GENRE TOPOLOGIQUE DE CORPS VALUÉS

par

Michel MATIGNON

-:-:-:-

Introduction

Introduction

Dans toute cette introduction K désigne un corps algébriquement clos muni d'une valeur absolue ultramétrique et complet pour cette valeur absolue.

Ce travail est consacré à l'étude des extensions valuées transcendantes de K.

Soit $L \supset K$ un corps valué complet, on définit quand elle existe la dimension algébrique topologique de L ; c'est l'entier noté $\dim \operatorname{alg} \operatorname{top}_K(L)$ et égal au minimum des dimensions algébriques des sous-corps M de L qui sont de type fini sur K et denses dans L. On s'intéresse plus particulièrement aux corps L vérifiant $\dim \operatorname{alg} \operatorname{top}_K(L) = 1$. Un tel corps s'appelle un corps topologique de fonctions d'une variable sur K, c'est donc un complété d'un corps de fonctions d'une variable sur K pour une valeur absolue prolongeant celle de K. On définit alors le genre topologique de L comme le minimum des genres des sous-corps de fonctions de L d'une variable sur K denses dans L, et on le note $g_{top}(L)$.

Nous montrons le théorème suivant :

THÉORÈME 4 (§ 4). - Soient K un corps valué complet, algébriquement clos, $L \supset K$ un corps topologique de fonctions d'une variable sur K. Soient k (resp. ℓ) le corps résiduel de K (resp. L).

i) Si $\ell \neq k$, alors ℓ est un corps de fonctions d'une variable sur k. Soit $g(\ell)$ son genre ; on a $g_{top}(L) = g(\ell)$;

ii) Si $\ell = k$, on a $g_{top}(L) = 0$.

Ce théorème a pour corollaire immédiat l'analogue du théorème de Lüroth.

COROLLAIRE. - Soient K un corps valué complet, algébriquement clos, $K(X)$ une extension valuée transcendante de K et F un sous-corps fermé de $\widehat{K(X)}$ (le complété de $K(X)$) avec $K \subsetneq F \subset \widehat{K(X)}$. Alors il existe $Y \in F$ tel que $F = \widehat{K(Y)}$.

Description de la démonstration du théorème 4

Premier cas : $\ell \neq k$. On montre d'abord l'inégalité $g_{top}(L) \geq g(\ell)$ (corollaire de la proposition 4, § 2.2).

Pour cela nous utilisons des techniques de géométrie analytique rigide. Soit $M \subset L$ un corps de fonctions d'une variable sur K, on associe à M la courbe algébrique projective intègre $\mathcal{C}_M$ sur K dont le corps des fonctions rationnelles est M ([14], p. 39 à 46). On munit $\mathcal{C}_M$ d'une structure $\mathcal{C}_M^{an}$ d'espace analytique rigide sur K. Soient $f \in M$ résiduellement transcendant sur k et $U_1 = \{ x \in \mathcal{C}_M^{an} \mid |f(x)| \leq 1 \}$, $U_2 = \{ x \in \mathcal{C}_M^{an} \mid |f(x)| \geq 1 \}$ alors $\mathcal{U} = \{ U_1, U_2 \}$ est un recouvrement pur de $\mathcal{C}_M^{an}$ et la réduction $(\overline{\mathcal{C}_M^{an}})_{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{C}_M^{an}$ relativement à $\mathcal{U}$ est une courbe algébrique complète sur k dont une composante irréductible a un corps de fonctions rationnelles isomorphe à ℓ (proposition 3, § 2.2). Des méthodes cohomologiques permettent alors de comparer le genre de M et celui de ℓ (proposition 4, § 2.2). On en déduit l'inégalité cherchée.

L'égalité $g_{top}(L) = g(\ell)$ est plus délicate à établir. Il faut montrer l'existence d'un sous-corps M de L de fonctions d'une variable sur K dense dans L et tel que $g(M) = g(\ell)$.

Nous construisons un tel corps M. Pour cela nous considérons une courbe projective irréductible $\mathcal{C}'_\ell \subset \mathbb{P}^2_k$ dont le corps des fonctions rationnelles est isomorphe à ℓ et qui admet uniquement des points doubles ordinaires comme singularités. Nous montrons l'existence d'un relèvement de $\mathcal{C}'_\ell$ en une courbe projective irréductible $\mathcal{C}' \subset \mathbb{P}^2_K$ qui admet uniquement des points doubles ordinaires comme singularités et autant que $\mathcal{C}'_\ell$ (théorème 1, § . 2.3). Il s'agit donc là d'un théorème de relèvement d'une courbe algébrique plane avec des singularités prescrites et ce résultat est à rapprocher du théorème de relèvement de Grothendieck des courbes algébriques propres et lisses ([12]).

On construit alors un corps M dense dans L qui est isomorphe au corps des fonctions rationnelles de $\mathcal{C}'$ et par suite vérifie $g(M) = g(\ell)$ (corollaire du théorème 1, § 2.3).

Deuxième cas : $\ell = k$. Soient $|K^\times|$ (resp. $|L^\times|$) le groupe des valeurs de K (resp. L). La partie ii) du théorème 4, § . 4, n'est pas tout à fait nouvelle. En effet, si K est algébriquement clos et maximalement complet (il n'y a donc pas d'extension immédiate de K), M. van der Put a montré le résultat annoncé dans ([20]). La démonstration que nous proposons est générale et elle fournit comme le signale M. van der Put dans ([20]) une démonstration rapide de l'existence de la réduction stable des courbes algébriques.

Pour traiter ce deuxième cas nous employons des techniques d'analyse ultramétrique.

Par définition, L est une extension algébrique finie du complété $K(X)\hat{}$ d'une extension valuée transcendante pure $K(X)$ de K et le corps résiduel de $K(X)\hat{}$ est k. La démonstration de $g_{top}(L) = 0$ se déroule en plusieurs pas liés à la nature algébrique de l'extension L de $K(X)\hat{}$. Pour des raisons techniques nous avons dû distinguer le cas où $|L^\times| \neq |K^\times|$ (cas ramifié) et $|L^\times| = |K^\times|$ (cas immédiat).

Dans les deux cas le pas délicat est celui des extensions algébriques cycliques de degré p où p est la caractéristique résiduelle de K. Si car K = p cela revient à décrire le groupe $K(X)\hat{}/\wp(K(X)\hat{})$ où $\wp(x) = x^p - x$ (théorie d'Artin-Schreier).

Si car K = 0 cela revient à décrire le groupe $(K(X)\hat{})^\times / (\{K(X)\hat{}\}^p)^\times$ (théorie de Kummer).

Dans le cas où $|L^\times| = |K^\times|$ les démonstrations sont plus délicates, nous utilisons des techniques qui sont essentiellement dues à Kaplansky ([15] ; voir aussi [18] et [17]).

Dans le dernier paragraphe, nous donnons une interprétation géométrique des extensions valuées transcendantes de K de degré 1 et de type fini sur K. Pour cela nous étendons (§ 5.1) aux K-espaces analytiques rigides la notion de point géométrique introduite par M. van der Put pour les espaces affinoïdes ([21]).

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une courbe algébrique projective intègre sur K, $\mathcal{C}^{an}$ l'espace analytique associé, nous montrons une correspondance bijective entre l'ensemble des points géométriques fermés non ordinaires de $\mathcal{C}^{an}$ et l'ensemble des valeurs absolues sur le corps $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ des fonctions rationnelles de $\mathcal{C}$ qui prolongent la valeur absolue de K (§ 5.2, prop. 7). Nous décrivons ainsi géométriquement les valeurs absolues sur une extension transcendante pure de K (cas où $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_K$).

Soient toujours $\mathcal{C}$ une courbe algébrique projective intègre sur K et p un point géométrique fermé non ordinaire de $\mathcal{C}$, ainsi p définit une valeur absolue $|\cdot|_p$ sur $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ et le complété $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |\cdot|_p)\hat{}$ du corps valué $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |\cdot|_p)$

est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K . On définit alors le type (resp. le genre) de p comme étant le type (resp. le genre topologique) de $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |\,.\,|_p)^\wedge$. La proposition 8, § 5.2, décrit les points géométriques fermés du type 1 de $\mathcal{C}^{an}$ à l'aide de réductions analytiques. On montre (théorème 5) qu'il y a sur $\mathcal{C}$ un nombre fini de points géométriques fermés du type 1 et de genre non nul, de plus dans le cas où $\mathcal{C}$ est non singulière, ils sont décrits par la réduction stable de $\mathcal{C}$ (proposition 9).

Pour finir je remercie vivement Jean Fresnel qui a suggéré ce travail et l'a lucidement guidé. Je veux remercier aussi Marius van der Put de m'avoir gratifié de discussions éclairantes. Je remercie également Marc Reversat pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

1. - Corps topologiques de fonctions

1.1. - Notations et définitions sur les corps valués

Si E est un corps, on désigne par E^{alg} une clôture algébrique de E ; si p est la caractéristique de E, $E^{p^{-\infty}}$ désigne la clôture radicielle de E (on a $E^{p^{-\infty}} = E$ si $p=0$). Soit $(E, |\,.\,|)$ un corps valué pour une valeur absolue ultramétrique $|\,.\,|$, on note $|E^{\times}|$ le groupe des valeurs du groupe multiplicatif $E^{\times}$, E° l'anneau de valuation de E, $E^{\circ\circ}$ l'idéal de valuation de E°, $(E, |\,.\,|)\hat{}$ (ou $\hat{E}$ si aucune confusion n'est à craindre) un complété de $(E, |\,.\,|)$. On note $(E, |\,.\,|)^{-}$ (ou bien $\overline{E}$ si aucune confusion n'est à craindre) le corps résiduel $E^{\circ}/E^{\circ\circ}$ et on appelle caractéristique résiduelle de E la caractéristique de $\overline{E}$. Enfin si F est une extension algébrique finie de E, on appelle indice de ramification de l'extension F de E l'indice de $|E^{\times}|$ dans $|F^{\times}|$, et degré résiduel de l'extension F de E le degré de l'extension $\overline{F}$ de $\overline{E}$.

Toutes les valeurs absolues considérées sont ultramétriques et peuvent être triviales.

1.2. - Corps topologiques de fonctions, genre topologique

DÉFINITION 1. - Soient K un corps et M une extension de type fini de K, on appelle dimension algébrique de M sur K l'entier noté $\dim \mathrm{alg}_K(M)$ égal au nombre maximal d'éléments de M algébriquement indépendants sur K. On appelle corps de fonctions de n variables sur K une extension M de type fini sur K avec $\dim \mathrm{alg}_K(M) = n$. Si M est un corps de fonctions d'une variable sur K on note $g(M)$ le genre du corps de fonctions M ([25]).

DÉFINITION 2. - Soient K un corps valué complet algébriquement clos, $L \supset K$ un corps valué complet pour une valeur absolue prolongeant celle de K. On dit que L est topologiquement de type fini sur K si il existe une partie finie $\{X_1, \dots, X_n\}$ d'éléments de L telle que $L = (K(X_1, X_2, \dots, X_n))\hat{}$. Soit L un corps topologiquement de type fini sur K, on appelle dimension algébrique topologique de L sur K l'entier noté $\dim \mathrm{alg\,top}_K(L)$ égal au plus petit nombre n d'éléments $\{X_1, \dots, X_n\}$ de L tel que L soit une extension algébrique finie de $K(X_1, \dots, X_n)\hat{}$. C'est aussi le minimum des dimensions algébriques des sous-corps de type fini et denses dans L.

DÉFINITION 3. - Soit K un corps valué complet algébriquement clos. On appelle <u>corps topologique de fonctions de</u> n <u>variables sur</u> K, un corps $L \supset K$ valué complet pour une valeur absolue prolongeant celle de K, topologiquement de type fini sur K et tel que $\dim \operatorname{alg} \operatorname{top}_K(L) = n$.

DÉFINITION 4. - Soient K un corps valué complet algébriquement clos et L un corps topologique de fonctions d'une variable sur K. Soit Σ l'ensemble des corps de fonctions d'une variable sur K denses dans L. On appelle <u>genre topologique</u> de L sur K l'entier noté $g_{top}(L)$ et défini par $g_{top}(L) = \min_{M \in \Sigma} g(M)$.

<u>Remarque</u>. - Si L est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K, $g_{top}(L) = 0$ si et seulement si L est le complété d'une extension valuée transcendante de K pure de degré 1.

1.3. - <u>Classification des corps topologiques de fonctions d'une variable</u>

1.3.1. - <u>Extensions valuées transcendantes pures de degré</u> 1
([22], chap. 2 ; [3] §.10 et §.10, ex. 2)

Soient K un corps valué complet, algébriquement clos, $K(X)$ une extension transcendante pure de K. Il existe exactement trois types d'extensions de la valeur absolue de K à $K(X)$.

Soient $|\,.\,|$ une valeur absolue sur $K(X)$ qui prolonge celle de K et $r_X = \inf_{x \in K} |X-x|$.

<u>Premier type</u> (inerte). - Il existe $x_o, \pi \in K$ tels que $|X-x_o| = r_X = |\pi|$. <u>Alors</u> K <u>et</u> $K(X)$ <u>ont même groupe des valeurs et le corps résiduel de</u> $K(X)$ <u>est une extension transcendante pure du corps résiduel de</u> K <u>de degré de transcendance</u> 1. On dit que $K(X)$ est une extension (valuée) <u>inerte</u> de K.

Soit $Y = \pi^{-1}(X-x_o)$, on a pour tout $x \in K$, $|Y-x| = \max(1, |x|)$. En décomposant $P(Y) = \sum_{i=0}^{d} a_i Y^i$ en produit de polynômes de degré 1 on montre facilement que $|P(Y)| = \max_i |a_i|$, ce qui montre que $|K^{\times}| = |K(X)^{\times}|$. Il suit aussi facilement que le corps résiduel de $K(X)$ est l'extension transcendante pure $k(y)$ de k où k désigne le corps résiduel de K et y l'image résiduelle de Y. On peut toujours construire une extension valuée transcendante de degré 1 du premier type d'un corps K ([3], §.10).

Deuxième type (ramifié). - Il existe $x_o \in K$ tel que $|X-x_o| = r_X$ et $r_X \notin |K^\times|$. Alors K et $K(X)$ ont le même corps résiduel et $|K(X)^\times| = |K^\times|\, r_X^{\mathbb{Z}}$. On dit que $K(X)$ est une extension transcendante (valuée) ramifiée de K.

Soient $Y = X-x_o$, $a, b \in K^\times$, $i, j \in \mathbb{N}$ avec $i \neq j$, alors $|a Y^i| \neq |b Y^j|$ puisque $|K^\times|$ est un groupe divisible. Ceci montre que $|\sum_{i=0}^{d} a_i Y^i| = \max_i |a_i Y^i|$ et ainsi que $|K(X)^\times| = |K^\times|\, r_X^{\mathbb{Z}}$. Soit $a \in K$, on a $\frac{1}{Y-a} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{Y^{i+1}} + \frac{1}{Y-a}\left(\frac{a}{Y}\right)^{n+1}$ si $|Y| > |a|$ et $\frac{1}{Y-a} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{Y^i}{a^{i+1}} + \frac{1}{Y-a}\left(\frac{Y}{a}\right)^{n+1}$ si $|Y| < |a|$, ce qui montre que $K[Y, \frac{1}{Y}]$ est dense dans $K(Y) = K(X)$. Plus précisément tout élément $f \in \widehat{K(X)}$ s'écrit de façon unique sous la forme $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i Y^i$ avec $\lim_{|i| \to \infty} |a_i|\, r_X^i = 0$ et $|f| = \max_i |a_i|\, r_X^i$. Si $|K^\times| = \mathbb{R}_{>0}$ (où $\mathbb{R}_{>0}$ désigne le groupe multiplicatif des nombres réels strictement positifs), il n'existe pas d'extension de K, transcendante de degré 1, valuée, du deuxième type. S'il existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ et $r \notin |K^\times|$, alors il y a un prolongement de la valeur absolue de K à $K(X)$ avec $|X| = r$ (i.e. du deuxième type).

Troisième type (immédiat). - Pour tout $x \in K$ on a $|X-x| > r_X$. Alors K et $K(X)$ ont le même groupe des valeurs et le même corps résiduel. On dit que $K(X)$ est une extension (valuée) transcendante immédiate de K.

Soit $P(X) = b \prod_{i=1}^{d} (X-a_i) \in K[X]$, il existe $x \in K$ tel que $|X-x| < |X-a_i|$ pour $1 \leq i \leq d$. On a $P(x) = b \prod_{i=1}^{d} (X-a_i)\left(1 + \frac{x-X}{X-a_i}\right)$, ce qui montre que $|P(x) - P(X)| < |P(X)|$, ainsi $|K^\times| = |K(X)^\times|$ et tout polynôme de $K(X)^\circ$ est congru à un élément de K° modulo $K(X)^{\circ\circ}$. Soit $a \in K$, il existe $x \in K$ tel que $|X-x| < |X-a|$ et on a $\frac{1}{X-a} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-X)^i}{(x-a)^{i+1}} + \frac{1}{(X-a)}\left(\frac{x-X}{x-a}\right)^{n+1}$, ce qui montre que $K[X]$ est dense dans $K(X)$ et donc que K et $K(X)$ ont le même corps résiduel. Si K est maximalement complet il n'existe pas d'extension valuée transcendante de degré 1 du troisième type de K. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K telle que $(|x_n - x_{n+1}|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite strictement décroissante et telle qu'il n'existe pas $y \in K$ avec $|y-x_n| \leq |x_{n+1} - x_n|$ pour tout $n \geq 1$, alors il existe une valeur absolue sur $K(X)$ qui prolonge celle de K avec $|x_n - X| = |x_n - x_{n+1}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (i.e. du troisième type).

1.3.2. - Classification des corps topologiques de fonctions d'une variable

Soient K un corps valué, complet, algébriquement clos, L un corps topologique de fonctions d'une variable sur K, k (resp. ℓ) le corps résiduel de K (resp. L). Alors L est une extension algébrique finie du complété $K(X)\hat{}$ d'une extension transcendante pure de K de degré 1. L'étude qui précède établit donc une classification des corps topologiques de fonctions d'une variable sur K en trois types.

Premier type (inerte) $\ell \neq k$. - Alors ℓ est un corps de fonctions d'une variable sur k, L est une extension inerte de K.

Deuxième type (ramifié) $\ell = k$ et $|L^\times| \neq |K^\times|$, L est une extension ramifiée de K.

Troisième type (immédiat) $\ell = k$ et $|L^\times| = |K^\times|$, L est une extension immédiate de K.

Notons qu'une extension algébrique finie de L est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du même type que L.

DÉFINITION. - Soit $(M, |\,.\,|)$ un corps de fonctions d'une variable sur K muni d'une valeur absolue qui prolonge celle de K ; on appelle type de $(M, |\,.\,|)$ le type du corps topologique de fonctions $(M, |\,.\,|)\hat{}$.

1.3.3. - Sous-corps fermés d'un corps topologique de fonctions d'une variable

Soit M un corps de fonctions d'une variable sur K, alors deux éléments X, Y de M non constants sont algébriquement dépendants. La proposition 1 qui suit montre que ce résultat a son analogue dans les corps topologiques de fonctions d'une variable sur K.

PROPOSITION 1. - Soient K un corps valué complet, algébriquement clos et L un corps topologique de fonctions d'une variable sur K. Soit F un sous-corps fermé de L contenant K, alors si $F \neq K$, F est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du même type que L et L est une extension algébrique finie de F.

Cette proposition est un raffinement de la proposition 1 de [17] et s'obtient par la même méthode. Avant de la démontrer faisons quelques rappels sur les fonctions analytiques sur un corps valué.

1.3.3.1. - Fonctions analytiques sur un corps valué ([4], théorème 1.1)

Soient E un corps valué, $\theta \in E$, $r > 0$ un nombre réel, $D_E = \{z \in E \mid |z-\theta| \leq r\}$ (resp. $D_E = \{z \in E \mid |z-\theta| < r\}$) ; on note $\mathcal{H}_{E,D_E}$ l'ensemble des fonctions E-analytiques sur D_E, c'est-à-dire les séries entières $f(Z) = \sum_{i \geq 0} a_i (Z-\theta)^i$ où $a_i \in E$, telles que $\lim_{i \to +\infty} |a_i| r^i = 0$ (resp. $\lim_{i \to +\infty} |a_i| r'^i = 0$ pour tout réel r' tel que $0 \leq r' < r$).

Soit $f(Z) = \sum_{i \geq 0} a_i (Z-\theta)^i \in \mathcal{H}_{E,D_E}$. On définit $|f(Z)|_{D_E}$ par

(1) $$|f(Z)|_{D_E} = \sup_{i \geq 0} |a_i| r^i \quad \text{(qui peut être infini).}$$

Si le groupe des valeurs de E est dense et si son corps résiduel est infini, on a :

$$|f(Z)|_{D_E} = \sup_{z \in D_E} |f(z)| .$$

(2) Soient F un corps valué contenant E (inclusion isométrique) et $z \in D_F$ un zéro de $f \in \mathcal{H}_{E,D_E}$, alors z est algébrique sur $\hat{E}$.

Si E est algébriquement clos, complet et si $f \in \mathcal{H}_{E,D_E}$ est sans zéro dans D_E, alors :

(3) $$|f(Z)|_{D_E} = |f(z)| \quad \text{pour tout } z \in D_E .$$

1.3.3.2- Démonstration de la proposition 1

Puisque L est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K, il existe $X \in L$, $X \notin K$ tel que L soit une extension algébrique finie de $\widehat{K(X)}$. Soit $Y \in F$, $Y \notin K$ nous allons montrer que $X \in \widehat{K(Y)}^{alg}$ ce qui montrera la proposition 1. Soient

(4) $$r_X = \inf_{x \in K} |X-x| \quad , \quad r_Y = \inf_{x \in K} |Y-x|$$

et $D = \{z \in (K(X)^{alg})^{\wedge} \mid |X-z| < r_X\}$. Pour chaque $f(Z) \in (K(X)^{alg})^{\wedge}(Z)$ sans pôle dans D il existe une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que x_i ne soit pas un pôle de f, que $\lim\limits_{i\to\infty} |X-x_i| = r_X$ et que

$$(5) \qquad |f(Z)|_D = \lim_{i\to+\infty} |f(x_i)| \,.$$

Soient $P(Z) = Z^d + a_1 Z^{d-1} + \ldots + a_d \in K(X)\hat{}[Z]$ tel que $P(Y) = 0$ et pour $1\le i\le d$, $(a_i^n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K(X)$ qui converge vers a_i et $f_n(Z) = Y^d + a_1^n(Z)\, Y^{d-1} + \ldots + a_d^n(Z) \in K[Y](Z)$. En vertu de (4), $a_i^n(Z)$ pour $1\le i\le d$ et $n\in\mathbb{N}$, est sans pôle dans D, il en est donc de même pour $f_n(Z)$, les relations (5) et (4) montrent que

$$(6) \qquad |f_n(Z)|_D \ge r_Y^d \,.$$

On a $f_n(X) = f_n(X) - P(Y) = (a_1^n(X) - a_1)\, Y^{d-1} + \ldots + (a_d^n(X) - a_d)$ par conséquent il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que (avec (6))

$$(7) \qquad |f_{n_o}(X)| < r_Y^d \le |f_{n_o}(Z)|_D \,.$$

Il résulte alors de (3) que $f_{n_o}(Z)$ a un zéro θ dans D et d'après (2) $\theta \in (K(Y)\hat{})^{alg}$. Soit $D_1 = \{z \in K(Y)\hat{}\,(\theta) / |z-\theta| < r_X\}$. D'après (4), $a_i^{n+1}(Z) - a_i^n(Z) \in K(Z)$ est sans zéro dans D, il suit donc de (3)

$$(8) \qquad |f_{n+1}(Z) - f_n(Z)|_{D_1} \le \max_i |a_i^{n+1}(Z) - a_i^n(Z)|_{D_1} |Y^i| = \max_i |a_i^{n+1}(Z) - a_i^n(Z)|_D |Y^i| = \max_i |a_i^{n+1}(X) - a_i^n(X)|\, |Y^i| \,.$$

La relation (8) montre que $(f_n(Z))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de $\mathcal{H}_{K(Y)\hat{}(\theta), D_1}$ et (6) montre que sa limite $f(Z)$ est non nulle. On a $f(X) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(X) = \lim\limits_{n\to\infty} [(a_i^n(X) - a_1)\, Y^{d-1} + \ldots + (a_d^n(X) - a_d)]$ qui est nulle, donc d'après (2), $X \in (K(Y)\hat{}(\theta))^{alg} = (K(Y)\hat{})^{alg}$.

<u>Dans ce qui suit le mot courbe algébrique désigne une variété algébrique, séparée, réduite, i.e. un schéma noethérien de type fini sur un corps, séparé, réduit, dont toutes les composantes irréductibles sont de dimension un.</u>

2. - Réduction et relèvement de courbes algébriques

2.1. - Réduction analytique des courbes algébriques

Ce paragraphe a pour but de rappeler les résultats que nous utiliserons sur la réduction analytique des courbes.

Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ une variété algébrique séparée réduite sur un corps K valué complet. On définit sur X une structure d'espace analytique rigide $(X^{an}, \mathcal{G}, \mathcal{O}_{X^{an}})$ ([9], [5], [7]). Définissons tout d'abord la topologie de Grothendieck $\mathcal{G}$.
Une partie U de X est admissible si $U = X$ ou s'il existe un ouvert affine (pour la topologie de Zariski) Y de X avec $\mathcal{O}_X(Y) = K[f_1, \dots, f_n]$ et $U = \{y \in Y \mid |f_1(y)| \leq 1, \dots, |f_n(y)| \leq 1\}$. Un recouvrement $\{U_i\}_{i \in I}$ de $U \neq X$ est dit admissible si U_i est admissible pour tout $i \in I$, si $U_i \subset U$ et s'il existe $I' \subset I$ une partie finie avec $\bigcup_{i \in I'} U_i = U$. Un recouvrement $\{X_i\}_i$ de X est dit admissible si X_i est admissible et si $\{X_i \cap U\}_i$ est un recouvrement admissible de U, pour tout $U \neq X$ admissible. Les admissibles et recouvrements admissibles définissent sur X une topologie de Grothendieck. On définit ensuite le faisceau structural $\mathcal{O}_{X^{an}}$ sur $(X, \mathcal{G})$. Soit $U \neq X$ un admissible défini par $U = \{y \in Y \mid |f_1(y)| \leq 1, \dots, |f_n(y)| \leq 1\}$ où Y est affine et $\mathcal{O}_X(Y) = K[f_1, \dots, f_n]$; soit alors $\mathfrak{A}$ le noyau de l'homomorphisme $K[T_1, \dots, T_n] \to K[f_1, \dots, f_n] = \mathcal{O}_X(Y)$ où T_i a pour image f_i. On pose alors $\mathcal{O}_{X^{an}}(U) = \dfrac{K\langle T \rangle}{\mathfrak{A}\, K\langle T \rangle}$. On a donc un homomorphisme dense de $\mathcal{O}_X(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{an}}(U)$, de plus cet homomorphisme induit une bijection de $\mathrm{Spm}(\mathcal{O}_{X^{an}}(U))$ sur $U \subset Y$. Enfin on pose $\mathcal{O}_{X^{an}}(X) = \varprojlim \mathcal{O}_{X^{an}}(U)$ où la limite projective est prise sur les admissibles $U \neq X$.

Alors $(X, \mathcal{G}, \mathcal{O}_{X^{an}})$ est un espace analytique rigide appelé l'analytification de X et noté X^{an}.

Soit $U \neq X$ un admissible, alors $(U, \mathcal{G}_{|U}, \mathcal{O}_{X^{an}|U})$ est un espace analytique affinoïde isomorphe à $\mathrm{Spm}\, \mathcal{O}_{X^{an}}(U)$. Si $V \subset U \neq X$ est une partie rationnelle de $U = \mathrm{Spm}\, \mathcal{O}_{X^{an}}(U)$ alors V est un admissible de X. Si $V \subset U \neq X$ est un admissible de X, alors V est une partie affinoïde de $U = \mathrm{Spm}\, \mathcal{O}_{X^{an}}(U)$.

Soient $U \neq X$ un admissible avec $U = \{y \in Y \mid |f_1(y)| \leq 1, \dots, |f_n(y)| \leq 1\}$, Y affine et $\mathcal{O}_X(Y) = K[f_1, \dots, f_n]$; $\|\cdot\|_U$ la semi-norme sur $\mathcal{O}_X(Y)$ définie par $\|f\|_U = \sup_{y \in U} |f(y)|$. Alors l'homomorphisme canonique de $\mathcal{O}_X(Y)$ dans $\mathcal{O}_{X^{an}}(U)$ induit un isomorphisme de $(\mathcal{O}_X(Y), \|\cdot\|_U)\hat{}$ (le séparé complété) sur $\mathcal{O}_{X^{an}}(U)$.

La proposition qui suit est l'outil essentiel pour étudier la réduction des courbes algébriques. Avant de l'énoncer nous rappelons quelques définitions.

DÉFINITION 5. - Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique sur K, on note $\mathcal{O}_{\mathcal{C}}$ le faisceau structural de $\mathcal{C}$, si $x \in \mathcal{C}$ on note $\mathcal{O}_{\mathcal{C},x}$ l'anneau local des germes de fonctions régulières en x. On note $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ l'anneau des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$.

DÉFINITION 6. - Soit K un corps valué complet, algébriquement clos ; on appelle norme de Gauss sur $K[X]$ associée à X, la norme notée $\| \cdot \|_X$ et définie pour $P(X) = \sum a_i X^i \in K[X]$ par $\| \sum a_i X^i \|_X = \max |a_i|$. Elle se prolonge à $K(X)$ en une valeur absolue toujours notée $\| \cdot \|_X$.

PROPOSITION 2. - Soient $\mathcal{C}$ une courbe algébrique sur K, irréductible, complète, non singulière, $\mathcal{C}^{an}$ l'espace analytique associé. Soient $f \in \mathcal{R}(\mathcal{C}) - K$, $\mathcal{C}_f = \{ x \in \mathcal{C} \,/\, f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},x} \}$, $R = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_f)$, $Z_f = \{ x \in \mathcal{C}_f \,/\, |f(x)| \leq 1 \}$ et $\| \cdot \|_{Z_f}$ la norme sur R définie par $\|u\|_{Z_f} = \max_{x \in Z_f} |u(x)|$. Soient $\overline{R}$ la k-algèbre résiduelle de la K-algèbre normée $(R, \| \cdot \|_{Z_f})$ et $\overline{f}$ l'image de f dans $\overline{R}$. Soient $| \cdot |_i$, $1 \leq i \leq s$, les valeurs absolues de $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ qui prolongent la norme de Gauss $\| \cdot \|_f$ sur $K[f]$ associée à f. Alors on a les résultats suivants :

1) Z_f est un ouvert affinoïde admissible de $\mathcal{C}^{an}$;

2) $\mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}}(Z_f) = (R, \| \cdot \|_{Z_f})^{\wedge}$ (complété de $(R, \| \cdot \|_{Z_f})$) ;

3) Il existe $\{e_1, \ldots, e_r\}$ une base de R sur $K[f]$ telle que $\| \sum \lambda_i e_i \|_{Z_f} = \max_i \|\lambda_i\|_f$ pour $\lambda_i \in K[f]$; ainsi on a $\mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}}(Z_f) = \bigoplus_i K\langle f \rangle e_i$ et $\mathrm{rg}_{K[f]} R = \mathrm{rg}_{k[\overline{f}]} \overline{R}$.

4) Pour tout $u \in R$ on a $\|u\|_{Z_f} = \max_i |u|_i = \max_i \|a_i(f)\|_{Z_f}^{1/i}$ où $\sum_i a_i(f) T^i \in K[f][T]$ est le polynôme unitaire irréductible de u sur $K[f]$.

Pour une démonstration de cette proposition nous renvoyons à ([9], p. 99).

2.2. - Le genre de la réduction des courbes

Soit toujours $\mathcal{C}$ une courbe algébrique irréductible, complète, non singulière sur K et $f \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$, $f \notin K$; alors le recouvrement d'affinoïdes $\mathcal{U} = \{Z(f), Z(\frac{1}{f})\}$ de $\mathcal{C}^{an}$ est pur et la proposition qui suit étudie la réduction de $\mathcal{C}^{an}$ relativement à ce recouvrement (cf. [9], p. 97).

PROPOSITION 3. - Soient $\mathcal{C}$ une courbe algébrique irréductible, complète, non singulière sur K, $\mathcal{R}(\mathcal{C}) = M$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^{an}$ l'espace analytique associé à $\mathcal{C}$. Soient $f \in M$, $f \notin K$, $\{ |\,.\,|_i ,\ 1 \leq i \leq s \}$ les valeurs absolues sur M qui prolongent $\|\,.\,\|_f$ la norme de Gauss associée à f sur $K[f]$, $M_i = (M, |\,.\,|_i)$ et $m_i = (M, |\,.\,|_i)^{-}$. Le recouvrement $\mathcal{U} = \{Z(f), Z(\frac{1}{f})\}$ de $\mathcal{C}^{an}$ est pur. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{C}^{an})^{-}_{\mathcal{U}}$ la réduction de $\mathcal{C}^{an}$ associée à $\mathcal{U}$, alors $\mathcal{S}$ est une courbe algébrique connexe, complète sur k dont l'anneau des fonctions rationnelles est $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_s$.

Démonstration. - Soient R la clôture intégrale de $K[f]$ dans M, $\mathcal{C}_f = \{x \in \mathcal{C} \,/\, f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C},x}\}$ alors $R = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_f)$. Soit $\|\,.\,\|_{Z_f}$ la norme sur R définie par $\|u\|_{Z_f} = \max_{x \in Z_f} |u(x)|$. La proposition 2, § 2.1, montre que $Z(f) = \mathrm{Spm}(R, \|\,.\,\|_{Z_f})^{\wedge}$ est un espace affinoïde et $\overline{R} = (R, \|\,.\,\|_{Z_f})^{-}$ est une k-algèbre de type fini. Soit $r : Z(f) \longrightarrow \overline{Z(f)}^{c}$ la réduction canonique de $Z(f)$, alors $Z(f) \cap Z(\frac{1}{f}) = \{ x \in Z(f) \,/\, |f(x)| = 1\} = r^{-1}(D_{\overline{f}})$ où $D_{\overline{f}} = \{y \in \overline{Z(f)}^{c} \mid \overline{f}(y) \neq 0\}$ est l'ouvert principal de $\overline{Z(f)}^{c}$ associé à $\overline{f}$. Ceci montre que $Z(f) \cap Z(\frac{1}{f})$ est un ouvert pur de $Z(f)$. Le recouvrement $\mathcal{U}$ est donc pur.

Une conséquence de GAGA ([23], [16] pour la version rigide) est que $\mathcal{C}$ connexe implique $\mathcal{S}$ connexe. De plus on déduit à l'aide de [20], proposition 1.1 et de GAGA, que $\mathcal{S}$ est une courbe algébrique complète.

Il nous reste donc à déterminer l'anneau $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ des fonctions rationnelles sur $\mathcal{S}$, pour cela remarquons que D_f est dense dans $\overline{Z(f)}^{c}$ et de même $D_{\overline{f}} = D_{\overline{1/f}}$ est dense dans $\overline{Z(\frac{1}{f})}^{c}$. On en déduit que $\overline{Z(f)}^{c}$ est dense dans $\mathcal{S}$. Par conséquent $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathrm{Fr}(\overline{R})$ (l'anneau total des fractions de $\overline{R}$). Le résultat découle du lemme suivant et de la proposition 2.

LEMME 1. - Soient M un corps de fonctions d'une variable sur K, $f \in M$, $f \notin K$, $(|\cdot|_i,\ 1 \leq i \leq s)$ les valeurs absolues sur M qui prolongent la norme de Gauss associée à f sur $K[f]$, $M_i = (M, |\cdot|_i)$, $m_i = \overline{(M, |\cdot|_i)}$ et $\|\cdot\|_{sp} \overset{\text{déf}}{=} \max_i |\cdot|_i$ appelée norme spectrale sur M. Soient $M^\circ = \{x \in M,\ \|x\|_{sp} \leq 1\}$, $M^{\circ\circ} = \{x \in M,\ \|x\|_{sp} < 1\}$, R la clôture intégrale de $K[f]$ dans M, $R^\circ = M^\circ \cap R$, $R^{\circ\circ} = M^{\circ\circ} \cap R$. Alors
$Fr(\frac{M^\circ}{M^{\circ\circ}}) = Fr(\frac{R^\circ}{R^{\circ\circ}}) = m_1 \times m_2 \times m_s$.

Démonstration. - Considérons le diagramme commutatif suivant où r, s sont

$$\begin{tikzcd}
M^\circ \arrow[r, two heads, "s"] \arrow[d, "\Delta"] & M^\circ/M^{\circ\circ} \arrow[d, "\delta"] \\
M_1^\circ \times M_2^\circ \times \dots \times M_s^\circ \arrow[r, two heads, "r"] & m_1 \times \dots \times m_s
\end{tikzcd}$$

les surjections canoniques, Δ l'homomorphisme diagonal et δ l'injection déduite par passage au quotient. En fait δ est un homomorphisme d'anneaux puisque le théorème d'approximation pour les valeurs absolues ([3], th. 2, p. 136) montre que la diagonale $\Delta(M^\circ)$ de $M_1^\circ \times \dots \times M_s^\circ$ est dense dans $M_1^\circ \times \dots \times M_s^\circ$. Pour achever la démonstration de ce lemme, il suffit de remarquer que tout élément $u \in M^\circ$ s'écrit sous la forme $\frac{u'}{S(f)}$ où $u' \in R^\circ$ et $S(f) \in K[f]$ avec $\|S(f)\|_f = 1$.

Soient M un corps de fonctions d'une variable sur K, $f \in M$, $f \notin K$ et $(M, |\cdot|_i)_{1 \leq i \leq s}$ le corps M muni des différents prolongements de la norme de Gauss sur $K[f]$ associée à f. Alors on peut exprimer le genre de M en fonction des genres des corps de fonctions $m_i = \overline{(M, |\cdot|_i)}$ sur k.

PROPOSITION 4. - Soient K un corps valué complet, algébriquement clos, M un corps de fonctions d'une variable sur K, $\mathcal{C}$ une courbe projective irréductible non singulière dont M est le corps des fonctions rationnelles ([14], p. 39-46). Soient $f \in M$, $f \notin K$, $\{|\cdot|_i\}_{1 \leq i \leq s}$ les valeurs absolues sur M qui prolongent la norme de Gauss $\|\cdot\|_f$ sur $K[f]$ associée à f, $M_i = (M, |\cdot|_i)$ et $m_i = \overline{M}_i$ le corps résiduel de M_i. Soient $\mathcal{U} = \{Z(f), Z(\frac{1}{f})\}$ le recouvrement pur de $\mathcal{C}^{an}$ associé à f (proposition 3), $\mathcal{S} = \overline{(\mathcal{C}^{an})}_{\mathcal{U}}$ la réduction de $\mathcal{C}^{an}$ relativement à $\mathcal{U}$. Si $p \in \mathcal{S}$, on note $\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{S},p}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{\mathcal{S},p}$ dans $\mathcal{R}(\mathcal{S})$. Soient $g(M)$ (resp. $g(m_i)$) le genre du corps M (resp. m_i).

1) On a la relation : $g(M) = 1 - s + \sum_{i=1}^{s} g(m_i) + \sum_{p \in \mathcal{S}} \dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{S},p}}{\mathcal{O}_{\mathcal{S},p}}$

2) On a : $g(M) \geq \sum_{i=1}^{s} g(m_i)$.

Démonstration. - Montrons la relation 1).

La proposition 3 montre que les composantes irréductibles de $\mathcal{C}$ sont au nombre de s, on les note, $(\mathcal{C}_i)_{1\leq i\leq s}$. Soit $\eta : \widetilde{\mathcal{C}} = \widetilde{\mathcal{C}}_1 \amalg \ldots \amalg \widetilde{\mathcal{C}}_s \longrightarrow \mathcal{C}$ la normalisation de $\mathcal{C}$ ($\widetilde{\mathcal{C}}_i$ est la normalisation de la courbe irréductible $\mathcal{C}_i$). Alors $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{C}}_i) = \mathcal{R}(\mathcal{C}_i) = m_i$ (proposition 3) et $g(m_i) = \dim_k H^1(\widetilde{\mathcal{C}}_i, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{C}}_i})$.

On sait calculer le genre arithmétique de $\mathcal{C}$ ([9], p. 158). En effet, considérons la suite exacte de faisceaux, $0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \eta_* \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{C}}} \longrightarrow A \longrightarrow 0$ où A est le faisceau gratte-ciel défini par $A_p = \dfrac{\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},p}}{\mathcal{O}_{\mathcal{C},p}}$, on en déduit avec la longue suite exacte de cohomologie la formule

$$(9) \qquad \dim_k H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}) = \dim_k H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}) - \dim_k H^0(\widetilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{C}}}) + \sum_{p\in\mathcal{C}} \dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},p}}{\mathcal{O}_{\mathcal{C},p}} + \dim_k H^1(\widetilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{C}}})$$

Mais $\dim_k H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}) = 1$, $\dim_k H^0(\widetilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{C}}}) = s$, $\dim_k H^1(\widetilde{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{C}}}) = \sum_{1\leq i\leq s} g(m_i)$ et le et le théorème 2.8, p. 17 de [1] montre que $\dim_k H^1(\mathcal{C}, \mathcal{O}_{\mathcal{C}}) = \dim_K H^1(\mathscr{C}^{an}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}^{an}})$ et GAGA ([23], [16]) montre que $\dim_K H^1(\mathscr{C}^{an}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}^{an}}) = \dim_K H^1(\mathscr{C}, \mathcal{O}_{\mathscr{C}})$ d'où la relation 1) avec (9).

Montrons la relation 2).

Il suffit pour cela de démontrer l'inégalité

$$(10) \qquad \sum_{p\in\mathcal{C}} \dim_k \frac{\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},p}}{\mathcal{O}_{\mathcal{C},p}} - s + 1 \geq 0 .$$

Soit n_p le nombre de composantes irréductibles de $\mathcal{C}$ qui passent par p, alors $n_p - 1 \leq \dim_k \dfrac{\widetilde{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},p}}{\mathcal{O}_{\mathcal{C},p}}$ et pour montrer (10) nous allons montrer l'inégalité plus forte

$$(11) \qquad \sum_{p\in\mathcal{C}} (n_p - 1) - s + 1 \geq 0 .$$

La démonstration de (11) se fait par récurrence sur le nombre s de composantes irréductibles de $\mathcal{C}$. Si $s = 1$ la relation est évidente. Supposons donc $s > 1$. Soit $\mathcal{C}_1$ une composante irréductible de $\mathcal{C}$, on note $p_1^1, p_1^2, \ldots, p_1^t$

les points de $\mathcal{E}_1$ par lesquels passent plus d'une composante irréductible. Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_r$ les composantes connexes de ces points dans $\bigcup_{i \neq 1} \mathcal{E}_i$. On note $(s_i)_{1 \leq i \leq r}$ le nombre de composantes irréductibles de $\mathcal{D}_i$, on a par hypothèse de récurrence

$$(12) \qquad \sum_{p \in \mathcal{D}_i \cap \mathcal{E}_1} (n_p - 2) + \sum_{p \in \mathcal{D}_i - (\mathcal{D}_i \cap \mathcal{E}_1)} (n_p - 1) - s_i + 1 \geq 0 ,$$

où n_p désigne toujours le nombre de composantes irréductibles de $\mathcal{E}$ passant par p. Sommons alors les inégalités (12), on a :

$$\sum_{p \in \mathcal{E}} (n_p - 1) = \sum_i \Big[\sum_{p \in \mathcal{D}_i \cap \mathcal{E}_1} (n_p - 1) + \sum_{p \in \mathcal{D}_i - (\mathcal{D}_i \cap \mathcal{E}_1)} (n_p - 1) \Big] \geq \sum_i s_i = s - 1$$

c'est-à-dire (11).

<u>Remarque</u>. - Sous les hypothèses de la proposition 4 une condition nécessaire et suffisante pour que $g(M) = g(m_1)$ est que les conditions suivantes soient réalisées :

a) La composante $\mathcal{E}_1$ est non singulière ;

b) Les composantes irréductibles de $\mathcal{E}$ autres que $\mathcal{E}_1$ sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_k$;

c) Les points d'intersection des composantes irréductibles de $\mathcal{E}$ sont des points d'intersection multiple ordinaire (i. e. : en un tel point p si n_p désigne le nombre de composantes irréductibles passant par p, on a :
$\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{E}, p} \cong \dfrac{K[[Z_1, \ldots, Z_{n_p}]]}{(Z_i Z_j)_{i<j}}$).

d) $\sum_{p \in \mathcal{E}} (n_p - 1) = s - 1$ où n_p désigne le nombre de composantes irréductibles passant par p .

Par suite, l'égalité $g(M) = g(m_1)$ n'implique pas l'unicité du prolongement à M de la norme de Gauss sur $K[f]$ associée à f .

COROLLAIRE. - <u>Soient</u> K <u>un corps algébriquement clos, valué, complet,</u> $L \supset K$ <u>un corps topologique de fonctions d'une variable sur</u> K . <u>Soient</u> k (<u>resp.</u> ℓ) <u>le corps résiduel de</u> K (<u>resp.</u> L) . <u>On suppose</u> $\ell \neq k$. <u>Alors</u> ℓ <u>est un corps de fonctions d'une variable sur</u> k <u>dont le genre satisfait</u> $g(\ell) \leq g_{top}(L)$.

<u>Démonstration</u>. - Soit M un corps de fonctions d'une variable sur K tel que $\hat{M} = L$ (complété de M pour la valeur absolue induite par L). Soit $\bar{f} \in \ell - k$ et f un relèvement de $\bar{f}$ dans M , alors la valeur absolue sur L induit la norme de Gauss sur $K[f]$ associée à f et L est le complété de M pour une valeur absolue prolongeant la norme de Gauss sur $K[f]$ associée à f , et pour cette valeur absolue le corps résiduel de M est ℓ . On peut donc appliquer la relation 2) de la proposition 4, par suite $g(M) \geq g(\ell)$. D'où le résultat.

2. 3. - <u>Relèvement d'une courbe algébrique plane</u>

DÉFINITION 7. - Soit X_o une variété algébrique projective sur un corps k ; soit A un anneau local nœthérien complet de corps résiduel k . Un <u>relèvement</u> <u>de</u> X_o sur A est un schéma X propre et plat sur A , tel que $X \times_A k$ soit isomorphe à X_o .

D'après Grothendieck ([12]) l'existence d'un relèvement est assurée dans le cas où X_o est une courbe lisse ou plus généralement si X_o est lisse et si certains groupes de cohomologie sur X_o sont nuls.

On sait, d'après Serre ([24]) que pour certaines variétés X_o sur k (car $k = p > 0$) il n'existe pas d'anneau A (avec car $A = 0$) pour lequel X_o admette un relèvement.

La notion de relèvement d'une variété algébrique X_o sur k s'étend de manière évidente au cas où A est l'anneau de valuation d'un corps algébriquement clos valué complet.

Le théorème qui suit est un théorème de relèvement de courbes planes avec des conditions sur les singularités.

THÉORÈME 1. - Soient K un corps algébriquement clos, valué complet, k son corps résiduel, $\mathscr{C}$ une courbe projective irréductible de $\mathbb{P}^2_k$ définie par le polynôme homogène $f(X, Y, T)$. Soient $p_i = \ulcorner x_i, y_i, t_i \urcorner$, $1 \leq i \leq m$ les points singuliers de $\mathscr{C}$; on suppose que $p_1, \dots, p_m$ sont des points doubles ordinaires. Alors il existe une courbe projective intègre $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2_K$ définie par un polynôme homogène $F(X, Y, T) \in K^\circ[X, Y, T]$ avec les propriétés suivantes :

1) On a $f(X, Y, T) = \overline{F}(X, Y, T)$ où $\overline{F}$ est l'image canonique de F dans $k[X, Y, T]$.

2) La courbe $\mathcal{C}$ admet m points singulièrs $P_i = \ulcorner X_i, Y_i, T_i \urcorner$, ce sont des points doubles ordinaires et on a $p_i = \ulcorner \overline{(\frac{X_i}{u_i})}, \overline{(\frac{Y_i}{u_i})}, \overline{(\frac{T_i}{u_i})} \urcorner$, où $u_i \in K$ avec $|u_i| = \max(|X_i|, |Y_i|, |T_i|)$.

Démonstration. -

Si car K = car k . - Il existe $k' \subset K$ un sous-corps de K tel que l'application de réduction $r : k' \longrightarrow k'^\circ/k'^{\circ\circ} = \overline{k'} \hookrightarrow k$ soit un isomorphisme entre k' et k. On note s l'application réciproque. Soit $f(X, Y, T) = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} X^i Y^j T^k$ alors $F(X,Y,T) = \sum_{i+j+k=d} s(a_{ijk}) X^i Y^j T^k$ convient.

Si car $K = 0$ et car $k = p > 0$. - Quitte à faire un changement linéaire des variables, on se ramène au cas où les points singuliers $p_i = \ulcorner x_i, y_i, t_i \urcorner$ vérifient $t_i = 1$ pour $1 \leq i \leq m$, ce qui ramène la recherche de F à un problème affine.

Pour simplifier les expressions nous posons $f(X, Y, 1) = \sum_{i+j \leq d} a_{ij} X^i Y^j$.

La construction de F se fait par approximations successives, pour cela nous utilisons le lemme suivant qui permet de travailler dans un anneau de valuation discrète.

LEMME 2 ([6], p. 6). Soient K un corps valué complet, k son corps résiduel. Alors il existe $K_1 \subset K$ un sous-corps fermé tel que la valeur absolue induite par K sur K_1 soit discrète et que k soit une extension algébrique purement inséparable de k_1 , le corps résiduel de K_1 . Si K est algébriquement clos, on peut choisir K_1 tel que $k_1 = k$.

Soit K_1 un sous-corps de K discrètement valué (i.e. $|K_1^{\times}| \simeq \mathbb{Z}$) tel que $\frac{K_1^{\circ}}{K_1^{\circ\circ}} = k$. On note π une uniformisante de K_1°. Si $u \in K^{\circ}$, on note $\overline{u}$ son image dans k et si $Q(T_i) \in K^{\circ}[T_i]_{i\in I}$, $\overline{Q}(T_i) \in k[T_i]_{i \in I}$ désigne le polynôme dont les coefficients sont les images résiduelles des coefficients de $Q(T_i)$.

Soit $F(X, Y, Z_{ij}) = \sum_{i+j\leq d} Z_{ij} X^i Y^j \in \mathbb{Z}[X, Y, Z_{ij}]_{i+j\leq d}$. Pour construire $F(X, Y, T)$ on procède par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons construits pour tout s, $1 \leq s \leq n$, m points $P_t^s = (x_t^s, y_t^s, z_{ij}^s)_{i,j}$, $1 \leq t \leq m$ tels que

$$(13) \begin{cases} \text{i)} \ x_t^s, y_t^s, z_{ij}^s \in K_1^{\circ} \quad \text{si } 1 \leq t \leq m \quad \text{et} \quad 0 \leq i+j \leq d \\ \text{ii)} \ \overline{x_t^1} = x_t, \ \overline{y_t^1} = y_t, \ \overline{z_{ij}^1} = a_{ij} \\ \text{iii)} \ x_t^s \equiv x_t^{s-1} (\pi^{s-1}), \ y_t^s \equiv y_t^{s-1} (\pi^{s-1}), \ z_{ij}^s \equiv z_{ij}^{s-1} (\pi^{s-1}) \quad \text{pour } 1 < s \leq n \\ \text{iv)} \ F(P_t^s) \equiv 0 \, (\pi^s), \ F'_X(P_t^s) \equiv 0 \, (\pi^s), \ F'_Y(P_t^s) \equiv 0 \, (\pi^s) \quad \text{pour } 1 \leq s \leq n. \end{cases}$$

Nous allons construire $P_t^{n+1} = (x_t^{n+1}, y_t^{n+1}, z_{ij}^{n+1})$ pour $1 \leq t \leq m$, tels que les conditions (13) soient réalisées au rang $n+1$. Pour cela posons pour $1 \leq t \leq m$

$$(14) \begin{cases} x_t^{n+1} = x_t^n + \pi^n \delta(x_t), & \delta(x_t) \in K_1^{\circ} \\ y_t^{n+1} = y_t^n + \pi^n \delta(y_t), & \delta(y_t) \in K_1^{\circ} \\ z_y^{n+1} = z_{ij}^n + \pi^n \delta(z_{ij}), & \delta(z_{ij}) \in K_1^{\circ}. \end{cases}$$

Appliquons la formule de Taylor. Avec (14) on a

$$(15) \begin{cases} F(P_t^{n+1}) = F(P_t^n) + F'_X(P_t^n)\pi^n \delta(x_t) + F'_Y(P_t^n)\pi^n \delta(y_t) + \sum_{i,j} F'_{Z_{ij}}(P_t^n)\pi^n \delta(z_{ij}) + \varepsilon \pi^{n+1} \\ \text{où } \varepsilon \in K_1^{\circ}. \end{cases}$$

Puis par division par π^n et réduction modulo $K_1^{\circ\circ}$ on obtient avec (13) et (15)

$$(16) \quad \sum_{i,j} x_t^i y_t^j \overline{\delta(z_{ij})} = \overline{\pi^{-n} F(P_t^{n+1})} - \overline{\pi^{-n} F(P_t^n)}.$$

La même méthode appliquée à F'_X et F'_Y fournit les équations

$$(17)\quad \sum_{i,j} i\, x_t^{i-1} y_t^j\, \overline{\delta(z_{ij})} + f''_{X^2}(p_t)\, \overline{\delta(x_t)} + f''_{YX}(p_t)\, \overline{\delta(y_t)} = \overline{\pi^{-n} F'_X(P_t^{n+1})} - \overline{\pi^{-n} F'_X(P_t^n)}$$

$$(18)\quad \sum_{i,j} j\, x_t^{i} y_t^{j-1}\, \overline{\delta(z_{ij})} + f''_{XY}(p_t)\, \overline{\delta(x_t)} + f''_{Y^2}(p_t)\, \overline{\delta(y_t)} = \overline{\pi^{-n} F'_Y(P_t^{n+1})} - \overline{\pi^{-n} F'_Y(P_t^n)}\ .$$

Considérons les équations (16), (17, (18). Les conditions (13) seront réalisées au rang n+1 si et seulement si le système suivant d'équations aux inconnues $\delta(x_t)$, $\delta(y_t)$, $\delta(z_{ij})$ pour $1 \leq t \leq m$ et $0 \leq i+j \leq d$ admet une solution dans k

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j} x_t^i y_t^j\, \overline{\delta(z_{ij})} = -\overline{\pi^{-n} F(P_t^n)} \\ \displaystyle\sum_{i,j} i\, x_t^{i-1} y_t^j\, \overline{\delta(z_{ij})} + f''_{X^2}(p_t)\, \overline{\delta(x_t)} + f''_{YX}(p_t)\, \overline{\delta(y_t)} = -\overline{\pi^{-n} F'_X(P_t^n)} \\ \displaystyle\sum_{i,j} j\, x_t^i y_t^{j-1}\, \overline{\delta(z_{ij})} + f''_{XY}(p_t)\, \overline{\delta(x_t)} + f''_{Y^2}(p_t)\, \overline{\delta(y_t)} = -\overline{\pi^{-n} F'_Y(P_t^n)}\ . \end{cases}$$

Il suffit en effet de choisir pour $\delta(x_t)$, $\delta(y_t)$, $\delta(z_{ij})$ des relèvements dans K_1° d'une solution de (19).

Nous allons montrer que (19) est toujours résoluble, en effet, soit $\mathcal{M}(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ la matrice à m lignes et $\frac{(d+1)(d+2)}{2}$ colonnes dont la $t^{\text{ième}}$-ligne est constituée des monômes $x_t^\alpha\, y_t^\beta$ avec $0 \leq \alpha+\beta \leq d$. Alors le lemme qui suit montre que le rang de $\mathcal{M}(p_1, \ldots, p_m)$ est m et on conclut en remarquant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} f''_{X^2}(p_t) & f''_{YX}(p_t) \\ f''_{XY}(p_t) & f''_{Y^2}(p_t) \end{vmatrix}$$

est non nul puisque p_t est un point double ordinaire.

Pour un énoncé plus général du lemme qui suit nous renvoyons à ([8], ex. 8.32, p. 213). Ce lemme est une conséquence du théorème de Riemann-Roch.

LEMME 3 ([8]). - Soit k un corps algébriquement clos. Soit $\mathcal{C}$ une courbe projective plane irréductible de degré d, sur k. On suppose que les points singuliers $p_1, \dots, p_m$ de $\mathcal{C}$ sont des points doubles ordinaires. Soit

$$V(d, p_1, p_2, \dots, p_m) = \left\{ f \in k[X, Y, T] \,/\, \begin{array}{l} f \text{ est homogène de degré } d \\ \text{et } f(p_i) = 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq m \end{array} \right\}.$$

Alors $V(d, p_1, p_2, \dots, p_m) \cup \{0\}$ est un sous-espace vectoriel de $k^{(d(d+3)/2)+1}$ de dimension $\frac{d(d+3)}{2} - m + 1$.

La suite $(P_t^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente (pour tout t), soit $P_t^\infty = (X_t, Y_t, A_{ij})$ sa limite et soit P_t le point de $\mathbb{P}_K^2$ de coordonnées projectives $\ulcorner X_t, Y_t, 1 \urcorner$ pour $1 \leq t \leq m$ et $F(X, Y, T) = \sum_{0 \leq i+j \leq d} A_{ij} X^i Y^j T^{d-(i+j)} \in K[X, Y, T]$.

Les conditions (13) montrent que $F(X, Y, T)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$(20) \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & F(X,Y,T) \in K^\circ[X,Y,T] \text{ est homogène irréductible de degré } d \text{ et} \\ & \overline{F}(X,Y,T) = f(X,Y,T); \\ \text{ii)} & F(P_t) = F'_X(P_t) = F'_Y(P_t) = 0 \text{ pour } 1 \leq t \leq m; \\ \text{iii)} & \text{les points } P_t \text{ sont deux à deux distincts} \\ \text{iv)} & \text{le déterminant } \begin{vmatrix} F''_{X^2}(P_t) & , & F''_{YX}(P_t) \\ F''_{XY}(P_t) & , & F''_{Y^2}(P_t) \end{vmatrix} \text{ est non nul.} \end{array} \right.$$

Montrons maintenant que les seuls points singuliers de la courbe plane $\mathcal{C}$ définie par le polynôme homogène $F(X, Y, T)$ sont les points P_t, $1 \leq t \leq m$.

En effet, soit $P = \ulcorner X_o, Y_o, T_o \urcorner$ un point singulier. Nécessairement puisque $\mathcal{C}$ n'a de points singuliers qu'à distance finie on a $|T_o| = \max(|X_o|, |Y_o|)$. On peut donc supposer que $T_o = 1$ et $|X_o| \leq 1$, $|Y_o| \leq 1$. D'autre part, puisque $F(X, Y, T) \in K_1[X, Y, T]$, X_o et Y_o sont dans une extension algébrique finie de K_1 et donc dans un corps de valuation discrète, on peut supposer que X_o et $Y_o \in K_1$. Le point $\overline{P} = \ulcorner \overline{X}_o, \overline{Y}_o, 1 \urcorner$ est un point singulier de $\mathcal{C}$ donc $\overline{P} = p_{t_o}$. Si $P \neq P_{t_o}$, il existe n tel que $P = P_{t_o} + \pi^n \delta P$ où $\delta P = (\delta x, \delta y)$ avec $\max(|\delta(x)|, |\delta y|) = 1$. La formule de Taylor appliquée à F'_X et F'_Y montre que

$$\overline{\delta x}\ \overline{F''_{X^2}(P_{t_o})} + \overline{\delta y}\ \overline{F''_{XY}(P_{t_o})} = 0$$
$$\overline{\delta x}\ \overline{F''_{XY}(P_{t_o})} + \overline{\delta y}\ \overline{F''_{Y^2}(P_{t_o})} = 0$$

ce qui montre que p_{t_o} n'est pas un point double ordinaire de $\mathcal{B}$ contrairement à l'hypothèse. Par suite $P = P_{t_o}$.

On déduit alors avec (20) que le polynôme F ainsi construit satisfait aux conditions 1) et 2) du théorème 1.

Remarque. - Soit $\mathfrak{X} = \operatorname{Proj} \dfrac{K^\circ[X, Y, T]}{(F(X, Y, T))}$ alors $\mathfrak{X} \times_{K^\circ} k = \mathcal{B}$ et $\mathfrak{X} \times_{K^\circ} K = \mathcal{C}$, $\mathfrak{X}$ est donc un relèvement de $\mathcal{B}$ sur K° .

COROLLAIRE. - Soient K un corps algébriquement clos, valué, complet, $L \supset K$ un corps valué complet pour une valeur absolue $|\,.\,|$ prolongeant celle de K . Soient k (resp. ℓ) les corps résiduels de K (resp. L). On suppose que ℓ est un corps de fonctions d'une variable sur k , alors il existe $M \subset L$ un corps de fonctions d'une variable sur K vérifiant les propriétés suivantes :

1) le corps résiduel de $(M , |\,.\,|)$ est ℓ ;

2) $g(M) = g(\ell)$.

Démonstration. - Nous montrons d'abord qu'il existe $f(X, Y, T) = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} X^i Y^j T^k \in k[X, Y, T]$ homogène de degré d , irréductible avec $a_{o,d,o} = 1$ et $\overline{x} \in \ell$, $\overline{y} \in \ell$ avec les propriétés suivantes :

i) $\ell = k(\overline{x})(\overline{y})$ où $f(\overline{x}, \overline{y}, 1) = 0$ et l'extension ℓ de $k(\overline{x})$ est séparable ;

ii) les points singuliers de la courbe $V(f) \subset \mathbb{P}_k^2$ sont des points doubles ordinaires.

En effet, considérons la courbe projective irréductible, non singulière $\mathcal{C}_\ell$ sur k dont le corps des fonctions rationnelles est ℓ ([14], p. 39 à 46). Soit alors $\mathcal{C}'_\ell$ une courbe projective plane irréductible birationnellement équivalente à $\mathcal{C}_\ell$ et dont les points singuliers sont des points doubles ordinaires ([14], p. 314). Soit $f(X, Y, T) = \sum_{i+j+k=d} a_{ijk} X^i Y^j T^k \in k[X, Y, T]$ un polynôme irréductible avec $\mathcal{C}'_\ell = V(f) \subset \mathbb{P}_k^2$. Quitte à faire un changement de coordonnées projectives on peut supposer que $a_{o,d,o} = 1$.

Par construction on a $\ell = k(\bar{x})[\bar{y}]$ avec $\bar{x} \in \ell$, $\bar{y} \in \ell$ algébrique, de degré d sur $k(\bar{x})$, plus précisément $f(\bar{x}, \bar{y}, 1) = 0$.

Si $\operatorname{car} k = 0$ alors i) et ii) sont vérifiées par $f(X, Y, T)$, $\bar{x}$, $\bar{y}$.

Supposons donc que $\operatorname{car} k = p > 0$ et que $f'_Y = 0$, c'est-à-dire que l'extension ℓ de $k(\bar{x})$ ne soit pas séparable.

Soient $u \in k$ et $h^u(X, Y) = f(X+uY, Y, 1)$. Pour une infinité de valeurs de u, h^u est un polynôme de degré d en Y. De plus $h^{u'}_Y(X, Y) = u f'_X(X+uY, Y, 1)$. Si pour une infinité de valeurs de u, $h^{u'}_Y = 0$, alors $f'_X = 0$ et donc $f(X, Y, 1) = g(X^p, Y^p)$ où $g(X, Y) \in k[X, Y]$, ce qui est impossible puisque f est irréductible et k algébriquement clos. Soit $u_o \in k$ tel que $h^{u_o}(X, Y) = f(X+u_oY, Y, 1)$ soit de degré d en Y et tel que $(h^{u_o}_Y)' \neq 0$. Alors l'extension $\ell = k(\bar{x}-u_o\bar{y})[\bar{y}]$ de $k(\bar{x}-u_o\bar{y})$ est séparable de degré d et $h^{u_o}(\bar{x}-u_o\bar{y}, \bar{y}) = 0$.

Soit $h_1(X, Y, T) = T^d h^{u_o}(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T})$ alors la courbe $V(f) \subset \mathbb{P}^2_k$ est isomorphe à la courbe $V(h_1) \subset \mathbb{P}^2_k$. Ainsi, quitte à changer $f(X, Y, T)$ en $h_1(X, Y, T)$, $\bar{x}$ en $\bar{x}-u_o\bar{y}$, les conditions i) et ii) sont satisfaites.

Construction du corps M satisfaisant le corollaire

On applique le théorème 1 à la courbe $\mathcal{S} = V(f) \subset \mathbb{P}^2_k$. Soient $F(X, Y, T) \in K^\circ[X, Y, T]$ et $\mathcal{C} = V(F) \subset \mathbb{P}^2_K$ construits au théorème 1 et considérons $x \in L$ un relèvement de $\bar{x} \in \ell$. Alors le polynôme $F(x, Y, 1) \in K(x)^\circ[Y] \subset L^\circ[Y]$ a pour image résiduelle $f(\bar{x}, Y, 1) \in k(\bar{x})[Y] \subset \ell[Y]$ et le polynôme $f(\bar{x}, Y, 1)$ est un polynôme séparable de degré d dont $\bar{y}$ est une racine simple (condition i)). Le lemme de Hensel montre alors que $F(\bar{x}, Y, 1)$ admet une racine $y \in L$ telle que l'image résiduelle de y soit $\bar{y}$.

Soit $M = K(x)[y]$. La condition 1 du corollaire est clairement satisfaite.

Puisque $\ell \simeq \mathcal{R}(\mathcal{S})$ (le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{S} = V(f)$) et que $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}^2_k$ est de degré d avec m points doubles ordinaires (condition ii)) alors ([8], prop. 5)

$$g(\ell) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - m \quad . \tag{21}$$

De même, $M = \mathcal{R}(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C} = V(F) \subset \mathbb{P}^2_K$ est de degré d avec exactement m points doubles ordinaires (théorème 1) et donc $g(M) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - m$, ce qui avec (21) montre que M satisfait la condition 2.

3. - Le genre topologique d'un corps topologique de fonctions d'une variable du type 2 et du type 3

Nous montrons que si L est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du type 2 ou du type 3 (cf. § 1.3.2) alors le genre topologique de L est nul.

On fixe dans ce paragraphe un élément X de L transcendant sur K. Alors L est une extension algébrique finie de $K(X)\hat{}$ (prop. 1, § 1.3.3).

Nous allons construire $Y \in L$ tel que $L = K(Y)\hat{}$. La démonstration se fait par récurrence sur le degré de l'extension L de $K(X)\hat{}$. Les démonstrations sont essentiellement les mêmes si L est du type 2 ou 3 mais cependant plus délicates dans le cas du type 3.

3.1. - Le corps topologique L est du type 2 (ramifié)

On montre le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soient K un corps valué, complet algébriquement clos, $L \supset K$ un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du type 2, alors $g_{top}(L) = 0$.

Remarque 1. - Si K est muni de la valeur absolue triviale, ce résultat est équivalent à l'énoncé bien connu : "Toute extension algébrique finie d'un corps local d'égale caractéristique est un corps local".

Remarque 2. - Le théorème 2 est démontré dans [20] dans le cas où K est algébriquement clos et maximalement complet.

La démonstration nécessite plusieurs pas. Dans un premier temps (§ 3.1.1) nous démontrons un lemme fondamental qui sera utilisé dans chaque pas de la démonstration ; il donne une condition suffisante pour qu'un élément $Y \in K(X)^{\hat{}alg}$ vérifie $K(Y)\hat{} = K(X)\hat{}$ (lemme 6). Dans un deuxième temps (§ 3.1.2) nous démontrons un lemme de structure des extensions algébriques de $K(X)\hat{}$ de degré non divisible par la caractéristique résiduelle de K lorsque celle-ci est non nulle (lemme 8) ; nous obtenons ainsi le théorème 2 pour de telles extensions.

Dans un troisième temps (§ 3.1.3) nous démontrons le théorème 2 dans le cas où l'extension L de $K(X)^{\wedge}$ est cyclique de degré p égal à la caractéristique résiduelle de K lorsque celle-ci est non nulle. Nous sommes amenés, comme il est usuel dans ce genre de situation, à distinguer le cas où $\operatorname{car} K = p$ (théorie d'Artin-Schreier) et le cas où $\operatorname{car} K = 0$ (théorie de Kummer). Dans le § 3.1.4, nous traitons le cas des extensions galoisiennes de $K(X)^{\wedge}$, puis dans le § 3.1.5, le cas général.

3.1.1. - Lemmes généraux

LEMME 4. - Soient E un corps valué complet, F une extension algébrique finie de E, $[F : E]$ le degré de F sur E, p la caractéristique résiduelle de E, $p_1 = \max(p, 1)$, e l'indice de ramification de F sur E et f le degré résiduel de F sur E. Alors il existe un entier d défini par : $[F : E] = e f p_1^d$.

C'est le "Defecktsatz" d'Ostrowski ([19], [3], § 8, ex. 9).

Nous énonçons maintenant un lemme qui donne une condition suffisante pour que $Y \in K(X)^{\wedge}$ vérifie $K(Y)^{\wedge} = K(X)^{\wedge}$. La démonstration utilise d'une part la densité de $K[X, \frac{1}{X}]$ dans $K(X)^{\wedge}$, puis le lemme de Hensel sur les corps valués. Il est intéressant de rapprocher ce lemme de la proposition 1, § 1.3.3.

LEMME 5. - Soient K un corps valué complet et algébriquement clos et $K(X)$ une extension valuée transcendante de K du type 2. On suppose de plus que $|X| = \inf_{x \in K} |X-x|$, c'est-à-dire que $|X| \notin |K^{\times}|$. Soit $Y \in K(X)^{\wedge}$ tel que $|Y-X| < |X|$, alors $K(X)^{\wedge} = K(Y)^{\wedge}$.

Démonstration. - Soit $\pi \in K$ avec $0 < |\pi| < |X|$, alors il existe $b_{\pi} \in K(X)^{\wedge}$ et $P(Z) = \sum_{-d \leq n} a_n Z^n \in K[Z, \frac{1}{Z}]$, $d \in \mathbb{N}$ tels que :

$$(22) \qquad Y = P(X) + b_{\pi} \quad \text{et} \quad |b_{\pi}| < |\pi| .$$

Puisque $|Y-X| < |X|$, on a avec (22)

$$(23) \qquad \begin{cases} |a_1 - 1| < 1 \\ |a_n X^n| < |X| \quad \text{pour } n \neq 1 . \end{cases}$$

Soit $Q(Z) = Z^d(\sum_{-d\leq n} a_n Y^{n-1} Z^n - 1)$ alors (23) montre que $Q(Z) \in K(Y)^{\hat{}\circ}[Z]$. Le corps résiduel de $K(Y)^{\hat{}}$ est k puisque $K(X)^{\hat{}}$ est une extension finie de $K(Y)^{\hat{}}$, et l'image résiduelle $\bar{Q}(Z)$ de $Q(Z)$ dans $k[Z]$ est $\bar{Q}(Z) = Z^d(Z-1)$. Le lemme de Hensel appliqué au polynôme $Q(Z)$ montre alors qu'il existe $c \in K(Y)^{\hat{}}$, $\alpha_\pi \in K(Y)^{\hat{}}$, $\alpha_i, \beta_j \in K(Y)^{\hat{}alg}$ tels que :

$$(24) \qquad \begin{cases} |c-1| < 1 \,, \quad |\alpha_\pi - 1| < 1 \,, \quad |\alpha_i| < 1 \,, \quad |\beta_j| < 1 \\ \text{et} \\ Q(Z) = c(Z-\alpha_\pi) \prod_i (Z-\alpha_i) \prod_i (1-\beta_j Z) \end{cases}$$

mais avec (22) on a

$$(25) \qquad Q(\frac{X}{Y}) = (\frac{X}{Y})^d(-\frac{b_\pi}{Y}) \, .$$

De (24) et (25) il résulte alors que $|X-\alpha_\pi Y| = |b_\pi| < |\pi|$. On conclut en faisant tendre $|\pi|$ vers 0 que $X \in K(Y)^{\hat{}}$.

LEMME 6. - <u>Les hypothèses sont celles du lemme</u> 5. <u>Soit</u> p <u>la caractéristique résiduelle de</u> K. <u>Soit</u> $s \in \mathbb{N}^*$, <u>tel que</u> p <u>ne divise pas</u> s <u>si</u> $p > 0$ (<u>sans condition si</u> $p = 0$). <u>Soit</u> $Y \in K(X)^{\hat{}alg}$ <u>tel que</u> $Y^s \in K(X)^{\hat{}}$ <u>et</u> $|Y^s - X^s| < |X|^s$. <u>Alors</u> $K(Y)^{\hat{}} = K(X)^{\hat{}}$.

<u>Démonstration</u>. - On peut écrire Y^s sous la forme $Y^s = X^s(1+\rho)$ où $\rho \in K(X)^{\hat{}}$ et $|\rho| < 1$. Si $p > 0$ et p ne divise pas s il existe $T \in K(X)^{\hat{}}$ tel que $1+\rho = (1+T)^s$. Par conséquent, il existe $\zeta \in K$ une racine s-ième de l'unité telle que $Y = \zeta X(1+T)$ et donc $|\zeta^{-1}Y - X| < |X|$; le lemme 5 permet alors de conclure.

LEMME 7. - <u>Soient</u> K <u>un corps valué complet</u>, <u>algébriquement clos</u>, $K(X)$ <u>une extension valuée transcendante de</u> K <u>du type</u> 2 . <u>Soit</u> L <u>une extension algébrique finie de</u> $K(X)^{\hat{}}$, <u>alors le groupe</u> $\dfrac{|L^*|}{|K(X)^*|}$ <u>est cyclique</u>.

C'est une conséquence immédiate de la structure des sous-groupes finis de $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ puisque K est algébriquement clos.

3.1.2. - Le corps L est une extension de $K(X)^{\wedge}$ de degré n non divisible par la caractéristique résiduelle p de K, lorsque $p>0$

Soit L une telle extension et soit $Y \in K(X)^{\wedge alg}$ tel que $Y^n = X$; nous allons montrer que $L = K(Y)^{\wedge}$.

LEMME 8. - Soient K un corps valué complet, algébriquement clos, $K(X)$ une extension valuée transcendante de K du type 2. On suppose que $|X| \notin |K^{\times}|$. Soient p la caractéristique résiduelle de K et $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que p ne divise pas n si $p>0$. Soit $Y \in K(X)^{\wedge alg}$ tel que $Y^n = X$. Alors $K(Y)^{\wedge}$ est l'unique extension de degré n de $K(X)^{\wedge}$, le groupe $\dfrac{|K(Y)^{\times}|}{|K(X)^{\times}|}$ est cyclique d'ordre n.

Démonstration. - Soit L une extension de $K(X)^{\wedge}$ de degré n, les lemmes 4 et 7 montrent que le groupe $\dfrac{|L|^{\times}}{|K(X)^{\times}|}$ est cyclique de cardinal n (parce que le corps résiduel de $K(X)^{\wedge}$ est celui de K qui est algébriquement clos). Soient donc $\pi \in L$ avec $|\pi|^n = |X|$ et $Y \in K(X)^{\wedge alg}$ avec $Y^n = X$. Considérons le polynôme $Z^n - \dfrac{X}{\pi^n} \in \overset{\circ}{L}[Z]$, il est résiduellement totalement décomposé (car p ne divise pas n si $p \neq 0$). Le lemme de Hensel montre alors que $Y \in L$ et puisque $[K(X)^{\wedge}[Y] : K(X)^{\wedge}] = n$, on a $L = K(X)^{\wedge}[Y] = K(Y)^{\wedge}$.

3.1.3. - La caractéristique résiduelle de K est $p>0$ et L est une extension cyclique de degré p de $K(X)^{\wedge}$

On a le résultat suivant :

LEMME 9. - Soient K un corps valué complet, algébriquement clos, $K(X)$ une extension valuée transcendante de K du type 2. On suppose que la caractéristique résiduelle de K est $p>0$. Soit L une extension cyclique de degré p de $K(X)^{\wedge}$, alors il existe $Y \in L$ tel que $K(Y)^{\wedge} = L$ et que le groupe $\dfrac{|L^{\times}|}{|K(X)^{\times}|}$ soit cyclique d'ordre p.

Démonstration. - Quitte à faire une translation sur X par un élément de K, on peut supposer que $|X| \notin |K^{\times}|$.

a) <u>La caractéristique de</u> K <u>est aussi</u> p

La théorie d'Artin-Schreier et le lemme de Hensel montrent qu'il existe $P(X) \in K[X, \frac{1}{X}]$ tel que L soit l'extension définie par une racine de l'équation :

$$(26) \qquad Z^p - Z - P(X) = 0 \ .$$

Ecrivons $P(X)$ sous la forme $P(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i = \sum_{r \in \mathbb{N}} \sum_{p \nmid t} a_{tp^r} X^{tp^r}$ ($p \nmid t$ signifie que p ne divise pas t). Soient $b_{tp^r} \in K$ tel que $b_{tp^r}^{p^r} = a_{tp^r}$ si $p \nmid t$ et $\alpha_t = \sum_r b_{tp^r}$, posons alors

$$(27) \qquad Q(X) = \sum_{p \nmid t} \alpha_t X^t \ ,$$

et considérons l'équation suivante :

$$(28) \qquad Z^p - Z - Q(X) = 0 \ .$$

Alors il résulte de (27) après un calcul élémentaire que $P(X) - Q(X) = R(X)^p - R(X)$ où $R(X) = \sum_{\substack{r \geq 1 \\ p \nmid t}} \sum_{0 \leq s \leq r-1} (b_{tp^r} X^t)^{p^s}$ et (26) et (28) définissent la même extension $L = K(X)\hat{}(T)$ où T est racine de (28). Mais puisque le polynôme $Z^p - Z - Q(X) \in K(X)\hat{}[Z]$ est irréductible, on a $|T|^p = |Q(X)| = |\alpha_{t_o} X^{t_o}|$ où $p \nmid t_o$ par suite le groupe $\frac{|L^*|}{|K(X)^*|}$ est cyclique d'ordre p.

<u>Montrons maintenant qu'il existe</u> $Y \in L$ <u>tel que</u> $L = K(Y)\hat{}$

Soit $S \in K(X)^{\hat{}alg}$ tel que $S^{t_o} = Q(X)$, le lemme 6 montre que $K(S)\hat{} = K(X)\hat{}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& L = K(X)\hat{}(T) \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\
K(X)\hat{} = K(S)\hat{} \arrow[dr, no head] & & K(T)\hat{} \arrow[dl, no head] \\
& K(Q(X))\hat{} = K(S^{t_o})\hat{} &
\end{tikzcd}$$

Considérons le diagramme ci-contre d'extensions algébriques (proposition 1). Le lemme 8 montre que $[K(S)\hat{} : K(S^{t_o})\hat{}] = t_o$ puisque $p \nmid t_o$. Et puisque T satisfait (28), $[K(T)\hat{}, K(Q(X))\hat{}] = p$ et donc $[L : K(T)\hat{}] = t_o$. Mais le lemme 8 appliqué cette fois à l'extension L de $K(T)\hat{}$ montre que $L = K(Y)\hat{}$ où $Y \in K(T)^{\hat{}alg}$ et $Y^{t_o} = T$.

b) La caractéristique de K est nulle

Nous allons énoncer trois lemmes élémentaires.

LEMME 10. - Soit K un corps valué complet. On suppose que la caractéristique de K est nulle et que la caractéristique résiduelle de K est $p > 0$. Soit $a \in K$, tel que $|a| < |p|^{(p/p-1)}$, alors $(1+a) \in K^p$ où $K^p = \{ b^p / b \in K \}$.

La démonstration est bien connue.

LEMME 11. - Soit K un corps valué de caractéristique résiduelle $p > 0$. Soient $u, v \in K$ tels que $|u| < |p|$ et $|v^p| < |p|$. Alors $|(1+u+v^p)(1-v)^p - (1+u-pv)| < |p|^{(p/p-1)}$.

LEMME 12. - Soit K un corps valué de caractéristique résiduelle $p > 0$. Soient $u, v \in K$ et $r \in \mathbb{N}^*$ et $c_r \in K$ tels que $|u| < |p|$, $|v^{p^r}| < |p|$, $(c_r)^{p^r} = (-p)^{p+p^2+\ldots+p^r}$; alors $(1+u+v^{p^r})(1+u+c_r v)^{-1} \in K^p$.

C'est une conséquence facile des lemmes 10 et 11.

Démonstration du lemme 9 lorsque K est de caractéristique nulle.

Soit donc L une extension cyclique de degré p de $\widehat{K(X)}$. La théorie de Kummer montre qu'il existe $P(X) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i X^i$ avec $\lim_{|i| \to \infty} |a_i| \, |X|^i = 0$, tel que L soit l'extension définie par une racine de l'équation

$$Z^p - P(X) = 0 . \tag{29}$$

On peut écrire $P(X)$ sous la forme $P(X) = a_o + \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z}^* \\ p \nmid t}} \sum_{r \in \mathbb{N}} a_{tp^r} X^{tp^r}$ où $a_{tp^r} \in K$ et $|P(X)| = |a_{t_o p^{r_o}} X^{t_o p^{r_o}}|$. Si $r_o = 0$ et $t_o \neq 0$ les lemmes 6 et 8 permettent de conclure comme dans le cas a) . Si $r_o > 0$, quitte à faire le changement dans (29) $Z = U(X^{t_o p^{r_o - 1}} b)$ où $b \in K$ et $b^p = a_{t_o p^{r_o}}$ et à changer $P(X)$ en $\dfrac{P(X)}{a_{t_o p^{r_o}} X^{t_o p^{r_o}}}$ on se ramène au cas où $r_o = 0$ et $t_o = 0$. Il reste donc à traiter le cas où :

$$(30)\qquad \begin{cases} P(X) = 1 + \sum\limits_{t\in\mathbb{Z}^*,\ p\nmid t,\ r\in\mathbb{N}} a_{tp^r} X^{tp^r} \\ \text{et} \\ |P(X)-1| < 1 \ . \end{cases}$$

Posons

$$(31)\qquad u = \sum_{p\nmid t} a_t X^t \quad \text{et} \quad v = 1 + \sum_{t\in\mathbb{Z}^*,\ p\nmid t,\ r\geq 1} a_{tp^r} X^{tp^r} \ .$$

Alors $P(X) = u + v = v(1 + \frac{u}{1-(1-v)}) = v(1 + u \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-v)^n)$.

D'après (30) et (31), on peut écrire

$$(32)\qquad \begin{cases} v = w^p + z \quad \text{où} \quad w = 1 + \sum\limits_{p\nmid t,\ r\geq 1} b_{tp^r} X^{tp^{r-1}} \\ \text{avec} \quad b_{tp^r} \in K \quad \text{et} \quad (b_{tp^r})^p = a_{tp^r} \\ \text{et} \quad |z| \leq |p| \ . \end{cases}$$

Alors $P(X) = w^p (1 + \frac{z}{w^p})(1 + u \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-v)^n)$ et l'équation

$$(33)\qquad Z^p - Q(X) = 0$$

où $P(X) = w^p Q(X)$, définit la même extension que (29). Les conditions (32) impliquent que $Q(X)$ a la forme

$$(34)\qquad Q(X) = 1 + u \sum_{n\geq 0} (1-v)^n + \pi \quad \text{où} \quad \pi \in K(X)^\wedge \quad \text{et} \quad |\pi| \leq |p| \ .$$

Soit t_1 tel que $|u| = |\sum\limits_{p\nmid t} a_t X^t| = |a_{t_1} X^{t_1}| > |a_t X^t|$ si $t \neq t_1$.

<u>Dans le cas où</u> $|u| = |a_{t_1} X^{t_1}| > |p|$, avec (30) et (34) on peut écrire $Q(X) = 1 + a_{t_1} X^{t_1}(1+\rho)$ où $\rho \in K(X)^\wedge$ et $|\rho| < 1$, et puisque $p \nmid t_1$ les lemmes 6 et 8 permettent de déduire, comme dans le cas a), l'existence de $Y \in L$ tel que $L = K(Y)^\wedge$. Pour montrer que $\frac{|L^\times|}{|K(X)^\times|}$ est cyclique de degré p , il suffit de remarquer que le polynôme $(Z+1)^p - Q(X) \in K(X)^\wedge[Z]$ est irréductible par suite si T désigne une racine de (33) , alors $L = K(X)^\wedge[T]$ et $|T-1|^p = |a_{t_1} X^{t_1}|$.

Dans le cas où $|u| = |a_{t_1} X^{t_1}| \leq |p|$, on peut écrire $Q(X)$ sous la forme :

$$(35) \qquad Q(X) = 1 + \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} b_k X^k , \quad \text{avec} \quad b_k \in K \quad \text{et} \quad |b_k X^k| < |p|$$

et grâce au lemme de Hensel on peut supposer que $b_k = 0$ sauf un nombre fini. Soient pour $t \in \mathbb{Z}^*$, $p \nmid t$ et $r \in \mathbb{N}^*$, $c_{tp^r} \in K$ tels que $(c_{tp^r})^{p^r} = b_{tp^r}(-p)^{p+p^2+\ldots+p^r}$ et

$$(36) \qquad R(X) = 1 + \sum_{p \nmid t} (b_t + \sum_{r \geq 1} c_{tp^r}) X^t .$$

Le lemme 12 joint aux relations (35) et (36) montre que $Q(X)[R(X)]^{-1} \in [K(X)\hat{}\,]^p$ et donc les équations $Z^p - Q(X) = 0$ et $Z^p - R(X) = 0$ définissent la même extension de $K(X)\hat{}$. Mais il existe un entier $t_o \neq 0$ tel que $R(X) = 1 + d_{t_o} X^{t_o}(1+\rho)$ où $d_{t_o} \in K$, $\rho \in K(X)\hat{}$, $|\rho| < 1$ et $p \nmid t_o$. On achève alors la démonstration comme précédemment.

3.1.4. - Le corps L est une extension galoisienne de $K(X)\hat{}$

On a le lemme suivant qui règle le cas des extensions galoisiennes de $K(X)\hat{}$.

LEMME 13. - Soient K un corps valué complet, algébriquement clos, $K(X)$ une extension valuée transcendante de K du type 2. Soit L une extension algébrique finie et galoisienne de $K(X)\hat{}$. Alors il existe $Y \in L$ tel que $K(Y)\hat{} = L$ et $\frac{|L^*|}{|K(X)^*|}$ est un groupe cyclique à $[L : K(X)\hat{}\,]$ éléments.

Démonstration. - Soit L une extension galoisienne de $K(X)\hat{}$ de degré np^r où $p \nmid n$ et $r \geq 0$. Soit G le groupe de Galois de l'extension L de $K(X)\hat{}$ et H un p-groupe de Sylow de G. Puisque $[L^H : K(X)\hat{}\,] = n$, le lemme 8 montre que $L^H = K(Y)\hat{}$ où $Y \in K(X)^{\hat{}\,alg}$ et $Y^n = X$. Puisque H est résoluble, l'extension L de L^H se décompose en une suite d'extensions cycliques de degré p, on conclut alors avec le lemme 9.

3.1.5. - Le cas général

Nous énonçons d'abord un lemme qui règle le cas des extensions purement inséparables.

LEMME 14. - Soient K un corps valué complet de caractéristique $p > 0$, $K(X)$ une extension transcendante valuée de K, alors $K(X^{p^{-r}})^{\wedge}$ est l'unique extension purement inséparable de $K(X)^{\wedge}$ de degré p^r.

C'est une conséquence facile du lemme 8 de [17].

Avant de passer à la démonstration du théorème 2 dans le cas d'une extension algébrique finie de $K(X)^{\wedge}$ nous allons énoncer un lemme de structure de $\dfrac{|L^{\times}|}{|K(X)^{\times}|}$ dans les cas où L est une extension algébrique finie de $K(X)^{\wedge}$.

LEMME 15. - Soit K un corps valué complet algébriquement clos, $K(X)$ une extension transcendante valuée du type 2. Soit L une extension algébrique finie de $K(X)^{\wedge}$, alors $\dfrac{|L^{\times}|}{|K(X)^{\times}|}$ est un groupe cyclique à $[L : K(X)^{\wedge}]$ éléments.

Démonstration. - Le groupe $\dfrac{|L^{\times}|}{|K(X)^{\times}|}$ est cyclique, c'est le lemme 7. Soit $\tilde{L}$ la clôture normale de L dans $K(X)^{\wedge alg}$. Soient e_1 le cardinal de $\dfrac{|L^{\times}|}{|K(X)^{\times}|}$, e_2 celui de $\dfrac{|\tilde{L}^{\times}|}{|L^{\times}|}$ et e_3 celui de $\dfrac{|\tilde{L}^{\times}|}{|K(X)^{\times}|}$, alors le lemme 4 montre que :

$$(37) \qquad [L : K(X)^{\wedge}] \geq e_1 \ , \quad [\tilde{L} : L] \geq e_2$$

et les lemmes 13 et 14 montrent que :

$$(38) \qquad [\tilde{L} : K(X)^{\wedge}] = e_3 \ .$$

Mais puisque $e_3 = e_1 e_2$ on déduit de (37) et (38) l'égalité $e_1 = [L : K(X)^{\wedge}]$.

Le théorème 2 est une conséquence du lemme 15.

Quitte à faire une translation sur X par un élément de K, on peut supposer que $|X| \notin |K^{\times}|$, alors $|K(X)^{\times}| = |K^{\times}|\,|X|^{\mathbb{Z}}$. Alors $\dfrac{|K(X)^{alg\,\times}|}{|K(X)^{\times}|}$ est isomorphe à $\dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ et $\dfrac{|L^{\times}|}{|K(X)^{\times}|}$ est l'unique sous-groupe de $\dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ d'ordre $n = [L : K(X)^{\wedge}]$ (lemme 15). Par conséquent il existe $Y \in L$ avec $|Y|^n = |X|$; alors $|L^{\times}| = |K^{\times}|\,|Y|^{\mathbb{Z}}$ et $L = K(X)^{\wedge}[Y]$. La proposition 1 montre que X est algébrique sur $K(Y)^{\wedge}$ et puisque $|L^{\times}| = |K(Y)^{\times}|$; le lemme 15 appliqué à l'extension L de $K(Y)^{\wedge}$ montre que $L = K(Y)^{\wedge}$.

3.2. - Le corps topologique L est du type 3 (immédiat)

On montre le théorème suivant :

THÉORÈME 3. - Soient K un corps valué, complet algébriquement clos, $L \supset K$ un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du type 3, alors $g_{top}(L) = 0$.

Démonstration. - Il faut d'abord prendre la précaution d'éliminer le cas trivial où K est maximalement complet, auquel cas il n'y a pas d'extension du type 3, ainsi que le cas où la caractéristique résiduelle de K est nulle auquel cas $\widehat{K(X)}$ est algébriquement clos (lemme 4, § 3.1.1). Nous noterons donc désormais p la caractéristique résiduelle de $\widehat{K(X)}$ qui est supposée non nulle.

Ceci étant, la démonstration adopte la même démarche que dans le cas du type 2, à ceci près que les démonstrations sont plus délicates.

Dans un premier temps, § 3.2.1, nous établissons un lemme analogue au lemme 6, § 3.1.1, il donne une condition suffisante pour qu'un élément $Y \in \widehat{K(X)}$ vérifie $\widehat{K(Y)} = \widehat{K(X)}$. Dans un deuxième temps, § 3.2.2, nous démontrons le théorème 3 dans le cas où l'extension L de $\widehat{K(X)}$ est cyclique de degré p . Comme dans le § 3.1.3, nous distinguons les cas $\operatorname{car} K = p$ et $\operatorname{car} K = 0$. Les méthodes employées pour traiter ces deux cas sont les mêmes que dans le § 3.1.3, mais les difficultés sont toutes autres pour évaluer les valeurs absolues des expressions qui interviennent. Dans le § 3.2.3, nous achevons la démonstration par un lemme algébrique qui montre que toute extension algébrique finie de $\widehat{K(X)}$ est une suite finie d'extensions cycliques de degré p .

3.2.1. - Lemmes généraux

Le lemme qui suit est un rappel sur l'écriture des éléments de $\widehat{K(X)}$ dans le cas immédiat.

LEMME 16. - Soient K un corps valué complet et $\widehat{K(X)}$ une extension valuée transcendante de K du type 3. On note $r_X = \inf_{x \in K} |X-x|$. Soit $P(Z) \in K[Z]$ un polynôme non nul, pour $\theta \in K$, on écrit $P(Z) = \sum_i a_i(\theta)(Z-\theta)^i$, où $a_i(S) \in K[S]$, alors il existe $r' > r_X$ tel que la relation $|X-\theta| < r'$ implique que $|a_i(\theta)|$ est indépendant de θ et que :

$$\begin{cases} |P(X)| > |a_i(\theta)|\,|X-\theta|^i & \text{pour } i > 0 \\ |a_1(\theta)|\,|X-\theta| > |a_t(\theta)|\,|X-\theta|^t & \text{pour } t > 1 \text{ et } p \nmid t . \end{cases}$$

Ce lemme est dû à Kaplansky ([15] ; [22], chap. 7, lemmes 21, 22 ; voir aussi pour plus de renseignements [18], lemme 2, p. 202).

LEMME 17. - Soient K un corps valué, complet et algébriquement clos, $K(X)$ une extension valuée transcendante, immédiate de K et $r_X = \inf_{x \in K} |X-x|$. Soient $a_i \in K$ pour $i \in \mathbb{N}$, $\omega \in K$, $b \in \widehat{K(X)}$ tels que :

$$(39) \qquad \begin{cases} |a_1(X-\omega)| > |a_i(X-\omega)^i| & \text{pour } i > 1 \\ |a_1|\, r_X > |b| \end{cases}$$

et soit $Y = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i(X-\omega)^i + b$. Alors $\widehat{K(Y)} = \widehat{K(X)}$.

Démonstration. - Remarquons d'abord que la propriété (39) reste encore vraie si l'on change ω en $\theta \in K$ avec

$$(40) \qquad |X-\theta| < |X-\omega| .$$

En effet, $Y = \sum_{i \geq 0} b_i(\theta)(X-\theta)^i + b$ où

$$(41) \qquad b_i(\theta) = \sum_{j \geq i} \binom{j}{i} a_j(\theta-\omega)^{j-i}$$

en particulier, $b_1(\theta) = \sum_{j \geq 1} j\, a_j(\theta-\omega)^{j-1}$ et (39), (40) impliquent que $|a_j(\theta-\omega)^{j-1}| < |a_1|$ pour $j > 1$ et donc

$$(42) \qquad |b_1(\theta)| = |a_1| .$$

On déduit de (41) et (39) pour $i > 1$ que :

$$|b_i(\theta)|\,|X-\theta|^i \leq \max_{j \geq i} |a_j|\,|\omega-\theta|^j \left|\frac{X-\theta}{\omega-\theta}\right|^i < |a_1|\,|X-\theta|\,\left|\frac{X-\theta}{X-\omega}\right|^{i-1} ,$$

de (42) et (40) on déduit alors que $|b_i(\theta)|\,|X-\theta|^i < |b_1(\theta)|\,|X-\theta|$ pour $i>1$, ce qu'il fallait démontrer.

Soit $\pi \in K$ avec $|\pi| < |a_1|\, r_X$, alors il existe $P(Z) \in K[Z]$ tel que $b = P(X) + b_\pi$ où $|b_\pi| < |\pi|$. Le lemme 16 montre qu'il existe $r' > r_X$ tel que pour $\theta \in K$ avec $|X-\theta| < r'$, on ait :

$$(43) \qquad |c_i(\theta)|\,|X-\theta|^i < |a_1|\, r_X$$

où $P(X) = \sum_i c_i(\theta)(X-\theta)^i$. Soit maintenant $\theta \in K$ vérifiant (40) et (43), alors si $a_i(\theta) = b_i(\theta) + c_i(\theta)$, on a :

$$(44) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Y = \sum_{i \geq 0} a_i(\theta)(X-\theta)^i + b_\pi \quad \text{où } a_i(S) \in K[S], \text{ et} \\ |a_1(\theta)(X-\theta)| > |a_i(\theta)(X-\theta)^i| \quad \text{si } i>1 \\ |b_\pi| < |\pi| < |a_1(\theta)|\, r_X = |a_1|\, r_X . \end{array} \right.$$

Considérons maintenant $Q(Z) = -1 + \sum_{1 \leq i} \dfrac{a_i(\theta)}{(a_1(\theta))^i} (Y - a_o(\theta))^{i-1} Z^i \in K(Y)^{\hat{}\circ}[Z]$ où $\left|\dfrac{a_i(\theta)}{(a_1(\theta))^i}\right| |Y - a_o(\theta)|^{i-1} < 1$ si $i \neq 1$. Le lemme de Hensel montre qu'il existe c, $\alpha_\pi \in K(Y)^{\hat{}}$ et α_i, $\beta_j \in K(Y)^{\hat{}alg}$ tels que $|c-1| < 1$, $|\alpha_\pi - 1| < 1$, $|\alpha_i| < 1$, $|\beta_j| < 1$ et

$$(45) \qquad Q(Z) = c(Z - \alpha_\pi) \prod_i (Z - \alpha_i) \prod_j (1 - \beta_j Z) .$$

On a d'autre part la formule suivante :

$$(46) \qquad Q\left(a_1(\theta) \frac{X-\theta}{Y - a_o(\theta)}\right) = - \frac{b_\pi}{Y - a_o(\theta)}$$

alors (44), (45), (46) montrent que $\left|X - \theta - \alpha_\pi \dfrac{Y - a_o}{a_1(\theta)}\right| = \left|\dfrac{b_\pi}{a_1}\right| < \dfrac{|\pi|}{|a_1|}$ dont on déduit en faisant tendre $|\pi|$ vers 0 que $X \in K(Y)^{\hat{}}$.

Le lemme qui suit est l'analogue du lemme 6, § 3.1.1.

LEMME 18. - Soient K un corps valué complet et algébriquement clos, $K(X)$ une extension valuée transcendante immédiate de K. On note $r_X = \inf_{x \in K} |X-x|$ et s un entier non divisible par p, la caractéristique résiduelle de K. Soient $a_i \in K$, $\omega \in K$, $b \in K(X)^{\wedge}$ tels que :

$$(47) \qquad \begin{cases} |a_s(X-\omega)^s| > |a_i(X-\omega)^i| & \text{si } i \neq 0 \text{ et } i \neq s \\ \text{et} \\ |b| < |a_s|\, r_X^s . \end{cases}$$

Soit $Y = \sum_{i \geq 0} a_i (X-\omega)^i + b$, alors $K(X)^{\wedge} = K(Y)^{\wedge}$.

Démonstration. - Soit $\theta \in K$ avec

$$(48) \qquad |X-\theta| < |X-\omega| .$$

On a $Y = \sum_{i \geq 0} b_i (X-\theta)^i + b$ où $b_i = \sum_{j \geq i} \binom{j}{i} a_j (\theta-\omega)^{j-i}$. On a, si $j \neq s$, d'après (47) et (48), $|a_j(\theta-\omega)^{j-1}| < |a_s|\, |X-\omega|^{s-1}$, d'où :

$$(49) \qquad |b_1| = |a_s|\, |X-\omega|^{s-1} .$$

Maintenant pour $i \neq 1$, on a :

$$(50) \qquad |b_i(X-\theta)^i| \leq \max_{j \geq i} |a_j|\, |X-\omega|^{j-i}\, |X-\theta|^i ,$$

mais d'après (49)

$$(51) \qquad |a_j(X-\omega)^j| \leq |a_s|\, |X-\omega|^s = |b_1|\, |X-\omega| ,$$

d'où, avec (50) et (51), $|b_i(X-\theta)^i| \leq \max_{j \geq i} |b_1|\, |X-\theta|\, \left|\frac{X-\theta}{X-\omega}\right|^{i-1}$, donc (48) implique que $|b_i(X-\theta)^i| < |b_1|\, |X-\theta|$ pour $i > 1$ et $|b| < |a_s|\, r_X^s = |b_1|\, r_X \left(\frac{r_X}{|X-\omega|}\right)^{s-1} < |b_1|\, r_X$. On peut donc appliquer le lemme 17.

3.2.2. - Le cas des extensions de $K(X)^{\wedge}$ de degré p

Soit donc L une extension de degré p de $K(X)^{\wedge}$. Le lemme 14, § 3.1.5, règle le cas où L est purement inséparable. Supposons donc que l'extension L de $K(X)^{\wedge}$ soit séparable. Une telle extension est alors galoisienne. En effet, soit $\widetilde{L}$ la clôture galoisienne de L dans $K(X)^{\wedge alg}$, alors $[\widetilde{L} : K(X)^{\wedge}]$ divise $p!$ et $\widetilde{L}$ est une extension immédiate de $K(X)^{\wedge}$ puisque le groupe des valeurs de $K(X)^\wedge$ est $|K^\times|$ qui est divisible et le corps résiduel de $K(X)^\wedge$ est k qui est algébriquement clos. Le lemme 4, § 3.1.1, montre alors que $[\tilde{L} : K(X)^\wedge]$ est une puissance de p par suite $[\tilde{L} : K(X)^\wedge] = p$ et $\tilde{L} = L$. L'extension L est donc cyclique de degré p.

a) La caractéristique de K est aussi p

La théorie d'Artin-Schreier montre qu'il existe $T \in K(X)^\wedge$ tel que L soit l'extension définie par une racine de $Z^p - Z - T = 0$. Puisque $K[X]$ est dense dans $K(X)^\wedge$, il existe $P(X) \in K[X]$ tel que $|T - P(X)| < 1$. Soit $S = P(X) - T$, le polynôme $Z^p - Z - S \in K(X)^{\wedge\circ}[Z]$ est résiduellement totalement décomposé, le lemme de Hensel montre alors qu'il existe $U \in K(X)^\wedge$ tel que $U^p - U - S = 0$, par suite l'extension L est définie par une racine de l'équation

$$Z^p - Z - P(X) = 0 . \tag{52}$$

Soit $\omega \in K$, on écrit $P(X)$ sous la forme

$$P(X) = \sum_{n \geq 0} a_n(\omega)(X-\omega)^n = a_o(\omega) + \sum_{r \in \mathbb{N}} \sum_{p \nmid t} a_{tp^r}(\omega)(X-\omega)^{tp^r}$$

et soient $b_{tp^r}(\omega) \in K$ tel que $b_{tp^r}(\omega)^{p^r} = a_{tp^r}(\omega)$ si $p \nmid t$ et $\alpha_t(\omega) = \sum_r b_{tp^r}(\omega)$, posons alors

$$Q(X) = \sum_{p \nmid t} \alpha_t(\omega)(X-\omega)^t \tag{53}$$

et considérons l'équation

$$Z^p - Z - Q(X) = 0 . \tag{54}$$

Soit Y une racine de (54). Un calcul facile montre que si $R(X) = \sum_{\substack{r \geq 1 \\ p \nmid t}} \sum_{0 \leq s \leq r-1} [b_{tp^r}(\omega)(X-\omega)^t]^{p^s}$ alors il résulte de (53) que $P(X) - Q(X) = (R(X))^p - R(X)$ par suite (52) et (54) définissent la même extension $L = K(X)^\wedge(Y)$ où Y est racine de (54). Si l'on élève $\alpha_t(\omega)$ à une puissance de p assez grande, on obtient un polynôme ω et donc pour $|X-\omega|$ suffisamment petit, $\alpha_t(\omega)$ est constant en module. Choisissons maintenant ω vérifiant de plus la propriété suivante : $|\alpha_t(\omega)|\,|X-\omega|^t \neq |\alpha_{t'}(\omega)|\,|X-\omega|^{t'}$ si $t \neq t'$ et si ces deux quantités sont non nulles. Alors il existe t_o tel que $|Q(X)| = |\alpha_{t_o}(\omega)|\,|X-\omega|^{t_o}$. Le lemme 18 montre alors que $K(Q(X))^\wedge = K(X)^\wedge$ et par conséquent $L = K(Y)^\wedge$.

b) La caractéristique de K est nulle

La théorie de Kummer montre qu'il existe $T \in K(X)^{\wedge}$ tel que L soit l'extension définie par une racine de l'équation $Z^p - T = 0$. Puisque $K[X]$ est dense dans $K(X)^{\wedge}$ le lemme de Hensel montre qu'il existe $P(X) \in K[X]$ proche de T tel que L soit aussi l'extension de $K(X)^{\wedge}$ définie par une racine de l'équation :

$$Z^p - P(X) = 0 \,. \tag{55}$$

Soit r' défini au lemme 16 et soit $\omega \in K$ tel que $|X-\omega| < r'$, alors

$$\left\{\begin{array}{l} P(X) = \sum\limits_{i \geq 0} a_i(\omega)(X-\omega)^i \quad \text{où } a_i(S) \in K[S]\,, \\ \text{avec} \quad |P(X)| > |a_i(\omega)|\,|X-\omega|^i \quad \text{pour } i > 0 \\ \text{et} \quad |a_1(\omega)|\,|X-\omega| > |a_t(\omega)|\,|X-\omega|^t \quad \text{pour } p \nmid t \text{ et } t > 1\,. \end{array}\right. \tag{56}$$

Posons :

$$\left\{\begin{array}{l} u = \sum\limits_{p \nmid t} a_t(\omega)(X-\omega)^t \\ v = P(\omega) + \sum\limits_{\substack{p \nmid t \\ r \geq 1}} a_{tp^r}(\omega)(X-\omega)^{tp^r} \end{array}\right. \tag{57}$$

alors de (56) et (57) il résulte que $P(X) = v\left(1 + \frac{u}{P(\omega)} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{P(\omega)-v}{P(\omega)}\right]^n\right)$ et

$$\left\{\begin{array}{l} v = w^p + z \quad \text{où} \quad w = b_o(\omega) + \sum\limits_{\substack{p \nmid t \\ r \geq 1}} b_{tp^r}(\omega)(X-\omega)^{tp^{r-1}} \\ \text{avec} \\ b_i(\omega) \in K\,, \quad (b_i(\omega))^p = a_i(\omega) \quad \text{pour } i \in p\mathbb{N} \\ \text{et} \\ z = \sum\limits_{n \geq 1} c_n(\omega)(X-\omega)^n \quad \text{avec} \quad |c_n(\omega)(X-\omega)^n| \leq |p| \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}\,. \end{array}\right. \tag{58}$$

On a $P(X) = w^p\left(1 + \frac{z}{w^p}\right)\left[1 + \frac{u}{P(\omega)} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left[\frac{P(\omega)-v}{P(\omega)}\right]^n\right]$ et l'équation

$$Z^p - Q(X) = 0 \tag{59}$$

où $P(X) = w^p Q(X)$ définit la même extension que (55). Avec (58) on peut écrire $Q(X)$ sous la forme

$$(60)\quad \begin{cases} Q(X) = 1 + \dfrac{u}{P(\omega)} \sum\limits_{n\geq 0} \left[\dfrac{P(\omega)-v}{P(\omega)}\right]^n + \pi(\omega) \\ \text{où} \\ \pi(\omega) = \sum\limits_{n\geq 0} d_n(\omega)(X-\omega)^n \quad \text{et} \quad |d_n(\omega)|\,|(X-\omega)^n| \leq |p| \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}\ . \end{cases}$$

<u>Le cas où</u> $\left|\dfrac{u}{P(\omega)}\right| = \left|\dfrac{a_1(\omega)}{P(\omega)}(X-\omega)\right| > |p|$

Avec (56) et (60) on peut écrire $Q(X) = 1 + \dfrac{a_1(\omega)}{P(\omega)}(X-\omega)(1+\rho(\omega))$ où $\rho(\omega) = \sum\limits_{n\geq 0} e_n(\omega)(X-\omega)^n$ avec $e_n(\omega) \in K$ et $|e_n(\omega)(X-\omega)^n| < 1$. Le lemme 17 montre alors que $K(Q(X))\hat{} = K(X)\hat{}$ et donc $L = K(Y)\hat{}$ où Y est racine de (59).

<u>Le cas où</u> $\left|\dfrac{u}{P(\omega)}\right| \leq |p|$

Quitte à tronquer la série qui définit $Q(X)$, on peut supposer, grâce au lemme de Hensel, que $Q(X) \in K[X]$ et que

$$(61)\quad \begin{cases} Q(X) = \sum\limits_{n\geq 0} b_n(\omega)(X-\omega)^n \quad \text{où} \quad b_n(S) \in K[S] \\ \text{avec} \\ |b_n(\omega)|\,|(X-\omega)^n| \leq |p|\ . \end{cases}$$

Soient pour $p \nmid t$ et $r \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in K$ vérifiant (61), $c_{tp^r}(\omega) \in K$ tels que $[c_{tp^r}(\omega)]^{p^r} = b_{tp^r}(\omega)(-p)^{p+p^2+\dots+p^r}$ et

$$(62)\qquad R(X,\omega) = 1 + \sum_{p\nmid t} d_t(\omega)(X-\omega)^t \quad \text{où} \quad d_t(\omega) = b_t(\omega) + \sum_{r\geq 1} c_{tp^r}(\omega)\ .$$

Le lemme 12, § 3.1.3, joint aux relations (61) et (62) montre que $Q(X)[R(X)]^{-1} \in (K(X)\hat{})^p$ et donc les équations $Z^p - Q(X) = 0$ et $Z^p - R(X) = 0$ définissent la même extension de $K(X)\hat{}$.

Nous allons montrer qu'il existe s avec $p \nmid s$ et $\omega_o \in K$ vérifiant (61) tels que

$$(63)\quad \begin{cases} R(X,\omega_o) = 1 + \sum d_t(\omega_o)(X-\omega_o)^t \\ \text{et} \\ |d_t(\omega_o)(X-\omega_o)^t| < |d_s(\omega_o)(X-\omega_o)^s| \quad \text{si} \quad t \neq 0 \ \text{et}\ t \neq s\ . \end{cases}$$

Pour $t \in \mathbb{N}$ avec $p \nmid t$ faisons le choix d'un entier $N_t \geq 1$ tel que $b_{tp^r}(S) = 0$ si $r > N_t$. Soient $\Theta_t = \{\zeta = (\zeta_r)_{1\leq r\leq N_t} \mid \zeta_r^{p^r} = 1 \ \text{si}\ 1 \leq r \leq N_t\}$ et $|\Theta_t|$ le cardinal de cet ensemble. Pour $\zeta \in \Theta_t$ et ω vérifiant (61), on note $d_t^{\zeta}(\omega) = b_t(\omega) + \sum\limits_{1\leq r\leq N_t} \zeta_r\, c_{tp^r}(\omega)$.

Puisque $|\zeta_r - 1| \leq |p|^{(1/p^r)(p/p-1)}$ si $\zeta_r^{p^r} = 1$ les relations (61) et (62) montrent que

$$(64) \qquad |d_t^{\zeta}(\omega) - d_t(\omega)|\;|X-\omega|^t \leq \max_{1\leq r\leq N_t} |\zeta_r - 1|\;|c_{tp^r}(\omega)| < |p|^{(p/p-1)} .$$

Considérons

$$(65) \qquad S(X_o, \dots, X_{N_t}) = \prod_{\zeta\in\Theta_t} (X_o + \sum_{1\leq r\leq N_t} \zeta_r X_r) \in K[X_o, \dots, X_{N_t}]$$

alors $S(b_t(\omega), c_{tp}(\omega), \dots, c_{tp^{N_t}}(\omega)) = \prod_{\zeta\in\Theta_t} d_t^{\zeta}(\omega)$. Mais (65) montre que pour ζ_r une racine primitive p^r-ième de l'unité, on a $S(X_o, \dots, \zeta_r X_r, \dots, X_{N_t}) = S(X_o, \dots, X_r, \dots, X_{N_t})$ par suite il existe $T(X_o, \dots, X_{N_t}) \in K[X_o, \dots, X_{N_t}]$ tel que $S(X_o, \dots, X_{N_t}) = T(X_o, X_1^p, \dots, X_r^{p^r}, \dots, X_{N_t}^{p^{N_t}})$. Par conséquent

$$(66) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \prod_{\zeta\in\Theta_t} d_t^{\zeta}(\omega) = T(b_t(\omega), c^p_{t_p}(\omega), \dots, c^{p^{N_t}}_{rp^{N_t}}(\omega)) = Z_t(\omega) \\ \text{où} \\ Z_t(S) = T(b_t(S), (-p)^p b_{tp}(S), \dots, (-p)^{p+p^2+\dots+p^{N_t}} b_{tp^{N_t}}(S)) \in K[S] . \end{array} \right.$$

Pour $\omega\in K$ et $|X-\omega|$ suffisamment petit, on a $|Z_t(\omega)| = |Z_t(X)|$. Soit un tel ω_o, vérifiant de plus (61) et $|Z_t(X)|^{|\Theta_t|^{-1}} |X-\omega_o|^t \neq |Z_{t'}(X)|^{|\Theta_{t'}|^{-1}} |X-\omega_o|^{t'}$ si $t\neq t'$ et si ces deux réels sont non nuls. Puisque $R(X, \omega_o) \notin (K(X)\hat{\ })^p$ il existe t_o tel que $|d_{t_o}(\omega_o)|\;|X-\omega_o|^{t_o} \geq |p|^{(p/p-1)}$. Soit t tel que $|d_t(\omega_o)|\;|X-\omega_o|^t \geq |p|^{(p/p-1)}$ alors pour $\zeta\in\Theta_t$ d'après (64) et avec (66) on a $|Z_t(\omega_o)| = |Z_t(X)| = |d_t(\omega_o)|^{|\Theta_t|}$. Par suite, les entiers t, tels que $p \nmid t$, se partagent en deux catégories ; ceux pour lesquels $|d_t(\omega_o)|\;|X-\omega_o|^t < |p|^{(p/p-1)}$ et ceux pour lesquels $|d_t(\omega_o)|\;|X-\omega_o|^t \geq |p|^{(p/p-1)}$ et qui donc vérifient $|d_t(\omega_o)| = |Z_t(\omega_o)|^{|\Theta_t|^{-1}} = |Z_t(X)|^{|\Theta_t|^{-1}}$. On en déduit (63). Le lemme 18 montre alors que $K(R(X, \omega_o))\hat{\ } = K(X)\hat{\ }$ et par suite $L = K(Y)\hat{\ }$ où Y est racine de l'équation $Z^p - R(X, \omega_o) = 0$.

3.2.3. - Le cas général

LEMME 19. - *Soient* K *un corps valué complet et algébriquement clos,* $K(X)$ *une extension transcendante valuée du type* 3 . *Soit* L *une extension algébrique séparable finie de* $\widehat{K(X)}$. *Alors* L *est une extension algébrique immédiate de* $\widehat{K(X)}$ *de degré une puissance de la caractéristique résiduelle* p *de* K . *Soit* p^n *ce degré. Il existe de plus* $n+1$ *extensions* $(L_i)_{0\leq i\leq n}$ *de* $\widehat{K(X)}$ *telles que* $L_o = \widehat{K(X)} \subset L_1 \subset \ldots \subset L_i \subset \ldots \subset L_n = L$ *et que* L_{i+1} *soit une extension cyclique de degré* p *de* L_i *pour* $0\leq i\leq n-1$.

Démonstration. - Soient $\widetilde{L}$ la clôture galoisienne de L et $G = \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/\widehat{K(X)})$, $H = \mathrm{Gal}(\widetilde{L}/L)$. L'extension $\widetilde{L}$ de L est immédiate et son degré est donc une puissance de p (lemme 4, § 3.1.1). Le groupe G est donc un p-groupe et ([2], prop. 12, p. 73) montre qu'il existe H_1 un sous-groupe de G d'indice p et contenant H , soit alors $\widetilde{L}_1 = \widetilde{L}^{H_1}$. On achève la démonstration par une récurrence évidente.

Soit maintenant L une extension algébrique finie de $\widehat{K(X)}$. Le paragraphe 3.2.2 joint aux lemmes 14, § 3.1.5, et 19 montrent que L obéit au théorème 3.

4. - Le genre topologique d'un corps topologique de fonctions d'une variable sur K (le théorème principal)

Ce théorème donne une classification des corps topologiques de fonctions d'une variable sur K .

THÉORÈME 4. - *Soient* K *un corps valué, complet et algébriquement clos,* $L \supset K$ *un corps topologique de fonctions d'une variable sur* K . *Soient* k (*resp.* ℓ) *le corps résiduel de* K (*resp.* L).

i) *Si* $\ell \neq k$, *alors* ℓ *est un corps de fonctions d'une variable sur* k *et on a* $g_{top}(L) = g(\ell)$.

ii) *Si* $\ell = k$, *on a* $g_{top}(L) = 0$.

Démonstration. - Si $\ell \neq k$ alors L est du type 1 . D'après le corollaire du théorème 1, § 2.3, il existe $M \subset L$ un corps de fonctions d'une variable sur K tel que $g(M) = g(\ell)$ et $\overline{M} = \ell$ (où $\overline{M}$ est le corps résiduel de M).

Nous allons montrer que $M\hat{} = L$ d'où l'on déduira immédiatement l'inégalité :

$$g_{top}(L) \leq g(\ell) \ . \tag{67}$$

En effet, soit $x \in M$, $|x| = 1$ et tel que son image résiduelle $\bar{x} \notin k$. Alors la valeur absolue sur L induit la norme de Gauss sur $K[x]$ associée à x et le corps $K(x)\hat{}$ est donc stable ([9], p. 101; [13], p. 66 ; [11]). Puisque $M\hat{}$ et L sont des extensions algébriques finies de $K(x)\hat{}$ (prop. 1, § 1.3.3) on en déduit que

$$[M\hat{} : K(x)\hat{}] = [\overline{M} : k(\bar{x})] \tag{68}$$

$$[L : K(x)\hat{}] = [\ell : k(\bar{x})] \tag{69}$$

et puisque $\overline{M} = \ell$ on a, avec (68) et (69), $L = M\hat{}$.

L'égalité $g_{top}(L) = g(\ell)$ résulte alors de (67) et du corollaire de la proposition 4, § 2.2.

Si $\ell = k$, alors L est du type 2 ou du type 3 et le théorème 4 est une retranscription des théorèmes 2 et 3.

Le corollaire qui suit est l'analogue du théorème de Lüroth pour les corps topologiques de fonctions d'une variable sur K .

COROLLAIRE. - Soient K un corps valué, complet et algébriquement clos, $K(X)$ une extension valuée transcendante de K et F un sous-corps fermé de $K(X)^\wedge$ avec $K \subsetneq F \subset K(X)^\wedge$. Alors il existe $Y \in F$, $Y \notin K$ tel que $F = K(Y)^\wedge$ et F est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du même type que $K(X)^\wedge$.

Démonstration. - Soient $L = K(X)^\wedge$, ℓ le corps résiduel de L , f celui de F , alors $k \subset f \subset \ell$. La proposition 1 montre que F est un corps topologique de fonctions d'une variable sur K du même type que L . Si L est du type 2 ou 3 , alors F est du type 2 ou 3 ($\ell = f = k$) et donc $g_{top}(F) = 0$ (théorème 4), d'où l'égalité $F = K(Y)^\wedge$. Si L est du type 1 , alors le théorème 4 montre que $g(\ell) = g_{top}(L) = 0$, or $f \subset \ell$ implique $g(f) \leq g(\ell)$, c'est-à-dire $g(f) = 0$. Alors le théorème 4 dit que $g_{top}(F) = 0$, d'où l'égalité $F = K(Y)^\wedge$.

Remarques. - 1) Les corps topologiques de fonctions du type 1 sur K sont classifiés à isomorphisme près par les corps de fonctions d'une variable sur k . Plus précisément, si L_1 et L_2 sont deux corps topologiques de fonctions d'une variable sur K du type 1 et si ℓ_1 (resp. ℓ_2) désigne le corps résiduel de L_1 (resp. L_2), alors L_1 et L_2 sont K-isomorphes si et seulement si ℓ_1 et ℓ_2 sont k-isomorphes (cela résulte facilement de la stabilité des corps topologiques de fonctions du type 1 ([9], [13], [11])). De plus, si $\ell_1 = \ell_2$ et $L_1 \subset L_2$, alors $L_1 = L_2$. Mais si L est un corps topologique de fonctions du type 1 , il n'y a pas de correspondance bijective entre les sous-corps topologiques de fonctions d'une variable sur K dans L et les corps de fonctions d'une variable sur k dans ℓ (le corps résiduel de L). Plus généralement, soient L_1 un corps topologique de fonctions d'une variable du type 1 sur K , L_1^{alg} une clôture algébrique de L_1 , ℓ_1 (resp. ℓ_1^{alg}) le corps résiduel de L_1 (resp. L_1^{alg}), alors l'application qui, au corps topologique L_2 de fonctions d'une variable sur K , $L_1 \subset L_2 \subset L_1^{alg}$ associe son corps résiduel ℓ_2 avec $\ell_1 \subset \ell_2 \subset \ell_1^{alg}$, est une bijection si et seulement si $\operatorname{car} k = 0$.

2) On peut donner du théorème 4 une autre démonstration dans le cas des corps topologiques de fonctions du type 1 . En utilisant le théorème de Grothendieck ([12]) de relèvement des courbes algébriques projectives et lisses en caractéristique $p > 0$ (cf. § 2.3), on montre qu'il existe un corps de fonctions d'une variable M sur K et une valeur absolue $|.|$ sur M qui prolonge celle de K tels que :

i) le corps résiduel $(M , |.|)^{-}$ soit isomorphe à ℓ ,

ii) $g(M) = g(\ell)$,

et on plonge isométriquement $(M , |.|)$ dans L en montrant à l'aide de techniques de géométrie analytique rigide qu'il existe $f \in M$ avec $|f| = 1$ et $[M : K(f)] = [\overline{M} : \overline{K(f)}]$. L'existence de la valeur absolue $|.|$ sur M est une conséquence de l'étude qui suit sur les points géométriques d'une courbe algébrique (§ 5, proposition 8).

5. - Points géométriques et corps de fonctions d'une variable

Dans tout ce paragraphe, K désigne un corps valué complet et algébriquement clos.

Afin de calculer des groupes de cohomologie sur un K-espace affinoïde $X = \mathrm{Spm}\, A$, M. van der Put a introduit dans [21] la notion de point géométrique d'un espace affinoïde. Il a établi une correspondance bijective entre les points géométriques fermés de X et les semi-normes multiplicatives de A majorées par la semi-norme spectrale de A.

Pour un espace analytique rigide X nous définissons les points géométriques (§ 5.1). Dans le cas où $X = \mathcal{C}^{an}$ est l'espace analytique associé à la courbe algébrique projective irréductible $\mathcal{C}$, nous établissons une correspondance bijective entre points géométriques fermés non ordinaires de X et valeurs absolues sur le corps $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$ qui prolongent celle de K (§ 5.2).

Soient p un point géométrique fermé non ordinaire de $X = \mathcal{C}^{an}$, $|\,.\,|_p$ la valeur absolue sur $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ induite par p et $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |\,.\,|_p)^\wedge$ le complété de $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ pour cette valeur absolue. On appelle type de p (resp. genre de p) le type du corps topologique $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |\,.\,|_p)^\wedge$ (resp. le genre du corps de fonctions $\overline{(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |\,.\,|_p)}$).

Nous établissons un lien entre les points géométriques de X du type 1 et les réductions de X relativement à un recouvrement pur fini et on montre que X a un nombre fini de points géométriques du type 1 de genre non nul (théorème 5). Dans le cas où $\mathcal{C}$ est de plus non singulière ils sont déterminés par la réduction stable de $\mathcal{C}$.

5.1. - Points géométriques

DÉFINITION 8 ([21]). - Soit X un espace analytique sur K, un point géométrique de X est une famille p de sous-ensembles admissibles de X qui possède les propriétés suivantes :

i) $X \in p$, $\phi \notin p$;

ii) si $Y_1, Y_2 \in p$, alors $Y_1 \cap Y_2 \in p$;

iii) si $Y_1 \in p$ et $Y_1 \subset Y_2$, alors $Y_2 \in p$;

iv) si $\{Y_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement admissible de $Y \in p$, alors il existe i_o tel que $Y_{i_o} \in p$.

Le point géométrique p est dit fermé si p est maximal dans l'ensemble des points géométriques (pour la relation d'inclusion).

Un point ordinaire $x \in X$ peut être vu comme le point géométrique $\tilde{x} = \{ U / x \in U$, U admissible dans $X \}$.

On définit la fibre du faisceau $\mathcal{O}_X$ au point géométrique p que l'on note $\mathcal{O}_{X,p}$ (ou $\mathcal{O}_p$ si aucune confusion n'est à craindre) par $\mathcal{O}_{X,p} = \varinjlim_{U \in p} \mathcal{O}_X(U)$.

La proposition immédiate qui suit ramène l'étude des points géométriques de l'espace analytique $X = \cup X_i$ à ceux des X_i.

PROPOSITION 5. - Soient X un espace analytique, $\{X_i\}_i$ un recouvrement de X admissible par des affinoïdes, p un point géométrique de X. Alors il existe un indice $i_o \in I$ tel que la famille $q = p \cap X_{i_o}$ soit un point géométrique de X_{i_o}. De plus p est fermé si et seulement si $q = p \cap X_{i_o}$ est fermé. Réciproquement, si q est un point géométrique fermé de X_{i_o}, alors il existe un unique point géométrique fermé p de X tel que $q = p \cap X_{i_o}$.

DÉFINITION 9. - Soient A une K-algèbre affinoïde et $\| \cdot \|_X$ la semi-norme spectrale sur $X = \operatorname{Spm} A$. On appelle semi-norme sur A multiplicative et majorée par $\| \cdot \|_X$ une semi-norme $| \cdot |'$ sur A qui vérifie les propriétés suivantes :

i) $|f+g|' \leq \max(|f|', |g|')$, pour tout $f, g \in A$;

ii) $|\lambda|' = |\lambda|$ pour tout $\lambda \in K$;

iii) $|f.g|' = |f|' . |g|'$, pour tout $f, g \in A$;

iv) $|f|' \leq \|f\|_X$, pour tout $f \in A$.

Dans le cas où $X = \mathrm{Spm}\, A$ est un espace affinoïde on a la proposition suivante :

PROPOSITION 6 ([12], p. 170). - Soient $X = \mathrm{Spm}\, A$ un espace affinoïde sur K et p un point géométrique fermé de X. Soit $|\,.\,|_p$ la semi-norme sur A associée à p définie par $|f|_p = \inf_{U \in p} \|f\|_U$ où $\|f\|_U = \max_{x \in U} |f(x)|$ alors $|\,.\,|_p$ est une semi-norme sur A multiplicative et majorée par $\|\,.\,\|_X$. Réciproquement, si $|\,.\,|'$ est une semi-norme sur A multiplicative et majorée par $\|\,.\,\|_X$ alors il existe un unique point géométrique fermé p de X tel que $|\,.\,|' = |\,.\,|_p$.

5.2. - Points géométriques et corps de fonctions d'une variable sur K

Soient $\mathcal{C}$ une courbe algébrique projective irréductible sur K, $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{an}$ l'espace analytique rigide associé à $\mathcal{C}$. La proposition qui suit établit une correspondance entre les valeurs absolues sur $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$ qui prolongent celle de K et les points géométriques fermés de $\mathcal{C}^{an}$.

PROPOSITION 7. - Soient $\mathcal{C}$ une courbe algébrique projective irréductible sur K, $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$, p un point géométrique fermé non ordinaire de $\mathcal{C}^{an}$ et $\mathcal{O}_p = \varinjlim_{U \in p} \mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}}(U)$, alors $\mathcal{O}_p$ est un corps contenant $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$ et la semi-norme $|\,.\,|_p$ définie par $|f|_p = \inf_{U \in p} (\|f\|_U)$ est une valeur absolue sur $\mathcal{O}_p$ qui induit sur $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$ une valeur absolue $|\,.\,|_p$ prolongeant celle de K. L'application qui à p fait correspondre le corps valué $(\mathfrak{R}(\mathcal{C}), |\,.\,|_p)$ est une bijection entre l'ensemble des points géométriques fermés non ordinaires de $\mathcal{C}^{an}$ et l'ensemble des valeurs absolues sur $\mathfrak{R}(\mathcal{C})$ qui prolongent celle de K.

Démonstration. - Soit p un point géométrique fermé de $\mathcal{C}^{an}$, alors il existe U un admissible affinoïde de $\mathcal{C}^{an}$ tel que $p \cap X$ soit un point géométrique fermé de X (proposition 5). L'idéal $\mathfrak{P} = \{ f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(U) \mid |f|_p = 0 \}$ de A est premier, si $\mathfrak{P} \neq 0$ alors $\mathfrak{P}$ est un maximal et correspond à $x \in X$ puisque $\dim A = 1$, alors $p = \{ U \text{ admissible} \mid x \in U \}$ et $|f|_p = |f(x)|$; p "est le point ordinaire x". Puisque p n'est pas un point ordinaire, il suit que $\mathfrak{P} = 0$ et que $|\,.\,|_p$ est une norme. D'autre part, $\mathcal{O}_p$ est un corps puisque un élément non nul de A n'a qu'un nombre fini de zéros. Soit $f \in \mathfrak{R}(\mathcal{C})$ et U un ouvert admissible de $\mathcal{C}^{an}$, régulier et qui ne contient pas de pôles de f, alors $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}}(U)$ par définition de la structure analytique de $\mathcal{C}^{an}$ d'où l'inclusion $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{O}_p$ (§ 2.1).

Soient $|\,.\,|$ une valeur absolue sur $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ qui prolonge celle de K. Soient $\eta : \widetilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}$ la normalisation de $\mathcal{C}$ et S une partie finie, non vide de $\mathcal{C}$, contenant l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{C}$, alors $\eta : \widetilde{\mathcal{C}} - \eta^{-1}(S) \longrightarrow \mathcal{C} - S$ est un isomorphisme. D'après Riemann-Roch il existe $f \in \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{C}})$ tel que $\eta^{-1}(S)$ soit l'ensemble des pôles de f et on peut supposer que :

$$(70) \qquad |f| \leq 1 .$$

On a $\widetilde{\mathcal{C}}_f = \{x \in \widetilde{\mathcal{C}} \mid f \in \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{C}},x}\} = \widetilde{\mathcal{C}} - \eta^{-1}(S)$, ainsi $\eta : \widetilde{\mathcal{C}}_f \longrightarrow \eta(\mathcal{C}_f)$ est un isomorphisme. Soit $Z_f = \{x \in \widetilde{\mathcal{C}}_f \mid |f(x)| \leq 1\}$, c'est un admissible de $\widetilde{\mathcal{C}}$ (proposition 2, propriété 1) donc de $\widetilde{\mathcal{C}}_f$, ainsi $\eta(Z_f)$ est un admissible de $\eta(\widetilde{\mathcal{C}}_f)$ et par suite un admissible de $\mathcal{C}$. Il suit de l'isomorphisme $\eta : \widetilde{\mathcal{C}}_f \longrightarrow \eta(\widetilde{\mathcal{C}}_f)$ que $(Z_f, \mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}/Z_f})$ est isomorphe à $(\eta(Z_f), \mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}/\eta(Z_f)})$. Soit $h \in \mathcal{O}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(\widetilde{\mathcal{C}}_f)$ $(\simeq \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(\eta(\widetilde{\mathcal{C}}_f)))$ alors h est entier sur $K[f]$ et si $\sum a_i(f)T^i \in K[f][T]$ est le polynôme unitaire irréductible de h sur $K[f]$, on déduit de la proposition 2 (propriété 4) et de [5] (p. 70) que

$$(71) \qquad \|h\|_{Z_f} = \max_i \|a_i(f)\|_{Z_f}^{1/i}$$

et que

$$(72) \qquad |h| \leq \max_i |a_i(f)|^{1/i} .$$

Comme $\|\,.\,\|_{Z_f}$ est la norme de Gauss sur $K[f]$ associée à f (proposition 2, propriété 4), on a avec (70), $|a_i(f)| \leq \|a_i(f)\|_{Z_f}$ et donc avec (71), (72) on a $|h| \leq \max_i |a_i(f)|^{1/i} \leq \max_i \|a_i(f)\|^{1/i} = \|h\|_{Z_f}$.

Les propositions 5 et 6, § 5.1, permettent alors d'associer à $|\,.\,|$ un unique point géométrique fermé de $\mathcal{C}$.

Nous pouvons maintenant classifier les points géométriques d'une courbe algébrique.

DÉFINITION 10. - Soient $\mathcal{C}$ une courbe algébrique projective irréductible sur K et $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$. On dira qu'<u>un point géométrique fermé non ordinaire</u> p <u>de</u> $\mathcal{C}$ <u>est du type</u> 1 (resp. 2, 3) si le corps valué $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |\,.\,|_p)$ est du type 1 (resp. 2, 3) (cf. § 1.3.2 pour le type d'un corps de fonctions d'une variable sur K). Et on appelle <u>genre du point géométrique</u> p le genre topologique de $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |\,.\,|_p)^{\hat{}}$

<u>Exemple</u>. - <u>Les points géométriques</u> (non ordinaires) de la <u>droite projective</u>.

Soient $\mathcal{C} = \mathbb{P}^1_K = \mathrm{Proj}(K[x_o, x_1])$, $\mathcal{R}(\mathbb{P}^1_K) = K(T)$ où $T = \frac{x_1}{x_o}$, p un point géométrique non ordinaire de $\mathbb{P}^1_K$, $|\,.\,| = |\,.\,|_p$ la valeur absolue sur $\mathcal{R}(\mathbb{P}^1_K) = K(T)$ associée à p. Alors on peut décrire le point géométrique p à partir de $|\,.\,|$ $(= |\,.\,|_p)$.

On identifie $\mathbb{P}^1_K$ à $K \cup (\infty)$ du point de vue ensembliste.

a) <u>Le point géométrique</u> p <u>est du type</u> 2. - Il existe $a \in K$, $r \in \mathbb{R}$ avec $r > 0$, et $r \notin |K^{\times}|$; un admissible $U \in p$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ avec $U \supset C_{r-\varepsilon, r+\varepsilon}$ où $C_{r-\varepsilon, r+\varepsilon} = \{ z \in K / r-\varepsilon < |z-a| < r+\varepsilon \}$.

b) <u>Le point géométrique</u> p <u>est du type</u> 3. - Soit $L \supset K$ un corps maximalement complet ([22]). Il existe $a \in L$, $a \notin K$; un admissible $U \in p$ si et seulement si il existe $\rho >$ distance de a à K tel que $U \supset D_{a,\rho} \cap K$ où $D_{a,\rho} = \{ z \in L / |z-a| \leq \rho \}$.

c) <u>Le point géométrique</u> p <u>est du type</u> 1. - Alors il existe $a \in K$ et $\pi \in K - \{0\}$ tels que $\inf_{b \in K} |T-b| = |T-a| = |\pi|$; un admissible $U \in p$ si et seulement si il existe $z_1, \dots, z_n \in K$ (dépendant de U et p) avec $|z_i - a| = |\pi|$, $1 \leq i \leq n$, tels que $U \supset C(a, z_1, \dots, z_n, |\pi|) = \{ z \in K \mid |z-a| \leq |\pi|, |z-z_i| \geq |\pi|, 1 \leq i \leq n \}$.

Cette dernière description s'interprète en termes de réduction analytique. En effet, considérons le recouvrement pur $\mathcal{U}$ de $\mathbb{P}^1_K$ constitué par $U_1 = \{ z \in \mathbb{P}^1_K \mid |z-a| \leq |\pi| \}$ et $U_2 = \{ z \in \mathbb{P}^1_K \mid |z-a| \geq |\pi| \}$ et r la réduction nalytique de $\mathbb{P}^1_K$ associée à $\mathcal{U}$. Alors $U \in p$ si et seulement si $U \supset r^{-1}(V)$ où V est un ouvert non vide de $\overline{\mathbb{P}^1_K}^{\,\mathcal{U}}$.

Plus généralement on peut lier points géométriques d'une courbe algébrique $\mathcal{C}$, du type 1 , et réduction analytique de $\mathcal{C}^{an}$. Etablissons d'abord un lemme.

LEMME 20. - Soient $\mathcal{C}$ une courbe algébrique projective irréductible sur K et $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathcal{C}$. Soient $\mathcal{U}$ un recouvrement pur fini de $X = \mathcal{C}^{an}$ par des ouverts admissibles et $r : X \longrightarrow Y = \overline{X}^{\mathcal{U}}$ la réduction relativement à $\mathcal{U}$. Soient $(Y_i)_{1 \leq i \leq s}$ les composantes irréductibles de la courbe algébrique Y et V un ouvert admissible de X tel que $r(V) \cap Y_{i_o} \neq \emptyset$. Alors, ou bien $r(V) \cap Y_{i_o}$ est un nombre fini de points, ou bien il existe $V' \subset V$ un ouvert admissible de X tel que $V' = r^{-1}(r(V'))$ et que $r(V')$ soit un ouvert non vide de Y_{i_o} .

Démonstration. - Soit $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_s\}$ le recouvrement pur, on a par exemple $r(U_1) \cap Y_{i_o} \neq \emptyset$. Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{C}^{an}}(U_1)^{\circ}$ tel que $\overline{f}_{|r(U_1) \cap Y_i} = 0$ pour $i \neq i_o$ et $\overline{f}_{| r(U_1) \cap Y_{i_o}} \neq 0$. Soient $D(\overline{f})$ l'ouvert principal de $r(U_1)$ associé à $\overline{f}$ et $U = \{ x \in U_1 \mid |f(x)| = 1 \}$, clairement U est un rationnel de U_1 , donc un admissible affinoïde de X et $r^{-1}(r(U)) = U$, $\emptyset \neq r(U) = D(\overline{f}) \subset r(U_1) \cap Y_{i_o}$.

Supposons que $r(V) \cap Y_{i_o}$ n'est pas un nombre fini de points, alors $V \cap U$ est une partie affinoïde de U et $r(V \cap U)$ n'est pas un nombre fini de points (U est saturé pour r). D'autre part on a $V \cap U = R_1 \cup \dots \cup R_n$ où R_i est un rationnel de U ([10]). On peut supposer que $r(R_1)$ n'est pas un nombre fini de points. On a $R_1 = \{ x \in U \mid |f_i(x)| \leq |f_o(x)| , 0 \leq i \leq n \}$ où $f_i \in \mathcal{O}_X(U)$ et $\mathcal{O}_X(U) = \sum_{0}^{n} f_i \mathcal{O}_X(U)$.

Montrons que $\|f_o\|_U \geq \|f_i\|_U$, supposons en effet qu'il existe $j \neq 0$ et $\|f_j\|_U > \|f_o\|_U$, alors $R_1 \subset F = \{ x \in U \mid |f_j(x)| < \|f_j\|_U \}$. Comme $f_j \neq 0$, que $r(U)$ est irréductible, il suit que $r(F)$ est un fermé de dimension zéro, ce qui contredit que $r(R_1)$ n'est pas un nombre fini de points.

Soit $V' = \{ x \in U \mid |f_o(x)| = \|f_o\|_U \}$, on a $V' \subset R_1 \subset V$ et $r^{-1}(r(V')) = V'$ et $r(V')$ est l'ouvert principal $D_{\overline{f}_o}$ de $r(U)$. De plus V' est rationnel dans U admissible, donc V' est admissible. Ce qui montre le lemme.

PROPOSITION 8. - Les hypothèses sont celles du lemme précédent. Soit $p_{i_o} = \{ V$ ouvert admissible de $X \mid r(V) \cap Y_{i_o}$ est un ouvert non vide de $Y_{i_o} \}$ alors p_{i_o} est un point géométrique fermé non ordinaire de X du type 1 . Soit $(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |.|_{p_{i_o}})$ le corps $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ muni de la valeur absolue induite par p_{i_o} . Alors son corps résiduel $\overline{(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |.|_{p_{i_o}})}$ est isomorphe au corps $\mathcal{R}(Y_{i_o})$ des fonctions rationnelles sur Y_{i_o} .

Démonstration. - On déduit immédiatement du lemme 20 que p_{i_o} est un point géométrique fermé et que l'ensemble $\mathfrak{F}$ des admissibles $V \in p_{i_o}$ tels que $r^{-1}(r(V)) = V$ et $r(V) \subset Y_{i_o}$ constituent une partie cofinale parmi les éléments de p_{i_o} .

Comme Y_{i_o} est irréductible, l'homomorphisme de restriction $\mathcal{O}_Y(r(V)) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(r(V'))$ pour $V \supset V'$ et $V, V' \in \mathfrak{F}$ est injectif ; ainsi $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V')$ est isométrique. Les homomorphismes $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{p_{i_o}}$ pour $V \in \mathfrak{F}$ induisent donc un isomorphisme de $\mathcal{R}(Y_{i_o})$ dans $\overline{(\mathcal{O}_{p_{i_o}}, |.|_{p_{i_o}})}$.

D'autre part, comme $V \in \mathfrak{F}$ est admissible, on a $\mathcal{R}(\mathcal{C}) \cap \mathcal{O}_X(V)$ dense dans $(\mathcal{O}_{p_{i_o}}, |.|_{p_{i_o}})$. Par suite $\overline{(\mathcal{R}(\mathcal{C}), |.|_{p_{i_o}})}$ est isomorphe à $\overline{(\mathcal{O}_{p_{i_o}}, |.|_{p_{i_o}})}$.

THÉORÈME 5. - Soient $\mathcal{C}$ une courbe algébrique projective irréductible sur K et $X = \mathcal{C}^{an}$ l'espace analytique associé. Alors l'ensemble des points géométriques de X du type 1 et de genre non nul est fini (cf. définition 10, § 5.2).

Avant de montrer ce théorème nous établissons un lemme.

LEMME 21. - Soient M un corps de fonctions d'une variable sur K et $|.|_1$, $|.|_2$, deux valeurs absolues sur M du premier type. Alors il existe $f \in M$, $f \notin K$ tel que $|.|_1$ et $|.|_2$ induisent la norme de Gauss associée à f sur $K[f]$.

Preuve. - Puisque $|.|_1$ est du premier type, il existe $T \in M$ tel que $|.|_1$ induise sur $K[T]$ la norme de Gauss associée à T . Considérons la restriction de $|.|_2$ à $K(T)$ alors il existe $a \in K$ et $\pi \in K - \{0\}$ tels que $\inf_{x \in K} |T-x|_2 = |T-a|_2 = |\pi|$. Si $|a| > 1$ et $|a| > |\pi|$, $f = \frac{1}{T} + \frac{\pi}{T-a}$ convient, si $|\pi| \geq 1$, $|a| \leq 1$ ou $|a| \leq |\pi|$, $f = \frac{T}{\pi} + \frac{1}{T}$ convient et si $|\pi| \leq 1$, $|a| \leq 1$ ou $|a| \leq |\pi|$, $f = T - a + \frac{\pi}{T-a}$ convient.

<u>Démonstration du théorème 5</u>. - Vue la proposition 7, il suffit de montrer qu'il y a sur $M = \mathcal{R}(\mathcal{C})$ un nombre fini de valeurs absolues du type 1 et de genre non nul. Soient $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_s$, s valeurs absolues du type 1 sur M qui prolongent celles de K et deux à deux distinctes, $m_i = (M, |\cdot|_i)^{\sim}$ le corps résiduel du corps valué $(M, |\cdot|_i)$. D'après le lemme 21 il existe $f \in M$, $f \notin K$ tel que $(|\cdot|_i)_{1 \leq i \leq s}$ induisent toutes la norme de Gauss associée à f sur $K[f]$. Soient $\mathcal{C}_M$ la courbe irréductible projective non singulière associée à M ([14], p. 39) et $\mathcal{U} = \{Z(f), Z(\frac{1}{f})\}$ le recouvrement pur de $\mathcal{C}_M^{an}$ associé à f (cf. proposition 3, § 2.2), alors (proposition 4, § 2.2) on a $g(M) \geq \sum_{1 \leq i \leq s} g(m_i)$, ce qui montre que le nombre de valeurs absolues du type 1 et de genre non nul sur M est borné par $g(M)$.

La proposition qui suit montre que dans le cas où $\mathcal{C}$ est non singulière, les points géométriques du type 1 de genre non nuls sont déterminés par la réduction stable de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 9. - <u>Soient</u> $\mathcal{C}$ <u>une courbe algébrique projective irréductible non singulière sur</u> K <u>et</u> $X = \mathcal{C}^{an}$ <u>l'espace analytique associé</u>, $r : X \longrightarrow Z$ <u>sa réduction stable</u> ([26], [20]). <u>Soient</u> $(Z_i)_{i \in I}$ <u>les composantes irréductibles de</u> Z <u>et pour</u> $i \in I$, p_i <u>le point géométrique de</u> $X = \mathcal{C}^{an}$ <u>associé à</u> Z_i (proposition 8). <u>Soit</u> p <u>un point géométrique de</u> X <u>de type</u> 1 <u>et de genre non nul</u>, <u>alors il existe</u> $i_o \in I$ <u>avec</u> $p = p_{i_o}$ (<u>et</u> Z_{i_o} <u>est une composante de genre non nul</u>). <u>En particulier</u>, $\mathcal{C}$ <u>n'a pas de points géométriques de genre non nul si et seulement si</u> $\mathcal{C}$ <u>est une courbe de Mumford</u>.

<u>Démonstration</u>. - Soient $p_1, \dots, p_s$ les points géométriques de $\mathcal{C}^{an}$ de type 1 et de genre non nul (théorème 5) et $|\cdot|_{p_1}, \dots, |\cdot|_{p_s}$ les valeurs absolues sur $M = \mathcal{R}(\mathcal{C})$ correspondantes (proposition 7). Alors il existe $f \in M$ tel que $|\cdot|_{p_1}, \dots, |\cdot|_{p_s}$ induisent sur $K[f]$ la norme de Gauss associée à f.

Soit $\mathcal{U} = \{ Z(f), Z(\frac{1}{f}) \}$ le recouvrement pur de $\mathcal{C}^{an} = X$ associé à f (prop. 3, § 2.2). Soit $r_1 : X \longrightarrow \overline{X}_{\mathcal{U}} = Y$ la réduction relativement à $\mathcal{U}$. D'après ([9]), il existe $r' : X \longrightarrow Y'$ une réduction de X qui raffine r_1 et r, c'est donc une réduction préstable de X et si $\{Y'_1, \dots, Y'_t\}$ (resp. $\{Z_1, \dots, Z_u\}$, $\{Y_1, \dots, Y_s\}$) désignent les composantes irréductibles de Y' (resp. Z, Y) dont le corps de fonction est de genre > 0, on a $t = u$ (puisque Z est stable) et $s \leq t$, de plus il existe une bijection σ de $\{1, 2, \dots, u\}$ dans $\{1, 2, \dots, t\}$ et une injection τ de $\{1, 2, \dots, s\}$ dans $\{1, 2, \dots, t\}$ telles que Z_i et $Y'_{\sigma(i)}$ (resp. Y_j et $Y'_{\tau(j)}$) soient birationnelles respectivement. Et puisque par construction tous les points géométriques de $\mathcal{C}$ du type 1 et de genre non nul sont décrits par les composantes irréductibles de genre non nul de Y, on déduit de la proposition 8 que $t = u = s$, d'où le résultat annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. BOSCH, Zur Kohomologietheorie rigid analytischer Raüme, Manusc math. 20 (1977), 1-27.

[2] N. BOURBAKI, Algèbre, ch. 1, Hermann, Paris, 1974.

[3] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, ch. 6, Hermann, Paris, 1964.

[4] B. DWORK, On the zeta function of a hypersurface, Publi. Math., I.H.E.S. n° 12 (1962).

[5] J. FRESNEL, M. van der PUT, Géométrie analytique rigide et applications, Progress in Mathematics, Birkhäuser.

[6] J. FRESNEL, M. van der PUT, Localisation formelle et groupe de Picard, Ann. Inst. Fourier 33, 4 (1983), 19-82.

[7] J. FRESNEL, Géométrie analytique rigide et réduction des courbes algébriques, cours de 3e cycle 1983-1984, Université de Bordeaux I.

[8] W. FULTON, Algebraic Curves, W. A. Benjamin, New York (1978).

[9] L. GERRITZEN, M. van der PUT, Schottky groups and Mumford curves, Lectures notes in Math. 817, Springer-Verlag, Heidelberg (1980).

[10] L. GERRITZEN, H. GRAUERT, Die Azyklizität der affinoïden Uberdeckungen, Glogal analysis in honor of Kodaira 1969, Ed. Spencer, Iyanaga.

[11] H. GRAUERT, R. REMMERT, Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in die nichtarchimedischen Analysis, Inv. Math. t. 2 (1966), 87-133.

[12] A. GROTHENDIECK, SGA 1, Revêtements étales et Groupe fondamental, Lecture notes in Math. 224, Springer-Verlag, Heidelberg (1971).

[13] L. GRUSON, Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique, Ann. Sci. de l'. E.N.S. 4e série, 1 (1968), 45-89.

[14] R. HARTSHORNE, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Math. 52, Springer-Verlag, Heidelberg (1977).

[15] I. KAPLANSKY, Maximal fields with valuation, I, Duke J. 9 (1942), 303-321.

[16] U. KÖPF, Über eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räumen, Schriften reihe des Math. Inst. d. Univ. Münster (2) 7 (1974).

[17] M. MATIGNON, M. REVERSAT, Sous-corps fermés d'un corps valué, J. of Algebra, à paraître.

[18] M. MATIGNON, M. REVERSAT, Sur les automorphismes continus d'extensions transcendantes valuées, Journal für die reine und angew. Math. 338 (1983), 195-215.

[19] A. OSTROWSKI, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Math. Zeit, vol. 39 (1935), 269-404.

[20] M. van der PUT, Stable reduction, à paraître.

[21] M. van der PUT, Cohomology on affinoid spaces, Compositio Math. 45 (1982), 165-198.

[22] O. SCHILLING, The theory of valuations, Math. Surveys IV, New York, (1950).

[23] J.-P. SERRE, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 1-42.

[24] J.-P. SERRE, Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. t. 47 (1961), 108-109.

[25] B. L. van der WAERDEN, Algebra, 7e édition, Springer-Verlag, Berlin.

[26] P. DELIGNE, D. MUMFORD, The irreducibility of the space of curves of a given genus, I.H.E.S. n° 36 (1969).