CORPS DE FONCTIONS VALUES

par

M. MATIGNON (avril 1988)

INTRODUCTION

Soient L/K un corps de fonctions d'une variable dont K est le corps des constantes, $(v_i)_{1 \leq i \leq s}$, s valuations propres sur L qui coïncident sur K avec une valuation v_0. On suppose que les extensions résiduelles $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0}$ sont des corps de fonctions d'une variable.

Dans le cas où (K, v_0) est discrètement valué, i.e. $v_0(K^\times) = \mathbb{Z}$, H. Mathieu [Math] a montré l'inégalité suivante reliant le genre $g(L/K)$ du corps de fonctions L/K et le genre $g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0})$ des corps de fonctions $(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0})_{1 \leq i \leq s}$:

$$(1) \qquad g(L/K) - 1 \geqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} e_i r_i (g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0}) - 1)$$

où : e_i est l'indice de ramification de l'extension valuée $(L, v_i)/(K, v_0)$,

r_i est le degré sur $\overline{K}^{v_0}$ du corps des constantes de $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0}$.

Dans [Ma] nous avons généralisé l'inégalité (1) au cas où v_0 est de rang 1, i.e. $V_0(K^\times) \subset \mathbb{R}^\times_{>0}$. Précisément nous avons montré l'inégalité :

$$(2) \qquad g(L/K) - 1 \geqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant s} e_i d_i r_i \, (g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0}) - 1) + s - 1$$ où d_i est le défaut du corps de fonctions valué $(L/K|v_i)$ ([Ma] p. 190).

Dans ce travail nous étudions le cas général. Nous montrons l'inégalité :

(3) $g(L/K)-1 \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i d_i r_i (g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0})-1)$ sans condition sur les $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ si (K,v_0) est hensélien et si (K,v_0) est quelconque sous la condition que les v_i sont deux à deux indépendantes sur L.

L'invariant d_i qui intervient dans (3) est une généralisation du défaut qui intervient dans (2). Plus précisément, soit $(L/K,v)$ un corps de fonctions d'une variable valué, on suppose que l'extension résiduelle est un corps de fonctions d'une variable. Soit $\mathcal{V}$ un système de représentants de $v(L^\times)\mathrm{mod}.v(K^\times)$ alors le défaut du corps de fonctions valué est défini par :

(4) $$d(L/K,v) =: \mathrm{Sup} \frac{\dim_K E}{\sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} {}^{\nu}\overline{E}}$$ où le "suppremum" est pris sur les sous-K-espaces vectoriels de L non nul de dimension finie et ${}^{\nu}\overline{E} =: \{x \in E \mid v(x) \geqslant \nu\} \mathrm{mod}.\{x \in E \mid v(x) > \nu\}$.

Dans un premier temps s'inspirant de [Ma] th.1 p. 184, on montre l'inégalité :

(5) $$d(L/K,v) \leqslant \inf_T \frac{[L:K(T)]}{e(L/K)f(L/K(T),v)}$$ où l'"inf" est pris

sur les éléments $T \in L$, résiduellement transcendants, $e(.|.)$ désigne l'indice de ramification et $f(.|.)$ le degré résiduel.

En raffinant les méthodes de Lamprecht [La] et Mathieu [Math] nous montrons (sous l'hypothèse $\overline{K}^v$ infini) que l'égalité vaut dans (5).

Cette égalité permet d'étudier le comportement du défaut dans la composition des valuations ainsi que par l'extension des scalaires par le complété du corps des constantes.

Ensuite nous montrons (3) dans le cas où (K,v_0) est complet et les $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ sont deux à deux indépendantes. La méthode utilisée consiste d'abord en une généralisation du théorème 1 de [Ma] et ensuite un raffinement de la méthode de Mathieu [Math] qui ne peut ici s'appliquer directement.

Le cas général se déduit par une récurrence analogue à celle utilisée par Bourbaki pour démontrer la relation "$\sum e_i f_i \leqslant n$" ([Bki] th. 1 p. 143).

Avec Jack Ohm [Ma-Oh I,II] nous avons pu mener plus loin cette étude dans le cas particulier où L/K est transcendant pur. Nous y avons défini plusieurs notions de défaut et étudié leurs liens.

Dans le cas des corps de fonctions valués F.V. Kuhlmann [thèse] puis indépendamment J. Ohm [Oh] ont démontré l'analogue du théorème de Grauert-Remmert (cf. [Ma] cor. 4 p. 193) pour le défaut hensélien des corps de fonctions. Dans [Ku] on trouvera une étude détaillée de ce défaut.

Dans [Gr-Po], B. Green et F. Pop ont étudié la bonne réduction dans les corps de fonctions valués dans le sens de P. Roquette [Ro]. Combinant la méthode de E. Lamprecht [La] et le changement de base ils se ramènent au cas du rang 1. C'est ainsi qu'ils ont donné la première démonstration de l'inégalité $g(L/K) \geqslant g[\overline{L}^v/\overline{K}^v)$ qui est un cas particulier de (3).

0 - NOTATIONS

Corps résiduel, groupe des valeurs

Soit (M,v) un corps valué, on note $\Gamma_v(M)$ (ou Γ_v si aucune confusion n'est à craindre) le groupe des valeurs $v(M^\times)$. On note $\overline{M}^v$ ($\overline{M}$ si aucune confusion n'est à craindre) le corps résiduel. Si $x \in M$, $v(x) = 0$ on note $\overline{x}^v$ (ou $\overline{x}$) son image dans $\overline{M}^v$.

Degré résiduel, indice de ramification

Soit $(M,v)/(N,v)$ une extension algébrique finie de corps valués, on note $f(M/N,v)$ le degré de l'extension résiduelle $\overline{M}^v/\overline{N}^v$ et $e(M/N,v)$ l'ordre du groupe abélien $\Gamma_v(M)/\Gamma_v(N)$.

Valuation de Gauss

Soient (K,v) un corps valué, $K(T)$ le corps des fractions à une indéterminée sur K. On note v_g^T la valuation de Gauss sur $K(T)$ associée à v et T et définie par :

$$v_g^T(\sum_i a_i T^i) = \inf_i v(a_i), \quad a_i \in K .$$

I - CORPS DE FONCTIONS VALUES : LE CAS D'UNE VALUATION

Dans toute cette partie

L/K est un corps de fonctions d'une variable, v est une valuation non triviale sur L telle que :

$\overline{L}^v/\overline{K}^v$ soit un corps de fonctions d'une variable (il revient au même de dire qu'il existe $T \in L$ avec $v(T) = 0$ et $\overline{T}$ transcendant sur $\overline{K}^v$ i.e. la valuation v induit la valuation de Gauss v_g^T sur K(T). Ainsi :

$\Gamma_v(L)/\Gamma_v(K)$ est un groupe abélien fini, on choisit :

$\mathscr{V}$ un système de représentants dans $\Gamma_v(L)$.

Soit E un sous-K espace vectoriel de L, à $\nu \in \mathscr{V}$ on associe le $\overline{K}^v$-espace vectoriel :

${}^{\nu}\overline{E}=: \{x \in E |\ v(x) \geq \nu\} \bmod . \{x \in E |\ v(x) > \nu\}$, sa dimension ne dépend que de la classe de ν mod.$\Gamma_v(K)$. Soit $T \in L$, $v(T) = 0$, T résiduellement transcendant on note :

$$d_{L/K}(T) =: [L:K(T)] \ / \ e(L/K,v)\ f(L/K(T),v)$$

§ 1. Le défaut des espaces vectoriels

Théorème I.1. *Soient* E *un sous-*K*-espace vectoriel de* L *de dimension finie et* $T \in L$, $v(T) = 0$ *résiduellement transcendant alors :*

$$\frac{\dim_K E}{\sum\limits_{\nu \in \mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} {}^{\nu}\overline{E}} \leq d_{L/K}(T)$$

Avant de donner la preuve nous établissons un lemme

Lemme I.2. Soient (K,v) *un corps valué,* K(T) *le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur* K*,* v_g^T *la valuation de Gauss sur* K(T) *associée à* v *et* T*. Soit* M *une extension algébrique finie de* K(T) *munie d'une valuation* v *qui coïncide avec* v_g^T *sur* K(T)*. On note* $\{\pi_1,\ldots,\pi_e\}$ *un système de représentants de* $\Gamma(M) \bmod . \Gamma(K)$.

1) Soit W *un sous-*$\overline{K}^v$*-espace vectoriel de dimension finie de* $\overline{M}^v$*, alors il existe en entier* $m \geq 1$ *tel que l'homomorphisme canonique de* $\overline{K(T^m)} \otimes_{\overline{K}} W$ *dans* $\overline{K(T^m)}.W$ *soit surjectif.*

2) Soient F *un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de* M, $\overline{F_\pi} = :\{(x/\pi_j)^- \in \overline{M}^v \mid x \in F, v(x/\pi_j) \geq 0\}$ *et* $m \geq 1$ *tel que l'homomorphisme canonique de* $\overline{K}(T^m) \otimes_{\overline{K}} (\sum_j \overline{F_\pi}_j)$ *dans* $\overline{K}(T^m).(\sum_j \overline{F_\pi}_j)$ *soit bijectif. Alors l'homomorphisme canonique* φ *de* $K(T^m) \otimes F$ *dans* $K(T^m)F$ *est bijectif et si* $z \in K(T^m) \otimes_K F$ *il existe* $a_i \in K(T^m)$, $b_i \in F$ *avec* $z = \sum_i a_i \otimes b_i$ *et* $\tilde{z} = \sum_i a_i b_i, v(\tilde{z}) = \inf_i v(a_i b_i)$.

Preuve. 1) est une conséquence de l'égalité $\bigcap_{u \in \mathbb{N}^*} \overline{K}(T^{um}) = \overline{K}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

2) Soient $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base du K-espace vectoriel F,

$$\tilde{z} = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{P_i}{P} f_i,$$

$P, P_i \in K[T^m]$ et $v(P) = 0$. On a $P_i = \sum_j \lambda_{ij} T^{mj}$ où $\lambda_{ij} \in K$, ainsi $P\tilde{z} = \sum_j \ell_j T^{mj}$ avec $\ell_j = \sum_i \lambda_{ij} f_i \in F$.

Si $\ell_j = 0$ pour tout j alors $\lambda_{ij} = 0$ pour tout i,j et donc $P_i = 0$. Sinon quitte à multiplier par $\lambda \in K^\times$, on peut supposer que $\inf_j v(\lambda \ell_j) = v(\pi_{j_0})$. Alors

$$\overline{\left(\frac{\lambda P\tilde{z}}{\pi_{j_0}}\right)} = \sum_j \overline{\left(\frac{\lambda \ell_j}{\pi_{j_0}}\right)} \overline{T}^{mj}$$

et le choix de m montre que $v\left(\frac{\lambda P\tilde{z}}{\pi_{j_0}}\right) = 0$. Ainsi $\tilde{z} = \sum_j \ell_j \frac{T^{mj}}{P}$ et $v(\tilde{z}) = \inf_j v\left(\ell_j \frac{T^{mj}}{P}\right)$.

Preuve du théorème I. Il s'agit d'une adaptation de la démonstration du théorème 1 p. 184 de [Ma].

On note $e = e(L/K,v)$. Soient $(\pi_i)_{1 \leq i \leq e}$ des éléments de $L^\times$ tels que $\mathcal{V} = \{v(\pi_i)\}_{1 \leq i \leq e}$.

a) Soit V *un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de* L, *alors* $\overline{V_\pi}_i \overset{\text{déf}}{=} \{(x/\pi_i)^- \in \overline{L} \mid x \in V, v(x/\pi_i) \geq 0\}$ *est un sous-*$\overline{K}$*-espace vectoriel de dimension finie de* $\overline{L}$ *et on a*

$$\dim_K V \leq e\, d_{L/K}(T) \dim_{\overline{K}} \sum_i \overline{V_\pi}_i .$$

Preuve. Soit $\alpha = \dim_{\overline{K}} (\sum_i \overline{V_{\pi_i}})$. Comme $\overline{L}/\overline{K}$ est un corps de fonctions, il existe un corps extension de degré α de $\overline{L}$ (engendré par un élément), ainsi il existe un corps M extension de L avec $\alpha = [M:L] = [\overline{M}^v : \overline{L}^v]$ où v désigne encore l'unique prolongement de la valuation à M.

Soit $m \geq 1$, un entier tel que l'homomorphisme canonique de $(\sum_i \overline{V_{\pi_i}}) \otimes_{\overline{K}} \overline{K}(T^m)$ dans $(\sum_i \overline{V_{\pi_i}})\overline{K}(T^m)$ soit bijectif (lemme I.2).

On déduit de cela que $\dim_{\overline{K}} (\sum_i \overline{V_{\pi_i}}) = \dim_{\overline{K}(T^m)} (\sum_i \overline{V_{\pi_i}})\overline{K}(T^m)$.

On applique alors le lemme p. 189 de [Ma] à l'extension $\overline{M}$ de $\overline{K}(T^m)$ et au $\overline{K}(T^m)$-espace vectoriel $(\sum_i \overline{V_{\pi_i}}).\overline{K}(T^m)$. Ainsi il existe $(a_k^i)_{1 \leq k \leq mf}$ des éléments de $\overline{M}$ avec $f = [\overline{L}:\overline{K}(T)]$ et

(1) $$\overline{M} = \bigoplus_{1 \leq k \leq mf} a_k^i . \overline{K}(T^m) (\sum_i \overline{V_{\pi_i}}).$$

Soit $A_k \in M$ avec $v(A_k) = 0$ et $\overline{A}_k = a_k$.

(2) Montrons que : $$\sum_{1 \leq k \leq mf} A_k \, K(T^m)V = \bigoplus_{1 \leq k \leq mf} A_k \, K(T^m)V .$$

Soient $v_k \in K(T^m)V$, on va montrer que :

(3) $$v(\sum A_k \, v_k) = \inf_k v(v_k),$$ ce qui impliquera (2).

Quitte à multiplier v_k par un élément de K, on peut supposer qu'il existe i_0 avec $\inf_k v(v_k) = v(\pi_{i_0})$. Il suit du lemme I.2. que v_k s'écrit $v_k = \sum_j \lambda_{k,j} \, v_{k,j}$ avec $\lambda_{k,j} \in K(T^m), v_{k,j} \in V$ et $v(\lambda_{k,j}) \geq 0, v(\frac{v_{k,j}}{\pi_{i_0}}) \geq 0$.

Ainsi $(v_k/\pi_{i_0})^- \in \overline{K}(T^m).\overline{V_{\pi_i}}$. Comme il existe k_0 avec $v(v_{k_0}/\pi_{i_0}) = 0$, on a $(v_{k_0}/\pi_{i_0})^- \neq 0$. Par suite (1) montre que $\sum_k a_k (v_{k_0}/\pi_{i_0})^- \neq 0$ et ainsi que $v(\sum_k A_k v_k) = v(\pi_{i_0})$.

Il suit de (2) et du lemme I.2 que

$$\dim_{K(T^m)} M \geqslant mf \dim_{K(T^m)} K(T^m)V = mf \dim_K V.$$

mais :

$$[M:K(T^m)] = [M:L][L:K(T)][K(T):K(T^m)] = mef\ d_{L/K}(T)\ \alpha$$

ainsi,

$$\dim_K V \leqslant e(L/K) d_{L/K}(T) \dim_{\overline{K}} (\sum_i \overline{V}\pi_i).$$

β) Soient $\Gamma_v(L) \bmod . \Gamma_v(K) = C_1 \times \ldots \times C_r$*, la décomposition du groupe abélien en produit de groupes cycliques. Alors il existe* $\rho_1, \ldots \rho_r \in L^\times$ *avec les propriétés suivantes :*

β_1) *Pour* $1 \leqslant j \leqslant r$*, on a* $v(\rho_j)$ *générateur de* C_j

β_2) *Si* $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$*, on note* $\underline{\rho}^{\underline{n}}$ *l'élément* $\rho_1^{n_1} \ldots \rho_r^{n_r}$ *et* $\overline{E}_{\underline{\rho}}\underline{n} \overset{\text{déf}}{=} \{(x/\underline{\rho}^{\underline{n}})^- \in \overline{L} \mid x \in E$ *et* $v(x/\underline{\rho}^{\underline{n}})^- \geqslant 0\}$ *alors on a pour* $1 \leqslant i \leqslant s$ *et* $N \geqslant 1$.

$$\sum_{\substack{-Ne_j \leqslant n_j < e_j \\ 1 \leqslant j \leqslant r}} \overline{E}_{\rho}\underline{n} = \bigoplus_{\substack{-Ne_j \leqslant n_j < e_j \\ 1 \leqslant j \leqslant r}} \overline{E}_{\underline{\rho}}\underline{n} \quad \text{où } e_j = \text{card. } C_j$$

Clairement il existe $\rho'_1, \ldots, \rho'_r \in L$ satisfaisant β_1).

(4) Il existe $m \geqslant 1$ tel que l'homomorphisme canonique

$$\overline{K}(T^m) \underset{\overline{K}}{\otimes} \left[\sum_{\substack{-Ne_j \leqslant n_j < e_j \\ 1 \leqslant j \leqslant r}} \overline{E}_{\underline{\rho}}, \underline{n}\right] \longrightarrow K(T^m) \sum_{-Ne_j \leqslant n_j < e_j} \overline{E}_{\underline{\rho}}, \underline{n}$$

soit bijectif (lemme I.2.)

Il existe $\underline{g} = (g_1, \ldots, g_r) \in \mathbb{N}^r$ tels que $\underline{g}.\underline{n} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{j=1}^{r} g_j n_j$ soient tous distincts pour $-e_j N \leqslant n_j < e_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Il suit de (4) que $\sum_{\substack{-Ne_j \leqslant n_j < e_j \\ 1 \leqslant j \leqslant r}} T^{m(\underline{g}\cdot\underline{n})} \overline{E}_{\underline{\rho}}, \underline{n}$ est une somme directe.

Posons $\rho_j = T^{-m g_j} \rho'_j$, ainsi on a $\underline{\rho}^{\underline{n}} = T^{-m(\underline{g}\cdot\underline{n})} \underline{\rho}'^{\underline{n}}$ et $\overline{E}_{\underline{\rho}}\,\underline{n} = T^{m(\underline{g}\cdot\underline{n})}\, \overline{E}_{\underline{\rho}'}\,\underline{n}$, ainsi $\beta_2)$ est vérifiée (clairement $\rho_1,\ldots,\rho_r$ satisfont $\beta_1)$).

γ) *La formule*

Soient $N \geqslant 1$ un entier, $\underline{\rho}$ défini par β) et $F = \sum\limits_{0\leqslant n_j \leqslant Ne_j} \underline{\rho}^{\underline{n}} E$, $\underline{a} = (a_1,\ldots,a_r) \in \mathbb{N}^r$ avec $0 \leqslant a_j < e_j$. Il suit de (β_2) que $\overline{F}_{\underline{\rho}}\,\underline{a} = \bigoplus\limits_{\substack{0\leqslant n \leqslant Ne_j\\ 1\leqslant j\leqslant r}} \overline{E}_{\underline{\rho}}\,\underline{a}-\underline{n}$ et que $\sum\limits_{\substack{0\leqslant a_j\leqslant e_j\\ 1\leqslant j\leqslant r}} \overline{F}_{\underline{\rho}}\,\underline{a}$ est une somme directe, ainsi $F = \bigoplus\limits_{0\leqslant n_j\leqslant Ne_j} \underline{\rho}^{\underline{n}} E$ et donc que $\dim_K F = \left[\prod\limits_{j=1}^{r} (Ne_j+1)\right] \dim_K E$.

Comme $\overline{E}_{\underline{\rho}}\,\underline{n}$ est $\overline{K}$-isomorphe à $\overline{E}_{\underline{\rho}}\,\underline{n}+\underline{e}$, pour $\underline{e} = (e_1,\ldots,e_r)$ on a

$$(5)\qquad \dim_{\overline{K}} \sum_{\substack{0\leqslant a_j\leqslant e_j\\ 1\leqslant j\leqslant r}} \overline{F}_{\underline{\rho}}\,\underline{a} = (N+1)^r \left[\sum_{\substack{0\leqslant a_j< e\\ 1\leqslant j\leqslant r}} \dim_{\overline{K}} \overline{E}_{\underline{\rho}}\,\underline{a}\right]$$

Puisque $\{v(\underline{\rho}^{\underline{a}}),\ 0 \leqslant a_j < e_j,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$ est un système de représentants de $\Gamma_v(L)$ mod.$\Gamma_v(K)$ on peut appliquer α) à $V = F$. Compte tenu de (5) et de ce que $e = e_1\ldots e_r$ on a

$$\dim_K E \leqslant \prod_{j=1}^{r} \left(\frac{Ne_j+e_j}{Ne_j+1}\right) d_{L/K}(T) \left[\sum_{\substack{0\leqslant a_j< e\\ 1\leqslant j\leqslant r}} \dim_{\overline{K}} \overline{E}_{\underline{\rho}}\,\underline{a}\right]$$

Comme N est arbitraire et que $\overline{E}_{\underline{\rho}}\,\underline{a}$ est $\overline{K}$-isomorphe à ${}^{\nu}\overline{E}$ pour $\nu = v(\underline{\rho}^{\underline{a}})$, on déduit γ).

Définition I.3. *On appelle défaut du* corps de fonction valué $(L/K,v)$ *le nombre réel* $\geqslant 1$,

$$d(L/K,v) = \operatorname*{Sup}_{E} \frac{\dim_K E}{\sum\limits_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} {}^{\nu}\overline{E}}$$

où le "supremum" est pris sur les sous-K-espaces vectoriels non nuls de L/K de dimension finie.

Corollaire I.4. *Soit* $T \in L, v(T) = 0$ *résiduellement* transcendant *alors*

$$d(L/K,v) \leq d_{L/K}(T).$$

THEOREME I.5. *Soient* $(L/K,v)$ *un corps de fonctions d'une variable valué. On suppose que* $\overline{L}^v/\overline{K}^v$ *est un corps de fonctions d'une variable alors :*

$$r(L/K)(g(L/K)-1) \geq e(L/K,v)d(L/K,v)r(\overline{L}^v/\overline{K}^v)(g(\overline{L}^v/\overline{K}^v)-1)$$

où

$r(L/K)$ (resp. $r(\overline{L}^v/\overline{K}^v)$) *désigne le degré sur* K (resp. $\overline{K}^v$) *du corps des constantes de* L/K (resp. $\overline{L}^v/\overline{K}^v$).

$g(L/K)$ (resp. $g(\overline{L}^v/\overline{K}^v)$) *désigne le genre du corps de fonctions* L/K (resp. $\overline{L}^v/\overline{K}^v$).

$e(L/K,v)$ *désigne l'indice de ramification de l'extension valuée* $(L/K,v)$ *et*

$d(L/K,v)$ *le défaut du corps de fonctions valué* $(L/K,v)$ *cf. déf I.3.*

Avant de passer à la preuve nous donnons quelques définitions et rappels de résultats dus à Lamprecht [La] et Mathieu [Math].

DEFINITION I.6. *Soit* ℓ/k *un corps de fonctions d'une variable. Si* x *est un anneau de valuation discrète de* ℓ/k *on note* v_x la valuation associée. Soit $D(\ell/k)$ *le groupe des diviseurs de* ℓ/k *; c'est le groupe libre sur les anneaux de valuation discrète de* ℓ/k *;*
On notera $D = \sum n_x[x]$ *un élément de* $D(\ell/k)$ *l'entier ;*
$\deg D = \sum n_x$ *est le degré du diviseur* D. *Ce groupe est ordonné par la relation :* $\sum n_x[x] \geq 0$ *si et seulement si* $n_x \geq 0$ *pour tout* x. *Si* $f \in \ell$ *on note* $(f) = \sum v_x(f)[x]$, le diviseur de f,

$$Z_f = \sum_{v_x(f)\geq 0} v_x(f)[x]$$ *le diviseur des zéros de* f *et*

$$P_f = \sum_{v_x(f)\leq 0} -v_x(f)[x]$$ *le diviseur des pôles de* f.

Soit A *une partie de* ℓ. *L'ensemble des diviseurs* D *tels que* $(f) + D \geq 0$ *pour tout* $f \in A$, *si il est non vide admet un plus petit élément* $\pi(A)$. *On a* $\pi(A) = \sum n_x[x]$ où $n_x = \max_{f\in A} -v_x(f)$.

En particulier si $1 \in A$ *et si* $\pi(A)$ *existe alors* $\pi(A) \geq 0$.

Si A *est un* sous espace vectoriel *de* ℓ *de dimension finie alors* $\pi(A)$ *existe, de plus si* k *est* infini et si $1 \in A$ *il existe* $f \in A$ *avec* $P_f = \pi(A)$ ([Math], Hilfsatz p. 599).

<u>Preuve du théorème I.5</u>. Soit $\mathcal{V}$ un système de représentants dans $\Gamma_v(L)_{>0}$ des éléments de $\Gamma_v(L)/\Gamma_v(K)$.

Pour $\nu \in \mathcal{V}$ on choisit $f_\nu \in L$ avec $v(f_\nu) = \nu$, si $\nu = 0$ on prend $f_\nu = 1$.

Soit D un diviseur de L/K, $L(D) = \{f \in L \mid (f)+D \geqslant 0\}$. On suppose que $f_\nu \in L(D)$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}$ et soit $D_\nu = D+(f_\nu) \geqslant 0$.

Les espaces vectoriels ${}^{\nu}\overline{L(D)}$ et $\overline{L(D_\nu)} = (L(D)/f_\nu)^-$ sont $\overline{K}$-isomorphes.
On note $\pi(D_\nu)$ le diviseur de $\overline{L}^v/\overline{K}^v$ associé à la partie $A = \overline{L(D_\nu)}$ de $\overline{L}^v$ (définition I.6).

Notons $e = e(L/K,v)$. Soit $\pi(eD)$ le diviseur de $\overline{L}^v/\overline{K}^v$ associé à $A = \overline{L(eD)}$ (définition I.6). Alors :

(1) $$e \deg \pi(D_\nu) \leqslant \deg \pi(eD).$$

En effet soit $\lambda_\nu \in K$ avec $v(\lambda_\nu) = e\nu$, et $t_\nu = (\lambda_\nu/f_\nu^e)^-$.
Soit $f \in L(D)$ avec $v(f) \geqslant \nu$ alors $\overline{(f/f_\nu)}^e = t_\nu\ \overline{(f^e/\lambda_\nu)} \in t_\nu\ \overline{L(eD)} \subset L(\pi(eD)-(t_\nu))$ ainsi $e\ \pi(D_\nu) \leqslant \pi(eD) - (t_\nu)$ d'où résulte (1).

Le théorème I.1 appliqué à l'espace vectoriel L(D) donne

(2) $$\dim_K L(D) \leqslant d(L/K) \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} {}^{\nu}\overline{L(D)} = d(L/K) \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{L(D_\nu)}$$

$$\leqslant d(L/K) \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} L(\pi(D_\nu)).$$

Il existe D qui satisfait les propriétés suivantes :

(3) $$\begin{cases} D+(f_\nu) \geqslant 0 \ \forall\ \nu \in \mathcal{V} \\ \deg D > (2g(L/K)-2)\ r(L/K) \\ \deg \pi(D_\nu) > (2g(\overline{L}^v/\overline{K}^v)-2) r(\overline{L}^v/\overline{K}^v) \end{cases}$$

En effet, soit $T \in L$, $v(T) = 0$, résiduellement transcendant. Soit $D \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(f_\nu T^n)+D \geqslant 0$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}$ *et* $n > \mathrm{Max}((2g(L/K)-2)r(L/K),\ (2g(\overline{L}^v/\overline{K}^v)-2)r(\overline{L}^v/\overline{K}^v))$. Clairement $\overline{T}^m \in \overline{L(D_\nu)}$ pour $0 \leqslant m \leqslant n$ et $\nu \in \mathcal{V}$ ainsi (3) est satisfait. Notez que ℓD, $\ell \in \mathbb{N}^*$ satisfait aussi (3).

Si D satisfait (3) on a (Théorème de Riemann-Roch)

$$(4)\quad \begin{cases} \dim_K L(D) = \deg D + r(L/K)\,(1-g(L/K)) \\ \dim_{\overline{K}} L(\pi(D_v)) = \deg\pi(D_v)+r(\overline{L}^v/\overline{K}^v)(1-g(\overline{L}^v/\overline{K}^v)). \end{cases}$$

Ainsi les inégalités (1) et (2) donnent avec (4)

$$(5)\quad \deg D-d(L/K)\deg\pi(eD) \leqslant r(L/K)(g(L/K)-1)-e(L/K)d(L/K)r(\overline{L}^v/\overline{K}^v)(g(\overline{L}^v/\overline{K}^v)-1)$$

(6) <u>Montrons l'inégalité</u> : $\deg D-d(L/K)\deg\pi(eD) \geqslant 0$ (d'où résulte le théorème avec (5)).

α) *Le corps* $\overline{K}^v$ *est infini*

Ainsi D satisfaisant toujours (3), il existe $T \in L(eD)$ tel que le diviseur des pôles de $\overline{T}$ soit $\pi(eD)$ (c.f. fin de la définition I.6). Ainsi

$$\begin{cases} \deg eD \geqslant [L:K(T)] \\ \deg\pi(eD) = f(L/K(T),v) \end{cases}$$

De plus il suit du corollaire I.4 que

$$\begin{aligned} \deg eD-d(L/K)e\deg\pi(eD) &\geqslant [L:K(T)]-d(L/K)ef(L/K(T),v) \\ &\geqslant [L:K(T)]-d(T)ef(L/K(T),v) \geqslant 0 \end{aligned}$$

β) *Le corps* $\overline{K}^v$ *est fini*

Soit $L(X)$ le corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur L. On prolonge v à $L(X)$ par la valuation de Gauss associée à v et X et on la note toujours v. Ainsi $\overline{X}$ est transcendant sur $\overline{L}^v$.

Soit R un anneau de valuation discrète de L/K, m son idéal maximal, alors $(R \otimes_K K(X))_m$ est un anneau de valuation discrète de $L(X) = \mathrm{Fr}\, L \otimes_K K(X)$ [Ch], chap. V. §5, ainsi l'application $R \to (R \otimes_K K(X))_m$ induit une injection des groupes de diviseurs $D(L/K) \hookrightarrow D(L(X)|K(X))$ qui conserve le degré. De même résiduellement on a une injection $D(\overline{L}^v/\overline{K}^v)' \hookrightarrow D(\overline{L(X)}^v/\overline{K(X)}^v)$.

Ainsi α) appliqué au corps de fonctions valué $L(X)/K(X)$ donne l'inégalité

$$(7)\quad \deg D - d(L(X)/K(X)) \deg \Pi(eD) \geqslant 0$$

(l'application π commute à l'extension des scalaires $K(X)/K$).

(8) Montrons que $d(L(X)/K(X)) \geqslant d(L/K)$ d'où résultera (6) avec (7).

En effet si E est un sous-K-espace vectoriel de L de dimension finie alors ${}^{\nu}\overline{E} \underset{\overline{K}}{\otimes} \overline{K}(X) \simeq {}^{\nu}\overline{E \underset{\overline{K}}{\otimes} K(X)}$ ainsi

$$\frac{\dim_K E}{\sum\limits_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} {}^{\nu}\overline{E}} = \frac{\dim_{K(X)} F}{\sum\limits_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K(X)}} {}^{\nu}\overline{F}} \quad \text{où}$$

$F = E \underset{K}{\otimes} K(X)$. Ainsi (8) résulte de la définition du défaut.

THEOREME I.7.- *On reprend les hypothèses du théorème* I.5. *On suppose de plus que* K *est le corps des constantes de* L/K i.e. $r(L/K) = 1$ *et que*

$$g(L/K)-1 = e(L/K,v)r(L/K,v)(g(\overline{L}^{v}/\overline{K}^{v})-1) > 0$$

alors il existe $T \in L$ *résiduellement transcendant tel que* $[L:K(T)] = e(L/K,v)f(L/K(T),v)$ *; ainsi* v *est l'unique prolongement à* L *de la valuation de Gauss sur* $K(T)$ *associé à* $v_{|K}$ *et* T.

Preuve. Il suit du théorème I.5 que $d(L/K) = 1$. On reprend la démonstration précédente et on suppose toujours que D satisfait (3), ainsi (5) et (6) deviennent $\deg D = \deg \pi(eD)$. De plus on a :

$$\deg D + 1 - g(L/K) = \dim_K L(D) = \sum_{\nu} \dim_{\overline{K}} {}^{\nu}\overline{L(D)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu} \dim_{\overline{K}} L(\pi(D_{\nu})) = \sum_{\nu} \deg \pi(D_{\nu})+er(1-g(\overline{L}^{v}/\overline{K}^{v})$$

$$\leqslant \deg \pi(eD)+er(1-g(\overline{L}^{v}/\overline{K}^{v})) = \deg D+1-g(L/K).$$

Ainsi ${}^{\nu}\overline{L(D)} = L(\pi(D_{\nu}))$ et $\deg D = e \deg \pi(D_{\nu})$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}$. En particulier

(1) $\deg D = e \deg \pi(D)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$, puisque $L(D)^{n} \subset L(nD)$ il suit (définition I.6) que $n\,\pi(D) \leqslant \pi(nD)$ et avec (1) on déduit que $n\,\pi(D) = \pi(nD)$.

Quitte à changer D en nD il suit du théorème de Riemann-Roch qu'il existe $\overline{T} \in L(\pi(D)) = \overline{L(D)}$ dont le diviseur des pôles est $\pi(D)$. Ainsi

$0 = \deg D - e \deg \pi(D) \geqslant [L:K(T)] - ef(L/K(T),v) \geqslant 0$

et donc $[L:K(T)] = e(L/K)f(L/K(T))$.

Le reste suit de [Bki] théorème 1 p. 143.

Corollaire 1.8 : *Green-Pop [Gr-Po]. Sous les mêmes hypothèses que le théorème I.5. On suppose de plus que* K *est le corps des constantes de* L/K *et que* $g(L/K) = g(\overline{L}^v/\overline{K}^v) \geqslant 2$ *alors on a bonne réduction dans le sens de Roquette [Ro] i.e. on a* $g(L/K) = g(\overline{L}^v/\overline{K}^v)$ *et il existe* $T \in L$ *résiduellement transcendant avec* $[L:K(T)] = f(L/K(T),v)$.

Preuve. Il suit du théorème I.4 que l'on a $e(L/K)d(L/K)r(\overline{L}^v/\overline{K}^v)=1$, ainsi $e(L/K) = d(L/K) = r(\overline{L}^v/\overline{K}^v) = 1$. On peut donc appliquer le théorème I.7.

THEOREME I.9. *On reprend les hypothèses du théorème* I.5. *On suppose de plus que* $\overline{K}^v$ *<u>est infini</u>. Alors il existe une constante positive* $c(L/K,v)$ *et une suite* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* L, *résiduellement transcendants avec*

$$\begin{cases} 0 \leqslant [L:K(T_n)]-e(L/K)d(L/K)f(L/K(T_n)) \leqslant c(L/K,v) \\ n \leqslant f(L/K(T_n)) \end{cases}$$

Ainsi

$$d(L/K) = \inf_T \frac{[L:K(T)]}{e(L/K)f(L/K(T))}$$

, où l'"infimum" est pris sur les $T \in L$, *résiduellement transcendants.*

Preuve. Reprenons encore la démonstration du théorème I.5 et soit toujours D satisfaisant (3), puisque $\overline{K}^v$ est infini on a montré cf. partie *α)* jointe à la relation (5) qu'il existe $T \in L$ résiduellement transcendant avec

$$0 \leqslant [L:K(T)] - e(L/K)d(L/K)f(L/K(T)) \leqslant e(L/K)(\deg D - d(L/K)\deg \pi(eD)) \leqslant c(L/K)$$

où

$$c(L/K) = e(L/K)r(L/K)(g(L/K)-1)-e(L/K/d(L/K)r(\overline{L}^v/\overline{K}^v)(g(\overline{L}^v/\overline{K}^v)-1).$$

Ainsi puisque si D satisfait (3), nD le satisfait aussi pour $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de L résiduellement transcendant qui satisfont le théorème I.9. Le reste suit avec le corollaire I.4.

Dans le cas où le corps résiduel $\overline{K}^v$ est fini on a le théorème suivant qui permet de se ramener au cas où le corps résiduel est infini.

THEOREME I.10. *On reprend les hypothèses du théorème I.6. Soit L(X) le corps des fractions rationnelles à une indéterminée. On le munit de la valuation de Gauss associée à* v *et* X, *on note encore* v *cette valuation. Alors*

$$d(L(X)/K(X),v) = d(L/K,v).$$

Preuve. On reprend la démonstration du théorème I.5. Il suit des inégalités (5), (6) et (7) que

$$0 \leqslant \frac{\deg D}{\deg \pi(eD)} - d(L(X)/K(X)) \leqslant \frac{\deg D}{\deg \pi(eD)} - d(L/K) \leqslant \frac{c(L/K,v)}{e \deg \pi(eD)}$$

où $c(L/K,v)$ est défini au théorème I.9. Et puisque $\deg \pi(eD)$ peut être pris aussi grand que l'on veut l'égalité en résulte.

§ 2. Le comportement du défaut dans l'extension des scalaires par le complété du corps des constantes.

I.11. Le corps de fonctions $L\hat{K}/\hat{K}$ et $\lambda_{L\hat{K}/L}$.

Soit (L/K) un corps de fonctions d'une variable dont K est le corps des constantes. Soit $v:L^\times \to \Gamma$ une valuation sur L, on suppose que $\bar{L}^v/\bar{K}^v$ est un corps de fonctions d'une variable. Soit $(\hat{K},v) \hookrightarrow (\hat{L},v)$ le complété de (K,v) resp. (L,v) où on note encore v l'unique prolongement $\hat{v}:\hat{L}^\times \to \Gamma$ de v.

Soit $T \in L, v(T) = 0$, résiduellement transcendant sur K, alors T est transcendant sur $\hat{K}$ ainsi L et $\hat{K}$ sont algébriquement disjoints sur K([Bki] prop. 12 p. 108).

Soit φ l'homomorphisme de K-algèbres $L \otimes_K \hat{K} \to \hat{L}$ transformant $x \otimes y$ en xy pour $x \in L$, $y \in \hat{K}$, $\mathfrak{N}$ le noyau de φ. Alors $\mathfrak{N}$ est l'idéal des nilpotents de $L \otimes_K \hat{K}$ ([Bki] prop. 1 p. 133) et il induit un isomorphisme de $\mathrm{Fr}\,(L \otimes_K \hat{K}/\mathfrak{N}) \overset{\text{def}}{=} L\hat{K}$ dans le compositum de L et $\hat{K}$ dans $\hat{L}$.

Soit K' le corps des constantes de $L\hat{K}/\hat{K}$, il existe $\lambda_{L\hat{K}/L} \in p^{\mathbb{N}}$ ($p=\mathrm{car}.K, \lambda_{L\hat{K}/L} = 1$ si $p = 0$) tel que pour tout $X \in L$ transcendant sur K on ait

$$\lambda_{L\hat{K}/L} = \frac{[L:K(X)]}{[L\hat{K}:K'(X)]},$$

de plus [K':K] divise $\lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}$. ([De] pp. 106 et 127).

THEOREME I.12. *Sous les hypothèses de I.11, on a*

$$\lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}\, d_{L\hat{K}/\hat{K}} = [K':\hat{K}]d_{L/K}.$$

Preuve. α) $\overline{K}^{v}$ est infini.

Soit $T \in L$, résiduellement transcendant alors

$$\frac{\lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}}{[K':\hat{K}]} = \frac{[L:K(T)]}{[L\hat{K}:\hat{K}(T)]} = \frac{d_{L/K}(T)}{d_{L\hat{K}/\hat{K}}(T)} \leqslant \frac{d_{L/K}(T)}{d_{L\hat{K}/\hat{K}}}$$

(1) ainsi $\lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}\, d_{L\hat{K}/\hat{K}} \leqslant [K'\hat{K}]d_{L/K}$ d'après le théorème I.9.

Pour montrer l'autre inégalité on procède en deux étapes : Soit $K_0 \subset \hat{K}$ une extension séparable de K avec $\hat{K}/K_0$ algébrique purement inséparable.

(2) Montrons que : $d_{LK_0/K_0} = d_{L/K}$, où LK_0 désigne le compositum de L et K_0 dans $L\hat{K}$. Puisque K_0/K est séparable $LK_0 = \mathrm{Fr}(L \underset{K}{\otimes} K_0)$.

Soit E un sous-K-espace vectoriel de L, puisque L et K_0 sont linéairement disjoints sur K ([Bki], cor. p. 134 et prop. 10 p. 137), on a $\dim_{K_0} EK_0 = \dim_K E$ et puisque E est dense dans K_0E($K \subset K_0 \subset \hat{K}$ et K cofinal dans L), il suit que

$$\frac{\dim_{K_0} EK_0}{\sum\limits_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}_0} {}^{\nu}\overline{EK_0}} = \frac{\dim_K E}{\sum\limits_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} {}^{\nu}\overline{E}}$$

ainsi $d_{L/K} \leqslant d_{LK_0/K_0}$.

Soit $T \in L$, transcendant sur K alors

$$1 = \frac{[L:K(T)]}{[LK_0:K_0(T)]} = \frac{d_{L/K}(T)}{d_{LK_0/K_0}(T)} \leqslant \frac{d_{L/K}(T)}{d_{LK_0/K_0}}$$

ainsi $d_{LK_0/K_0} \leqslant d_{L/K}$ (théorème I.9), ce qui montre (2).

Maintenant soit $T \in L\hat{K}$ résiduellement transcendant tel que $d_{L\hat{K}/\hat{K}}(T)$ soit proche de $d_{L\hat{K}/\hat{K}}$ (théorème I.9). Il existe une extension finie K'_0 de K_0 dans $\hat{K}$ avec $T \in K'_0(LK_0)$, ainsi il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $T^{p^\alpha} \in LK_0$, mais $d_{L\hat{K}/\hat{K}}(T) = d_{L\hat{K}/\hat{K}}(T^{p^\alpha})$ ainsi on peut quitte à changer T en T^{p^α} supposer que $T \in LK_0$. Alors

$$(3) \quad \delta(T) = \frac{[LK_0:K_0(T)]}{[L\hat{K}:\hat{K}(T)]} = \frac{d_{LK_0|K_0}(T)}{d_{L\hat{K}|\hat{K}}(T)} \geqslant \frac{d_{LK_0|K_0}}{d_{L\hat{K}|\hat{K}}(T)} = \frac{d_{L/K}}{d_{L\hat{K}|\hat{K}}(T)}$$

En fait $\delta(T)$ est indépendant de $T \in LK_0$ transcendant sur K_0 ([De] p. 127). On le note δ. Soit $T_0 \in L$ résiduellement transcendant, on a

$$\delta = \frac{[LK_0:K_0(T_0)]}{[L\hat{K}:\hat{K}(T_0)]} = \frac{[L:K(T_0)]}{[L\hat{K}:\hat{K}(T_0)]} = \frac{\lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}}{[K':\hat{K}]}$$

ainsi (3) devient

$$\frac{\lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}}{[K':\hat{K}]} \geqslant \frac{d_{L/K}}{d_{L\hat{K}/\hat{K}}(T)}$$

d'où l'inégalité avec le théorème I.9.

$$\frac{\lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}}{[K':\hat{K}]} \geqslant \frac{d_{L/K}}{d_{L\hat{K}/\hat{K}}}.$$

β) $\overline{K}^v$ <u>est fini</u>

Soit $L\hat{K}(X)$ le corps des fractions rationnelles à une indéterminée, on prolonge v par la valutation de Gauss associée à v et X et on la note encore v.

On note $K_1 = K(X)$, $L_1 = L(X)$, $K_1' =$ corps des constantes de $L_1\hat{K}_1/\hat{K}_1$. Notons que l'extension $\hat{K}_1$ de $\hat{K}$ est séparable (cf. [Ma-Oh II] prop. 2.4.5), ainsi si $T \in L$ est résiduellement transcendant on a

$$c \overset{\text{déf}}{=} \frac{\lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}}{[K':\hat{K}]} = \frac{[L:K(T)]}{[L\hat{K}:\hat{K}(T)} = \frac{[L_1:K_1(T)]}{[L\hat{K}(X):\hat{K}(X)(T)]} = \frac{[L_1:K_1(T)]}{[L\hat{K}_1:\hat{K}_1(T)]} = \frac{\lambda_{L_1\hat{K}_1/\hat{K}_1}}{[K_1':\hat{K}_1]}$$

et d'après α) on a $c = \dfrac{d_{L_1/K_1}}{d_{L_1\hat{K}_1/\hat{K}_1}}$.

Mais (théorème I.10) $d_{L_1/K_1} = d_{L/K}$ et $d_{L\hat{K}(X)/\hat{K}} = d_{L\hat{K}/\hat{K}}$.

Et le théorème suit de l'égalité $d_{L_1\hat{K}_1/\hat{K}_1} = d_{L\hat{K}(X)/\hat{K}(X)}$.

Puisque $\overline{K}_1{}^v$ est infini, que $\hat{K}(X)$ est dense dans $\hat{K}_1$ et que $\hat{K}_1$ est séparable sur $\hat{K}(X)$ l'égalité suit comme dans la démonstration α).

§ 3. Le comportement du défaut dans la composition des valuations.

Soient K un corps, v, v' deux valuations, R_v, $R_{v'}$ leur anneau de valuation respectif, on écrira (cf [Z-S]) $v' < v$ si $R_v \subsetneq R_{v'} \subsetneq K$. Dans ce cas l'image canonique de R_v dans le corps résiduel $K_1 = \overline{K}^{v'}$ de (K,v') est l'anneau de valuation d'une valuation $\overline{v}$ de K_1, de plus le corps résiduel $\overline{K}_1^{\overline{v}}$ de $(K_1,\overline{v})$ s'identifie au corps résiduel $\overline{K}^v$ de (K,v).

THEOREME I.13. *Soient L/K un corps de fonctions d'une variable, w,v deux valuations de L, w_0, v_0 leur restriction respective à K. On suppose que $\overline{L}^v/\overline{K}^v$ est un corps de fonctions d'une variable et que $w < v$. Soit $\overline{v}$(resp.$\overline{v}_0$) la valuation induite par v(resp.v_0) sur L resp. K, alors $(L_1,\overline{v})/(K_1,\overline{v}_0)$ est un corps de fonctions d'une variable valué.*

Soient $e(v|v_0)$ (resp.$e(w|w_0)$,$e(\overline{v}|\overline{v}_0)$) l'indice de ramification de l'extension valuée $(L,v)/(K,v_0)$ (resp.$(L,w)/(K,w_0)$, $(L_1,\overline{v})/(K_1,\overline{v}_0)$).

Soient $d(v|v_0)$(resp.$d(w|w_0)$,$d(\overline{v}|\overline{v}_0)$) le défaut du corps de fonctions valué $(L,v)/(K,v_0)$ (resp.$(L,w)/(K,w_0)$,$(L_1,\overline{v})/(K_1,\overline{v}_0)$). Alors on a :

(1) $e(w|w_0)e(\overline{v}|\overline{v}_0) = e(v|v_0)$

(2) $d(w|w_0)d(\overline{v}|\overline{v}_0) = d(v|v_0)$.

Preuve. Soit $T \in L$, $v(T) = 0$ et $\overline{T}^v$ transcendant sur $\overline{K}^v$. Alors $w(T) \geq 0$ et soit $T_1 = \overline{T}^w$ alors $v(T) = \overline{v}(T_1) = 0$ et $\overline{T}_1^{\overline{v}} = \overline{T}^v$, ainsi $\overline{v}$ induit sur $K_1(T_1)$ la valuation de Gauss associée à T_1 et $\overline{v}_0$ et $(L_1|K_1(T_1),\overline{v})$ est une extension algébrique finie de corps valués.

On a les suites exactes ([Bki] th. 1 § 8 n°3 p. 144)

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma_{\overline{v}_0} & \longrightarrow & \Gamma_{v_0} & \longrightarrow & \Gamma_{w_0} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Gamma_{\overline{v}} & \xrightarrow{\varepsilon} & \Gamma_v & \xrightarrow{\rho} & \Gamma_w & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

d'où la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma_{\bar v}/\Gamma_{\bar v_0} \xrightarrow{\ \varepsilon\ } \Gamma_v/\Gamma_{v_0} \xrightarrow{\ \rho\ } \Gamma_w/\Gamma_{w_0} \longrightarrow 0 \ ,$$

la formule (1) en découle.

Pour (2) on procède en deux étapes :

(*): $\mathcal{W}' \subset \Gamma_v$ un système de représentants des éléments de

<u>1ère étape</u> : $\overline{K}^v$ est infini.

A) L'inégalité $d(w|w_0)d(\bar v|\bar v_0) \geqslant d(v|v_0)$.

Soient $\overline{\mathcal{V}} \subset \Gamma_{\bar v}$ (resp. $\mathcal{W} \subset \Gamma_w$) un système de représentants de $\Gamma_{\bar v}$ mod. $\Gamma_{\bar v_0}$ (resp. Γ_w mod. Γ_{w_0}). Soit(*) $\mathcal{W}$ mod. $\Gamma_{\bar v}/\Gamma_{\bar v_0}$ alors $\mathcal{V} = \varepsilon(\overline{\mathcal{V}}) + \mathcal{W}' \subset \Gamma_v$ est un système de représentants de Γ_v mod. Γ_{v_0}.

Soient $\lambda \in \mathcal{W}'$ et $\pi_\lambda \in L$ tels que $v(\pi_\lambda) = \lambda$. Soient $\tau \in \overline{\mathcal{V}}$ et $\omega_\lambda \in L$ tels que $\bar v(\overline{\omega_\tau}^w) = \tau$, alors $\pi_\lambda\omega_\tau \in L$ et $v(\pi_\lambda\omega_\tau) = \lambda + \varepsilon(\tau)$.

Soit E un sous-K-espace vectoriel de L de dimension finie, on a : $^{\rho(\lambda)}\overline{E}^w \simeq \left(\frac{\overline{E}}{\pi_\lambda}\right)^w$, ainsi $\dim_K E \leqslant d(w|w_0) \sum\limits_{\rho(\lambda)\in\mathcal{W}} \dim_{\overline{K}^w_0} \left(\frac{\overline{E}}{\pi_\lambda}\right)^w$

Posons $F_\lambda = \left(\frac{\overline{E}}{\pi_\lambda}\right)^w$, alors ${}^\tau\overline{F}^{\bar v} = \left(\frac{\overline{F_\lambda}}{\overline{\omega_\tau}^w}\right)^{\bar v}$ et donc ${}^\tau\overline{F_\lambda}^{\bar v} \simeq \left(\frac{\overline{E}}{\omega_\tau\pi_\lambda}\right)^w$

et puisque

$$\dim_{\overline{K}^w_0} \left(\frac{\overline{E}}{\pi_\lambda}\right)^w \leqslant d(\bar v|\bar v_0) \sum_{\tau\in\overline{\mathcal{V}}} \dim_{\overline{K}^v_0} {}^\tau(\overline{F_\lambda})^{\bar v}$$

il suit que

$$\dim_K E \leqslant d(w|w_0)d(\bar v|\bar v_0)\sum_{\rho(\lambda)\in\mathcal{W}} \sum_{\tau\in\overline{\mathcal{V}}} \dim_{\overline{K}^v_0} {}^{\varepsilon(\tau)+\lambda}\overline{E}^v$$

ce qui avec la définition de $d(v|v_0)$ donne l'inégalité.

B) <u>L'inégalité</u> $d(w|w_0)d(\bar v|\bar v_0) \leqslant d(v|v_0)$.

Soit $T \in L, v(T) = 0$ et T résiduellement transcendant pour v, $t = \overline{T}^w$ est alors transcendant et $\bar v(t) = 0$ et $\bar t^v = \overline{T}^v$. Ainsi $\overline{K(T)}^w = \overline{K}^w(t)$ et

$[L:K(T)] \geqslant e(w|w_0)\ d(w|w_0)\ f(L/K(T),w)$

$f(L/K(T),w) \geqslant e(\bar v|\bar v_0)d(\bar v|\bar v_0)f(L/K(T),v)$

d'où

$[L:K(T)] \geqslant e(w|w_0)e(\bar v|\bar v_0)\ d(w|w_0)d(\bar v|\bar v_0)f(L/K(T),v)$

ce qui avec l'égalité (1) donne

$$\frac{[L:K(T)]}{e(v|v_0)f(L|K(T),v)} \geqslant d(w|w_0)d(\overline{v}|\overline{v_0}).$$

d'où l'inégalité (cf. théorème I.9)

$$d(v|v_0) \geqslant d(w|w_0)d(\overline{v}|\overline{v_0}).$$

<u>2ème étape</u>. $\overline{K}^v$ est fini.

Soit L(X) le corps des fonctions rationnelles sur L à une indéterminée, on prolonge v(resp.w) par la valuation de Gauss v_g^x(resp.w_g^x) associée à X et v(resp.w). Il est facile de montrer que la restriction à K(X) de v_X^g(resp.w_X^g) est $(v_0)_X^g$ (resp.$(w_0)_X^g$) avec des notations évidentes et que $w_X^g < v_X^g$. Ainsi il suit du théorème I.10 que

$$d(w|w_0) = d(w_X^g|w_{0X}^g)$$

$$d(v|v_0) = d(v_X^g|v_{0X}^g)$$

$$d(\overline{v}|\overline{v}_0) = d(\overline{v_X^g}|\overline{v_{0X}^g})$$

ce qui ramène la $2^{\text{ème}}$ étape à la $1^{\text{ère}}$.

II - Corps de fonctions valués : le cas des valuations indépendantes

§ 1. Les extensions algébriques de $K(T)^\wedge$

PROPOSITION II.1. *Soient* (K,v_0) *un corps valué complet,* $K(T)$ *le corps des fractions rationnelles à une indéterminée, on note encore* v_0 *la valuation de Gauss associée à* v_0 *et* T *et* $K(T)^\wedge = (K(T),v_0)^\wedge$. *Soient* $(M_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ *des extensions algébriques finies de* $K(T)^\wedge$, v_i *une valuation de* M_i *qui prolonge* v_0 *sur* $K(T)^\wedge$. *On suppose que les groupes de valeurs* $\Gamma_{v_i}(M_i)$ *sont identiques, on note* Γ *le groupe totalement ordonné* $\Gamma_{v_i}(M_i)$. *Soit* $M = \prod_{1\leqslant i\leqslant s} M_i$, $\varepsilon_i : M \to M_i$ *la projection canonique et* w *la norme sur* M *définie par* $w(x) = \inf_{1\leqslant i\leqslant s} v_i(\varepsilon_i(x))$.

On note $\overline{M}^w = \prod_{1\leqslant i\leqslant s} \overline{M}^{v_i}$, *la* $\overline{K(T)}^{v_0}$*-algèbre* $\overline{M}^w$ *s'identifie à la* $\overline{K(T)}^{v_0}$*-algèbre* $\{x \in M|w(x) \geqslant 0\}$ mod. $\{x \in M|w(x) > 0\}$. *On note* $\overline{\varepsilon_i} : \overline{M}^w \to \overline{M}^{v_i}$ *la projection canonique.*

1) *Soit* $e = e(M_1/K,v_1)$ *alors il existe* $\pi_1,\ldots,\pi_e \in M$ *tels que* $v_1.\varepsilon_1(\pi_j) = \ldots = v_s.\varepsilon_s(\pi_j)$ *pour* $1 \leqslant j \leqslant e$ *et que* $\{w(\pi_i)|\ 1 \leqslant i \leqslant e\}$ *soit un système de représentants de* Γ mod. $\Gamma_{v_0}(K)$.

2) *Soient* W *un sous-*$\overline{K}^{v_0}$*-espace vectoriel de dimension finie de* $\overline{M}^w$, *alors il existe un entier* $m \geqslant 1$ *tel que l'homomorphisme canonique de* $\overline{K(T^m)}^{v_0} \otimes_{\overline{K}} \overline{\varepsilon}_i(W)$ *dans* $\overline{K(T^m)}.\overline{\varepsilon}_i(W)$ *soit bijectif pour* $1 \leqslant i \leqslant s$.

3) *Soient* F *un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de* M, $\overline{F_{\pi_j}} = \{(x/\pi_j)^- \in \overline{M}^w|x \in F, w(x/\pi_j) \geqslant 0\}$ *et* $m \geqslant 1$ *tel que l'homomorphisme canonique de* $\overline{K(T^m)} \otimes_{\overline{K}} (\sum_j \overline{F_{\pi_j}})$ *dans* $\overline{K(T^m)}.(\sum_j \overline{F_{\pi_j}})$ *soit bijectif. Alors l'homomorphisme canonique* φ *de* $K(T^m)^\wedge \otimes_K F$ *dans* $K(T^m)^\wedge F$ *est bijectif et si* $z \in K(T^m)^\wedge \otimes_K F$, *il existe* $a_i \in K(T^m)^\wedge$, $b_i \in F$ *avec* $z = \sum a_i \otimes b_i$ *(somme finie),* $\tilde{z} = \sum a_i b_i$ *et* $\tilde{w}(\tilde{z}) = \inf w(a_i b_i)$.

Preuve. Nous montrons 3) le reste est immédiat.

On montre d'abord le résultat sans la complétion, précisément en recopiant la démonstration du lemme I.2 on montre que si $z' \in K(T^m)F$ il existe $G_j \in K(T^m)$ et $\ell_j \in F$ tels que $z = \sum G_j \ell_j$

(1) avec $w(z) = \inf w(G_j \ell_j)$. En particulier si $f_0, \ldots, f_n$ est une base de F sur K, c'est encore une base de $K(T^m)F$ sur $K(T^m)$.

Le reste de la démonstration est une adaptation du corollaire 1.6 de [Ma-Oh 1]. Nous reprenons la terminologie de [Ma-Oh 1].

Puisque (K,w) est cofinal dans (M,w), w confère à F une structure de K-espace vectoriel topologique où les ouverts sont définis par $\alpha \in \Gamma$ et $V_\alpha = \{x \in F \mid w(x) > \alpha\}$. Ainsi si $f_0, \ldots, f_n$ est une base de F sur K alors on a [Bki] prop.4 p. 120

BJ/K : *il existe $\gamma \geqslant 0$ dans Γ tel que pour tout $a_0, \ldots, a_n$ dans K,* $w(\sum a_i f_i) \leqslant \inf\{w(a_i f_i) \mid i = 0, \ldots, n\} + \gamma$.

Par construction T^m satisfait la condition inf/F, ainsi comme dans la proposition 1.2 [Ma-Oh,1] on montre que l'on a $BJ/K(T^m)$. Notez que la condition $f_0 = 1$ dans [Ma-Oh-1] n'est pas nécessaire ici puisque $\overline{T^m}^{\,w}$ est transcendant sur $\overline{K}^w$. Il suit comme dans la proposition 1.5 de [Ma-Oh 1] que $f_0, \ldots, f_n$ sont indépendants sur $K(T^m)^\wedge$.

Soit $z \in K(T^m)^\wedge \otimes_K F$ non nul alors $\varphi(z) = \sum F_i \; f_i$ où $F_i \in K(T^m)^\wedge$ non tous nuls. Soit $F_i' \in K(T^m)$ avec $w((F_i - F_i')f_i) > w(\varphi(z))$, (ceci est possible puisque K est cofinal dans M). Soit $z' = \sum_i F_i' \; f_i \in K(T^m)F$ alors d'après (1)

$$z' = \sum_j G_j \ell_j \text{ où } G_j \in K(T^m), \ell_j \in F$$

$$w(z') = \inf w(G_j \ell_j)$$

ainsi

$$\varphi(z) = \sum_i (F_i - F_i')f_i + \sum_j G_j \; \ell_j \text{ et}$$

$$w(\varphi(z)) = \inf_{i,j} (w(F_i - F_i')f_i, w(G_j \ell_j))$$

Définition II.2. *Soit (K,v) un corps valué de groupe de valeurs Γ, soit Γ_c la "cloture divisible" de Γ ie $\Gamma_c = \Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, c'est un groupe totalement ordonné contenant Γ de plus [E] th. 13.12 p. 101, si L/K est une extension algébrique de ~~(nsion algébrique de~~ (K,v) pour tout anneau de valuation B de L au-dessus de celui de v il existe une seule valuation w de L dont l'anneau de valuation est B, qui prolonge v et dont le groupe des valeurs est contenu dans Γ_c.*

Désormais les valuations dans les extensions algébriques de (K,v) seront ainsi canoniquement choisies.

Le théorème qui suit est l'analogue pour les valuations du théorème 1 p. 184 de [Ma].

THEOREME II.3. *Soient* (K,v_0) *un corps valué complet,* $K(T)$ *le corps des fractions rationnelles à une indéterminée, on note encore* v_0 *la valuation de Gauss associée à* v_0 *et* T *et* $K(T)\hat{} = (K(T),v_0)\hat{}$. Soit Γ *la clôture divisible de* $\Gamma_{v_0}(K) = \Gamma_{v_0}(K(T))$.

Soient $(L_i)_{1\leq i\leq s}$ *des extensions algébriques finies de* $K(T)\hat{}$, v_i *une valuation de* L_i *qui prolonge* v_0 *sur* $K(T)\hat{}$ *avec* $\Gamma_{v_i}(L_i)\subset\Gamma$. *Soit* $d_i^c(T) = [L_i:K(T)\hat{}]/e(L_i/K_i,v_i)f(L_i/K(T),v_i)$ *pour* $1\leq i\leq s$. *On munit l'algèbre* $L = \prod_{1\leq i\leq s} L_i$ *de la "norme"* w *définie par*

$$w((x_1,\dots,x_s)) = \inf_i v_i(x_i).$$

Pour $\nu\in\Gamma$ *on définit* ${}^{\nu}(\overline{L})^{w} = \{x\in L \mid w(x)\geq\nu\} \bmod.\{x\in L\mid w(x)>\nu\}$.

Par définition de w, ${}^{\nu}(\overline{L})^{w}$ *s'identifie à* $\prod_{1\leq j\leq s}{}^{\nu}(\overline{L_j})^{v_j}$ *et on note* ${}^{\nu}\overline{\varepsilon}_i$ *la projection sur* ${}^{\nu}\overline{L}_i^{v_i}$.

Soient E *un sous-K-espace vectoriel de dimension finie de* L, $\mathcal{V}$ *un système de représentants de* $\Gamma \bmod.\ \Gamma_{v_0}(K)$. *Alors on a les relations :*

$$(1)\quad \dim_K E + \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}}\Big[\bigoplus_{1\leq i\leq s}{}^{\nu}\overline{\varepsilon}_i({}^{\nu}\overline{E}^{w})\Big]/{}^{\nu}\overline{E}^{w} \leq$$

$$\leq \sum_{1\leq i\leq s} d_i^c(T)\Big[\sum_{\nu\in\mathcal{V}}\dim_{\overline{K}}{}^{\nu}\overline{\varepsilon}_i({}^{\nu}\overline{E}^{w})\Big]$$

si de plus $d_i^c(T) = 1$ *pour* $1\leq i\leq s$ on a

$$(2)\quad \dim_K E + \sum_{\nu\in\mathcal{V}}\dim_{\overline{K}}\Big[\bigoplus_{1\leq i\leq s}\overline{\varepsilon}_i({}^{\nu}\overline{E}^{w})\Big]/{}^{\nu}\overline{E}^{w} = \sum_{1\leq i\leq s}\sum_{\nu\in\mathcal{V}}\dim_{\overline{K}}{}^{\nu}\overline{\varepsilon}_i({}^{\nu}\overline{E}^{w}).$$

Indications sur les démonstrations : On reprend la démonstration du théorème 1 p. 184 de [Ma] avec des modifications évidentes des notations et on utilise à la place de la proposition 2 §I.1 la proposition II.1 qui est son analogue pour les valuations. Indiquons seulement comment le cas général se ramène au cas où tous les Γ_{v_i} sont égaux. Soit G le sous groupe de Γ engendré par les

Γ_{v_i}, $1\leqslant i\leqslant s$, alors G mod.Γ_{v_i} est fini pour $1\leqslant i\leqslant s$ et il existe une extension M_i/L_i avec unicité du prolongement de v_i et telle que $\Gamma_{v_i}(M_i)=G$ et $[M_i:L_i]$ = card.G mod.Γ_{v_i} (extension totalement ramifiée). Le théorème pour $\prod_{1\leqslant i\leqslant s} L_i$ est une conséquence de celui pour $\prod_{1\leqslant i\leqslant s} M_i$.

Dans le cas $d_1^c(T)=\ldots=d_s^c(T)=1$ on applique (1), l'autre inégalité est évidente.

Corollaire II.4. *Soient L/K un corps de fonctions d'une variable, v une valuation sur L telle que $\overline{L}^v/\overline{K}^v$ soit un corps de fonctions d'une variable. On suppose que (K,v) est complet. Soit d(L/K,v) le défaut du corps de fonctions valué (L/K,v) (déf. I.1). Soit $\mathcal{V}$ un système de représentants de $\Gamma_v(L)$mod.$\Gamma_v(K)$.*

Soient T ∈ L, résiduellement transcendant sur $\overline{K}$ alors

$$(1)\qquad d(L/K,v)\leqslant \frac{[\hat{L}^v:\widehat{K(T)}^v]}{e(L/K)f(L/K(T))}.$$

De plus si $\overline{K}^v$ est infini on a :

$$(2)\qquad d(L/K,v) = \sup_{E} \frac{\dim_K E}{\sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} \overline{E}^\nu} = \inf_T \frac{[\hat{L}^v:\widehat{K(T)}^v]}{e(L/K)f(L/K(T))} =$$

$$= \inf_T \frac{[L:K(T)]}{e(L/K)f(L/K(T))},$$

ou le supremum est pris sur les sous-K-espaces vectoriels de L de dimension finie et l'infimum sur les T ∈ L résiduellement transcendants.

Preuve. On applique le théorème II.3 à l'extension $\hat{L}^v$ de $\widehat{K(T)}^v$ ce qui donne (1). Le reste est une conséquence immédiate du théorème I.9 et de l'inégalité $[\hat{L}^v:\widehat{K(T)}^v]\leqslant[L:K(T)]$.

Corollaire II.5. *On reprend les hypothèses du corollaire II.4. On suppose $\overline{K}^v$ infini. Alors il existe une constante positive c(L/K,v) et une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de L, résiduellement transcendants avec*

$0\leqslant [L:K(T_n)]-[\hat{L}^v:\widehat{K(T_n)}^v]$

$0\leqslant [L:K(T_n)] - e(L/K(T_n))f(L/K(T_n))d(L/K)\leqslant c(L/K,v)$

$n\leqslant f(L/K(T_n))$.

Preuve. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant le théorème I.9 alors
$0\leqslant[L:K(T_n)]-e(L/K)d(L/K)f(L/K(T_n)) \leqslant c(L/K,v)$ et
$0 \leqslant [\hat{L}^v:\hat{K(T_n)}^v] -e(L/K)d(L/K)f(L/K(T_n))$ (corollaire II.4)
le résultat suit de $[\hat{L}^v:\hat{K(T_n)}^v] \leqslant [L:K(T_n)]$.

§ 2. Application aux corps de fonctions valués

THEOREME II.6 *Soient* L/K *un corps de fonctions à une variable,* $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$, *s valuations 2 à 2 indépendantes sur* L *qui coïncident sur K en une valuation* v_0. *On suppose que les extensions résiduelles* $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0}$ *sont des corps de fonctions d'une variable et que les groupes de valeur* $\Gamma_{v_i}(L)$ *sont des sous-groupes d'un même groupe totalement ordonné* Γ.

On suppose que (K,v_0) *est complet.*

Soient $T\in L$, *résiduellement transcendant pour* $1\leqslant i\leqslant s$ *et* $d_i^c(T) =:[\hat{L}^{v_i}:\hat{K(T)}^{v_i}]/e(L/K,v_i)f(L/K(T),v_i)$.

Soit w *la "norme" sur* L *définie par* $w(x) = \inf v_i(x)$, $\mathcal{V}$ *un système de représentants de* $w(L^\times) = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant s} v_i(L^\times)$ mod. $\Gamma_{v_0}(K)$. *Si* $\nu\in\mathcal{V}$ *on définit* ${}^\nu\overline{L} = :\{x\in L\,|\,w(x)\geqslant\nu\}$ mod. $\{x\in L\,|\,w(x)>\nu\}$ *qui s'identifie au produit* $\prod_{1\leqslant i\leqslant s} {}^\nu\overline{L}^{v_i}$.

Soit ${}^\nu\overline{\varepsilon}_i$ *la projection sur* ${}^\nu\overline{L}^{v_i}$. *Soient* E *un sous-K-espace vectoriel de* L *de dimension finie,* ${}^\nu\overline{E} = \{x\in E\,|\,w(x)\geqslant\nu\}$ mod. $\{x\in E\,|\,w(x)>\nu\}$ *alors on a :*

$$(1)\quad \dim_K E + \sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} \Big[\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant s} {}^\nu\overline{\varepsilon}_i({}^\nu\overline{E})\Big]/{}^\nu\overline{E} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} d_i^c(T)\ \Big(\sum_{\nu\in\mathcal{V}} \dim_{\overline{K}} {}^\nu\overline{\varepsilon}_i({}^\nu\overline{E})\Big).$$

Preuve. Soit Δ l'homomorphisme diagonal $L \xrightarrow{\Delta} \prod_{1\leqslant i\leqslant s} \hat{L}^{v_i}$, Δ est une isométrie de (L,w) dans $(\prod_{1\leqslant i\leqslant s} \hat{L}^{v_i}, \inf v_i)$ et son image est dense ainsi l'inégalité (1) est le théorème II.3 appliqué au sous-espace vectoriel $\Delta(E)$ de $(\prod_{1\leqslant i\leqslant s} \hat{L}^{v_i}, \inf_i v_i)$.

THEOREME II.7. *Soient* L/K *un corps de fonctions à une variable,* $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$, s *valuations 2 à 2 indépendantes sur* L *qui coincident sur* K *en une valuation* v_0. *On suppose que les extensions résiduelles* $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0}$ *sont des corps de fonctions d'une variable et que* (K,v_0) *est complet alors :*

$$r(g(L/K)-1) \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i\ d_i\ r_i(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})-1)$$

où

r (resp. r_i) *est le degré sur* K (resp. $\overline{K}^{v_i}$) *du corps des constantes de* $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i}$,

e_i *est l'indice de ramification de l'extension valuée* $(L/K,v_i)$,

d_i *est le défaut du corps de fonction valué* $(L/K,v_i)$,

$g(L/K)$ (resp. $g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})$) *est le genre du corps de fonctions* L/K (resp. $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i}$).

Preuve. 1ère étape. $\overline{K}^{v_0}$ est infini.

D'abord on montre facilement, [Math] Satz 1, p. 598, qu'il existe $T \in L$ résiduellement transcendant pour v_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, ainsi $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ induit la valuation de Gauss sur $K(T)$ associée à v_0 et T et donc sans changer les données numériques du problème on peut supposer que $\Gamma_{v_i}(L) \subset \Gamma =$: la clôture divisible de $\Gamma_{v_0}(K)$, pour $1\leqslant i\leqslant s$.

Soient $e = \prod_{1\leqslant i\leqslant s} e_i$, $\mathscr{V}$ un système de représentants $\geqslant 0$ de Γ mod. $\Gamma(K^\times)$, $0 \in \mathscr{V}$. Puisque les valuations sont deux à deux indépendantes on peut choisir pour $\nu \in \mathscr{V}$, $f_\nu \in L$ avec $f_0 = 1$ et pour $\nu \neq 0$, $v_i(f_\nu) = \delta_i(\nu)\nu$ où $\delta_i(\nu) = 0$ si $\nu \notin \Gamma_{v_i}(L)$ et 1 sinon. Soit $\lambda_\nu \in \Gamma_{v_0}(K)$ avec $e\nu = v_0(\lambda_\nu)$.

Soit D un diviseur positif de L/K tel que : $D+(f_\nu) \geqslant 0$ $\forall \nu \in \mathscr{V}$, le théorème II.6 appliqué à l'espace vectoriel $L(D)$ donne

$$(1)\quad \dim_K L(D) \leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} d_i^c(T) \sum_{\nu\in \mathscr{V}} \dim_{\overline{K}} {}^\nu\overline{\varepsilon}_i\, {}^\nu\overline{L(D)}$$

On veut évaluer $\dim_{\overline{K}} {}^\nu\overline{\varepsilon}_i\, {}^\nu\overline{L(D)}$. Pour cela considérons l'homomorphisme injectif de $\overline{K}$-espaces vectoriels

$$\rho_\nu : {}^\nu\overline{\varepsilon}_i\ {}^\nu\overline{L(D)} \hookrightarrow \overline{L}^{v_i}$$

$$ {}^\nu\overline{\varepsilon}_i\ {}^\nu\overline{z} \longrightarrow \overline{\varepsilon}_i(\overline{z/f_\nu})$$

Soient (définition I.6) $d_\nu^i = \pi(\rho_\nu({}^\nu\overline{\varepsilon}_i\ {}^\nu\overline{L(D)}))$ et $\pi_i(eD) = \pi(\overline{\varepsilon}_i\ \overline{L(eD)})$.

Montrons que

(2) $e \deg d_\nu^i \leqslant \deg \pi_i(eD)$.

En effet soit $z \in L(D)$ avec $v_i(z) \geqslant \nu$ pour tout i, alors $(z/f_\nu)^e = (z^e/\lambda_\nu)(\lambda_\nu/f_\nu^e)$. Ainsi si $t_i^\nu = \overline{\varepsilon}_i(\overline{\lambda_\nu/f_\nu^e})$ on a, $\overline{\varepsilon}_i(\overline{z/f_\nu})^e \in L(\pi_i(eD)-(t_i^\nu))$, ainsi par définition de d_ν^i on a $ed_\nu^i \leqslant \pi_i(eD)-(t_i^\nu)$ d'où (2) résulte puisque $\deg(t_i^\nu) = 0$.

Il existe D qui satisfait en sus les propriétés suivantes

$$(3)\qquad \begin{cases} \deg D > 2r(g(L/K)-1) \\ \deg d_\nu^i > 2r_i(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})-1). \end{cases}$$

En effet soit $T \in L$, résiduellement transcendant pour $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$. Soit $D \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(f_\nu T^n)+D \geqslant 0$ pour tout $\nu \in \mathcal{V}$ et $n > \operatorname{Max}(2r(g(L/K)-1),\ 2r_i(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})-1)$. Clairement $\overline{\varepsilon}_i\overline{T}^m \in {}^\nu\overline{\varepsilon}_i\,{}^\nu\overline{L(D)}$ pour $0\leqslant m\leqslant n$ et $\nu \in \mathcal{V} \cap \Gamma_{v_i}(L)$.

Si D satisfait (3) on a (théorème de Riemann-Roch)

$$(4)\qquad \begin{cases} \dim_K L(D) = \deg D + r(1-g(L/K)) \\ \dim_{\overline{K}} L(d_\nu^i) = \deg d_\nu^i + r_i(1-g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})). \end{cases}$$

Ainsi les inégalités (1) (2) donnent avec (4)

$$(5)\qquad \deg D - \sum_{1\leqslant i\leqslant s} d_i^c(T)(e_i/e)\deg \pi_i(eD) \leqslant \deg D - \sum_{1\leqslant i\leqslant s} d_i^c(T)\sum_\nu \deg d_\nu^i \leqslant$$
$$\leqslant r(g(L/K)-1) - \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i\, d_i^c(T)\, r_i(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})-1)$$

Cette inégalité vaut pour tout $T \in L$ résiduellement transcendant pour $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$.

Puisque $\overline{K}^{v_o}$ est infini, il résulte de Mathieu [Math], Hilfsatz p. 599 qu'il existe $T \in L(eD)$ tel que le diviseur des pôles de $\overline{\varepsilon}_i\ \overline{T}$ soit $\pi_i(eD)$, ainsi $\deg eD \geqslant [L:K(T)]$ et $\deg\pi_i(eD) = f(L/K), v_i)$ pour $1\leqslant i\leqslant s$. D'autre part les valuations $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ étant indépendantes sur K on a [Bki] prop. 2 § 8 n° 2 $[L:K(T)] \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i d_i^c(T) f(L/K(T), v_i)$ ainsi

$$(6) \qquad 0 \leqslant \deg D - \sum_{1\leqslant i\leqslant s} d_i^c(T)(e_i/e)\deg \pi_i(eD)$$

ce qui avec (5) et joint au corollaire II.4 donne l'inégalité souhaitée.

<u>$2^{\text{ème}}$ étape.</u> $\overline{K}^{v_0}$ est fini.

On fait l'extension des scalaires ~~par le corps K(X) des scalaires~~ par le corps $K(X)$ des fonctions rationnelles à une indéterminée sur K, et on prolonge v_i à $L_i(X)$ par la valuation de Gauss associée à v_i et X. L'inégalité résulte de la 1ère étape appliquée aux corps de fonctions $L_i(X)/K(X)$ et à ces valuations moyennant le théorème I.10.

<u>THEOREME II.8.</u> *On reprend les hypothèses du théorème* II.6, *alors l'inégalité* (1) *vaut avec* $d_i^c(T)$ *remplacé par* $d(L/K,v_i)$.

<u>Preuve</u> : Le cas général se déduit comme précédemment du cas où $\overline{K}^{v_0}$ est infini. Supposons donc ceci réalisé.

Reprenons D satisfaisant (3) dans la démonstration du théorème II.7, alors nD satisfait aussi (3), ainsi il existe une suite d'éléments $T_n \in L$ résiduellement transcendants tels que

$$0 \leqslant [L:K(T_n)] - \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i d_i^c(T_n) f(L/K(T_n),v_i)$$

$$\leqslant \delta = r(g(L/K)-1) - \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e_i\, d_i\, r_i(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})-1)$$

divisant par $e_{i_0} f(L/K(T_n),v_{i_0})$ et passant à la limite il suit avec le corollaire II.4 que $\lim\limits_{n} d_{i_0}^c(T_n) = d(L/K,v_{i_0})$ pour $1\leqslant i_0\leqslant s$.

<u>THEOREME II.9.</u> *Soient* L/K *un corps de fonctions à une variable,* K' *le corps des constantes de* L/K. *Soient* $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$, s valuations <u>*deux à deux indépendantes sur*</u> L <u>*qui coincident sur*</u> K' <u>*en une valuation*</u> v_0. *On suppose que les extensions résiduelles* $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0}$ *sont des corps de fonctions d'une variable alors* :

$$r(L/K)(g(L/K)-1) \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e(L/K,v_i)d(L/K,v_i)r(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})-1)$$

où

$r(L/K)$ (resp. $r(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})$) *est le degré sur* K(resp. $\overline{K}^{v_i}$) *du corps constantes de* L/K(resp. $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i}$),

$e(L/K, v_i)$ *est l'indice de ramification de l'extension valuée* $(L/K, v_i)$,
$d(L/K, v_i)$ *est le défaut du corps de fonctions valué* $(L/K, v_i)$,
$g(L/K)$ (resp. $g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})$) *est le genre du corps de fonctions* L/K (resp. $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i}$).

<u>Preuve</u>. Soit $T \in L$ résiduellement transcendant pour v_i alors

$$\frac{[L:K(T)]}{e(L/K,v_i)f(L/K(T),v_i)} = \frac{[L:K'(T)]\,[K':K]}{e(L/K',v_i)f(L/K'(T),v_i)e(K'/K,v_i)f(K'/K,v_i)}$$

ainsi il résulte du théorème I.9 dans le cas où $\overline{K}^{v_0}$ est infini et du théorème I.9 joint au théorème I.10 dans le cas où $\overline{K}^{v}$ est fini l'égalité :

$$(1)\quad \frac{e(L/K,v_i)d(L/K,v_i)r(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})}{r(L/K)} = e(L/K',v_i)d(L/K',v_i)r(\overline{L}^{v_i}/\overline{K'}^{v_i})$$

Ainsi le théorème II.9 se ramène au cas où $K'=K$ ce que nous supposons maintenant.

Soit $L\hat{K}/\hat{K}$ le corps de fonctions extension des scalaires par $\hat{K}$ du corps de fonctions L/K (cf. I.11) et $\hat{v}_i$ l'unique prolongement de v_i à $L\hat{K} \hookrightarrow \hat{L}^{v_i}$. Le théorème II.7 appliqué au corps de fonctions $L\hat{K}/\hat{K}$ et aux valuations $\hat{v}_i$ qui sont deux à deux indépendants donne l'inégalité :

$$(2)\quad r(L\hat{K}/\hat{K})(g(L\hat{K}/\hat{K})-1) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e(L\hat{K}/\hat{K},\hat{v}_i)d(L\hat{K}/\hat{K},\hat{v}_i)r(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})-1)$$

et puisque $e(L\hat{K}/\hat{K},\hat{v}_i) = e(L/K,v_i)$, que (théorème I.12) $\lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}\, d(L\hat{K}/\hat{K},\hat{v}_i) = r(L\hat{K}/\hat{K})\, d(L/K,v_i)$ et que [De] th. 3 p. 136, $g(L/K)-1 \geqslant \lambda_{L\hat{K}/\hat{K}}(g(L\hat{K}/\hat{K})-1)$ le théorème suit de (2).

<u>THEOREME II.10</u>. *Soient* L/K *un corps de fonctions à une variable,* $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$, *s valuations distinctes de* L *qui coïncident sur* K *en une valuation* v_0. *On suppose que les extensions résiduelles* $\overline{L}^{v}/\overline{K}^{v}$ *sont des corps de fonctions d'une variable et que le* <u>*corps valué*</u> (K, v_0) <u>*est hensélien*</u> *alors :*

$$r(L/K)(g(L/K)-1) \geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e(L/K,v_i)d(L/K,v_i)r(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0})(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0})-1)$$

où
$r(L/K)$ (resp. $r(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})$) *est le degré sur* K (resp. $\overline{K}^{v_i}$) *du corps des constantes de* L/K (resp. $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i}$),
$e(L/K,v_i)$ *est l'indice de ramification de l'extension valuée* $(L/K,v_i)$,
$d(L/K,v_i)$ *est le défaut du corps de fonctions valué* $(L/K,v_i)$,
$g(L/K)$ (resp. $g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i})$) *est le genre du corps de fonctions* L/K (resp. $\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_i}$).

Preuve. On note K' le corps des constantes de L/K.

On montre le théorème par récurrence sur le nombre s de valuations.
Si s = 1 c'est une conséquence du théorème I.5
Si s > 1, on suppose le théorème démontré pour s-1 valuations et on le démontre pour s :

A) Les s valuations sont deux à deux indépendantes.

Puisque (K,v_0) est hensélien les valuations $(v_i)_{1\leq i\leq s}$ coïncident sur le corps des constantes K' de L/K, ainsi ce cas est conséquence du théorème II.9.

B) Les s valuations $(v_i)_{1\leq i\leq s}$ ne sont pas deux à deux indépendantes sur L.

On définit une partition $(I_k)_{1\leq k\leq r}$ de $[1,s]$ par la condition que deux éléments i_1, i_2 de $[1,s]$ sont dans le même I_k si et seulement si v_{i_1} et v_{i_2} sont dépendantes sur L.

B.1. On suppose qu'il existe au moins deux valuations indépendantes. (ainsi $2\leq r\leq s$).

Soient R_{v_i} l'anneau de valuation de v_i et $\mathcal{B}_k \subsetneq L$ l'anneau de valuation de L engendré par les R_{v_i} pour $i \in I_k$([Bki], prop. 4 p. 136). Soit $T \in L$, résiduellement transcendant pour $(v_i)_{1\leq i\leq s}$ ([Math] Satz 1. p. 598). Les anneaux de valuation $\mathcal{B}_i \cap K'(T)$ sont deux à deux comparables [Bki] cor. p. 111, ainsi on peut supposer que $\mathcal{B}_1 \cap K'(T) \subset \ldots \subset \mathcal{B}_r \cap K'(T)$. Il suit de [Za-Sa II] lemme 4 p. 53 et cor. 1 p. 55 qu'il existe $\mathcal{B}_1^*,\ldots,\mathcal{B}_{r-1}^*,\mathcal{B}_r^*$ des anneaux de valuation de L tels que $\mathcal{B}_i^* \supset \mathcal{B}_i$ pour $1\leq i\leq r$, $\mathcal{B}_r^* = \mathcal{B}_r$ et $\mathcal{B}_i^* \cap K'(T) = \mathcal{B}_r \cap K'(T)$ pour $1\leq i\leq r$.

$\mathcal{B}_i^*$ est l'anneau de valuation de la valuation w_i de L et par construction les $(w_i)_{1\leq i\leq r}$ sont 2 à 2 indépendantes, elles coïncident sur K' avec une valuation w_0 ($R_{v_0} \subset R_{w_0} \subsetneq K'$) et T est résiduellement transcendant pour $(w_i)_{1\leq i\leq r}$, ainsi on peut appliquer le théorème II.9 au corps de fonctions L/K et aux valuations $(w_i)_{1\leq i\leq r}$. Ainsi on a l'inégalité

$$(1)\quad r(L/K)(g(L/K)-1) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant r} e(L/K,w_k)d(L/K,w_k)r(\overline{L}^{w_k}/\overline{K}^{w_0})(g(\overline{L}^{w_k}/\overline{K}^{w_0})-1).$$

Soit k, $1\leqslant k\leqslant r$, alors $R_{v_i} \subsetneq R_{w_k}$ pour $i \in I_k$ ainsi v_i induit une valuation $\overline{v}_i$ sur $\overline{L}^{w_k}$ et v_i est le composé $w_k \circ \overline{v}_i$ [Za-Sa II] cor. 1 p. 55. Les valuations $\overline{v}_i$, $i \in I_k$ coïncident sur $\overline{K}^{w_0}$ avec une valuation $\overline{v}_0$ et puisque (K,v_0) est hensélien il en est de même de $(\overline{K}^{w_0},\overline{v}_0)$ [Za-Sa II] cor. 1 p. 55, ainsi elles coïncident sur le corps des constantes de $\overline{L}^{w_k}/\overline{K}^{w_0}$. L'hypothèse de récurrence donne l'inégalité

$$(2)\quad r(\overline{L}^{w_k}/\overline{K}^{w_0})\;(g(\overline{L}^{w_k}/\overline{K}^{w_0})\overline{K}^{w_0})-1) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i\in I_k} e(\overline{L}^{w_k}/\overline{K}^{w_0},\overline{v}_i)d(\overline{L}^{w_k}/\overline{K}^{w_0},\overline{v}_i)r(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0})(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0})-1)$$

puisque $\overline{L}^{v_i} = (\overline{L}^{w_k})^{\overline{v}_i}$.

Le théorème suit alors de (1), (2) et du théorème I.13.

B.2. <u>Les s-valuations sont deux à deux dépendantes</u> (ainsi r = 1).

L'inégalité (1) devient

$$(1')\quad r(L/K)(g(L/K)-1) \geqslant e(L/K,w_1)d(L/K,w_1)r(\overline{L}^{w_1}/\overline{K}^{w_0})(g(\overline{L}^{w_1}/\overline{K}^{w_0})-1)$$

Maintenant on a s valuations $\overline{v}_i$ sur le corps de fonctions $\overline{L}^{w}/\overline{K}^{w}$ et il en existe au moins deux indépendantes par construction de w_1, ainsi B.1) donne l'inégalité

$$(2')\quad r(\overline{L}^{w_1}/\overline{K}^{w_0})(g(\overline{L}^{w_1}/\overline{K}^{w_0})-1) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant s} e(\overline{L}^{w_1}/\overline{K}^{w_0},\overline{v}_i)d(\overline{L}^{w_1}/\overline{K}^{w_0},\overline{v}_i)r(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0})(g(\overline{L}^{v_i}/\overline{K}^{v_0})-1)$$

et on conclut comme précédemment avec (1') et (2').

BIBLIOGRAPHIE

[Bki] BOURBAKI N., Algèbre commutative, chap. VI, Hermann, Paris, 1964.

[De] DEURING M., Lectures on the Theory of Algebraic Functions of one variable, Lecture Notes in Mathematics 314, Springer-Verlag.

[En] ENDLER O., Valuation theory, Springer-Verlag, New-York, 1972.

[Gr-Po] GREEN B., POP, F., Remarks on good reduction in valued function fields, manuscrit, Heidelberg, Jan. 88.

[Ku] KUHLMANN F.-V, Ordinary defect, Matignons's defect and other notions of a defect for finite extensions of valued fields, Manuscrit, Heidelberg, avril 88.

[La] LAMPRECHT E., Restabbildungen von Divisoren I, Arch. Math. 20 (1969), 233-264.

[Ma] MATHIEU H., Das Verhalten des Geschlechts bei konstantenreduktionen algebraischer Funktionenkörper, Arch. Math.20 (1969), 597-611.

[Ma] MATIGNON M., Genre et genre résiduel des corps de fonctions valués, Manuscripta math. 58, 1987, pp. 179-214.

[Ma-Oh1] MATIGNON M., OHM J., A fundamental equality for simple transcendantal extension of valued fields, Proc. Amer. Math. Soc., à paraître.

[Ma-Oh2] MATIGNON M., OHM J., A structure theorem for simple transcendantal extensions of valued fields II, manuscrit juin 88.

[Oh] OHM J., Lettre du 12-03-1988.

[Ro] ROQUETTE P., Reciprocity in valued function fields, J.Reine angew. Math. 375/376 (1987), 238-258.

[Za-Sa] ZARISKI O., SAMUEL P., Commutative Algebra, Graduate texts in mathematics ; vol. 28,29, Springer-Verlag.