-1})\}$ le recouvrement pur de $\mathscr{C}^{an}$ défini selon prop.$3_{4)}$,§ II.2, $r':\mathscr{C}^{an}\to(\overline{\mathscr{C}^{an},\mathscr{U}'})=\mathscr{E}'$ la réduction associée, $\mathscr{E}'_i$ la composante irréductible qui correspond à $|.|_i$ selon prop. $3_{5)}$). Soit V un ouvert principal de $r'(U(T'))$ tel que $V\cap\mathscr{E}'_i\neq\emptyset$ pour $1\leqslant i\leqslant s$ et $V\cap\mathscr{E}'_i=\emptyset$ pour $i>s$. Ainsi $r'^{-1}(V)$ est un admissible affinoïde de $\mathscr{C}^{an}$ et $r'_{|r'^{-1}(V)}:r'^{-1}(V)\to V$ est la réduction canonique de $r'^{-1}(V)$ [3] th. 3.1. p.20, [10] p.306 et cor. p.311. Il existe $T\in L=\mathscr{R}(\mathscr{C})$ tel que $r'^{-1}(V)=$ $=\{x\in\mathscr{C}|T\in\mathscr{O}_{\mathscr{C},x},|T(x)|\leqslant1\}$, i.e. $r'^{-1}(V)=U(T)$ selon la notation de la proposition 3 § II.2. (c'est le théorème ci-après). Soit $r:\mathscr{C}^{an}\to(\overline{\mathscr{C}^{an},\mathscr{U}})=\mathscr{E}$ la réduction selon le recouvrement par $\mathscr{U}=\{U(T),U(T^{-1})\}$ (prop. $3_{4)}$) ; ainsi r et r' coïncident sur U(T) avec la réduction canonique. Soient $1\leqslant i\leqslant s$, $W_i\subset$ $\subset V\cap\mathscr{E}'_i$ un ouvert principal non vide de $r(U(T'))$ (donc de V), alors la norme spectrale $\|.\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}$ induit sur L une unique valeur absolue, c'est $|.|_i$ (prop. $3_{5)}$,appliquée à T'). Comme $\{V\cap\mathscr{E}'_i\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ sont exactement les composantes irréductibles de V, les normes spectrales $\{\|.\|^{sp}_{r^{-1}(W_i)}\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ induisent exactement les valeurs absolues de L qui prolongent la valeur absolue de Gauss sur K(T) associée à $|.|$ et à T (prop.$3_{5)}$,appliquée à T). Ainsi le théorème est montré.

<u>THEOREME</u> : ([11] th.1). <u>Soient K un corps valué complet</u>, X <u>une variété algébrique, projective équidimensionnelle de dimension</u> 1, X^{an} <u>l'analytification de</u> X et U <u>une partie affinoïde de</u> X^{an}. <u>Alors il existe</u> $f\in\mathscr{R}(X)$ <u>une fonction rationnelle sur</u> X, <u>telle que</u> $U=\{x\in X|\ f\in\mathscr{O}_{X,x}$ <u>et</u> $|f(x)|\leqslant1\}$.

<u>Remarque</u>. Lorsque le corps $(K,|.|)$ n'est plus complet le théorème 3 peut être faux. De fait Polzin [31] a montré que la validité du théorème 3 est équivalente à une propriété sur la réduction analytique de la courbe projective non singulière $\mathscr{C}_{LK^\wedge}$ dont $LK^\wedge$ est le corps des fonctions rationnelles, elle est aussi équivalente à la validité du problème de Skolem sur la courbe algébrique projective non singulière $\mathscr{C}_L$ sur K dont L est le corps des fonctions rationnelles selon Cantor, Roquette, Rumely [6],[33],[34].

Voir aussi [21] prop. 4.1. p.88, prop. 4.5. p. 102 et [25].

II.4. Réduction analytique et réduction algébrique des courbes.

PROPOSITION 4. Soient $(K,|\cdot|)$ un corps valué complet, L/K un corps de fonctions d'une variable, $T \in L$ transcendant sur K, $\{|\cdot|_i\}_{1\leq i\leq s}$ les valeurs absolues de L qui prolongent la valeur absolue de Gauss $|\cdot|_g$ sur $K(T)$ associée à $|\cdot|$ et à T. Soient D le diviseur des pôles de T dans L, $L(nD)=\{f\in L \mid (f)+nD\geq 0\}$, pour tout $n\geq 0$ où (f) désigne le diviseur associé à f, $A=\bigoplus_{n\geq 0} L(nD)$ la K-algèbre graduée dont l'addition et la multiplication sont induites par celles de L. Alors $\mathrm{Proj}A$ est isomorphe à $\mathscr{C}$, l'unique courbe sur K, projective, non singulière (connexe) telle que $\mathscr{R}(\mathscr{C})=L$. Soient $\|\cdot\|$ la norme sur L définie par $\|f\|=\max_{1\leq i\leq s}|f|_i$, $\overline{L(nD)}=(\overline{L(nD),\|\cdot\|})$, $\overline{A}=\bigoplus_{n\geq 0}\overline{L(nD)}$, c'est une $\overline{K}$-algèbre graduée pour la structure induite par celle de A. Soient x_0, x_1 les éléments de degré 1 (i.e. de $L(1.D)$ tels que $x_0=1$, $x_1=T$ dans L et $\overline{x_0}$, $\overline{x_1}$ leurs images dans $\overline{A}$. Soient $\mathscr{U}=\{U(T),U(T^{-1})\}$ le recouvrement pur de $\mathscr{C}^{an}$ et $r:\mathscr{C}^{an}\to(\overline{\mathscr{C}^{an},\mathscr{U}})=\mathscr{E}$ la réduction définie par la proposition $3_{4)}$, § II.3. Alors $\mathrm{Proj}\overline{A}$ est isomorphe à $\mathscr{E}$, plus précisément on a $r(U(T))\simeq D_+(\overline{x_0})$ et $r(U(T^{-1}))\simeq D_+(\overline{x_1})$.

Démonstration : on a $R=\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(Z(T))=\bigcup_{n\geq 0} L(nD)$, $S=\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(Z(T^{-1}))=\bigcup_{n\geq 0} T^{-n}L(nD)$, $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(Z(T)\cap Z(T^{-1}))=R[T^{-1}]=S[T]$, ainsi $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(Z(T))\simeq A_{(x_0)}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(Z(T^{-1}))\simeq A_{(x_1)}$ et $\mathscr{O}_{\mathscr{C}}(Z(T)\cap Z(T^{-1}))\simeq A_{(x_0x_1)}$, et puisque $\mathrm{Proj}A=D_+(x_0)\cup D_+(x_1)$ il suit que $\mathrm{Proj}A\simeq\mathscr{C}$. Soient $n\geq 1$, $g\in L(nD)$ avec $\|g\|\leq 1$, (1) $a_0(T)+a_1(T)X+\ldots+X^r$ le polynôme irréductible de g sur $K(T)$ donc sur $K[T]$. Alors $|a_j(T)|_g\leq 1$ et $\deg(a_j)\leq n(r-j)$ (prop. $3_{1)}$, § II.2). Posons $A_j(x_0,x_1)=x_0^{n(r-j)}a_j(x_1/x_0)$, on a $A_j(x_0,x_1)\in L(n(r-j)D,\|\cdot\|)^0$. Il suit de (1) que $g^r+A_{r-1}(x_0,x_1)g^{r-1}+\ldots+A_0(x_0,x_1)=0$; ce qui montre que $\overline{g}^r\in\overline{A}\,\overline{x_0}+\overline{A}\,\overline{x_1}$. Ainsi $\mathrm{Proj}\overline{A}=D_+(\overline{x_0})\cup D_+(\overline{x_1})$. Considérons le diagramme suivant où les flèches verticales sont les homomorphismes canoniques de localisation, α et β sont induites par $\alpha(g)=\overline{g}/\overline{x_0}^n$ si $g\in(L(nD),\|\cdot\|)^0$, $\beta(h)=\overline{h}/\overline{x_1}^n$

$$\begin{tikzcd}
R^0=(R,\|.\|)^0 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \overline{A}_{(\overline{x}_0)} \arrow[d] \\
R^0[T^{-1}]=S^0[T] \arrow[r, "\gamma"] & \overline{A}_{(\overline{x}_0\overline{x}_1)} \\
S^0=(S,\|.\|)^0 \arrow[r, "\beta"] \arrow[u] & \overline{A}_{(\overline{x}_1)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

si $h\in(T^{-n}L(nD),\|.\|)^0$. Alors α et β induisent sur $R^0[T^{-1}]=S^0[T]$ le même homomorphisme γ ; ainsi le diagramme est commutatif. Sachant que $\|T^m h\|=\|h\|$ pour tout $h\in L$, on montre facilement que α (resp. β, resp. γ) induit un isomorphisme $\overline{\alpha}:\overline{R}\longrightarrow A_{(\overline{x}_0)}$ (resp. $\overline{\beta}:\overline{S}\longrightarrow A_{(\overline{x}_1)}$, resp. $\overline{\gamma}:\overline{R}[T^{-1}]=\overline{S}[T]\longrightarrow \longrightarrow\overline{A}_{(\overline{x}_0\overline{x}_1)}$). Il suit alors de la proposition $3_{3)}$, § II.2. que $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, induisent un isomorphisme de $\mathrm{Proj}\overline{A}$ sur $\mathcal{E}$.

II.5. La normalisation de la réduction

PROPOSITION 5 : Les hypothèses sont celles de la proposition 4 § II.4. Soient $\mathcal{E}_i$, $1\leqslant i\leqslant s$, les composantes irréductibles de $\mathcal{E}$, $\overline{L}=(\overline{L,\|.\|})$, $\overline{L}^i=(\overline{L,|.|_i})$, $\overline{\varepsilon}_i:\overline{L}=\overline{L}^1\times\ldots\times\overline{L}^s\to\overline{L}^i$ la projection canonique, $B_i=\bigoplus_{n\geqslant 0}\overline{\varepsilon}_i\,\overline{L(nD)}$, l'algèbre graduée que l'on note (abusivement) $\overline{\varepsilon}_i\overline{A}$. Alors on a $\mathcal{E}_i\simeq\mathrm{Proj}\overline{\varepsilon}_i\overline{A}$ où $\mathcal{E}_i$ est muni de la structure réduite induite. Ainsi l'inclusion $\overline{A}\subset\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant s}\overline{\varepsilon}_i\overline{A}$ induit un morphisme $\alpha:\tilde{\mathcal{E}}\overset{\mathrm{def}}{=}(\coprod_{1\leqslant i\leqslant s}\mathcal{E}_i)\longrightarrow\mathcal{E}$. Soient $\overline{D}_i$ le diviseur des pôles de $\overline{T}$ dans $\overline{L}^i$, $C_i=\bigoplus_{n\geqslant 0}L(n\overline{D}_i)$ la $\overline{K}$-algèbre graduée où $L(n\overline{D}_i)=\{h\in\overline{L}^i \mid (h)+n\overline{D}_i\geqslant 0\}$. Alors on a $\mathcal{E}'_i=\mathrm{Proj}C_i$ où $\mathcal{E}'_i$ désigne la normalisation de $\mathcal{E}_i$. Les inclusions $\overline{\varepsilon}_i\overline{A}\subset C_i$ induisent les morphismes de normalisation $\beta_i:\mathcal{E}'_i\longrightarrow\mathcal{E}_i$, donc un morphisme $\beta:\mathcal{E}'=\coprod_{1\leqslant i\leqslant s}\mathcal{E}'_i\longrightarrow\coprod_{1\leqslant i\leqslant s}\mathcal{E}_i$. Par suite le morphisme $\gamma=\alpha\circ\beta:\mathcal{E}'\longrightarrow\mathcal{E}$ est le morphisme de normalisation de $\mathcal{E}$. On en déduit que le faisceau $\gamma_*\mathcal{O}_{\mathcal{E}'}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est cohérent et gratte-ciel et donc que le faisceau $\alpha_*\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{E}}}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est un faisceau gratte-ciel, cohérent sur $\mathcal{E}$.

Démonstration : Puisque $\overline{L}=\mathrm{Fr}(\overline{A}_{(\overline{x}_0)})=\mathrm{Fr}(\overline{A}_{(\overline{x}_1)})$ (prop. $3_{2)}$, $3_{4)}$ § II.2 et 4 § II.4) il suit que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_i}(D_+(\overline{x}_0)\cap\mathcal{E}_i)=\overline{\varepsilon}_i(\overline{A}_{(\overline{x}_0)})$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_i}(D_+(\overline{x}_1)\cap\mathcal{E}_i)=\overline{\varepsilon}_i(\overline{A}_{(\overline{x}_1)})$ dans $\overline{L}$. On a aussi $\overline{\varepsilon}_i(\overline{A}_{(\overline{x}_0)})=(\overline{\varepsilon}_i\overline{A})_{(\overline{x}_0)}$, $\overline{\varepsilon}_i(\overline{A}_{(\overline{x}_1)})=(\overline{\varepsilon}_i\overline{A})_{(\overline{x}_1)}$ en notant $\overline{x}_0$ (resp. $\overline{x}_1$) au lieu de $\overline{\varepsilon}_i x_0$ (resp. $\overline{\varepsilon}_i x_1$). Ainsi $\mathcal{E}\simeq\mathrm{Proj}(\overline{\varepsilon}_i\overline{A})$. On a $C_{i\,(\overline{x}_0)}=\bigcup_{n\geqslant 0}L(n\overline{D}_i)$ (resp. $C_{i\,(\overline{x}_1)}=\bigcup_{n\geqslant 0}(\overline{T}^{-n}L(n\overline{D}_i))$ où $\overline{x}_0$, $\overline{x}_1$ désignent 1 et $\overline{T}$ dans $L(\overline{D}_i)$. Ainsi $C_{i\,(\overline{x}_0)}$ (resp. $C_{i\,(\overline{x}_1)}$) est la clôture intégrale dans $\overline{L}^i$ de $\overline{K}[T]$ (resp. $\overline{K}[T^{-1}]$). De plus $(\overline{\varepsilon}_i\overline{A})_{(\overline{x}_0)}$ (resp. $\overline{\varepsilon}_i\overline{A}_{(\overline{x}_1)}$) est entier sur $\overline{K}[T]$ (resp. $\overline{K}[T^{-1}]$) et $\overline{L}^i=Fr((\overline{\varepsilon}_i\overline{A})_{(\overline{x}_0)})=Fr((\overline{\varepsilon}_i\overline{A})_{(\overline{x}_1)})=Fr(C_{i\,(\overline{x}_0)})=$ $=Fr(C_{i\,(\overline{x}_1)})$. Il suit de cela que $\mathrm{Proj}\,C_i$ est la normalisation de $\mathrm{Proj}(\overline{\varepsilon}_i\overline{A})$.

II.6. Généralisation des formules de Mathieu

THEOREME 4 : Soient L/K un corps de fonctions d'une variable de genre (1) g dont K est le corps des constantes. Soient $\{|\cdot|_i\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ des valeurs absolues sur L distinctes qui coïncident sur K en une valeur absolue $|\cdot|$; on suppose que $(\overline{L,|\cdot|_i})/(\overline{K,|\cdot|})$ est un corps de fonctions pour $1\leqslant i\leqslant s$. Soient $e_i=e(L/K,|\cdot|_i)$ l'indice de ramification, $d_i=d(L/K,|\cdot|_i)$ le défaut de $|\cdot|_i$ (cor.1 § I.3), g_i le genre de $(\overline{L,|\cdot|_i})/(\overline{K,|\cdot|})$ et r_i le degré sur $(\overline{K,|\cdot|})$ du corps des constantes de $(\overline{L,|\cdot|_i})/(\overline{K,|\cdot|})$. Alors on a la relation

$$g-1\geqslant s-1+\sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i d_i r_i (g_i-1).$$

Démonstration. A) On suppose $(K,|\cdot|)$ complet. Soit $\|\cdot\|$ la norme sur L définie par $\|f\|=\max_{1\leqslant i\leqslant s}|f|_i$.

α) Il existe $T\in L$ transcendant sur K avec les propriétés. $\alpha_1)$ Les valeurs absolues $\{|\cdot|_i\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ sont exactement les prolongements à L de la valeur absolue de Gauss sur $K(T)$ associée à $|\cdot|$ et à T. $\alpha_2)$ Soient D le diviseur des pôles de T dans L, $L(nD)=\{f\in L/(f)+nD\geqslant 0\}$ et $\overline{A}=\bigoplus_{n\geqslant 0}(\overline{L(nD),\|\cdot\|})$. Alors la $\overline{K}$-algèbre graduée $\overline{A}$ est engendrée par $(\overline{L(D),\|\cdot\|})$, i.e . les élements de degré 1.

$\alpha_1)$ est le théorème 3 § II.3. Remarquons que pour tout $m\geqslant 1$, l'élément T^m satisfait aussi $\alpha_1)$. Montrons qu'il existe $m\geqslant 1$ tel que T^m satisfasse $\alpha_2)$. Notons $\overline{L(nD)}=(\overline{L(nD),\|\cdot\|})$, T l'image résiduelle de T dans $\overline{L}=(\overline{L,\|\cdot\|})$. Puisque $\overline{R}=$ $=\bigcup_{n\geqslant 0}\overline{L(nD)}$ est entier sur $\overline{K}[T]$ (prop.4 § II.4 et $3_1)$ § II.2) $\overline{R}=\sum_{1\leqslant i\leqslant r}\overline{K}[T]e_i$. Soit m_0 tel que $e_i\in\overline{L(m_0D)}$ pour $1\leqslant i\leqslant r$. Soit $\overline{D}_i$ le diviseur des pôles de T dans $\overline{L}^i$ et $F=\{u\in\prod_{1\leqslant i\leqslant s}L(m_0\overline{D}_i)\,|$ $|$ il existe $m\geqslant 0$ avec $T^m u\in\overline{L((m+m_0)D)}\}$. Puisque F est un $\overline{K}$-espace vectoriel de dimension finie il existe (1) $m_1\geqslant 0$ tel

(1) suivant [7].

que $T^{m_1}F \subset \overline{L((m_1+m_0)D)}$. Soient $m=m_0+m_1$, $\overline{A}'=\bigoplus_{n\geq 0}\overline{L(n.mD)}$, montrons que $\overline{A}'$ est une $\overline{K}$-algèbre graduée engendrée par $\overline{L(mD)}$. Soit $f\in\overline{L(nmD)}$ avec $n>1$, alors f s'écrit $f= =\sum_{1\leq i\leq r} P_i(T)e_i+T^{nm-m_0}g$ avec $\deg P_i<nm-m_0$, $g=\sum_{1\leq i\leq r} R_i(T)e_i$ et $R_i\in\overline{K}[T]$. On a donc $T^{nm-m_0}g\in\overline{L(nmD)}$ et puisque $\overline{L(nmD)}\subset\prod_{1\leq i\leq s} L(nm\overline{D}_i)$ prop. $3_{1)}$ § II.2. et [3] lemme 6 p. 170, que g est entier sur $\overline{K}[T]$ il suit que $g\in \in\prod_{1\leq i\leq s} L(m_0\overline{D}_i)$; ainsi (1) montre que $T^{m_1}g\in\overline{L(mD)}$. Par suite $T^{nm-m_0}g=T^{(n-1)m}.(T^{m_1}g)$ est produit de n éléments de degré 1. Reste à montrer que ceci vaut aussi pour T^je_i si $j<nm-m_0$. On peut écrire $j=am+r$ avec $a<n-1, 0\leq r<m$ et $0\leq r<m_1$ si $a=n-1$. Dans le premier cas on a $T^je_i=(T^m)^a\,T^re_i$ et $T^je_i= =(T^m)^{n-1}(T^re_i)$ dans le second. Ainsi T^m satisfait $\alpha_{1)}$ et $\alpha_{2)}$.

β) <u>Soient</u> $T\in L$ <u>satisfaisant</u> α), $\overline{\varepsilon}_i:\overline{L}\to\overline{L}^i$ <u>la projection canonique</u>. <u>Alors il existe</u> n_0 <u>tel que pour tout entier</u> $n\geq n_0$ $\dim_{\overline{K}}\bigoplus_{1\leq i\leq s}\overline{\varepsilon}_i\,\overline{L(nD)}/\overline{L(nD)}\geq s-1$. Par la proposition 5.II.5 on a $\tilde{\mathscr{E}}=\coprod_{1\leq i\leq s}\mathscr{E}_i=\mathrm{Proj}(\bigoplus_{1\leq i\leq s}\overline{\varepsilon}_i\overline{A})$ où $\overline{A}=\bigoplus_{n\geq 0}\overline{L(nD)}$ et $\overline{\varepsilon}_i\overline{A}= =\bigoplus_{n\geq 0}\overline{\varepsilon}_i\overline{L(nD)}$; l'inclusion $\overline{A}\subset\bigoplus_{1\leq i\leq s}\overline{\varepsilon}_i\overline{A}$ induit le morphisme $\alpha:\tilde{\mathscr{E}}\to\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}\overset{\text{déf}}{=}\alpha_*\mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{E}}}/\mathscr{O}_{\mathscr{E}}=[\bigoplus_{1\leq i\leq s}\overline{\varepsilon}_i\overline{A}/\overline{A}]^{\sim}$ ([16] déf. p. 116) est un faisceau cohérent, gratte-ciel sur $\mathscr{E}$. De la suite exacte (1) $0\to\mathscr{O}_{\mathscr{E}}\to\alpha_*\mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{E}}}\to\mathscr{F}\to 0$, on déduit($\alpha$ est affine) (2) $\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})+\chi_{\overline{K}}(\mathscr{F})= \chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{E}}})$ ($\chi_{\overline{K}}(.)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré). Comme $\overline{A}$ et donc $\bigoplus_{1\leq i\leq s}\overline{\varepsilon}_i\overline{A}$ est engendré par les éléments de degré 1 il existe $a,b\in\mathbb{N}$, tels que pour $n>>0$ on ait ([14] chap.III th.2.5.3 et cor. 2.5.4) $\dim_{\overline{K}}\overline{L(nD)}=an+\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, $\dim_{\overline{K}}(\bigoplus_{1\leq i\leq s}\overline{\varepsilon}_i\overline{L(nD)})=bn+\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{E}}})$, ainsi pour $n>>0$, on a $\dim_{\overline{K}}\bigoplus_{1\leq i\leq s}\overline{\varepsilon}_i\overline{L(nD)}/\overline{L(nD)}=(b-a)n+\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{E}}})-\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$, il suit que $b\geq a$ et avec (2) que $\dim_{\overline{K}}\bigoplus_{1\leq i\leq s}\overline{\varepsilon}_i\overline{L(nD)}/\overline{L(nD)}\geq\chi_{\overline{K}}(\mathscr{F})$. Puisque $\chi_{\overline{K}}(\mathscr{F})=\dim_{\overline{K}}H^0(\mathscr{E},\mathscr{F})$ ($\mathscr{F}$ est gratte-ciel) et que la suite $0\to \to H^0(\mathscr{E},\mathscr{O}_{\mathscr{E}})\to H^0(\tilde{\mathscr{E}},\mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{E}}})\to H^0(\mathscr{E},\mathscr{F})$ est exacte (cf. (1)) on déduit que $\chi_{\overline{K}}(\mathscr{F})\geq\dim_{\overline{K}} H^0(\tilde{\mathscr{E}},\mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{E}}})/H^0(\mathscr{E},\mathscr{O}_{\mathscr{E}})$. Or $H^0(\tilde{\mathscr{E}},\mathscr{O}_{\tilde{\mathscr{E}}})=\prod_{1\leq i\leq s}\mathscr{O}_{\mathscr{E}_i}(\mathscr{E}_i)$ et $H^0(\mathscr{E},\mathscr{O}_{\mathscr{E}})=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\mathscr{E})$. Comme $\mathscr{E}$ est projectif connexe et réduit (prop. $3_{4)}$, § II.2), $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}(\mathscr{E})=F$ est un corps fini sur $\overline{K}$, de même $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_i}(\mathcal{E}_i)=F_i$ est un corps fini sur $\bar{K}$ et comme $F \hookrightarrow \prod_{1\leq i\leq s} F_i$ est une injection on a $F \subset F_i$ pour $1\leq i\leq s$ et donc $\dim_{\bar{K}} \prod_{1\leq i\leq s} F_i /F \geq s-1$ ce qui montre β).

γ) Soient toujours T satisfaisant α), $\nu \in \bigcup_{1\leq i\leq s} |L^{\times}|_i$, alors $\bar{A}^{\nu} \overset{\text{déf}}{=} \bigoplus_{n\geq 0} (\overline{L(nD)}, \|\cdot\|)^{\nu}$ est un $\bar{A}= \bigoplus_{n\geq 0} \overline{L(nD)}$ module gradué (§ 0) et le faisceau $\mathcal{L}_{\nu} \overset{\text{déf}}{=} (\bar{A}^{\nu})^{\sim}$ ([16]déf. p.116) est cohérent sur $\mathcal{E}$=Proj$\bar{A}$ plus précisément $\bar{A}^{\nu}$ s'identifie à un sous-$\bar{A}$-module gradué de $\bar{A}(n_0)$ ([16], déf. p.50). L'action de $\bar{A}$ sur $\bar{A}^{\nu}$ est ainsi définie : si $f \in L(nD)$ resp. $g \in L(mD)$) avec $\|f\|\leq 1$ (resp. $\|g\|\leq \nu$) alors $\|fg\|\leq \nu$ et $f.g \in L((n+m)D)$, on pose alors $\bar{f}.\bar{g}^{\nu}=(\overline{f.g})^{\nu}$. Soit $\nu \in \bigcup_{1\leq i\leq s} |L^{\times}|_i$ avec $0<\nu\leq 1$, il existe $f_{\nu} \in L$ entier sur K[T] avec $|f_{\nu}|_i=1/\nu$ si $\nu \in |L^{\times}|_i$ et $|f_{\nu}|_i=1$ si $\nu \notin |L^{\times}|_i$ pour $1\leq i\leq s$ (théorème d'approximation des valeurs absolues quitte à multiplier par un élément de K[T]). Soit n_0 tel que $f_{\nu} \in L(n_0D)$, l'application $f \longrightarrow ff_{\nu}$ de L dans L induit une application injective de $\bar{L}^{\nu}$ dans $\bar{L}$ et donc une injection de $\bar{A}$-module gradué de $\bar{A}^{\nu}$ dans $\bar{A}(n_0)$ ([16] déf. p.50 du "twisted-module"). Comme $\bar{A}$ est noethérien, $\bar{A}(n_0)$ de type fini, on a $\bar{A}^{\nu}$ qui est de type fini, ainsi $(\bar{A}^{\nu})^{\sim}$ est cohérent sur $\mathcal{E}$=Proj$\bar{A}$([16] prop. 5.11, p. 116).

δ) Soient T satisfaisant α), $\mathcal{E}$=Proj$\bar{A}$ ($\bar{A}$ défini en α)), $\mathcal{E}_i$ la composante irréductible de $\mathcal{E}$ associée à $|\cdot|_i$ (prop.3_5) II.2 et prop. 4. II.4), $\mathcal{V}$ un système de représentants de $\bigcup_{1\leq i\leq s} |L^{\times}|_i$ mod.$|K^{\times}|$, $\mathcal{L}_{\nu}$ le faisceau cohérent sur $\mathcal{E}$ associé à $\nu \in \mathcal{V}$ selon γ), $\mathcal{C}$ l'unique courbe non singulière sur K telle que $\mathcal{R}(\mathcal{C})=$ L et $d_i=d(L/K,|\cdot|_i)$ alors on a : $\chi_K(\mathcal{O}_{\mathcal{C}})+s-1\leq \sum_{1\leq i\leq s} d_i \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \chi_{\bar{K}}(\mathcal{L}_{\nu|\mathcal{E}_i})$ où $\chi_{\cdot}(\cdot)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré. Soient $\bar{\varepsilon}_i^{\nu}:\bar{L}^{\nu}\rightarrow(\overline{L,|\cdot|_i})^{\nu}$ la projection canonique. On montre facilement que $(\bigoplus_{n\geq 0} \overline{L(nD)}^{\nu}) \otimes_{\bar{A}} \bar{\varepsilon}_i\bar{A} \simeq \bigoplus_{n\geq 0} \bar{\varepsilon}_i^{\nu}\ \overline{L(nD)}^{\nu}$, que l'on notera abusivement $\bar{\varepsilon}_i^{\nu}\ \bar{A}^{\nu}$. Comme $\mathcal{E}_i$=Proj($\bar{\varepsilon}_i\bar{A}$) (prop.5 II.5) il suit que $\mathcal{L}_{\nu|\mathcal{E}_i} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{L}_{\nu} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_i} = (\bar{\varepsilon}_i^{\nu}\ \bar{A}^{\nu})^{\sim}$. Comme $\bar{A}$ (donc aussi $\bar{\varepsilon}_i\bar{A}$) est engendré par les éléments de degré 1, comme $\mathcal{L}_{\nu}=$

$=(\overline{A}^{\nu})^{\sim}$ est cohérent (donc aussi $\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i}=(\overline{\varepsilon}_i{}^{\nu}A^{\nu})^{\sim})$, il existe $a_{\nu,i}\in\mathbb{N}$ ([14] chap.III, th. 2.5.3, cor. 2.5.4.) tels que pour $n>>0$ on ait (1) $\dim_{\overline{K}}\overline{\varepsilon}_i^{\nu}\overline{L(nD)}^{\nu}=a_{\nu,i}n+\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i})$ et (Riemann-Roch) (2) $\dim_K L(nD)=n\deg D+\chi_K(\mathscr{O}_{\mathscr{C}})$. Utilisant (1), (2)(3), β) l'inégalité fondamentale cor.2 § I.3 devient (4) $n\deg D+\chi(\mathscr{O}_{\mathscr{C}})+s-1\leqslant(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\sum\limits_{\nu\in\mathscr{V}}d_i a_{\nu,i})n+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\sum\limits_{\nu\in\mathscr{V}}d_i\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i})$.
Par γ) on a $\overline{L(nD)}^{\nu}\hookrightarrow\overline{L((n+n_0)D)}$ et si $\overline{D}_i$ est le diviseur des pôles de T dans $\overline{L}^i$ on a $\overline{L((n+n_0)D}\subset$ $\subset\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant s}L((n+n_0)\overline{D}_i)$ (voir α)), ainsi on a une injection $\overline{\varepsilon}_i^{\nu}\overline{L(nD)}^{\nu}\hookrightarrow L((n+n_0)\overline{D}_i)$. En utilisant Riemann-Roch dans $\overline{L}^i$, on a pour $n>>0$, (5) $\dim_{\overline{K}}\overline{\varepsilon}_i^{\nu}\overline{L(nD)}^{\nu}\leqslant(n+n_0)\deg\overline{D}_i+\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_i})$ ($\mathscr{E}'_i$=normalisation de $\mathscr{E}_i$). Soit $1\leqslant i\leqslant s$, sachant que pour $\nu\notin|L^{\times}|_i$ on a $\overline{\varepsilon}_i^{\nu}\ \overline{L(nD)}^{\nu}=\{0\}$, on déduit de (1) et (5) que (6) $\sum\limits_{\nu\in\mathscr{V}}a_{\nu,i}n+\sum\limits_{\nu\in\mathscr{V}}\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i})\leqslant(n+n_0)e_i\deg\overline{D}_i+e_i\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_i})$, où $e_i=e(L/K,|\cdot|_i)$. Compte tenu de la relation $[L:K(T)]=$ $=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}d_ie_i[\overline{L}^i:\overline{K}(T)]$ cor. 1 § I.1 et cor. 1 § I.3), de $\deg D=[L:K(T)]$, $\deg\overline{D}_i=[\overline{L}^i:\overline{K}(T)]$ et de (6), on a (7) $(\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\sum\limits_{\nu\in\mathscr{V}}a_{\nu,i}d_i)n+\sum\limits_{i,\nu}d_i\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i})\leqslant n\deg D+\sum\limits_i d_ie_in_0\deg\overline{D}_i+$ $+\sum\limits_i d_ie_i\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_i})$. Utilisant (4) et (7) pour $n>>0$, on déduit que $\deg D=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\sum\limits_{\nu\in\mathscr{V}}a_{\nu,i}d_i$. Ainsi (4) s'écrit $\chi_K(\mathscr{O}_{\mathscr{C}})+s-1\leqslant$ $\leqslant\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant s}d_i\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i})$, ce qui est δ).

ε) <u>Soit toujours $\mathscr{E}'_i$ la normalisation de $\mathscr{E}_i$, alors on a</u> $\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i})\leqslant\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_i})$ si $\nu\in|L^{\times}|_i$. Soient $\mathscr{R}$ le faisceau constant des fonctions rationnelles sur $\mathscr{E}_i$, $\mathscr{L}'_{\nu,i}$ l'image canonique de $\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}_i}}\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_i}$ dans $\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}_i}}\mathscr{R}_i$. Ainsi $\mathscr{L}'_{\nu,i}$ est un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_i}$- faisceau de module cohérent. <u>Montrons que $\mathscr{L}'_{\nu,i}$ est inversible</u>. Comme $\mathscr{L}'_{\nu,i}$ est sans torsion et comme $\mathscr{E}'_i$ est une courbe non singulière il suffit de montrer que la fibre générique de $\mathscr{L}'_{\nu,i}$ est de dimension 1 sur $\mathscr{R}_i$. Il existe $n_0\geqslant 1$, $f_1,\dots,f_r\in L(n_0D)$, $\|f_j\|\leqslant\nu$ tels que $\overline{A}^{\nu}_{(\overline{x}_0)}$ soit engendré par $(\overline{f}_j^{\nu}/\overline{x}_0^{\,n_0})_{1\leqslant j<r}$ sur $\overline{A}_{(\overline{x}_0)}$. Soient $\rho_i=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant r}|f_j|_i$ pour $1\leqslant i\leqslant s$, on a $0<\rho_i\leqslant\nu$. Il existe $n_1\geqslant 0$, $g\in L((n_0+n_1)D)$ tel que $|g|_i=\rho_i$ pour $1\leqslant i\leqslant s$, ainsi $\overline{g}^{\nu}\in\overline{L((n_0+n_1)D)}^{\nu}$ et $\|f_j/g\|\leqslant$ $\leqslant 1$. Comme la structure de $\overline{A}_{(\overline{x}_0)}$-module de $\overline{A}^{\nu}_{(\overline{x}_0)}$ est indui-

te par l'injection de $\overline{A}^{\nu}_{(\overline{x}_0)}$ dans le $\overline{L}$-module $\overline{L}^{\nu}$, on a : $\overline{f}^{\nu}_j/\overline{x}_0^{n_0}=(f_j/g)^{-}(\overline{g}^{\nu}/\overline{x}_0^{n_0+n_1})$ pour $1\leqslant j\leqslant r$. Ceci montre que la fibre générique de $\mathscr{L}'_{\nu,i}$ est de dimension 1 sur $\mathscr{R}_i$. Donc $\mathscr{L}'_{\nu,i}$ est inversible sur $\mathscr{E}'_i$. Alors (1) $\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}'_{\nu,i})=\deg \mathscr{L}'_{\nu,i}+\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_i})$ (Riemann-Roch). Soit $\beta_i:\mathscr{E}'_i\to\mathscr{E}_i$ le morphisme de normalisation. On a la suite exacte de faisceaux sur $\mathscr{E}_i$: $0\to\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i}\to\beta_{i*}\mathscr{L}'_{\nu,i}\to\mathscr{G}\to 0$ où $\mathscr{G}$ est un faisceau gratte-ciel. On a donc $\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}'_{\nu,i})=\chi_{\overline{K}}(\beta_{i*}\mathscr{L}'_{\nu,i})\geqslant\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i})$ et avec (1) cela donne (2) $\chi_{\overline{K}}(\mathscr{L}_{\nu|\mathscr{E}_i})\leqslant\chi_{\overline{K}}(\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_i})+\deg \mathscr{L}'_{\nu,i}$. <u>Montrons que</u> $\deg \mathscr{L}'_{\nu,i}\leqslant 0$.
Il existe K_1/K galoisien fini, totalement ramifié avec $|K_1^{\times}|\supset\bigcup_{1\leqslant i\leqslant s}|L^{\times}|_i$. Notons K_1L le compositum de K_1 et L (dans L^{alg}), $\mathscr{C}_1$ l'unique courbe non singulière sur K_1, telle que $\mathscr{R}(\mathscr{C}_1)=K_1L$, on a $\mathscr{C}_1=\mathscr{C}_{(K_1)}\overset{\text{déf}}{=}\mathscr{C}\times_{SpK}SpK_1$. Pour $1\leqslant i\leqslant s$ on note $\{|\cdot|_{ij}\}_{1\leqslant j\leqslant r}$ les prolongements de $|\cdot|_i$ à K_1L (r est indépendant de i) et $\|\cdot\|_1$ la norme de K_1L définie par $\|f\|_1=$ $=\max_{i,j}|f|_{ij}$. L'injection de $(L,\|\cdot\|)$ dans $(K_1L,\|\cdot\|_1)$ est isométrique. Soient $\overline{K_1L}=\overline{(K_1L,\|\cdot\|_1)}$, $\overline{K_1L}^{ij}=\overline{(K_1L,|\cdot|_{ij})}$, $\overline{\varepsilon}_{ij}$: $:\overline{K_1L}\longrightarrow\overline{K_1L}^{ij}$ la projection canonique. Soient D_1 le diviseur des pôles de T dans K_1L, $\overline{A}_1=\bigoplus_{n\geqslant 0}\overline{(L(nD_1),\|\cdot\|_1)}$, et $\rho:\overline{A}\to\overline{A}_1$ l'homomorphisme canonique. Puisque $\overline{A}_{1(\overline{x}_0)}$ (resp. $\overline{A}_{1(\overline{x}_1)}$) est entier sur $\overline{K}[T]$ (resp. $\overline{K}[T^{-1}]$) (prop. 3 II.2) il suit que ρ induit un morphisme fini $\varphi:\mathscr{E}^1=\mathrm{Proj}\overline{A}_1\to\mathscr{E}=\mathrm{Proj}\overline{A}$. Soient $\mathscr{E}_{ij}$ la composante irréductible de $\mathscr{E}^1$ correspondante à $|\cdot|_{ij}$, et $\mathscr{E}'_{ij}$ sa normalisation.
Considérons le diagramme suivant où les flèches verticales sont les morphismes de normalisation (qui sont finis) et φ' est l'unique morphisme rendant le diagramme commutatif, ainsi φ' est

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}^1 \arrow[r, "\varphi"] & \mathscr{E} \\ \coprod_{ij}\mathscr{E}'_{ij} \arrow[u] \arrow[r, "\varphi'"] & \coprod_{i}\mathscr{E}'_i \arrow[u] \end{tikzcd}$$

l'unique morphisme rendant le diagramme commutatif, ainsi φ' est fini et $\varphi'(\mathscr{E}'_{ij})=\mathscr{E}'_i$, $\varphi'_{|\mathscr{E}'_{ij}}:\mathscr{E}'_{ij}\to\mathscr{E}'_i$ est fini (surjectif. Soient $\nu\in\mathscr{V}$, $\pi\in K_1$ avec $|\pi|=\nu$. <u>Définissons un morphisme de</u> $\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_{ij}}$<u>-module inversible</u> $\rho:\mathscr{L}'_{\nu,i}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_i}}\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_{ij}}\to\mathscr{O}_{\mathscr{E}'_{ij}}$.

Comme $\mathcal{L}'_{\nu,i}$ est inversible "engendré" par $\mathcal{L}_\nu$, il existe un recouvrement de $\mathcal{E}'_i=\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n\geq 0} L(n\overline{D}_i))$ (prop.5 II.5) par des ouverts principaux $D_+(u_\ell)$ avec $u_\ell\in L(n_0\overline{D}_i)$, il existe $f_\ell \in L(n_0 D)$ avec $\|f_\ell\|\leq\nu$ et de façon que $\mathcal{L}'_{\nu,i}$ sur $D_+(u_\ell)$ soit libre engendré par $\overline{\varepsilon}_i^\nu\overline{f}_\ell^\nu/u_\ell$. On définit alors $\rho(D_+(u_\ell))$ par $\rho(D_+(u_\ell))[(\overline{\varepsilon}_i^\nu\ \overline{f}_\ell^\nu/u_\ell)\otimes 1]=\overline{\varepsilon}_{ij}(\overline{f_\ell/\pi})/u_\ell$. Il est alors facile de montrer que $\rho(D_+(u_\ell))$ et $\rho(D_+(u_{\ell'}))$ coïncident sur $D_+(u_\ell)\cap D_+(u_{\ell'})$. Comme $\mathcal{L}'_{\nu,i}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_i}}\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_{ij}}$ est inversible sur $\mathcal{E}'_{ij}$, comme $\rho\neq 0$, on a ρ injectif. Ceci montre que $\mathcal{L}'_{\nu,i}\otimes\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_{ij}}$ est isormorphe à un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_{ij}}$, ainsi $\deg(\mathcal{L}'_{\nu,i}\otimes\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_{ij}})\leq 0$. Enfin la formule $\deg(\mathcal{L}'_{\nu,i}\otimes\mathcal{O}_{\mathcal{E}'_{ij}})=$ $=[\overline{K_1L^{ij}}:\overline{L}^i]\deg\mathcal{L}'_{\nu,i}$ montre que $\deg\mathcal{L}'_{\nu,i}\leq 0$. Il suit donc de (2) que ε) est montré.

B) <u>Le cas général</u>. α)Le corps $K^\wedge L$: soit $K^\wedge=(K,|.|)^\wedge$, alors l'idéal $\mathfrak{N}$ des nilpotents de la K-algèbre $K^\wedge\otimes_K L$ est un idéal premier de $K^\wedge\otimes_K L$ ([4],§ 17.2,cor.p.134), et $M \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Fr}(K^\wedge\otimes_K L/\mathfrak{N})$ est un corps. Les corps $K^\wedge$ et L s'injectent canoniquement dans M en des corps toujours notés $K^\wedge$ et L ; ainsi $M=K^\wedge L$, le compositum de $K^\wedge$ et L dans M. Soit $T\in L$ tel que $|T|_i=1$ et que T soit résiduellement transcendant sur $\overline{K}$. L'injection de K dans L se prolonge par continuité en une injection de $K^\wedge$ dans $(L,|.|_i)^\wedge$, ainsi il existe un homomorphisme $\psi:K^\wedge\otimes_K L\to(L,|.|_i)^\wedge$. De plus $T\in L$ est transcendant sur $K^\wedge$, ainsi $K^\wedge$ et L sont algébriquement disjoints sur K et $\ker\psi=\mathfrak{N}$ ([4] prop.1, p.132), et ψ induit une injection $\rho:M=\mathrm{Fr}(K^\wedge\otimes_K L/\mathfrak{N})\to(L,|.|_i)^\wedge$ par suite $|.|_i$ induit via ρ une valeur absolue $|.|'_i$ sur M qui coïncide avec $|.|_i$ sur L et $|.|$ sur K.

β)<u>Soient</u> K' <u>le corps des constantes de</u> $K^\wedge L/K^\wedge$,g' <u>le genre de</u> $K^\wedge L/K^\wedge$,g <u>celui de</u> L/K. <u>Alors</u> $g-1\geq[K':K^\wedge](g'-1)$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe projective non singulière sur K telle que $\mathcal{R}(\mathcal{C})=L$ ([14]chap.II, 7.4.1.18), $\mathcal{C}_{(K^\wedge)}\overset{\text{déf}}{=}\mathcal{C}\times_{\mathrm{Sp}K}\mathrm{Sp}K^\wedge$. La variété $\mathcal{C}_{(K^\wedge)}$ est irréductible ([14], chap. IV, prop. 4.59), soient $\mathcal{N}$ le faisceau des nilpotents de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_{(K^\wedge)}}$, $\mathcal{X}=(\mathcal{C}_{(K^\wedge)})_{red}$ la variété réduite associée à $\mathcal{C}_{(K^\wedge)}$ et $\eta:\mathcal{X}'\to\mathcal{X}$ la normalisation. On a $\mathcal{R}(\mathcal{X}')=K^\wedge L$ et les suites exactes $0\to\mathcal{N}\to\mathcal{O}_{\mathcal{C}_{(K^\wedge)}}\to$

$\to\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\to 0$, $0\to\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}\to\eta_*\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}\to\mathcal{F}\to 0$, ce qui donne (1) $\chi_{K^\wedge}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_{(K^\wedge)}})=\chi_{K^\wedge}(\mathfrak{X})+$ $+\chi_{K^\wedge}(\mathcal{N}),\chi_{K^\wedge}(\mathfrak{X}')=\chi_{K^\wedge}(\mathfrak{X})+\chi_{K^\wedge}(\mathcal{F})$. Comme $\mathcal{N}(\mathcal{C}_{(K^\wedge)})\subset\mathcal{O}_{\mathcal{C}_{(K^\wedge)}}=K^\wedge$, on a $\mathcal{N}(\mathcal{C}_{(K^\wedge)})=\{0\}$. Ainsi $\chi_{K^\wedge}(\mathcal{N})\leqslant 0$, de plus $\chi_{K^\wedge}(\mathcal{F})\geqslant 0$ ($\mathcal{F}$ est gratte-ciel) et il suit de (1) que $\chi_{K^\wedge}(\mathfrak{X}')\geqslant\chi_{K^\wedge}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_{(K^\wedge)}})$. Or (3) $\chi_{K^\wedge}(\mathfrak{X}')=[K':K^\wedge](1-g')$ et $\chi_{K^\wedge}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_{(K^\wedge)}})=\chi_K(\mathcal{O}_{\mathcal{C}})=1-g$. Ainsi (2) et (3) montrent β).

γ) La formule du théorème: Soient $e=e(K'/K^\wedge)$, $d=d(K'/K^\wedge)$, $f=f(K'/K^\wedge)$, alors on a $e(K^\wedge L/K',|\cdot|_i')=e_i/e$, $d(K^\wedge L/K',|\cdot|_i')=$ $=d_i/d$, cor.3, §I.3 et r_i/f est le degré sur $\overline{K}'$ du corps des constantes de $(K^\wedge L,|\cdot|_i')^-/(K',|\cdot|)^-$. Alors A) appliqué à $K^\wedge L/K'$ et $\{|\cdot|_i'\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ donne la relation $g'-1\geqslant s-1+\sum_{1\leqslant i\leqslant s}$ $\sum_{1\leqslant i\leqslant s}(d_i/d)(e_i/e)(r_i/f)(g_i-1)$. Comme $[K':K^\wedge]=efd$, il suit de β) que $g-1\geqslant(K':K^\wedge)(s-1)+\sum_{1\leqslant i\leqslant s}d_ie_ir_i(g_i-1)$, ce qui est mieux que la formule du théorème.

II.7. Quelques conséquences de la formule sur le genre

Ce paragraphe énonce quelques applications du théorème 4, elles généralisent les conséquences qui se trouvent dans H. Mathieu [20], [21], au cas d'une valuation de rang 1 et bien souvent dans le cas de valuation discrète les résultats obtenus améliorent ceux de H. Mathieu. Nous terminons par des exemples d'égalité dans la formule du théorème 4.

7.1. La notion de valeur absolue quasi-régulière

COROLLAIRE 1:[1] *Soient $(L/K,|\cdot|)$ un corps de fonctions d'une variable valué tel que $\overline{L}/\overline{K}$ soit un corps de fonctions d'une variable. Alors $g(L/K)\geqslant g(\overline{L}/\overline{K})$ (où $g(\cdot/\cdot)$ désigne le genre).*

COROLLAIRE 2:[2] *Soient $(K,|\cdot|)$ un corps valué, L/K un corps de fonctions d'une variable. Alors le nombre de valeurs absolues $|\cdot|'$ de L prolongeant $|\cdot|$, telles que $\overline{(L,|\cdot|')}/$ $/\overline{(K,|\cdot|)}$ soit un corps de fonctions d'une variable avec $g(\overline{(L,|\cdot|')}/\overline{(K,|\cdot|)})\geqslant 1$ est fini.*

DEFINITION: Soit L/K un corps de fonction d'une variable. Une valeur absolue $|\cdot|$ sur L est dite *quasi-régulière*[3]

[1] voir [29] pour le cas où L/K est transcendant pur.
[2] voir aussi [20], Satz 7 p.609.
[3] voir aussi [20], p.609.

si les propriétés suivantes sont satisfaites : 1) $\overline{L}/\overline{K}$ est un corps de fonctions d'une variable. 2) $g(L/K)=g(\overline{L}/\overline{K})$. 3) $r=e=d=1$ où $e=e(L/K,|.|)$, $d=d(L/K,|.|)$ et r est le degré sur $\overline{K}$ du corps des constantes de $\overline{L}/\overline{K}$.

PROPOSITION 6 : Soient $(L/K,|.|)$ un corps de fonctions valué d'une variable tel que $\overline{L}/\overline{K}$ soit un corps de fonctions d'une variable. Soit $LK^\wedge$ le compositum de L et $K^\wedge$ dans $L^\wedge$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes

i) $(L/K,|.|)$ est quasi-régulier,

ii) $(LK^\wedge/K^\wedge,|.|)$ est quasi-régulier et $g(LK^\wedge/K^\wedge)=g(L/K)$.

Démonstration : i) implique ii). D'abord $e(L/K,|.|)=$ $=e(LK^\wedge/K^\wedge,|.|)$ et $d(L/K,|.|)=d(LK^\wedge/K^\wedge,|.|)$, ainsi $e(LK^\wedge/K^\wedge,|.|)=d(LK^\wedge/K^\wedge,|.|)=1$. Soit K' le corps des constantes de $LK^\wedge/K^\wedge$, on a donc $e(K'/K^\wedge)=1$ et $d(K'/K^\wedge,|.|)=1$ (cor.3, §I.3). Comme $\overline{K'}$ est contenu dans le corps des constantes de $\overline{L}/\overline{K}=\overline{LK^\wedge}/\overline{K}^\wedge$, on a $f(K'/K^\wedge,|.|)=1$; comme $K^\wedge$ est complet on a donc $K'=K^\wedge$ (ainsi K est dense dans le corps des constantes de L). La partie Bβ) du théorème 4 montre alors que $g(L/K)-1\geqslant g(LK^\wedge/K^\wedge)-1$. Le théorème 4 montre que $g(LK^\wedge/K^\wedge)-1\geqslant g(\overline{L}/\overline{K})-1$; on a donc $g(L/K)-1\geqslant$ $\geqslant g(LK^\wedge/K^\wedge)-1\geqslant g(\overline{L}/\overline{K})-1$ ainsi $g(L/K)=g(\overline{L}/\overline{K})$ implique $g(L/K)=g(LK^\wedge/K^\wedge)$ et i) est montré.

On peut interpréter de façon géométrique cette notion ainsi on a la proposition suivante :

PROPOSITION 7 : [23]. Soient L/K un corps de fonctions d'une variable $|.|$ une valeur absolue sur L telle que $(K,|.|)$ soit complet et que $\overline{L}/\overline{K}$ soit un corps de fonctions d'une variable. Soit $\mathscr{C}_L$ (resp. $\mathscr{C}_{\overline{L}}$) l'unique courbe non singulière sur K (resp. $\overline{K}$), telle que $\mathscr{R}(\mathscr{C}_L)=L$ (resp. $\mathscr{R}(\mathscr{C}_{\overline{L}})=\overline{L}$). On suppose que $\overline{K}$ est le corps des constantes de $\overline{L}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La valeur absolue $|.|$ est quasi-régulière,

(ii) Il existe une réduction analytique $r:\mathscr{C}_L\to\mathscr{Y}$ définie par un recouvrement pur, fini, distingué, avec $\mathscr{Y}\simeq\mathscr{C}_{\overline{L}}$,

(iii) Il existe un schéma projectif $\mathscr{X}$ de type fini, plat sur K^0 tel que $\mathscr{C}_L\simeq\mathscr{X}_{(\eta)}$ la fibre générique, $\mathscr{C}_{\overline{L}}\simeq\mathscr{X}_{(s)}$ la fibre spéciale.

COROLLAIRE 3[1] : Soient L/K un corps de fonctions d'une variable dont K est le corps des constantes, $|.|$ une valeur absolue sur L quasi-régulière, $|.|' \neq |.|$ une valeur absolue sur L qui coincide avec $|.|$ sur K et telle que $(\overline{L,|.|'})/(\overline{K,|.|})$ soit un corps de fonctions d'une variable. Alors $g((\overline{L,|.|'})/\overline{K})=0$.

En particulier si $(K,|.|)$ est un corps valué, (L/K) un corps de fonctions d'une variable dont K est le corps des constantes avec $g(L/K)\neq 0$, alors il existe au plus une valeur absolue quasi-régulière sur L/K qui coincide avec $|.|$ sur K.

COROLLAIRE 4 : Soit $(L/K,|.|)$ un corps de fonctions d'une variable valué dont K est le corps des constantes et tel que $\overline{L}/\overline{K}$ soit un corps de fonctions d'une variable ; on suppose que $g(L/K)\geqslant 2$. Alors la valeur absolue $|.|$ est quasi-régulière si et seulement si $g(L/K)=g(\overline{L}/\overline{K})$.

REMARQUE : Soient $(\mathbb{Q}_p,|.|_p)$ le corps p-adique. Soient $a,b\in\mathbb{Q}_p$, $|a|_p=|b|_p=1$ et $\overline{a}\ \overline{b}(\overline{a}-\overline{b})\neq 0$, $\mathbb{Q}_p(X)$ le corps des fractions rationnelles à une variable muni de la valeur absolue de Gauss $|.|_g$ associée à $|.|_p$ et à X. Soient $y,t\in\mathbb{Q}_p(X)^{alg}$ avec $y^2=X(X-a)(X-b)$, $pt^2=X$. Alors $|.|_g$ admet un prolongement unique $|.|'$ à $L=\mathbb{Q}_p(X)[y,t]$. On a $g(L/K)=g(\overline{L}/\overline{K})=1$ et $e(L/K,|.|')=2$.

7.2. Cas d'égalité dans la formule du genre.

COROLLAIRE 5 : Soient $(L/K,|.|)$ un corps de fonctions d'une variable valué tel que $\overline{L}/\overline{K}$ soit un corps de fonctions d'une variable, k' le corps des constantes de $\overline{L}/\overline{K}$, $r=[k':\overline{K}]$, $e=e(L/K,|.|)$, $d=d(L/K,|.|)$, $g(L/K)$ (resp. $g(\overline{L}/\overline{K})$ le genre de L/K (resp. $\overline{L}/\overline{K}$). Supposons que K est le corps des constantes de L/K et que $g(L/K)-1=edr(g(\overline{L}/\overline{K})-1)$. Alors k' est une extension purement inséparable de $\overline{K}$. En particulier si $\overline{K}$ est parfait on a $r=1$.

Démonstration : α) On suppose le corps $(K,|.|)$ complet. Soient $\overline{b}\in k'$ séparable sur $\overline{K}$, $p(X)$ le polynôme irréductible

[1] voir aussi [20] Satz 5, p.602, [18],[19] cor.3, p.261 et [9] Satz 3, p.20 pour la valuation discrète.

de $\overline{b}$ sur $\overline{K}$, $p(X)=p_1(X)\dots p_s(X)$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $\overline{L}[X]$ donc dans $k'[X]$ avec $p_1(X)=X-\overline{b}$. Soit $P(X)\in K^0[X]$ un polynôme unitaire tel que $\overline{P}(X)=p(X)$; le lemme de Hensel appliqué à $P(X)\in L^\wedge[X]$ montre que $P(X)=$ $=P_1(x)\dots P_s(X)$ avec $P_i(X)\in L^\wedge[X]$, unitaire irréductible, $\overline{P_i(X)}=p_i(X)$, en particulier $P_1(X)=X-b$ où $b\in L^\wedge$. Soit $K_1=K(b)$ puisque K_1/K est séparable , L et K_1 sont linéairement disjoints sur K et K_1 est le corps des constantes de K_1L ([7] th.2, chap.V, §4). Ainsi $P(X)$ est le polynôme irréductible de b sur L et la valeur absolue $|.|$ de L admet s prolongements $\{|.|_i\}_{1\leqslant i\leqslant s}$ à K_1L, chacun associé à $P_i(X)$. Par construction $\overline{K_1L}^i=(\overline{K_1L,|.|_i})\simeq\overline{L}(\overline{b_i})$ où $\overline{b_i}$ est une racine de $p_i(X)$, ainsi $\overline{K_1L}^1=\overline{L}$. Puisque $\overline{b_i}$ est séparable sur k', il suit que le corps des constantes de $\overline{K_1L}^i$ est $k'(\overline{b_i})$ et $[k'(\overline{b_i}):k']=\deg p_i$. Comme $(K,|.|)$ est complet, les valeurs absolues $\{|.|_i\}_{i\leqslant i\leqslant s}$ coïncident sur K_1 avec l'unique prolongement à K_1 de $|.|$. Le théorème 4 et le cor.3,§II.7 donnent : $g(K_1L)-1\geqslant s-1+\sum_{1\leqslant i\leqslant s} ed[k'(\overline{b_i}):\overline{K}(\overline{b})](g(\overline{L}(\overline{b_i})-1))$.
Or $g(K_1L/K_1)=g(L/K)$, $g(\overline{L}(\overline{b_i})/\overline{K})=g(\overline{L}/\overline{K})$ ([7], th.5 chap.V, §6) et $\sum_{1\leqslant i\leqslant s}[k'(\overline{b_i}):\overline{K}(\overline{b})]=(\sum_i[k'(\overline{b_i}):\overline{K}])/[\overline{K}(\overline{b}):\overline{K}]=[k':\overline{K}]$.
Il suit donc que $g(L/K)-1\geqslant s-1+edr(g(\overline{L}/\overline{K})-1)$. Ce qui montre que $s=1$, i.e. $\deg p(X)=1$ ainsi $\overline{b}\in\overline{K}$.

β) Le cas général. Soient $K^\wedge L$ le compositum de $K^\wedge$ et L dans $L^\wedge$, K' le corps des constantes de $K^\wedge L/K^\wedge$, on a (1) $g(L/K)-1\geqslant[K':K^\wedge](g(K^\wedge L/K^\wedge)-1)$ (partie Bβ) du th.4). Soient $e'=e(K'/K^\wedge)$, $d'=d(K'/K^\wedge,|.|)$, $f'=[\overline{K}':\overline{K}]$. Par le théorème 4 et le corollaire 3.II.7 on a (2) $g(K^\wedge L/K^\wedge)-1\geqslant$ $\geqslant(e/e')(d/d')(r/f')(g(L/K)-1)$, ainsi avec (1) et (2), on déduit que $g(K^\wedge L/K^\wedge)-1=(e/e')(d/d')(r/f')(g(\overline{L}/\overline{K})-1)$. Par α) cela veut dire que $k'/\overline{K}'$ est purement inséparable et puisque $K'/K^\wedge$ est purement inséparable ([7]th.5,chap.V,§6) on déduit que $k'/\overline{K}$ est purement inséparable.

Exemple 1 : Soit $m\geqslant1$, on peut avoir $g(L/K)-1=$ $=e(L/K,|.|)(g(\overline{L}/\overline{K})-1)$, $g(L/K)=2m-1$ et $e(L/K,|.|)\neq1$: soient $K=(\mathbb{Q}_p,|.|_p)$ le corps p-adique, $n=2m+1$, $a_i\in\mathbb{Q}_p$, $1\leqslant i\leqslant n$ avec $a_1=0$, $1=|a_2|_p\dots=|a_n|_p$, $\prod_{i\neq j}(\overline{a}_i-\overline{a}_j)\neq0$. Soient $\mathbb{Q}_p(X)$ le corps des fractions rationnelles, $y,t\in\mathbb{Q}_p(X)^{alg}$, $y^2=\prod_{1\leq i\leq n}(X-a_i)$, $pt^2=X$. La valeur absolue de Gauss sur $\mathbb{Q}_p(X)$ associée à $|.|_p$ et X se prolonge de façon unique à $L=\mathbb{Q}_p(X)[y,t]$ en une valeur absolue $|.|'$. On a $g(L/K)=2m-1$, $g((\overline{L,|.|'})/\overline{K})=m$, $e(L/K,|.|')=2$.

Exemple 2 [1]: Soit $m\geq 0$, on peut avoir $g(L/K)-1=r(g(\overline{L}/\overline{K})-1)$, $g(L/K)=2m+1$ et $r=2$ (ainsi $\overline{K}$ n'est pas parfait, cor.5) :

Exemple 2.1. ([22] communication privée). Soit K un corps discrètement valué complet dont le corps résiduel $\overline{K}$ n'est pas parfait (donc infini), avec car. K=0 et car. $\overline{K}=2$. Soit $h(X)\in K^0[X]$ unitaire de degré $m+2$, on suppose que $\overline{h}(X)$ a $m+2$ racines distincts dans $\overline{K}$, que $h(X)$ (resp. $h(X)-4$) a une racine a (resp. b) dans K avec $\overline{a}=\overline{b}$ et que $\overline{c}^{1/2}\notin\overline{K}$. Soient $K(X)$ le corps des fractions rationnelles à une variable, $y,z\in K(X)^{alg}$ tels que $y^2+h(X)y+h(X)=0$, $z^2=c(X-a)(X-b)$. La valeur absolue de Gauss se prolonge de façon unique en une valeur absolue $|.|'$ sur $L=K(X)[y,z]$. On a $g(L/K)=2m+1$, $g(\overline{L}/\overline{K})=m+1$, $e(L/K)=1$, $d(L/K)=1$ et $r=2$.

Exemple 2.2 : Soit K un corps complet avec car.K=0, car.$\overline{K}=2$, $a,b\in K$ avec $|a|=|b|=1$, $[\overline{K}[\overline{a}^{1/2},\overline{b}^{1/2}]:\overline{K}]=4$, $\pi\in K$ avec $|2|<|\pi^2|<1$. Soient $K(X)$ le corps des fractions rationnelles, $y,z\in K(X)^{alg}$ avec $y^2=aX^2+\pi^2b$, $z^2=a+\pi^2X^{2m+1}$. La valeur absolue de Gauss sur $K(X)$ associée à $|.|$ et à X se prolonge de façon unique à $L=K(X)[y,z]$ en $|.|'$. On a $g(L/K)=2m+1$, $g(\overline{L}/\overline{K})=m+1$, $r=2$.

Exemple 3 : Soit $m\geq 0$, on peut avoir $g(L/K)-1=d(g(\overline{L}/\overline{K})-1)$ avec $g(L/K)=2m+1$, $d=d(L/K,|.|)=2$:

α) Il existe un corps $(K,|.|)$ valué complet, car.K=0, car.$\overline{K}=2$, $c\in K$ tel que $|c|=1$, $d(K(c^{1/2})/K,|.|)=2$ et $\delta(c^{1/2},K)<|2|$ (où $\delta(.,K)$ désigne la distance à K). Soient $(\mathbb{Q}_2,|.|_2)$ le corps 2-adique, $K_1=(\mathbb{Q}_2^{alg})^\wedge$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_2$. Soient $q\neq 2$, un nombre premier, $\{e_n\}_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de K_1 telle que $e_0=2^{-1}$, $e_n=(e_{n+1})^q$ et $\omega_n=\sum_{0\leq k\leq n}e_k$. Soit $F(X)\in K_1(X)$ le corps des fractions rationnelles, alors la suite $(|F(\omega_n)|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire ainsi

[1] Les exemples 2.1 et 2.2 sont différents puisque $\overline{L}/\overline{K}$ est séparablement engendré dans 2.1 mais pas dans 2.2.

$|F(X)| \overset{\text{déf}}{=} \lim_n |F(\omega_n)|_2$ définit une valeur absolue sur $K_1(X)$ qui prolonge $|.|_2$ ([24] prop.4,p.212). Soit $Y=(X-\omega_1)/(\omega_2-\omega_1)$ alors $|Y|=1$ et $\delta(Y,K_1)>|2|$. Montrons que $\delta(Y^{\frac{1}{2}},K)>|2|$. On applique les techniques de Kaplansky ([24] §0.2 p.197). Puisque $K_1[Y]$ est dense dans $K_1(Y)$ on calcule $|Y-P(Y)^2|$ pour $P(Y)\in K_1[Y]$. Pour $\omega\in K_1$ on a $P(Y)=\sum_{i\geq 0} P_i(\omega)(Y-\omega)^i$ où $P_i(Z)\in K_1[Z]$, ainsi $Y-P(Y)^2=\omega-P_0(\omega)^2+(1-2P_0(\omega)P_1(\omega))(y-\omega)+$ $+\ldots$, si bien que pour ω suffisamment "proche" de Y on a

(1) $|P(Y)|=|P_0(\omega)|>|2||P_1(\omega)|$ et $|Y-P(Y)^2|=|\omega-P_0(\omega)^2|>$ $>|2||1-2P_0(\omega)P_1(\omega)|$. Soit $P(Y)$ avec $|P(Y)|=1$ on déduit de (1) que $|Y-P(Y)^2|>|2|$ ainsi $\delta(Y^{\frac{1}{2}},K_1(Y))>|2|$. Alors $(K=K_1(Y),|.|)^\wedge$ et $c=Y$ satisfont α).

β) La construction du corps de fonctions L/K. Soient $(K,|.|)$ définis en α), $h(X)\in K^0[X]$ unitaire de degré $m+2$ tel que $\overline{h(X)}\in\overline{K}[X]$ ait $m+2$ racines distinctes dans $\overline{K}$, que $h(X)$ (resp.$h(X)-4$) ait une racine a (resp.b) dans K avec $\overline{a}=\overline{b}\neq 0$, ainsi $|b-a|=|4|$. Soient $K(X)$ le corps des fractions rationnelles à une variable, $y,z\in K(X)^{alg}$ tels que $y^2+yh(X)+h(X)=0$ $z^2=c(x-a)(x-b)$. La valeur absolue de Gauss sur $K(X)$ associée à $|.|$ et à X se prolonge à $L=K(X)[y,z]$ de façon unique en une valeur absolue notée $|.|'$, alors on a $g(L/K)=$ $=2m+1$, $g(\overline{(L,|.|')}/\overline{K})=m+1$ et $d(L/K,|.|')=2$.

Bibliographie

[1] ALBANESE, G., Sulle condizioni perché una curva algebrica reducible si possa considerare come limite di una curva irreductible, Rend. Circ. Mat. Palermo 52, 105-150 (1928)

[2] BOSCH, S., Zur Kohomologietheorie rigid analytischer Raüme, Manuscr. Math. 20 (1977), 1-27

[3] BOSCH, S., GUNTZER, U., REMMERT, R., Non-archimedean analysis, Grundlehren Math. Wiss., 261, Springer Verlag, 1984

[4] BOURBAKI, N., Algèbre, chap. V, Masson, Paris, 1981.

[5] BOURBAKI, N., Algèbre commutative, chap. VI, Hermann, Paris, 1964

[6] CANTOR, D., ROQUETTE, P., On diophantine equations over the ring of all algebraic integers. J. Number Theory, 18 (1984), 1-26

[7] CHEVALLEY, C., Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Amer. Math. Soc., Math. Survey VI, 1951

[8] DEURING, M., Reduktion algebraischer Funktionenkörper nach Primdivisoren des Konstantenkörpers. Math. Z., 47 (1942), 643-654

[9] DEURING, M., Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve vom Geschlechte Eins. II. Gött., II. Math.-Phys. Kl, (1955), 13-42

[10] FRESNEL, J., Géométrie analytique rigide, Polycopié, Université de Bordeaux I, 1984

[11] FRESNEL, J., MATIGNON, M., Structure des espaces analytiques quasi-compacts de dimension 1 sur un corps valué, complet, ultramétrique, Ann. Mat. Pura Appl., à paraître

[12] FRESNEL, J., PUT, M. van der, Géométrie analytique rigide et applications, Prog. Math., 18, 1981

[13] GRAUERT, H., REMMERT, R., Uber die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht archimedischen Analysis, Invent. Math., t.2 (1966); 87-133

[14] GROTHENDIECK, A., EGA, Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci., n°8, 11, 24

[15] GRUSON, L., Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique, Ann. Sci. Ec. Norm. Super., IV. Ser., t.1 (1968), 45-89

[16] HARTSHORNE, R., Algebraic geometry, Grad. texts Math., 1977

[17] KOPF, U., Uber eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Raüme, Schriftenr. Rechenzentrums Univ. Münster, 2, Serie Heft 7, (1974)

[18] LAMPRECHT, E., Zur Eindeutigkeit von Funktionalprimdivisoren, Arch. Math. 8 (1957), 30-38

[19] LAMPRECHT, E., Restabbildungen von Divisoren I, Arch. Math. 8 (1957), 233-264

[20] MATHIEU, H., Das Verhalten des Geschlechts bei Konstantenreduktionen algebraischer Funktionenkörper, Arch. Math. 20 (1969), 597-611

[21] MATHIEU, H., Das Verhalten des Geschlechts bei Konstantenreduktionen algebraischer Funktionenkörper, Diss., Saarbrücken 1968

[22] MATHIEU, H., lettre du 15.12.1985

[23] MATIGNON, M., Thèse, Université de Bordeaux I, 1987

[24] MATIGNON, M., REVERSAT, M., Sur les automorphismes continus d'extensions transcendantes valuées, J. Reine Angew. Math. t.338 (1983), 195-215

[25] MATIGNON, M., OHM, J., A fundamental equality for simple transcendental extension of valued fields, à paraître

[26] NERING, E., Reduction of an algebraic function field modulo a prime in the constant field. Ann. of Math., II. Ser., 67 (1957), 590-606

[27] NOBILE, A., On specialization of curves, I, Trans. Am. Math. Soc., 282, 739-748 (1984)

[28] NOBILE, A., On specialization of curves, II, Arch. Math. 46 (1986), 279-288

[29] OHM, J., The ruled residue theorem for simple transcendental extensions of valued fields, Proc. Am. Math. Soc., 89 (1983), 16-18

[30] OSTROWSKI, A., Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Math. Z., vol 39 (1935), p.264-404.

[31] POLZIN, M., Prolongement de la valeur absolue de Gauss et problème de Skolem, à paraître

[32] POPP, H., Uber das Verhalten des Geschlechts eines Funktionenkörper einer Variablen bei Konstantenreduktion, Math. Z. 106, 17-35 (1968)

[33] ROQUETTE, P., Solving diphantine equations over the ring of all algebraic integers, Atas da 8^{è} Escola de Algebra vol.2 IMPA 84

[34] RUMELY, R., Arithmetic over the ring of all algebraic integers, J. Reine Angew. Math. t. 368 (1986), 127-133

[35] SERRE, J.-P, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 1-42

Michel MATIGNON
UER. de Mathématiques et d'Informatique
de l'Université de Bordeaux I
U.A. 040 226
351, cours de la Libération
33405 - TALENCE Cédex
FRANCE

(Reçu le 20 février 1987)