arXiv:math.AG/0011098 15 Nov 2000

ARBRES DE HURWITZ ET AUTOMORPHISMES D'ORDRE p DES DISQUES ET DES COURONNES p-ADIQUES FORMELS

YANNICK HENRIO

Laboratoire de Mathématiques Pures de Bordeaux
UPRES-A 5467 CNRS
Université Bordeaux I
351 cours de la libération 33 405 Talence cedex, France
fax : (33) 05 56 84 69 29
e-mail : henrio@math.u-bordeaux.fr

Soit R un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique nulle et de corps résiduel algébriquement clos k, de caractéristique $p > 0$. On notera π une uniformisante de R et v_K la valuation de K, normalisée par $v_K(\pi) = 1$. On supposera en outre que K contient une racine primitive p-ième $\zeta = \lambda + 1$ de l'unité. Le disque formel sur R est le R-schéma $\mathcal{D} := \mathrm{Spec}R[[Z]]$. Si e est un entier strictement positif sur R, la couronne formelle d'épaisseur e est le R-schéma $\mathcal{C}_e := \mathrm{Spec}\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1Z_2 - \pi^e)}$. De tels R-schémas se rencontrent dans l'étude des courbes relatives sur R : En effet, soit X un R-schéma plat, dont les fibres sont de dimension 1. Si la fibre générique de X est lisse sur K, pour un point fermé x de la fibre spéciale X_k de X, le R-schéma local $\mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est un disque formel si x est un point lisse de X_k et une couronne formelle si x un point double ordinaire. Les problèmes de relèvements galoisiens (voir [1] et [4]) pour les courbes conduisent alors à des questions d'existence d'automorphismes de disques ou de couronnes formels.

Dans [2], B. Green et M. Matignon ont étudié les automorphismes d'ordre p du disque formel sur R. Ils montrent notamment que les positions relatives des points fixes de la fibre générique sous l'action d'un tel automorphisme σ satisfont des contraintes fortes, de nature métrique et algébrique. Plus précisément, ils montrent tout d'abord l'existence et l'unicité de l'éclatement minimal de $\mathcal{D}$, à support dans la fibre spéciale, pour lequel les spécialisations des points fixes de l'automorphisme σ sont lisses et distinctes. Sa fibre spéciale est un arbre de droites projectives sur k, orienté à partir de la transformée stricte de $\mathcal{D}\times_R k$. Ils montrent

Date: 28 janvier 2000.

alors que les points fixes se spécialisent dans les bouts de l'arbre ; de plus, sur un tel bout E, il existe une unique forme différentielle logarithmique dont le diviseur a pour unique zéro le point double et pour uniques pôles les spécialisations des points fixes sur E, et les résidus en ces points sont reliés directement à l'action sur l'espace tangent aux points fixes. Par ailleurs, sur une composante interne de l'arbre, il existe une forme différentielle exacte dont le diviseur a pour support les points doubles de cette composante.

Dans cet article, nous introduisons la notion combinatoire d'arbre de Hurwitz, qui permet d'exprimer ces contraintes de façon synthétique. Cette notion est adaptée également au cas des automorphismes d'ordre p de couronnes formelles, et nous étendons les résultats de Green et Matignon dans ce contexte. Nous donnons par ailleurs une condition nécessaire et suffisante pour qu'un arbre de Hurwitz provienne d'un automorphisme d'ordre p d'un disque ou d'une couronne formelle. Dans le cas du disque, on obtient ainsi la réciproque du théorème III 2.1 de [2].

Dans une première partie, nous rappellons des résultats connus sur la réduction des torseurs de Kummer de degré p. Le seul résultat essentiellement nouveau est le corollaire 1.8, qui permet d'écrire explicitement l'action d'un automorphisme d'ordre p au bord d'un disque formel. La seconde partie est consacrée à la définition d'un arbre de Hurwitz. La troisième partie traite des automorphismes d'ordre p au bord d'un disque formel ; nous construisons l'arbre de Hurwitz associé et, à l'aide de la géométrie formelle, nous montrons le **Théorème de réalisation :**

Soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ un arbre de Hurwitz, il provient d'un R-automorphisme d'ordre p de $R[[Z]]$ si et seulement si il vérifie les conditions $D[i]$ ci-dessous ($1 \leq i \leq 3$) :
$D[1]$ *La racine de $(\Gamma, \mathcal{H})$ est de valence 1.*
$D[2]$ *Toute arête aboutissant à un sommet maximal est une feuille.*
$D[3]$ *Tout sommet de valence supérieure ou égale à 3 est réalisable.*

Nous invitons le lecteur à entrer plus avant dans la lecture pour comprendre la terminologie employée. La condition $D[3]$ consiste en l'existence de certaines formes différentielles. Nous complétons ensuite ce résultat par un critère suffisant, mais non nécessaire, pour assurer l'existence de ces formes différentielles. Enfin, dans la dernière partie, nous donnons des résultats similaires pour les couronnes formelles, ainsi qu'un théorème de structure pour les arbres de Hurwitz associés à un automorphisme d'ordre p à petits conducteurs aux bords, analogue au théorème III 3.1 de [2].

Nous noterons $R\{T_1, \ldots, T_n\}$ l'algèbre des séries restreintes à coefficients dans R, c'est-à-dire l'algèbre des séries formelles

$$f = \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}^n} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} T_1^{\nu_1} \ldots T_n^{\nu_n}$$

avec $\lim_{\nu_1+\cdots+\nu_n\to+\infty} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} = 0$.

Nous noterons $R[[T]]\{T^{-1}\}$ l'algèbre des séries de Laurent $f = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu T^\nu$ telles que $\lim_{\nu\to-\infty} a_\nu = 0$. C'est un anneau de valuation discrète complet d'uniformisante π et de corps résiduel $k((T))$. Si $\mathcal{X}$ est un disque ou une couronne formelle, on appelle bord de $\mathcal{X}$ un point générique d'une composante irréductible de la fibre spéciale (qui est un diviseur de Weil sur $\mathcal{X}$). Le schéma $\mathcal{X}$ étant normal, un bord η définit une valuation notée v_η du corps des fonctions de $\mathcal{X}$. On vérifie que pour un bord η de $\mathcal{X}$, on a un isomorphisme de R-algèbre de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},\eta}$ sur $R[[T]]\{T^{-1}\}$; un élément T de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},\eta}$ tel que $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},\eta} = R[[T]]\{T^{-1}\}$ sera appelé paramètre au bord η. Le corps résiduel $k((T))$ de $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},\eta}$ est muni d'une valuation discrète ord_η, normalisée de façon à ce qu'une uniformisante de $k((T))$ ait pour valuation 1. Si f est non nul dans $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},\eta}$, f s'écrit de manière unique $f = \pi^{v_\eta(f)} f_0$, avec f_0 non nul. On note alors $\mathrm{ord}_\eta(f) := \mathrm{ord}_\eta(\bar{f}_0)$, où $\bar{f}_0$ est l'image résiduelle de f_0 dans $k((T))$.

1. Réduction des torseurs de Kummer de degré p

1.1. Les schémas en groupes $\mathcal{G}^{(n)}$ et $\mathcal{H}_n$. On rappelle ici la définition de certains schémas en groupes qui interviennent dans la réduction des μ_p-torseurs. Pour plus d'informations concernant ces schémas en groupes et leurs applications à la déformation d'Artin-Schreier à Kummer, on renvoie à [6]. Pour tout entier n strictement positif, on note $\mathcal{G}^{(n)} := \mathrm{Spec} R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}]$ le schéma en groupes affine sur R dont l'algèbre de Hopf est donnée ci-dessous :

– comultiplication :

$$\begin{aligned} R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] &\to R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] \otimes_R R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] \\ x &\mapsto x\otimes 1 + 1\otimes x + \pi^n x\otimes x \end{aligned}$$

– coinverse :

$$\begin{aligned} R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] &\to R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] \\ x &\mapsto -\frac{x}{\pi^n x+1} \end{aligned}$$

– coidentité

$$\begin{aligned} R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] &\to R \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

La fibre spéciale de $\mathcal{G}^{(n)}$ s'identifie canoniquement au groupe additif $\mathbb{G}_a$ sur k ; par aillleurs, la fibre générique est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur K :

Plus précisément, on définit un homomorphisme de schémas en groupes ϕ_n de $\mathcal{G}^{(n)}$ dans $\mathbb{G}_{m,R}$ par l'homomorphisme de R-algèbres de Hopf :

$$\begin{array}{ll} R[u,u^{-1}] & \to R[x,\dfrac{1}{\pi^n x+1}] \\ u & \mapsto \pi^n x+1 \end{array}$$

On a alors la suite exacte pour la topologie $fppf$:

$$(1) \quad 0 \to \mathcal{G}^{(n)} \xrightarrow{\phi_n} \mathbb{G}_{m,R} \to j_{n*}\mathbb{G}_{m,R_n} \to 0$$

où $R_n := R/(\pi^n)$ et j_n est l'immersion fermée de $\mathrm{Spec}R_n$ dans $\mathrm{Spec}R$. (voir [6]). On voit alors que $\phi_n \otimes_R K$ est un isomorphisme.

Pour $0 < n \leq v_K(\lambda) = \dfrac{v_K(p)}{p-1}$, le polynôme $\dfrac{(\pi^n x+1)^p-1}{\pi^{pn}}$ est à coefficients dans R ; on définit alors un homomorphisme de R-schémas en groupes ψ_n de $\mathcal{G}^{(n)}$ dans $\mathcal{G}^{(pn)}$ par :

$$\begin{array}{ll} R[y,\dfrac{1}{\pi^{pn}y+1}] & \to R[x,\dfrac{1}{\pi^n x+1}] \\ y & \mapsto \dfrac{(\pi^n x+1)^p-1}{\pi^{pn}} \end{array}$$

L'homomorphisme ψ_n est une isogénie de degré p, on note $\mathcal{H}_n$ le noyau de ψ_n, et on obtient la suite exacte pour la topologie $fppf$:

$$(2) \quad 0 \to \mathcal{H}_n \to \mathcal{G}^{(n)} \xrightarrow{\psi_n} \mathcal{G}^{(pn)} \to 0$$

Le schéma en groupes $\mathcal{H}_n$ est fini et plat sur R, de degré p. Sa fibre générique est isomorphe au groupe $\mu_{p,K}$. Si $0 < n < v_K(\lambda)$, sa fibre spéciale est le groupe radiciel additif α_p ; si $n = v_K(\lambda)$, sa fibre spéciale est un groupe étale isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1.2. **Torseurs** $fppf$ **sous** $\mathcal{H}_n$. Soit n un entier strictement positif, X un R-schéma, on déduit de la suite exacte (1) la suite exacte

$$H^0(X,\mathbb{G}_m) \to H^0(X_n,\mathbb{G}_m) \to H^1(X,\mathcal{G}^{(n)}) \to \mathrm{Pic}X \to \mathrm{Pic}X_n$$

où $X_n := X \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}R_n$. En particulier, on a le

Lemme 1.1. *Si* $\mathrm{Pic}X \to \mathrm{Pic}X_n$ *est injectif et si* $H^0(X,\mathbb{G}_m) \to H^0(X_n,\mathbb{G}_m)$ *est surjectif,* $H^1(X,\mathcal{G}^{(n)}) = 0$. *En particulier, si* $X = \mathrm{Spec}A$*, avec* A *une* R*-algèbre complète pour la topologie* π*-adique,* $H^1(X,\mathcal{G}^{(n)}) = 0$.

Soit X un R-schéma, si $0 < n \leq v_K(\lambda)$, on déduit de la suite exacte (2) la suite exacte

$$H^0(X,\mathcal{G}^{(n)}) \to H^0(X,\mathcal{G}^{(pn)}) \to H^1(X,\mathcal{H}_n) \to H^1(X,\mathcal{G}^{(n)})$$

Corollaire 1.2. *Si $X = \mathrm{Spec}A$, avec A une R-algèbre complète pour la topologie π-adique,*

$$H^1(X, \mathcal{H}_n) = \mathcal{G}^{(pn)}(A)/\mathcal{G}^{(n)}(A).$$

Remarque 1.3. On peut concrètement reécrire le corollaire de la manière suivante : On considère une R-algèbre A factorielle et complète pour la topologie π-adique, un torseur sous $\mathcal{H}_n$ au-dessus de $\mathrm{Spec}A$ est alors de la forme $\mathrm{Spec}B$, avec

$$B := \frac{A[w]}{\frac{(\pi^n w+1)^p-1}{\pi^{pn}} - u},$$

où u appartient à A. Deux éléments u_1 et u_2 de A définissent le même torseur s'il existe v dans A tel que

$$u_2 = u_1(\pi^n v+1)^p + \frac{(\pi^n v+1)^p - 1}{\pi^{pn}}.$$

1.3. **Torseurs** $fppf$ **sous** μ_p. On a la suite exacte de schémas en groupes commutatifs, pour la topologie $fppf$:

$$1 \to \mu_p \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathbb{G}_m \to 1.$$

On en déduit le

Lemme 1.4. *Soit X un R-schéma, si $\mathrm{Pic}X = 0$, $H^1(X, \mu_p) = H^0(X, \mathbb{G}_m)/H^0(X, \mathbb{G}_m)^p$. En particulier, si $X = \mathrm{Spec}A$, avec A une R-algèbre factorielle,*

$$H^1(X, \mu_p) = \mathbb{G}_m(A)/\mathbb{G}_m(A)^p.$$

Remarque 1.5. Comme ci-dessus, on peut reformuler concrètement le lemme de la manière suivante : On considère une R-algèbre A factorielle, un torseur sous μ_p au-dessus de $\mathrm{Spec}A$ est alors de la forme $\mathrm{Spec}B$, avec

$$B = \frac{A[y]}{(y^p - u)}.$$

où u est une unité de A, unique à la multiplication près d'une puissance p-ième d'une unité de A.

1.4. Réduction des μ_p-torseurs.

Proposition 1.6. *Soit $X := \mathrm{Spec}A$ un schéma affine plat sur R, dont les fibres sont intègres et de dimension 1 ; on suppose que A est une R-algèbre factorielle et complète pour la topologie π-adique. Soit $Y_K \to X_K$ un μ_p-torseur étale non trivial, donné par une équation $y^p = f$, où f est inversible dans A_K, et Y le normalisé de X dans Y_K ; on suppose que la fibre spéciale de Y est intègre. Soit η (resp. η') le point générique de la fibre spéciale de X (resp. Y). Les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,\eta}$ et $\mathcal{O}_{Y,\eta'}$ sont alors des anneaux de valuation discrète d'uniformisante π. Notons δ la valuation de la différente de $\mathcal{O}_{Y,\eta'}/\mathcal{O}_{X,\eta}$. On distingue alors deux cas suivant la valeur de δ.*

– *Si* $\delta = v_K(p)$, *Y est un $\mu_{p,R}$-torseur pour la topologie fppf, donc* $\mathcal{Y} = \mathrm{Spec}B$, *avec* $B := \dfrac{A[y]}{(y^p - u)}$, *où u est une unité de A, unique à la multiplication d'une puissance p-ième d'une unité de A près. On dit que le torseur $Y \to X$ a* **réduction multiplicative**.

– *Si* $0 \leq \delta < v_K(p)$, *on a* $\delta = v_K(p) - n(p-1)$, *où n est un entier tel que* $0 < n \leq v_K(\lambda)$, *et $Y \to X$ est un torseur sous $\mathcal{H}_n$ pour la topologie fppf, donc est donné par* $Y = \mathrm{Spec}B$,

$$B := \frac{A[w]}{(\frac{(\pi^n w+1)^p-1}{\pi^{pn}} - u)},$$

où u est un élément de A. De plus, si B est isomorphe à $\dfrac{A[w]}{\frac{(\pi^n w+1)^p-1}{\pi^{pn}} - u'}$, *alors il existe v dans A tel que* $u' = u(\pi^n v+1)^p + \dfrac{(\pi^n v+1)^p - 1}{\pi^{pn}}$.
Si $0 < \delta < v_K(p)$ *(resp.* $\delta = 0$*), on dit que le torseur $Y \to X$ a* **réduction additive** *(resp.* **réduction étale***).*

Démonstration. Notons $Y := \mathrm{Spec}B$, où B est une A-algèbre finie, normale. On peut écrire $f = \pi^r f_0$, où r est un entier, f_0 appartient à A et n'est pas divisible par π ; on peut en outre supposer $0 \leq r < p$. Supposons $r > 0$, alors comme y appartient à B, et $B \otimes_R k$ est réduit, $y = \pi^s y'$, avec y' dans B et $s > 0$. Mais alors, $f_0 = \pi^{sp-r} y'^p$, donc f_0 appartient à πB. Comme $\dfrac{f_0}{\pi}$ est entier sur A, en considérant un polynôme unitaire de degré d qui l'annulle, on voit que $\bar{f}_0^d$ est nul. Comme $A \otimes_R k$ est intègre, l'image $\bar{f}_0$ de f_0 dans $A \otimes_R k$ est nulle, i.e. f_0 appartient à πA, ce qui contredit sa définition. Ainsi, $r = 0$ et donc f appartient à A, $\bar{f} \neq 0$. En fait, comme π est irréductible dans A et f est inversible dans A_K, f est inversible dans A.

On suppose tout d'abord que $\bar{f}$ n'est pas une puissance p-ième, alors $\dfrac{A[y]}{(y^p - f)}$ est intégralement clos, contenu dans B et de même corps des fractions, ainsi il est égal à B. On a alors $\delta = v_K(p)$ et $\mathrm{Spec}B$ est un torseur sous μ_p.

On suppose à présent que f est une puissance p-ième modulo π. Il existe donc un g dans A, nécessairement inversible, tel que $f = g^p \mod \pi$. Remplaçant f par $g^{-p} f$, on peut alors supposer que $f = 1 + \pi^{r_0} h_0$, où h_0 appartient à A et $\bar{h}_0 \neq 0$. Si on avait $r_0 > p v_K(\lambda)$, alors $1 + \pi^{r_0} h_0$ serait une puissance p-ième dans A et le torseur $Y_K \to X_K$ serait trivial. Ainsi $r_0 \leq p v_K(\lambda)$. Si $r_0 = p v_K(\lambda)$, Y est un torseur (étale) sous $\mathcal{H}_{v_K(\lambda)}$. Sinon, on écrit la division euclidienne $r_o = p q_0 + s_0$, $0 \leq s_0 < p$. En posant $y := \pi^{q_0} y_0 + 1$, on obtient

$$\frac{(\pi^{q_0} y_0 + 1)^p - 1}{\pi^{p q_0}} = \pi^{s_0} h_0.$$

Supposons $s_0 > 0$, on a alors $y_0 = \pi y_0'$, avec y_0' dans B. De la relation $1 + \pi^{s_0} h_0 = (1 + \pi^{q_0+1} y_0')^p$, on tire alors la contradiction $\bar{h}_0 = 0$. Ainsi, $r_0 = pq_0$, avec $q_0 < v_K(\lambda)$. Si $\bar{h}_0$ n'est pas une puissance p-ième, on a fini. Sinon, on peut réappliquer le même processus et on tombe après un nombre fini d'étapes sur une équation $y^p = 1 + \pi^{pn} h$, avec ou bien $n = v_K(\lambda)$ et on a une réduction étale, ou bien $n < v_K(\lambda)$, $\bar{h}$ n'est pas une puissance p-ième et on a un torseur sous $\mathcal{H}_n$, donc radiciel en réduction. □

Exemple 1.7. Soit $A := R\{T, (T - T_i)^{-1}\}_{1 \le i \le r}$, $X := \mathrm{Spec} A$ vérifie les conditions de la proposition précédente. Un μ_p-torseur au-dessus de sa fibre générique se prolonge donc en un torseur sous μ_p (on dira qu'on a réduction multiplicative) ou sous $\mathcal{H}_n$ (on dira qu'on a réduction additive si $n < v_K(\lambda)$ et étale si $n = v_K(\lambda)$).

Le corollaire suivant est essentiel pour la construction d'automorphismes d'ordre p du disque formel à partir d'un arbre de Hurwitz. Il permet en effet d'écrire explicitement, sur un paramètre convenable, l'action d'un tel automorphisme au bord du disque.

Corollaire 1.8. *Soit $A := R[[T]]\{T^{-1}\}$, B une A-algèbre finie de degré p, plate sur R et G un groupe p-cyclique d'automorphismes de B ; on suppose que A s'identifie à B^G, et que $\bar{B} := B \otimes_R k$ est un corps, extension purement inséparable de degré p de $\bar{A} = k((t))$. L'anneau B est alors un anneau de valuation discrète complet d'uniformisante π, de corps résiduel de la forme $k((z))$; si Z relève z dans B, $B = R[[Z]]\{Z^{-1}\}$. Soit δ la valuation de la différente de B sur A.*
(A) Si $\delta = v_K(p)$, $\mathrm{Spec} B \to \mathrm{Spec} A$ est un $fppf$-torseur sous μ_p, et ainsi il existe une unité u dans A tel que $B = \dfrac{A[y]}{(y^p - u)}$. De plus, u est unique à la multiplication d'une puissance p-ième près d'une unité de A. En particulier, la forme différentielle $\omega := \dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$ est uniquement déterminée. De plus, le résidu h de ω appartient à $\mathbb{F}_p$.
Notons ϕ l'unique isomorphisme de G sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que pour $\sigma \in G$, on ait $\sigma y = \zeta^{\phi(\sigma)} y$, on a alors deux cas :
a) Si le résidu h de ω est non nul, alors $y = Z^h$, où Z est un paramètre de B, et, pour $\sigma \in G$, $\sigma Z = \zeta^{\frac{1}{h}\phi(\sigma)} Z$.
b) Si le résidu h de ω est nul, alors l'entier $m := 1 + \mathrm{ord}_t \omega$ est positif et premier à p. De plus, (pour un choix convenable de u) il existe un paramètre Z de B tel que $y = 1 + Z^m$ et, pour $\sigma \in G$,

$$\sigma Z = \zeta^{\frac{1}{m}\phi(\sigma)} Z (1 + \zeta^{-\phi(\sigma)} (\zeta^{\phi(\sigma)} - 1) Z^{-m})^{\frac{1}{m}}$$

(B) Si $0 < \delta < v_K(p)$, $\mathrm{Spec} B \to \mathrm{Spec} A$ est un $fppf$-torseur sous $\mathcal{H}_n$, où n est un entier donné par $v_K(p) = \delta + n(p-1)$. Ainsi, il existe u dans A tel que

$B = \dfrac{A[w]}{(\frac{(\pi^n w+1)^p-1}{\pi^{pn}} - u)}$, *$\bar{u} \notin k((t^p))$. De plus, $\bar{u}$ est unique à l'addition d'une puissance p-ième près. En particulier, la forme différentielle $\omega := d\bar{u}$ est uniquement déterminée. L'entier $m := 1 + \mathrm{ord}_t(\omega)$ est premier à p.*

Notons ϕ l'unique isomorphisme de G sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que pour $\sigma \in G$, on ait $\sigma(\pi^n w + 1) = \zeta^{\phi(\sigma)}(\pi^n w + 1)$. On a alors $w = Z^m$, où Z est un paramètre de B, et pour $\sigma \in G$, $\sigma Z = \zeta^{\frac{1}{m}\phi(\sigma)} Z(1 + \pi^{-n}(\zeta^{\phi(\sigma)} - 1)\zeta^{-\phi(\sigma)} Z^{-m})^{\frac{1}{m}}$.

Démonstration. Comme k est algébriquement clos, $\bar{B}$ est un corps $k((z))$ de séries formelles en une variable sur k. Soit Z dans B relevant Z, il suit du lemme 2.1 de [5] que $B = R[[Z]]\{Z^{-1}\}$. On est donc dans la situation de la proposition 1.6 (Remarquer que A est principal, donc factoriel).

(A) On suppose tout d'abord que $\delta = v_K(p)$. La proposition 1.6 montre alors que $\mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ est un $fppf$-torseur sous μ_p, donné par

$$B := \frac{A[y]}{(y^p - u)}.$$

(a) Si $\mathrm{ord}_t\bar{u}$ est premier à p, alors il est égal modulo p au résidu h de $\omega := \dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$. En particulier, ce résidu est un inversible de $\mathbb{F}_p$. De plus, y est modulo π la puissance h-ième d'une uniformisante z de $\bar{B}$. Comme B est hensélien, $y = Z^h$, où Z relève z dans B, ainsi Z est un paramètre de B. Le calcul de σZ est immédiat.

(b) Si maintenant $\mathrm{ord}_t\bar{u}$ est divisible par p, on peut le supposer nul. Alors, si $\omega := \dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$, on a $1 + \mathrm{ord}\omega = 1 + \mathrm{ord}d\bar{u}$ positif et premier à p. En particulier, le résidu de ω est nul. Alors on peut écrire $\bar{u} = 1 + \sum_{1\leq i\leq [\frac{m}{p}]} \bar{c}_i^p t^{ip} + \bar{a}t^m \mod t^{m+1}$, où les c_i et a sont dans R. En multipliant Y par $1 - c_1 T$, on se ramène à $\bar{c}_1 = 0$. En appliquant successivement ce processus, on peut supposer que $\bar{u}$ s'écrit $\bar{u} = 1 + \bar{a}t^m \mod t^{m+1}$, avec $\bar{a} \neq 0$. On a $(\bar{y} - 1)^p = t'^m$, où t' est une uniformisante de $\bar{A}$. Il en résulte que $\bar{y} - 1$ est la puissance m-ième d'une uniformisante de $\bar{B}$. Comme B est hensélien, $y = 1 + Z^m$, où Z est un paramètre de B. Le calcul de σZ est immédiat.

(B) On suppose à présent que $0 < \delta < v_K(p)$, alors, d'après la proposition 1.6, $\mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ est un $fppf$-torseur sous $\mathcal{H}_n$, où $v_K(p) = \delta + (p-1)n$. Il est donc donné par

$$B = \frac{A[w]}{(\frac{(\pi^n w+1)^p-1}{\pi^{pn}} - u)}.$$

Il résulte de la proposition 1.6 que $\bar{u}$ est unique à l'addition d'une puissance p-ième près, donc la différentielle $d\bar{u}$ est bien déterminée. Les assertions suivantes se démontrent de façon analogue au cas multiplicatif. □

Définition 1.9. Soit $\phi : \mathrm{Spec}B \to \mathrm{Spec}A$ un torseur comme dans le corollaire précédent, on notera ω_ϕ la 1-forme différentielle égale à $\dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$ si la réduction est multiplicative, donnée par l'équation $y^p = u$, et égale à $d\bar{u}$ si la réduction est additive ou étale, donnée par l'équation $(\pi^n w + 1)^p = 1 + \pi^{pn} u$. On dira que ω_ϕ est la 1-forme différentielle associée au torseur ϕ.

Proposition 1.10.

Démonstration. Quitte à échanger les bords, on peut supposer $m \geq 0$. Comme φ_K est étale, la fonction $\frac{\sigma Z}{Z} - 1$ ne possède pas de zéro sur la couronne, donc d'après le lemme 1.6 de [5], on a alors $m + m' = 0$. De plus, on peut écrire $\frac{\sigma(Z)}{Z} - 1 = \pi^q Z^m U$, où q est un entier et U est un inversible de $\mathcal{O}(\mathcal{C}_e)$. Alors,

$$d_\rho = (p-1)v_\rho\left(\frac{\sigma(Z)}{Z} - 1\right) = q(p-1) + m(p-1)v_K(\rho).$$

On conclut en remarquant que $q(p-1) = (p-1)v_\eta\left(\frac{\sigma(Z)}{Z} - 1\right) = d_\eta$. Enfin, la dernière assertion résulte du corollaire 1.8. □

2. Arbres de Hurwitz

Soit Γ un arbre fini connexe, orienté à partir d'un sommet fixé r_o appelé racine de l'arbre. On notera somΓ (resp. arΓ) l'ensemble des sommets (resp. arêtes) de Γ. Pour tout sommet s de Γ, $\mathrm{ar}(s)$ (resp. $\mathrm{ar}^+(s)$) sera l'ensemble des arêtes (resp. arêtes positives) d'origine s ; le nombre d'arêtes d'origine s est la valence du sommet s. Pour toute arête a de Γ, $o_\Gamma(a)$, $t_\Gamma(a)$ et $\bar{a}$ désignent respectivement l'origine, le sommet terminal et l'arête opposée de a. Une n-chaîne dans Γ est un sous-arbre Γ_0 avec $\mathrm{som}\Gamma_0 = \{s_i, 0 \leq i \leq n\}$ et $\mathrm{ar}\Gamma_0 = \{a_i, \bar{a}_i, 0 \leq i < n\}$, où $o_{\Gamma_0}(a_i) = s_i$ et $t_{\Gamma_0}(a_i) = s_{i+1}$. La chaîne Γ_0 est positive si a_i est positive pour tout i. Pour tout sommet s il existe une unique chaine d'origine r_o et de sommet terminal s, on la notera Γ_s.

L'orientation de l'arbre induit une relation d'ordre sur somΓ, à savoir $s_1 \leq s_2$ si et seulement si il existe une chaîne positive dans Γ d'origine s_1 et d'extrémité s_2. Un sommet maximal sera un sommet maximal pour cette relation d'ordre.

Définition 2.1. Etant donné un arbre Γ, fini et connexe, on considère les données suivantes :

- Un sommet r_0 de Γ ; on oriente Γ à partir de r_0.
- Un entier d_0 divisible par $p-1$, vérifiant $0 \leq d_0 \leq v_K(p)$.
- Une application ϵ de arΓ dans $\mathbb{N}$ telle que pour toute arête a on ait $\epsilon(a) = \epsilon(\bar{a})$. En particulier, ϵ définit une métrique sur le graphe obtenu en retirant les arêtes a telles que $\epsilon(a) = 0$.
- Une application m de arΓ dans $\mathbb{Z}$.

– Une application h de $\mathrm{ar}\Gamma$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On définit alors, pour tout sommet s, un entier $d(s)$ par :

$$d(s) := d_0 + (p-1)(\sum_{a\in \mathrm{ar}^+\Gamma_s} m(a)\epsilon(a)).$$

On dira que la donnée $\mathcal{H} := (r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ est une **donnée de Hurwitz** sur Γ, ou encore que $(\Gamma, \mathcal{H})$ est un arbre de Hurwitz (sous-entendu défini sur K), si les conditions $H[i]$, $1 \leq i \leq 7$, ci-dessous sont réalisées :
$H[1]$ Pour toute arête a, $m(\bar{a}) = -m(a)$ et $h(\bar{a}) = -h(a)$.
$H[2]$ Pour toute arête a, $m(a) = 0$ si et seulement si $h(a) \neq 0 \mod p$. De plus, si $m(a) \neq 0$, $m(a)$ est premier à p.
$H[3]$ Un sommet s de valence strictement supérieur à 1 est l'origine d'au moins trois arêtes distinctes, et on a les relations :

$$\sum_{a\in ar(s)} (m(a)+1) = 2 \qquad et \qquad \sum_{a\in ar(s)} h(a) = 0 \mod p.$$

$H[4]$ Si a est une arête positive telle que $\epsilon(a) = 0$, alors son sommet terminal est maximal. Si de plus $m(a) = 0$, on dira que a est une **feuille**.
$H[5]$ Pour tout sommet s de Γ, $0 \leq d(s) \leq v_K(p)$.

On dira alors qu'un sommet s de Γ est :

– **multiplicatif** si $d(s) = v_K(p)$,

– **additif** si $0 < d(s) < v_K(p)$,

– **étale** si $d(s) = 0$,

$H[6]$ Si a est une feuille, l'origine de a est un sommet multiplicatif.
$H[7]$ Si s est additif ou étale, pour toute arête a d'origine s, $h(a) = 0 \mod p$.

Si $(\Gamma_1, \mathcal{H}_1)$ et $(\Gamma_2, \mathcal{H}_2)$ sont des arbres de Hurwitz, on dira qu'ils sont équivalents si il existe un isomorphisme de Γ_1 sur Γ_2 qui transporte $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$.

Définition 2.2. Soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ un arbre de Hurwitz, et a une arête positive de Γ. Considérons le sous-arbre $\Gamma[a]$ dont l'ensemble des sommets est constitué de l'origine de a et des sommets s de Γ tels que $t_\Gamma(a) \leq s$. La donnée de Hurwitz $\mathcal{H}$ induit alors une donnée de Hurwitz $\mathcal{H}[a] := (o_\Gamma(a), d(o_\Gamma(a)), \epsilon, m, h)$ sur $\Gamma[a]$.

Définition 2.3. Soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ un arbre de Hurwitz.

$[M]$ Si s est un sommet de Γ multiplicatif de valence supérieure ou égale à 3, on dira qu'il est réalisable si il existe une fraction rationnelle $\bar{u}_s$ dans $k(t)$ et une injection j_s de $\mathrm{ar}(s)$ dans $\mathbb{P}^1(k)$ telles que :

– Si a est une arête d'origine s, le résidu de $\dfrac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}$ en $j_s(a)$ est égal à $h(a)$.

– $\operatorname{div}(\frac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}) = -\sum_{a\in \operatorname{ar}(s)} (m(a)+1)[j_s(a)]$.

[A] Si s est un sommet de Γ additif de valence supérieure ou égale à 3, on dira qu'il est réalisable si il existe une fraction rationnelle $\bar{u}_s$ dans $k(t)$ et une injection j_s de $\operatorname{ar}(s)$ dans $\mathbb{P}^1(k)$ telles que :

$$\operatorname{div}(d\bar{u}_s) = -\sum_{a\in \operatorname{ar}(s)} (m(a)+1)[j_s(a)].$$

Remarque 2.4. Très souvent, nous aurons à considérer le cas où un seul des $m(a)$ est positif (par exemple pour l'étude du disque formel). Le problème de l'existence d'une forme différentielle comme ci-dessus se ramène à l'existence d'un point à coordonnées distinctes d'une certaine sous-variété algébrique, en général non irréductible, d'un espace affine sur k (voir la preuve de 3.18). La dimension de l'espace de ces formes différentielles solutions de notre problème est alors $[\frac{m}{p}]$, où m est l'unique $m(a)$ positif (voir la remarque 3.17). En particulier, nous retrouvons la finitude de l'ensemble des solutions dans le cas où $m < p$ ([2]).

3. Automorphismes d'ordre p du disque formel

3.1. **Arbre de Hurwitz associé à un automorphisme d'ordre p du disque formel.** Soit σ un R-automorphisme d'ordre p de $R[[Z]]$ (resp. $R\{Z\}$), on note F_σ l'ensemble des points fixes géométriques de σ dans la fibre générique $\mathcal{D}_K$ (resp. D_K) de $\mathcal{D} := \operatorname{Spec}R[[Z]]$ (resp. $D := \operatorname{Spec}R\{Z\}$) ; on supposera que le cardinal de F_σ est égal à $m+1$ et que les points de F_σ sont tous rationnels sur K (le cardinal de F_σ étant fini, on peut toujours le supposer, quitte à faire une extension finie de K). On considère le modèle minimal $\mathcal{M}(\mathcal{D}_K, F_\sigma)$ (resp. $\mathcal{M}(D_K, F_\sigma)$) déployant les spécialisations des points fixes en des points lisses et distincts, soit Γ_σ^* l'arbre dual de sa fibre spéciale, orienté à partir du sommet r_0 correspondant à la transformée stricte du point générique de $\mathcal{D}_k$ (resp. de la fibre spéciale de D). Pour tout sommet s de Γ_σ^*, notons F_s le sous-ensemble, éventuellement vide, de F_σ formé des points qui se spécialisent sur la composante correspondant à s. On note Γ_σ l'arbre orienté défini par :

- L'ensemble des sommets de Γ_σ est la réunion disjointe de $\operatorname{som}\Gamma_\sigma^*$ et de F_σ (resp. de $\operatorname{som}\Gamma_\sigma^*$, de F_σ et d'un singleton $\{s_\infty\}$). Si x est un point de F_σ, on notera s_x le sommet associé.
- L'ensemble des arêtes positives de Γ_σ est la réunion disjointe de $\operatorname{ar}^+\Gamma_\sigma^*$ et de F_σ (resp. de $\operatorname{som}\Gamma_\sigma^*$, de F_σ et d'un singleton $\{a_\infty\}$). Si x est un point de F_σ, on notera a_x l'arête positive associée.
- Si a est une arête positive de Γ_σ^*, on a $o_{\Gamma_\sigma}(a) = o_{\Gamma_\sigma^*}(a)$ et $t_{\Gamma_\sigma}(a) = t_{\Gamma_\sigma^*}(a)$; pour tout point x de F_σ, si s est l'unique sommet de Γ_σ^* tel que $x \in F_s$, alors

$o_{\Gamma_\sigma}(a_x) = s$ et $t_{\Gamma_\sigma}(a_x) = s_x$; enfin, dans le cas du disque fermé formel, on a $o_{\Gamma_\sigma}(a_\infty) = r_0$ et $t_{\Gamma_\sigma}(a_\infty) = s_\infty$.

On définit une donnée de Hurwitz $\mathcal{H}_\sigma := (r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ sur Γ_σ de la façon suivante :

– L'entier d_0 est égal à la valuation de la différente au bord η du disque formel.
– Si a est une arête de Γ_σ^*, $\epsilon(a)$ est égal à l'épaisseur du point double correspondant dans la fibre spéciale de $\mathcal{M}(\mathcal{D}_K, F_\sigma)$; sinon, on pose $\epsilon(a) = 0$.
– Soit a une arête de Γ_σ. Si a est une arête de Γ_σ^* (resp. $a = a_x$ où x est un point de F_σ), elle correspond à un point double orienté z_a de $\mathcal{M}_\sigma := \mathcal{M}(\mathcal{D}_K, \sigma)$ (resp. à la spécialisation $\bar{x}$ de x dans la fibre spéciale de $\mathcal{M}_\sigma$). Soit ξ_a le bord de la couronne formelle $\mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a}$ (resp. le bord du disque formel $\mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, \bar{x}}$) $\mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a}$ qui correspond à l'origine de a. On notera $\hat{\mathcal{O}}_a$ le localisé-complété $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a})_{\xi_a}{}^{\wedge}$, et ω_a la 1-forme différentielle associée au torseur $\mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_a \to \mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_a^\sigma$ s'il a réduction radicielle (voir 1.9). On pose alors $m(a) := -(1 + \mathrm{ord}_{\xi_a}\omega_a)$ si ce torseur a réduction radicielle, et sinon $m(a)$ est le conducteur de Hasse de l'extension $\hat{\mathcal{O}}_a \otimes_R k / \hat{\mathcal{O}}_a^\sigma \otimes_R k$. On pose de plus $h(a) = 0$ si la réduction du torseur est additive ou étale et $h(a) = \mathrm{Rés}_{\xi_a}\omega_a$ si la réduction est multiplicative. Par ailleurs, $m(\bar{a}_x) = -m(a_x)$ et $h(\bar{a}_x) = -h(a_x)$. Enfin, dans le cas du disque fermé formel, on note $\hat{\mathcal{O}}_\infty := R[[Z^{-1}]]\{Z\}$, et ω_∞ la 1-forme différentielle associée au torseur $\mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_\infty \to \mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_\infty^\sigma$. On pose alors $m(a_\infty) = -(1 + \mathrm{ord}_\infty\omega_\infty)$, $h(a_\infty) = 0$ si la réduction du torseur est additive ou étale et $m(a_\infty) = -(1 + \mathrm{ord}_\infty\omega_\infty)$, $h(a_\infty) = \mathrm{Rés}_\infty\omega_\infty$ si la réduction est multiplicative.

Proposition 3.1. *Avec les définitions ci-dessus, $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ est un arbre de Hurwitz. De plus :*

– *Pour toute arête positive a, $m(a) \geq 0$.*
– *Si a est une feuille, son sommet origine est un sommet maximal de Γ_σ^*. En d'autres termes, les spécialisations des points de F_σ sont dans les bouts de la fibre spéciale de $\mathcal{M}_\sigma$. Il en résulte que pour toute arête positive a, en notant F_a l'ensemble des feuilles de $\Gamma[a]$, $m(a) + 1 = \mathrm{card}(F_a)$.*
– *Tout sommet de valence supérieure à 3 est réalisable.*

Remarque 3.2. Cette proposition est une reformulation, dans le langage des arbres de Hurwitz, des résultats de [2]. La preuve ci-dessous est à quelques détails près la même que celle exposée dans l'article cité au-dessus, nous ne la redonnons que pour illustrer la notion d'arbre de Hurwitz. On remarquera que dans le cas des arbres de Hurwitz provenant d'un automorphisme d'ordre p d'un disque formel, la donnée de l'arbre et de la racine permet de retrouver la valeur de $m(a)$ pour toute arête a. Ce ne sera plus le cas pour les arbres de Hurwitz provenant d'un automorphisme d'une couronne formelle.

Définition 3.3. On dira qu'un arbre de Hurwitz provient d'un automorphisme σ d'ordre p du disque formel (ouvert ou fermé) s'il est équivalent à $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$.

Démonstration.
$H[1]$ Si a est une arête de Γ_σ^*, la relation $m(\bar{a}) = -m(a)$ résulte de 1.10. Sinon, elle découle de la définition. Par ailleurs, la relation $h(\bar{a}) = -h(a)$ découle également de la définition.

$H[2]$ Soit a une arête de Γ_σ, on peut, quitte à changer a en $\bar{a}$, supposer a positive. En particulier, l'origine de a n'est pas un sommet maximal. Supposons tout d'abord l'origine de a multiplicative, la forme différentielle ω_a est alors logarithmique, donc l'ordre de ω_a est supérieur à -1. Alors $m(a) = 0$ est équivalent à $\mathrm{ord}_{\xi_a}\omega_a = -1$, ce qui est équivalent à $h(a) = \mathrm{Rés}_{\xi_a}\omega_a \neq 0 \mod p$. Si maintenant on suppose l'origine de a additive ou étale, on a par hypothèse $h(a) = 0$ et comme ω_a est maintenant une différentielle exacte, on ne peut pas avoir $\mathrm{ord}_{\xi_a}\omega_a = -1$. Ainsi, $m(a) \neq 0$.

$H[3]$ Le fait qu'un sommet ne peut pas être de valence égale à 2 résulte de la minimalité du modèle $\mathcal{M}_\sigma$. Soit s un sommet de Γ_σ^*, correspondant à une droite projective E_s, et $\tilde{E}_s$ l'ouvert affine de E_s complémentaire des points doubles et des spécialisations des points de F_s. On note E'_s la composante au-dessous de E_s dans le quotient de $\mathcal{M}_\sigma$ par σ et $\tilde{E}'_s$ l'image de $\tilde{E}_s$ dans E'_s.

Soit $\hat{\mathcal{M}}_\sigma$ le complété formel de $\mathcal{M}_\sigma$ le long de sa fibre spéciale, et $\tilde{\mathcal{E}}_s$ le sous-schéma formel affine de $\hat{\mathcal{M}}_\sigma$ de fibre spéciale $\tilde{E}_s$. On définit de manière analogue $\tilde{\mathcal{E}}'_s$. La R-algèbre $A_s := \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{E}}'_s)$ est complète pour la topologie π-adique et factorielle. En notant $B_s := \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{E}}_s)$, on considère alors la réduction du torseur $\mathrm{Spec}B_s \to \mathrm{Spec}A_s$, qui est radicielle.

Si la réduction est additive, donnée par une équation $(\pi^n w + 1)^p = 1 + \pi^{pn}u_s$, la différentielle $\omega_s := d\bar{u}_s$ est uniquement déterminée. Comme $\tilde{E}_s$ est une courbe lisse, ω_s n'a ni zéro ni pôle sur $\tilde{E}'_s$. On a alors

$$\mathrm{div}\omega_s = -\sum_{a \in \mathrm{ar}(s)} (m(a)+1)[t_a].$$

(En notant t_a l'image dans E'_s du point de E_s correspondant à l'arête a). La relation $\sum_{a\in\mathrm{ar}(s)}(m(a)+1) = 2$ est alors simplement le fait que le degré de ω_s est égal à -2. De plus, comme s est additif, pour toute arête a d'origine s, on a $h(a) = 0$ par définition. Ainsi, la somme des $h(a)$ est clairement nulle.

Si la réduction est multiplicative, donnée par une équation $y^p = u_s$, la différentielle $\omega_s := \dfrac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}$ est uniquement déterminée. Comme $\tilde{E}_s$ est une courbe lisse, ω_s n'a ni zéro ni pôle sur $\tilde{E}'_s$. On a alors

$$\mathrm{div}\omega_s = -\sum_{a\in\mathrm{ar}(s)}(m(a)+1)[t_a].$$

et pour a dans $\mathrm{ar}(s)$, le résidu de ω_s en t_a est $h(a)$. Les relations $\sum_{a\in\mathrm{ar}(s)}(m(a)+1)=2$ et $\sum_{a\in\mathrm{ar}(s)}h(a)=0$ traduisent alors respectivement que le degré de ω_s est -2 et le théorème des résidus.

En particulier, on voit dès à présent que les sommets correspondant à des droites projectives sont réalisables.

$H[4]$ est immédiat. (Les feuilles correspondent aux points de F_σ).

$H[5]$ résulte du

Lemme 3.4. *Soit s un sommet de Γ_σ^*. Le point générique de la composante E_s définit une valuation discrète v_s du corps des fractions $\mathcal{K}$ de $R[[Z]]$ (resp. $R\{Z\}$). L'entier $d(s) := d_0 + (p-1)(\sum_{a\in\mathrm{ar}^+\Gamma_s} m(a)\epsilon(a))$ est alors égal à la valuation de la différente de l'extension $(\mathcal{K}, v_s)/(\mathcal{K}^\sigma, v_s)$.*

La preuve est immédiate, en utilisant la proposition 1.10, par récurrence sur le nombre de sommets de Γ_s.

$H[6]$ Une feuille correspond à un point fixe de σ, en particulier, la composante qui le porte a pour différente $v_K(p)$, c'est-à-dire l'origine de la feuille est un sommet multiplicatif.

$H[7]$ est immédiat d'après la définition.

La donnée $\mathcal{H}_\sigma$ est donc bien une donnée de Hurwitz sur Γ_σ. Soit a une arête positive, et s son origine. Considérons le modèle M_a de $\mathcal{D}_K$ obtenu à partir de $\mathcal{M}_\sigma$ en recontractant les droites projectives correspondant aux sommets s' tels que $\Gamma_{s'}$ passe par a. Ces droites se contractent en un point z_a de E_s qui est alors lisse sur M_a, soit Z_a un paramètre du disque formel $\hat{\mathcal{O}}_{M_a,z_a}$, i.e. $\hat{\mathcal{O}}_{M_a,z_a} = R[[Z_a]]$. On a alors, d'après la proposition 1.10, $m(a) = \mathrm{ord}_{Z_a}\left(\frac{\sigma Z_a}{Z_a} - 1\right) \geq 0$. Soit a_0 une feuille de Γ_σ. Son origine s est un sommet de Γ_σ^*, multiplicatif. Supposons qu'il existe une arête a positive de Γ_σ^* de sommet origine s, on a alors $m(a) \geq 0$. Comme $d(t_{\Gamma_\sigma}(a)) \leq v_K(p) = d(o_{\Gamma_\sigma}(a))$, on doit avoir $m(a) = 0$. Plus généralement, pour toute chaîne positive d'origine s, le sommet terminal est multiplicatif. Prenons une telle chaîne, maximale. La dernière arête est une feuille. De son sommet origine s' ne partent que des feuilles par maximalité. De la relation $\sum_{a'\in\mathrm{ar}(s')}(m(a')+1) = 2$ et du fait qu'il existe au moins deux feuilles d'origine s', on déduit la contradiction $m(a) < 0$ pour l'unique arête positive de sommet terminal s'. Ainsi, toute arête d'origine s est une feuille.

Soit a une arête positive de Γ_σ. Si a est une feuille, alors $m(a) = 0$, et $\mathrm{card}F_a = 1$. Si a n'est pas une feuille, le sommet terminal s de a est de valence supérieure à 3. Donc, d'après $H[3]$, $m(a) + 1 = \sum_{a' \in \mathrm{ar}^+(s)} (m(a') + 1)$. Par récurrence sur le nombre maximal de sommets d'une chaîne positive reliant le sommet terminal de a à une feuille, on peut alors supposer $m(a') + 1 = \mathrm{card}F_{a'}$ pour toute arête positive a' d'origine s. Comme F_a est la réunion disjointe des $F_{a'}$, on a alors $m(a) + 1 = \mathrm{card}F_a$. Remarquons qu'on peut aussi déduire cette formule du théorème de préparation de Weierstrass. □

3.2. **Théorème de réalisation pour le disque formel.**

Théorème 3.5.

Soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ *un arbre de Hurwitz, avec* $\mathcal{H} = (r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ *; en notant* R *l'anneau de valuation de* K*,* $(\Gamma, \mathcal{H})$ *provient d'un* R*-automorphisme d'ordre* p *de* $R[[Z]]$ *si et seulement si il vérifie les conditions* $D[i]$ *ci-dessous* $(1 \leq i \leq 3)$ *:*
$D[1]$ *La racine* r_0 *est de valence* 1*.*
$D[2]$ *Toute arête aboutissant à un sommet maximal est une feuille.*
$D[3]$ *Tout sommet de valence supérieure ou égale à* 3 *est réalisable.*

La partie directe du théorème, due à B. Green et M. Matignon, a déjà été prouvée, à l'exception de $D[1]$, qui résulte de la construction du modèle minimal : En fait, le sommet terminal de l'unique arête d'origine r_0 correspond au plus petit disque fermé contenant tous les points de F_σ.

Remarque 3.6. Quitte à faire une extension finie de K, on peut toujours se ramener au cas où la valuation d_0 de la différente au bord du disque formel est nulle, au moyen d'un recollement convenable d'une couronne formelle semi-ouverte avec action d'un automorphisme d'ordre p. En effet, soit σ un automorphisme d'ordre p du disque formel, avec $m+1$ points fixes dans la fibre générique. Posons $v_K(p) = d_0 + (p-1)n_0$, d'après le corollaire 1.8, il existe un paramètre Z au bord du disque formel tel que

$$\sigma Z = \zeta^{-\frac{1}{m}} Z (1 + \lambda \pi^{-n_0} \zeta^{-1} Z^m)^{-\frac{1}{m}}.$$

Considérons maintenant l'automorphisme σ_0 d'ordre p de la couronne formelle semi-ouverte $\mathrm{Spec}\dfrac{R[[V]]\{W\}}{(VW - \rho)}$, donné par :

$$\sigma_0 V := \zeta^{-\frac{1}{m}} V (1 + V^m)^{-\frac{1}{m}},$$

avec $\rho^m := \lambda \pi^{-n_0} \zeta^{-1}$. On utilise alors un lemme analogue au lemme 3.8 pour construire un prolongement de σ à un disque formel plus grand, en identifiant $W = Z^{-1}$, et le choix de σ_0 montre que l'automorphisme obtenu agit sans inertie au bord.

3.3. **Construction d'automorphismes d'ordre p.** Le but de cette partie est de donner les résultats constituant le coeur technique de la preuve de la partie réciproque du théorème 3.5. Notamment, on va voir que l'étape essentielle est la construction d'automorphismes d'ordre p du disque fermé à partir d'un arbre de Hurwitz. On fixe une extension finie K de K_0, et on note R son anneau de valuation ; π désigne une uniformisante de R

3.3.1. *Lemmes de recollement.*

Lemme 3.7. *On se donne des éléments $a_1, \ldots, a_r$ de R distincts deux à deux modulo π. On note, pour i de 1 à r, α_i (resp. β_i) l'injection canonique de la R-algèbre $R\{Z,(Z-a_j)^{-1}\}_{1\leq j\leq r}$ (resp. $R[[X_i]]$) dans $R[[Z-a_i]]\{(Z-a_i)^{-1}\}$ (resp. $R[[X_i]]\{X_i^{-1}\}$). On se donne également des isomorphismes de R-algèbres $\psi_i : R[[X_i]]\{X_i^{-1}\} \to R[[Z-a_i]]\{(Z-a_i)^{-1}\}$.*

Si θ est l'homomorphisme de R-module de $R\{Z,(Z-a_j)^{-1}\}_{1\leq j\leq r}\times\prod_{1\leq i\leq r} R[[X_i]]$ dans $\prod_{1\leq i\leq r} R[[Z-a_i]]\{(Z-a_i)^{-1}\}$ défini par

$$\theta(f_0, f_1, \ldots, f_r) = (\alpha_1(f_0) - \psi_1\circ\beta_1(f_1), \ldots, \alpha_r(f_0) - \psi_r\circ\beta_r(f_r)),$$

pour f_0 dans $R\{Z,(Z-a_j)^{-1}\}_{1\leq j\leq r}$ et f_i dans $R[[X_i]]$ pour $1\leq i\leq r$, alors θ est surjective et son noyau N est une R-algèbre de séries entières restreintes en une variable (autrement dit de la forme $R\{Z_0\}$).

Démonstration. On voit immédiatement que N est une sous-R-algèbre de

$$R\{Z,(Z-a_j)^{-1}\}_{1\leq j\leq r}\times\prod_{1\leq i\leq r} R[[X_i]].$$

On posera $z := Z \mod \pi$ et, pour i de 1 à r, $x_i := X_i \mod \pi$. De l'homomorphisme de R-modules θ, on obtient un homomorphisme de k-espace vectoriel

$$\bar\theta := \theta\otimes_R k : k[z,(z-\bar a_j)^{-1}]_{1\leq j\leq r}\times\prod_{1\leq i\leq r} k[[x_i]] \to \prod_{1\leq i\leq r} k((x_i)).$$

Comme $\bar\psi_i(\bar\alpha_i(x_i))$ est une uniformisante de $k((z-\bar a_i))$, quitte à changer le paramètre X_i, on peut supposer que $\bar\psi_i(\bar\alpha_i(x_i)) = z-\bar a_i$. On voit alors immédiatement que $\bar\theta$ est surjectif et son noyau est égal à $k[z]$. Il suit alors que θ est surjectif, et on obtient donc la suite exacte :

$$0\to N\to R\{Z,(Z-a_j)^{-1}\}_{1\leq j\leq r}\times\prod_{1\leq i\leq r} R[[X_i]] \to \prod_{1\leq i\leq r} R[[Z-a_i]]\{(Z-a_i)^{-1}\}\to 0$$

Alors, $N\otimes_R k$ s'identifie au noyau $k[z]$ de $\bar\theta$ car $\prod_{1\leq i\leq r} R[[Z-a_i]]\{(Z-a_i)^{-1}\}$ est plat sur R. Relevons z en un élément Z_0 de N, on a alors $N = R\{Z_0\}$. □

On démontre de manière identique le lemme :

Lemme 3.8. *Soient e une entier strictement positif, β l'injection canonique de $\dfrac{R[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2-\pi^e)}$ dans $R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$, α l'injection canonique de $R\{Z\}$ dans $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$*

et ψ un isomorphisme de R-algèbres de $R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$ sur $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$. Si θ désigne l'homomorphisme de R-modules

$$\theta : R\{Z\} \times \frac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1Z_2 - \pi^e)} \to R[[Z^{-1}]]\{Z\}$$

défini par $\theta(f,g) := \alpha(f) - \psi \circ \beta(g)$, alors θ est surjectif, et son noyau N est une algèbre de séries entières en une variable, à coefficients dans R (autrement dit de la forme $R[[Z_0]]$).

3.3.2. *Application aux arbres de Hurwitz.*

Proposition 3.9. *Soit Γ un arbre fini connexe et $\mathcal{H} = (r_1, d_1, \epsilon, m, h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ ; on suppose que $(\Gamma, \mathcal{H})$ vérifie les conditions suivantes :*

- *La racine r_1 est de valence supérieure ou égale à 3*
- *Toute arête a d'origine r_1 vérifie $\epsilon(a) = 0$. En particulier, le seul sommet non maximal est la racine r_1.*
- *Il existe une unique arête a_1 d'origine r_1 qui n'est pas une feuille (i.e. $m(a_1) \neq 0$).*
- *La racine r_1 est réalisable.*

Alors, si R désigne l'anneau de valuation de K, il existe un automorphisme σ d'ordre p du disque fermé formel $\mathrm{Spec} R\{Z\}$ dont l'arbre de Hurwitz associé est équivalent à $(\Gamma, \mathcal{H})$, et tel qu'il existe un paramètre V de $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$ avec

$$\sigma(V) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_1)}} V(1 + \pi^{v_K(\lambda)} V^{m(a_1)})^{-\frac{1}{m(a_1)}}.$$

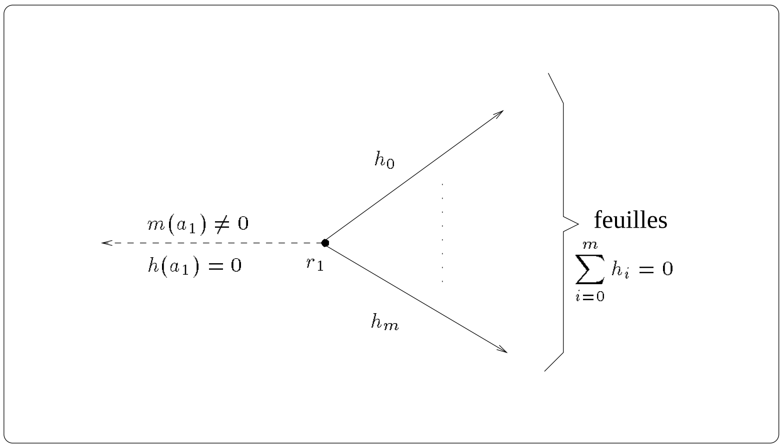

FIG. 1. Première réalisation (3.9)

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si le nombre de feuilles a de $(\Gamma, \mathcal{H})$ est $m+1$, alors on a $m(a_1) = -m$ d'après la condition $H[3]$. De plus, la racine est multiplicative d'après $H[6]$. Soit $\bar{u}_{r_1}$ et j_{r_1} vérifiant les conditions de $[M]$.

Pour simplifier les notations, on notera $\bar{u} := \bar{u}_{r_1}$, et $t_a := j_s(a)$ pour toute arête a d'origine r_1. On peut supposer $t_{a_1} = +\infty$. Alors, quitte à multiplier $\bar{u}$ par une puissance p-ième, ce qui ne change pas la différentielle $\frac{d\bar{u}}{\bar{u}}$, on peut supposer que $\bar{u} = \prod_{a\in F}(t-t_a)^{h(a)}$, où F désigne l'ensemble des feuilles distinctes de a_1. Soit T_a dans R relevant t_a, et u un élément de la R-algèbre $\mathcal{A} := R\{T,(T-T_a)^{-1}\}_{a\in F}$ relevant $\bar{u}$. Notons $\mathcal{B} := \frac{\mathcal{A}[Y]}{(Y^p-u)}$, c'est une $\mathcal{A}$-algèbre libre de rang p. On considère l'automorphisme de $\mathcal{A}$-algèbre (d'ordre p) σ tel que $\sigma(Y) = \zeta Y$. Le k-morphisme $\mathrm{Spec}\bar{\mathcal{B}} \to \mathrm{Spec}\bar{\mathcal{A}}$ est un revêtement purement inséparable de degré p de l'ouvert affine $\mathbb{P}^1_k \setminus \{\infty, t_a\}_{a\in F}$, et $d\bar{u}$ ne possède ni zéro, ni pôle sur cet ouvert, donc $\mathrm{Spec}\bar{\mathcal{B}}$ est lisse, et c'est un ouvert de la droite projective sur k de la forme $\mathbb{P}^1_k\setminus\{\infty, z_a\}_{a\in F}$, où les z_a sont des éléments de k distincts deux à deux. Autrement dit, on a $\bar{\mathcal{B}} = k[z,(z-z_a)^{-1}]_{a\in F}$. Soit Z (resp. Z_a) un relèvement de z (resp. z_a) dans $\mathcal{B}$ (resp. R), comme $\mathcal{B}$ est plat sur R, on a $\mathcal{B} = R\{Z,(Z-Z_a)^{-1}\}_{a\in F}$. Soit ω la forme différentielle $\frac{d\bar{u}}{\bar{u}}$.

Pour $a \in F$, le résidu de ω en t_a est $h(a) \neq 0 \mod p$; il résulte alors de la proposition 1.8 (A,a) que $\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} R[[T-T_a]]\{(T-T_a)^{-1})\} = R[[Z-Z_a]]\{(Z-Z_a)^{-1}\}$, et l'action induite par celle de σ est donnée sur un paramètre convenable $X_{(a)}$ par $\sigma(X_{(a)}) = \zeta^{h(a)^{-1}}(X_{(a)})$. Remarquons que cette action se prolonge canoniquement en une action sur $R[[X_{(a)}]]$. Soit N le noyau de l'homomorphisme (surjectif) de $R[\langle\sigma\rangle]$-module $\phi : \mathcal{B}\times\prod_{a\in F} R[[X_{(a)}]] \to \prod_{a\in F} R[[Z-Z_a]]\{(Z-Z_a)^{-1}\}$ défini par $\phi(b,(f_a)) = (b\otimes 1 - f_a)_{a\in F}$. D'après le lemme 3.7, la $R[\langle\sigma\rangle]$-algèbre N est alors de la forme $R\{Z_0\}$. De plus, l'arbre de Hurwitz associé à l'automorphisme σ de $R\{Z_0\}$ est isomorphe à $(\Gamma,\mathcal{H})$. La dernière assertion résulte de la proposition 1.8 (A,b), car $\mathrm{ord}_\infty d\bar{u} = -(m(a_1)+1)$. □

Corollaire 3.10. *Soit Γ un arbre fini connexe et $\mathcal{H} = (r_1, d_0, \epsilon, m, h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ ; on suppose que $(\Gamma,\mathcal{H})$ vérifie les conditions suivantes :*

- *La racine r_0 est l'origine d'une unique arête a_0, et $\epsilon(a_0) \neq 0$, $m(a_0) \neq 0$.*
- *Si a est une arête positive d'origine $r_1 := t_\Gamma(a_0)$, a est une feuille. En particulier, r_1 est multiplicatif.*
- *Le sommet r_1 est réalisable.*

Alors, il existe un automorphisme σ d'ordre p du disque ouvert formel $\mathrm{Spec}R[[Z]]$ dont l'arbre de Hurwitz associé est équivalent à $(\Gamma,\mathcal{H})$, et tel qu'il existe un paramètre X de $R[[Z]]\{Z^{-1}\}$ avec

$$\sigma(X) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_0)}} X(1+\pi^{v_K(\lambda)-n_0}X^{m(a_0)})^{-\frac{1}{m(a_0)}},$$

où n_0 est un entier donné par la relation $v_K(p) = d_0 + (p-1)n_0$.

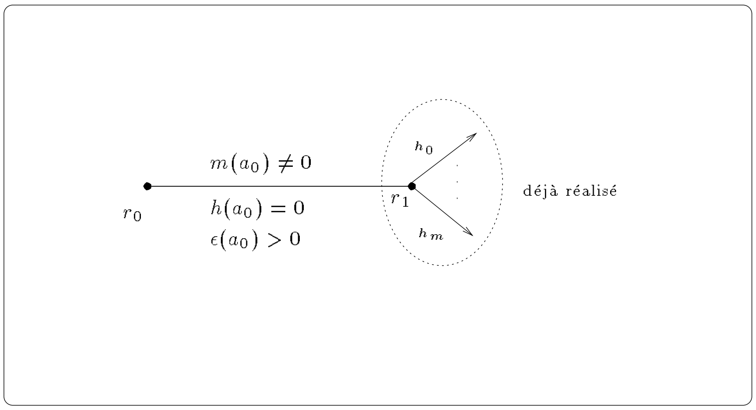

FIG. 2. Deuxième réalisation (3.10)

Démonstration. Soit $\mathcal{H}'$ la donnée de Hurwitz sur Γ définie par

$$\mathcal{H}' := (r_1, d_1, \epsilon', m, h),$$

où $d_1 := d_0 + m(a_0)(p-1)\epsilon(a_0)$, $\epsilon'(a) = \epsilon(a)$ si $a \notin \{a_0, \bar{a}_0\}$, et $\epsilon'(a_0) = 0$. Alors, $(\Gamma, \mathcal{H}')$ vérifie les hypothèses de la proposition 3.9 (avec $a_1 = \bar{a}_0$). Il existe ainsi un R-automorphisme σ de $R\{Z\}$, d'ordre p, dont l'arbre de Hurwitz s'identifie à $(\Gamma, \mathcal{H}')$, et tel qu'il existe un paramètre V de $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$ tel que l'action induite de σ sur V soit donnée par $\sigma(V) = \zeta^{\frac{1}{m}} V(1 + \pi^{v_K(\lambda)} V^{-m})^{\frac{1}{m}}$, où $m = m(a_0) > 0$ et $\lambda = \zeta - 1$. Notons $e := \epsilon(a_0)$ et considérons la R-algèbre $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^e)}$, munie du R-automorphisme (d'ordre p) $\sigma(Z_1) = \zeta^{-\frac{1}{m}} Z_1(1 + \pi^{v_K(\lambda) - em} Z_1^m)^{-\frac{1}{m}}$. Soit ψ l'isomorphisme de R-algèbres de $R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$ sur $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$ qui envoie Z_2 sur V, ψ est σ-équivariant ; en utilisant le lemme 3.8, on obtient un automorphisme σ de $R[[Z_0]]$ dont l'arbre de Hurwitz associé s'identifie à $(\Gamma, \mathcal{H})$, et le paramètre au bord $Z' := Z_1$ possède la propriété attendue ; en effet, $v_K(p) = d(r_1) = d_0 + em(a_0)(p-1)$, donc $n_0 = em$. $\square$

Proposition 3.11. *Soit Γ un arbre fini connexe et $\mathcal{H} = (r_1, d_1, \epsilon, m, h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ ; on suppose que $(\Gamma, \mathcal{H})$ vérifie les conditions suivantes :*

- *La racine r_1 est additive.*
- *Il existe une unique arête a_1 d'origine r_1 vérifiant $m(a_1) < 0$.*
- *Si a est une arête d'origine r_1 distincte de a_1, l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_a, \mathcal{H}_a)$ provient d'un R-automorphisme σ_a d'ordre p d'un disque formel $\mathcal{D}_a$, et il existe un paramètre X_a au bord de $\mathcal{D}_a$ tel que*

$$\sigma_a(X_a) = \zeta^{-\frac{1}{m(a)}} X_a(1 + \pi^{v(\lambda) - n_1} X_a^{m(a)})^{-\frac{1}{m(a)}},$$

  où n_1 est l'entier défini par la relation $v_K(p) = d(r_1) + n_1(p-1)$.
- *La racine r_1 est réalisable.*

Alors, si R désigne l'anneau de valuation de K, il existe un automorphisme σ d'ordre p du disque fermé formel $\mathrm{Spec}R\{Z\}$ *dont l'arbre de Hurwitz associé est isomorphe à $(\Gamma, \mathcal{H})$, et tel qu'il existe un paramètre V de $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$ avec*

$$\sigma(V) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_1)}} V(1 + \pi^{v_K(\lambda)-n_1} V^{m(a_1)})^{-\frac{1}{m(a_1)}}.$$

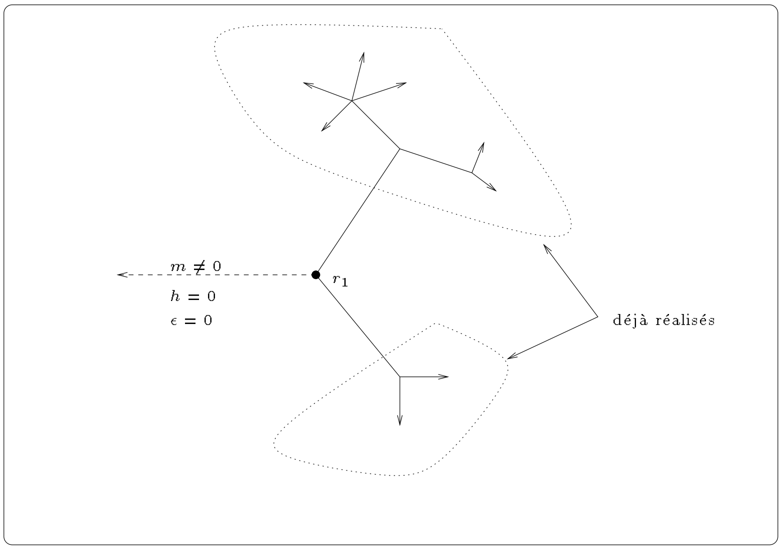

FIG. 3. Troisième réalisation (3.11)

Démonstration. Par la condition $H[3]$, on a

$$m := m(\bar{a}_1) = -m(a_1) = -1 + \sum_{a \in \mathrm{ar}(r_1) \setminus \{a_1\}} (m(a) + 1).$$

Soit $\bar{u}_{r_1}$ et j_{r_1} vérifiant les conditions de $[A]$. Pour simplifier les notations, on notera $\bar{u} := \bar{u}_{r_1}$, et $t_a := j_s(a)$ pour toute arête a d'origine r_1. On peut supposer $t_{a_1} = +\infty$. Alors, quitte à ajouter à $\bar{u}$ par une puissance p-ième, ce qui ne change pas la différentielle $d\bar{u}$, on peut supposer que les pôles de $\bar{u}$ sont les t_a, pour a dans $\mathrm{ar}(r_1) \setminus \{a_1\}$. Soit T_a dans R relevant t_a, et u un élément de la R-algèbre $\mathcal{A} := R\{T, (T - T_a)^{-1}\}_{a \in F}$ relevant $\bar{u}$. Notons $\mathcal{B} := \dfrac{\mathcal{A}[W]}{(\frac{(\pi^{n_1}W+1)^p-1}{\pi^{pn_1}} - u)}$, c'est une $\mathcal{A}$-algèbre libre de rang p. On considère l'automorphisme de $\mathcal{A}$-algèbre (d'ordre p) σ tel que $\sigma(W) = \zeta W + \frac{\zeta - 1}{\pi^{n_1}}$. Le k-morphisme $\mathrm{Spec}\bar{\mathcal{B}} \to \mathrm{Spec}\bar{\mathcal{A}}$ est un revêtement purement inséparable de degré p de l'ouvert affine $\mathbb{P}^1_k \setminus \{\infty, t_a\}_{a \in \mathrm{ar}(r_1) \setminus \{a_1\}}$, donné par l'équation $w^p - \bar{u}$, et $d\bar{u}$ ne possède ni zéro, ni pôle sur cet ouvert, donc $\mathrm{Spec}\bar{\mathcal{B}}$ est lisse, et c'est un ouvert de la droite projective sur k de la forme $\mathbb{P}^1_k \setminus \{\infty, z_a\}_{a \in \mathrm{ar}(r_1) \setminus \{a_1\}}$, où les z_a sont des éléments de k distincts deux à deux. Autrement dit, on a $\bar{\mathcal{B}} = k[z, (z - z_a)^{-1}]_{a \in \mathrm{ar}(r_1) \setminus \{a_1\}}$.

Soit Z (resp. Z_a) un relèvement de z (resp. z_a) dans $\mathcal{B}$ (resp. R), comme $\mathcal{B}$ est plat sur R, on a $\mathcal{B} = R\{Z, (Z - Z_a)^{-1}\}_{a \in \mathrm{ar}(r_1) \setminus \{a_1\}}$.

Pour $a \in \mathrm{ar}(r_1) \setminus \{a_1\}$, on a $1 + \mathrm{ord}_{t=t_a} d\bar{u} = -m(a) \neq 0 \mod p$; il résulte alors de la proposition 1.8 (B) que $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} R[[T - T_a]]\{(T - T_a)^{-1})\}$ est égal à $R[[Z - Z_a]]\{(Z - Z_a)^{-1}\}$, et l'action induite par celle de σ est donnée sur un paramètre convenable $\tilde{X}_a$ de $R[[Z - Z_a]]\{(Z - Z_a)^{-1}\}$ par

$$\sigma(\tilde{X}_a) = \zeta^{-\frac{1}{m}(a)} \tilde{X}_a (1 + \pi^{v_K(\lambda) - n_1} \tilde{X}_a^{m(a)})^{-\frac{1}{m}(a)}.$$

Soit ψ_a l'isomorphisme équivariant de $\mathcal{O}(\mathcal{D}_a)^{\wedge}_{(\pi)} = R[[X_a]]\{X_a^{-1}\}$ sur $R[[Z - Z_a]]\{(Z - Z_a)^{-1}\}$ qui envoie X_a sur $\tilde{X}_a$. En utilisant le lemme 3.7, on construit alors une R-algèbre de la forme $R\{Z_0\}$, muni d'un R-automorphisme σ d'ordre p, dont l'arbre de Hurwitz associé s'identifie à $(\Gamma, \mathcal{H})$. De plus, comme $\mathrm{ord}_\infty d\bar{u} = -(m(a_1)+1)$, la proposition 1.8 (B) montre l'existence d'un paramètre V vérifiant les conditions attendues. $\square$

Comme précédemment, en en déduit le

Corollaire 3.12. *Soit Γ un arbre fini connexe et $\mathcal{H} = (r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ ; on suppose que $(\Gamma, \mathcal{H})$ vérifie les conditions suivantes :*

- *La racine r_0 est additive ou étale.*
- *Il existe une unique arête a_0 d'origine r_0.*
- *Si a est une arête d'origine $r_1 := t_\Gamma(a_0)$ distincte de $a_1 := \bar{a}_0$, l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_a, \mathcal{H}_a)$ provient d'un R-automorphisme σ_a d'ordre p d'un disque formel, tel qu'il existe un paramètre X_a avec*

$$\sigma_a(X_a) = \zeta^{-\frac{1}{m(a)}} X_a (1 + \pi^{v(\lambda) - n_1} X_a^{m(a)})^{-\frac{1}{m(a)}},$$

  où n_1 est l'entier défini par la relation $v_K(p) = d(r_1) + n_1(p-1)$.
- *Le sommet r_1 est réalisable.*

Alors, si R désigne l'anneau de valuation de K, il existe un automorphisme σ d'ordre p du disque formel $\mathrm{Spec} R[[Z]]$ *dont l'arbre de Hurwitz associé est isomorphe à $(\Gamma, \mathcal{H})$, et tel qu'il existe un paramètre X au bord du disque formel avec*

$$\sigma(X) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_0)}} X (1 + \pi^{v_K(\lambda) - n_0} X^{m(a_o)})^{-\frac{1}{m(a_0)}},$$

où n_0 est l'entier défini par la relation $v_K(p) = d_0 + (p-1)n_0$.

3.4. **Démonstration du théorème 3.5.** On raisonne par récurrence sur le nombre maximal $N \geq 3$ de sommets d'une chaîne d'origine r_0 et de sommet terminal maximal. Notons P_N la propriété suivante : Tout arbre de Hurwitz vérifiant les conditions $D[i]$, où $1 \leq i \leq 3$, et dont le nombre maximum de sommets d'une chaîne d'origine r_0 et de sommet terminal maximal est inférieur ou égal à N, provient d'un automorphisme σ du disque formel, tel qu'il existe un paramètre X au bord du disque, avec $\sigma(X) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_0)}} X (1 + \pi^{v_K(\lambda) - n_0} X^{m(a_o)})^{-\frac{1}{m(a_0)}}$.

La propriété P_3 résulte du corollaire 3.10.

Si maintenant $N \geq 4$, on suppose P_{N-1} démontrée ; soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ un arbre de Hurwitz vérifiant les conditions $D[i]$, où $1 \leq i \leq 3$, et tel que le nombre maximal de sommets d'une chaîne d'origine r_0 et de sommet terminal maximal est égal à N. Alors, les hypothèses du corollaire 3.12 sont vérifiées, et donc l'arbre de Hurwitz $(\Gamma, \mathcal{H})$ provient d'un automorphisme d'ordre p d'un disque formel, avec un bon paramètre au bord.

3.5. **Un critère de réalisabilité.**

3.5.1. *Notations.* Soit I un ensemble fini, non vide, on note $\mathcal{P}_I$ l'ensemble des partitions de I. L'ensemble $\mathcal{P}_I$ est en bijection avec l'ensemble des relations d'équivalence sur I : Plus précisément, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur I, la partition associée est par définition l'ensemble des classes d'équivalence ; réciproquement, si P est une partition, on définit une relation d'équivalence sur I par $i \equiv j \mod P$ si et seulement si il existe J dans P tel que i et j appartiennent à J. La partition associée à la relation d'égalité sur I sera notée $P_=$.

Il existe une relation d'ordre naturelle sur $\mathcal{P}_I$, à savoir $P < P'$ si et seulement si pour tout J' dans P', il existe J dans P tel que $J' \subset J$. Autrement dit, si la relation d'équivalence correspondant à P' est plus fine que celle correspondant à P.

3.5.2. *Le k-schéma $X_{\underline{e}}$.* Soient m un entier positif premier à p, I un ensemble fini à $m+1$ éléments, $\underline{e} := (e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$, telle que $\sum_{i \in I} e_i = 0$; on notera $X_{\underline{e}}$ le sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec} k[T_i]_{i \in I}$ d'idéal $(\sum_{i \in I} e_i T_i^{\nu})_{1 \leq \nu \leq m-1, (\nu,p)=1}$. Soit $x := (t_i)$ un point rationnel sur k de $X_{\underline{e}}$, il définit une partition P_x de I telle que $i = j \mod P_x$ si et seulement si $t_i = t_j$. Pour une partition P fixée de I, on notera $X_{\underline{e},P}$ le sous-schéma fermé de $X_{\underline{e}}$ d'idéal $(T_i - T_j)_{i \equiv j \mod P}$. En particulier, $X_{\underline{e},P_=} = X_{\underline{e}}$. On notera $X^*_{\underline{e},P}$ l'ouvert de $X_{\underline{e},P}$ complémentaire de la réunion des $X_{\underline{e},P'}$, avec $P' < P$. On remarquera que $X^*_{\underline{e},P}(k) = \{x \in X_{\underline{e}}(k), P_x = P\}$

Lemme 3.13. *Soit P une partition de I, différente de $P_=$. alors si $x = (t_i)$ est un point rationnel sur k de $X_{\underline{e}}$ avec $P_x = P$, on a $\sum_{i \in J} e_i = 0$ pour tout J dans P.*

Démonstration. Pour J dans P, notons $a_J = t_i$ pour n'importe quel i dans J, ce qui est bien défini car $P = P_x$. Alors, on a $\sum_{J \in P}(\sum_{i \in J} e_i) a_J^{\nu} = 0$ pour ν variant de 0 à $m-1$. Comme P est différente de $P_=$, le cardinal r de P est inférieur ou égal à m. Les a_J étant distincts deux à deux, on déduit des r premières équations la relation $\sum_{i \in J} e_i = 0$ pour J dans P. $\square$

Définition 3.14. On dira qu'une partition de I est $\underline{e}$-adaptée si pour tout J dans P, on a $\sum_{i \in J} e_i = 0 \mod p$. On notera $\mathcal{P}_{I,\underline{e}}$ l'ensemble des partitions $\underline{e}$-adaptées de I.

Corollaire 3.15.
(a) Si P est une partition de I, $\underline{e}$-adaptée, alors $X_{\underline{e},P}$ est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}_k^P := \mathrm{Spec}k[A_J]_{J\in P}$. En particulier, $X_{\underline{e},P}$ est de dimension $\mathrm{card}P$.
(b) Soit $Y_{\underline{e}} := \cup_{P\in\mathcal{P}_{I,\underline{e}}} X_{\underline{e},P}$, alors $X_{\underline{e},réd}$ est la réunion disjointe de $Y_{\underline{e}}$ et de $X_{\underline{e}}^* := X_{\underline{e},P_=}^*$.

Démonstration.
(a) L'isomorphisme en question est donné par l'isomorphisme

$$\frac{k[T_i]_{i\in I}}{(T_i - T_j)_{i\equiv j \mod P}} \to k[A_J]_{J\in P}$$

qui envoie T_i sur A_J, où $J = i \mod P$.
(b) résulte du lemme 3.13, qui entraîne que $X_{\underline{e},\mathrm{réd}}(k)$ est la réunion disjointe de $Y_{\underline{e}}(k)$ et de $X_{\underline{e}}^*(k)$. □

Proposition 3.16.
(a) Les composantes irréductibles de $Y_{\underline{e}}$ sont les $X_{\underline{e},P}$, où P est une partition maximale $\underline{e}$-adaptée.
(b) Si il existe une partition maximale $\underline{e}$-adaptée avec $\mathrm{card}P \leq [\frac{m}{p}] + 1$, alors $X_{\underline{e}}^*(k)$ est non vide.
(c) Si $X_{\underline{e}}^*(k)$ est non vide, l'ouvert $X_{\underline{e}}^*$ est régulier.

Démonstration. L'assertion (a) est claire. Pour toute composante irréductible Z de $X_{\underline{e}}$, la dimension de Z est supérieure ou égale à $m+1-(m-1-[\frac{m}{p}]) = [\frac{m}{p}]+2$. Soit P une partition maximale $\underline{e}$-adaptée avec $\mathrm{card}P \leq [\frac{m}{p}] + 1$, alors $X_{\underline{e},P}$ n'est pas une composante irréductible de $X_{\underline{e}}$, et une composante irréductible de $X_{\underline{e}}$ contenant $X_{\underline{e},P}$ doit alors rencontrer $X_{\underline{e}}^*(k)$. Il reste à voir l'assertion (c) : On voit immédiatement que l'espace tangent en un point fermé de $X_{\underline{e}}^*$ est de dimension $[\frac{m}{p}] + 2$, donc inférieur à la dimension en ce point. On applique alors le critère jacobien. □

Remarque 3.17. Le stabilisateur $S_\infty := \{z \mapsto az+b | a \in k^*, b \in k\}$ dans $\mathrm{PGL}(2,k)$ du point ∞ dans $\mathbb{P}^1(k)$ est de dimension 2, et agit librement sur $X_{\underline{e}}^*$. Si $X_{\underline{e}}^*(k)$ est non vide, le quotient de $X_{\underline{e}}^*$ par l'action de S_∞ est donc une variété algébrique affine sur k de dimension $[\frac{m}{p}]$.

3.5.3. *Critère de réalisabilité.*

Proposition 3.18. *Soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ un arbre de Hurwitz, et s un sommet de Γ.*
(a) Supposons que s est multiplicatif, et qu'il existe une unique arête a_0 d'origine s telle que $m(a_0) \neq 0$. Notons $m := -m(a_0)$, $I_s := \mathrm{ar}(s) \setminus a_0$ et $\underline{h} := (h(a))_{a\in I_s}$.

Alors, si il existe une partition maximale $\underline{h}$-adaptée P de I_s avec $\mathrm{card}P \leq [\frac{m}{p}]+1$, *le sommet s est réalisable.*
(b) Supposons que s est additif, et qu'il existe une unique arête a_0 d'origine s telle que $m(a_0)<0$. Notons $m := -m(a_0)$, I_s la réunion disjointe de $I'_s := \mathrm{ar}(s) \setminus a_0$ et d'un ensemble fini à $m+1-\mathrm{card}(I'_s)$ éléments, et $\underline{e} = (e_i)_{i \in I_s}$ la famille définie par $e_i := m(i)$ si $i \in I'_s$ et $e_i = -1$ sinon.

Alors, si il existe une partition maximale $\underline{e}$-adaptée P de I_s avec $\mathrm{card}P \leq [\frac{m}{p}]+1$, *le sommet s est réalisable.*

Remarque 3.19. La proposition précédente généralise la proposition III 4.5.1 de [2]. Plus précisément, avec la terminologie employée dans cette proposition, le fait que (h_i) appartienne au lieu critique revient à dire que la partition grossière est maximale, ce qui pour $m<p$ est équivalent au critère 3.18. Par ailleurs, l'exemple III 4.7 de ce même article prouve que le critère n'est pas nécessaire.

Démonstration.
(a) On cherche $\bar{u} := \bar{u}_s$ sous la forme $\bar{u} = \prod_{i \in I_s}(t-t_i)^{h_i}$, en convenant que $j_s(a_0)=\infty$ et que h_i désigne un représentant de $h(i)$ dans $\mathbb{Z}$, avec la relation $\sum_{i \in I_s} h_i = 0$. Soit $x := t^{-1}$, on a alors $\bar{u} = \prod_{i \in I_s}(1-t_i x)^{h_i}$, d'oú

$$\frac{d\bar{u}}{\bar{u}} = \sum_{\nu=0}^{+\infty}(\sum_{i \in I_s} h_i t_i^{\nu+1})x^\nu dx.$$

La relation $\mathrm{div}(\frac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}) = -\sum_{a \in \mathrm{ar}(s)}(m(a)+1)[j_s(a)]$ est alors équivalente à $\mathrm{ord}_\infty \frac{d\bar{u}}{\bar{u}} = m-1$, ce qui revient à dire que (t_i) est un point rationnel sur k de $X^*_{\underline{h}}$. On utilise alors la proposition 3.16.
(b) On cherche $\bar{u} := \bar{u}_s$ sous la forme

$$\bar{u} = \frac{\prod_{i \in I_s \setminus I'_s}(t-t_i)}{\prod_{i \in I'_s}(t-t_i)^{m(i)}}.$$

On convient que $j_s(a_0)=\infty$. Comme ci-dessus, on montre alors que la relation

$$\mathrm{div}(d\bar{u}_s) = -\sum_{a \in \mathrm{ar}(s)}(m(a)+1)[j_s(a)]$$

revient à dire que (t_i) est un point rationnel sur k de $X^*_{\underline{e}}$. □

Corollaire 3.20. *Si $p=2$, tout sommet non maximal d'un arbre de Hurwitz est réalisable.*

Ce dernier résultat peut se démontrer aussi directement, en exhibant un point de $X^*_{\underline{e}}(k)$, avec I un ensemble de cardinal pair et $e_i = 1$ pour tout i dans I.

3.6. **Un exemple avec $p = 5$.** On donne ici un exemple d'arbre de Hurwitz provenant d'un automorphisme d'ordre 5 d'un disque formel sur un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, 5)$, sans toutefois préciser la métrique. Par souci de concision, sur la figure n'apparaissent que les valeurs non nulles de h et de m. Les arêtes qui ne sont pas des feuilles sont indiquées en gras sur la figure.

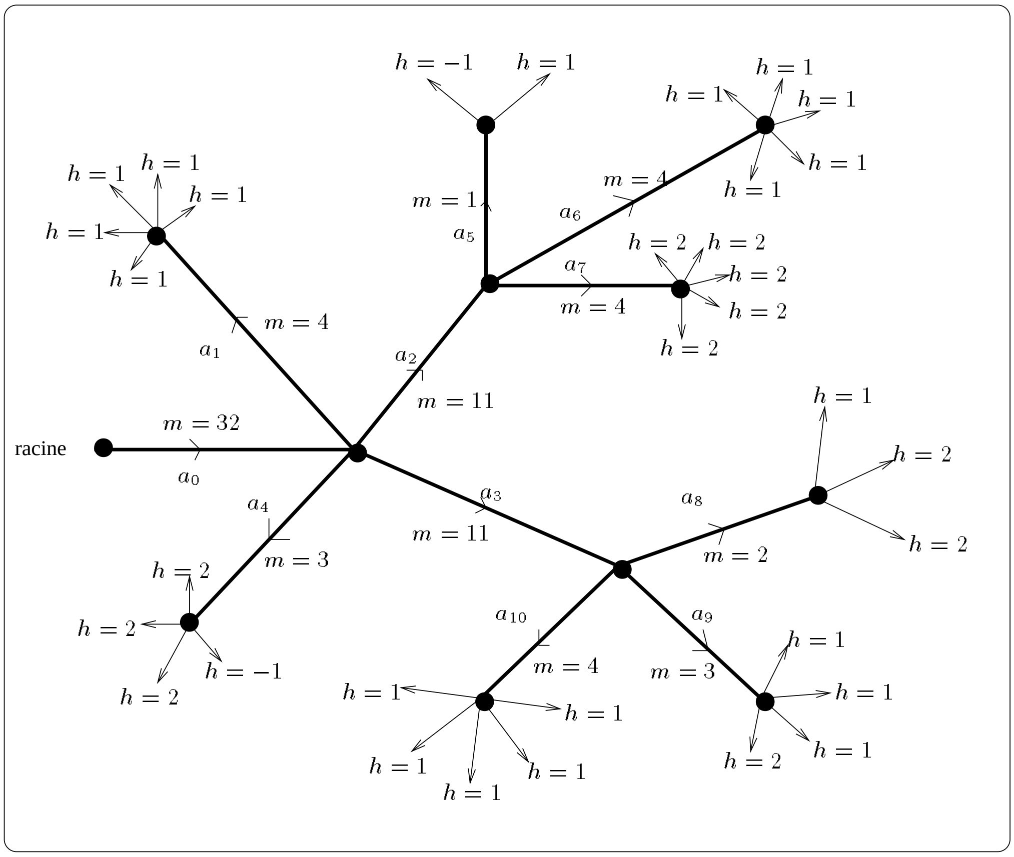

FIG. 4. Un arbre de Hurwitz réalisable pour $p = 5$

Proposition 3.21. *Soit K_0 le corps des fractions de $W(k)[\zeta]$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique 5 et ζ une racine primitive 5-ième de l'unité. Il existe une extension finie K de K_0 et une métrique ϵ sur l'arbre ci-dessus telle que l'arbre de Hurwitz obtenu provienne d'un automorphisme d'ordre 5 du disque formel sur l'anneau de valuation R de K, opérant sans inertie au bord, avec conducteur de Hasse 32.*

Démonstration. Posons $K := K_0[\lambda^{\frac{1}{4224}}]$, où $\lambda = \zeta - 1$. Dans ce cas, on peut par exemple prendre la métrique suivante (bien évidemment, c'est très loin d'être la seule possibilité pour une extension de K_0 aussi ramifiée) : Les épaisseurs des arêtes a_i sont : $\epsilon(a_0) := 33$, $\epsilon(a_1) := 792$, $\epsilon(a_2) := 96$, $\epsilon(a_3) := 96$, $\epsilon(a_4) := 1056$, $\epsilon(a_5) := 2112$, $\epsilon(a_6) := 528$, $\epsilon(a_7) := 528$, $\epsilon(a_8) := 1056$, $\epsilon(a_9) := 704$, $\epsilon(a_{10}) := 528$.

Avec un tel K et la métrique définie ci-dessus (avec la racine étale), on obtient un arbre de Hurwitz en utilisant la définition de m et de h donnée sur le dessin. Il reste à voir que les sommets de valence supérieure à 3 sont réalisables. Pour cela, on applique la proposition 3.18 :
Les sommets multiplicatifs sont tous réalisables, car la partition grossière est maximale dans chaque cas.
Le sommet additif origine de a_5 est réalisable : La partition $\underline{e}$-adaptée

$$\{(4,-1,-1,-1,-1),(4,-1,-1,-1,-1),(1,-1)\}$$

de $\underline{e} := (4,4,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$ est maximale, de cardinal $3 = [\frac{11}{5}] + 1$.
Le sommet additif origine de a_8 est réalisable : La partition $\underline{e}$-adaptée

$$\{(4,-1,-1,-1,-1),(3,-1,-1,-1),(2,-1,-1)\}$$

de $\underline{e} := (2,3,4,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$ est maximale, de cardinal $3 = [\frac{11}{5}] + 1$.
Le sommet additif origine de a_2 est réalisable : La partition $\underline{e}$-adaptée

$$\{(1,1,3),(4,-1,-1,-1,-1),(-1,-1,-1,-1,-1),\ldots,(-1,-1,-1,-1,-1)\}$$

(où $(-1,-1,-1,-1,-1)$ est répété 5 fois) de $\underline{e} := (1,1,3,4,4,-1,\ldots,-1)$ (où -1 est répété 29 fois) est maximale, de cardinal $7 = [\frac{32}{5}] + 1$.

□

4. Automorphisme d'ordre p d'une couronne formelle

4.1. Modèle minimal d'une couronne ouverte avec action d'un automorphisme d'ordre p. Considérons un R-automorphisme σ d'ordre p de la couronne formelle $\mathcal{C}_e$, F_σ l'ensemble de ses points fixes géométriques dans $\mathcal{C}_{e,K} := \mathcal{C}_e \times_{\mathrm{Spec} R} \mathrm{Spec} K$, (éventuellement vide). De plus, on supposera tous les points fixes rationnels sur K. Il existe un unique modèle minimal $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K},\sigma)$ de $\mathcal{C}_{e,K}$ pour lequel les spécialisations des points de F_σ sont lisses et distinctes : Si F_σ est vide, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K},\sigma)$ est égal à $\mathcal{C}_e$. Sinon, il est construit de la façon suivante : Choisissons une coordonnée de Laurent Z sur $\mathcal{C}_e$, on commence par éclater les idéaux (π^a, Z), où a décrit l'ensemble des valuations prises par les points de F_σ. On obtient ainsi une chaîne de droites projectives reliée à chaque extrémité à la transformée stricte d'un des deux bords de $\mathcal{C}_e$. Si le modèle ainsi obtenu ne sépare pas les spécialisations des points de F_σ, on éclate encore les fibres formelles contenant plus d'un point de F_σ (ce sont des disques formels) pour obtenir le modèle minimal cherché. Sa fibre spéciale est un arbre de droites projectives, relié aux composantes correspondant aux transformés strictes des bords. La chaîne de composantes irréductibles obtenue dans la première étape, menant d'un bord à l'autre, s'appelle la **chaîne fondamentale**. Les composantes de la chaîne fondamentale seront dites fondamentales.

4.2. **Arbre de Hurwitz associé à un automorphisme d'ordre p d'une couronne formelle.** Soit Γ_σ^* l'arbre dual de la fibre spéciale de $\mathcal{M}_\sigma := \mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$. Choisissant l'un des deux bords η de $\mathcal{C}_e$, on oriente Γ_σ^* à partir du sommet r_η correspondant. Soit Γ_σ l'arbre orienté décrit ci-dessous :

- L'ensemble des sommets de Γ_σ est la réunion disjointe de $\mathrm{som}\Gamma_\sigma^*$ et de F_σ. Le sommet correspondant à un point x de F_σ sera noté s_x.
- L'ensemble des arêtes positives de Γ_σ est la réunion disjointe de $\mathrm{ar}^+\Gamma_\sigma^*$ et de F_σ. L'arête positive correspondant à un point x de F_σ sera noté a_x.
- Si x est un point de F_σ, le sommet terminal de a_x est s_x et l'origine de a_x est le sommet de Γ_σ^* sur lequel se spécialise x.

Soit s un sommet de Γ_σ^* ; le point générique de la composante irréductible correspondant à s définit une valuation discrète v_s du corps des fractions $\mathcal{K}_e$ de $\mathcal{A}_e$. On note $\delta(s)$ la valuation de la différente de l'extension de corps valués $(\mathcal{K}_e, v_s)/(\mathcal{K}_e^\sigma, v_s)$. D'après la proposition 1.6, on a $0 \leq \delta(s) \leq v_K(p)$. Un sommet s de Γ_σ^* sera dit multiplicatif si $\delta(s) = v_K(p)$, additif si
$0 < \delta(s) < v_K(p)$ et étale si $\delta(s) = 0$.

On définit une application $\epsilon := \epsilon_\sigma$ de $\mathrm{ar}\Gamma_\sigma$ dans $\mathbb{N}$: Si a est une arête de Γ_σ^*, elle correspond à un point double z_a de $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$, on définit alors $\epsilon(a)$ comme étant l'épaisseur de z_a dans $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$. Si maintenant $a = a_x$, où x est un point de F_σ), on définit $\epsilon(a) := 0$.

On définit une application $m := m_\sigma$ de $\mathrm{ar}\Gamma_\sigma$ dans $\mathbb{Z}$ et une application $h := h_\sigma$ de $\mathrm{ar}\Gamma_\sigma$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de la façon suivante : Soit a une arête de Γ_σ. Si a est une arête de Γ_σ^* (resp. $a = a_x$, où x est un point de F_σ), elle correspond à un point double orienté z_a de $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$ (resp. à la spécialisation de x dans la fibre spéciale de $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$). Soit ξ_a le bord de la couronne formelle (resp. du disque formel) $\mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a}$ qui correspond à l'origine de a. On notera $\hat{\mathcal{O}}_a$ le localisé-complété $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a})^\wedge_{\xi_a}$. On note ω_a la 1-forme différentielle associée au torseur $\mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_a \to \mathrm{Spec}\hat{\mathcal{O}}_a^\sigma$ si ce torseur est radiciel en réduction. On pose $m(a) := -(1 + \mathrm{ord}_{\xi_a}\omega_a)$ et $h(a)$ égal au résidu de ω_a si l'origine de a est un sommet multiplicatif. Si maintenant l'origine de a est un sommet additif, on pose $m(a) = -(1 + \mathrm{ord}_{\xi_a}\omega_a)$ et $h(a) = 0$. Si l'origine de a est un sommet étale, $m(a)$ est le conducteur de Hasse de l'extension $\hat{\mathcal{O}}_a \otimes_R k/\hat{\mathcal{O}}_a^\sigma \otimes_R k$. Enfin, $m(\bar{a}_x) = -m(a_x)$ et $h(\bar{a}_x) = -h(a_x)$.

Proposition 4.1.

La donnée $\mathcal{H}_\sigma := (r_\eta, \delta(r_\eta), \epsilon_\sigma, m_\sigma, h_\sigma)$ est une donnée de Hurwitz sur Γ_σ. On dira que l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ est l'arbre de Hurwitz associé à l'automorphisme σ de la couronne formelle d'épaisseur e. Par ailleurs,

– *(Loi de variation de la différente) Pour tout sommet s de Γ_σ, on a*

$$\delta(s) = d(s) := \delta(r_\eta) + (p-1) \sum_{a \in \mathrm{ar}^+\Gamma_s} m(a)\epsilon(a),$$

où Γ_s est la chaîne d'origine r_η et de sommet terminal s.

– *Le cardinal de F_σ est égal à $m(a_\eta) + m(a_{\eta'})$, où a_η (resp. $a_{\eta'}$) est l'unique arête d'origine r_η (resp. $r_{\eta'}$).*

– *Les sommets de valence supérieure ou égale à 3 sont réalisables.*

– *Un sommet maximal est soit le sommet terminal d'une feuille, soit $r_{\eta'}$, où η' est le bord de la couronne opposé à η ($r_{\eta'}$ est le sommet terminal de la chaîne fondamentale).*

– *Si a est une feuille de $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$, alors l'origine de a est soit un sommet maximal de Γ_σ^*, soit un sommet fondamental.*

– *Il existe au plus deux sommets fondamentaux qui sont multiplicatifs. De plus, s'il y en a deux, il existe une arête qui les relie.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{H}_\sigma$ soit une donnée de Hurwitz se montre exactement de la même façon que pour le disque. En particulier, on prouve de même que les sommets de valence supérieure ou égale à 3 sont réalisables. La loi de la variation de la différente résulte de la proposition 1.10.

Soit s un sommet maximal. Supposons s non fondamental, on note alors a l'unique arête de sommet origine fondamental et de sommet terminal non fondamental qui apparait dans la chaîne positive Γ_s. L'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma[a], \mathcal{H}_\sigma[a])$ provient alors d'un automorphisme d'ordre p du disque formel, on sait alors que s est le sommet terminal d'une feuille de $(\Gamma_\sigma[a], \mathcal{H}_\sigma[a])$, donc de $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$. Si maintenant s est fondamental, comme il est maximal il doit être égal à $r_{\eta'}$.

Montrons à présent la formule donnant le cardinal de F_σ, c'est-à-dire le nombre de feuilles de l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$. Cela peut se voir par récurrence sur le nombre de sommets fondamentaux :
Si il n'y a que deux sommets fondamentaux, F_σ est vide, et la proposition 1.10 montre la formule.
Soit $N \geq 3$, supposons la formule démontrée pour les automorphismes d'ordre p de couronnes formelles dont l'arbre de Hurwitz possède $N-1$ sommets fondamentaux. Soit σ un automorphisme d'ordre p d'une couronne formelle $\mathcal{C}$ d'épaisseur e dont l'arbre de Hurwitz possède N sommets fondamentaux. Alors, si s est le sommet fondamental sommet terminal de l'arête a_η et a l'unique arête fondamentale d'origine s, l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma[a], \mathcal{H}_\sigma[a])$ provient de l'automorphisme σ restreint à la couronne formelle $\mathcal{C}[a]$ de fibre générique formée des points x tels que $\epsilon(a) < v_K(Z(x)) < e$, où Z est une coordonnée de Laurent sur $\mathcal{C}$. Le nombre de feuilles de $(\Gamma_\sigma[a], \mathcal{H}_\sigma[a])$ est alors $m(a) + m(a_{\eta'})$. Si b est une arête non fondamentale de Γ_σ d'origine s, le nombre de feuilles de $(\Gamma_\sigma[b], \mathcal{H}_\sigma[b])$, qui provient d'un

automorphisme de disque formel, est égal à $m(b)+1$. Donc, si I désigne l'ensemble des arêtes non fondamentales d'origine s, le cardinal de F_σ est, d'après $H[3]$:

$$\begin{aligned}\sum_{b\in I}(m(b)+1)+m(a)+m(a_{\eta'}) &= -(m(\bar{a}_\eta)+1)+2-1+m(a_{\eta'}) \\ &= m(a_\eta)+m(a_{\eta'})\end{aligned}$$

Il reste à voir la dernière assertion. Pour s un sommet fondamental distinct de r_η et $r_{\eta'}$, soit a_1 l'arête fondamentale de sommet terminal s et a_2 l'arête fondamentale d'origine s. Alors la pente de la variation de la différente le long de la chaîne fondamentale est égale à $m(a_1)(p-1)$ avant le sommet s et à $m(a_2)(p-1)$ après. Donc, la variation de la pente au passage de s est égale, d'après $H[3]$, à $-\sum_{a\in \mathrm{ar}(s), a\neq a_1,a_2}(m(a)+1)<0$, car pour une arête a non fondamentale d'origine s, $(\Gamma_\sigma[a],\mathcal{H}_\sigma[a])$ provient d'un automorphisme d'ordre p du disque formel et donc $m(a)\geq 0$. La variation de la différente le long de la chaîne fondamentale est donc une fonction continue, linéaire par morceaux et concave (i.e. la pente diminue). Supposons qu'il existe un sommet fondamental multiplicatif, et prenons s le plus petit d'entre eux. Alors, soit s est maximal, et alors c'est le seul sommet multiplicatif fondamental, soit il existe une (unique) arête fondamentale a d'origine s et alors $m(a)\geq 0$. Si $m(a)=0$, le sommet terminal de a est multiplicatif, et ensuite la différente doit chuter, donc les éventuels sommets suivants ne sont pas multiplicatifs. Sinon, s est le seul sommet multiplicatif fondamental. $\square$

4.3. **Théorème de réalisation.** Comme pour le cas du disque, on peut donner une caractérisation des arbres de Hurwitz provenant d'un automorphisme d'ordre p d'une couronne formelle (ne permutant pas les bords). Nous ne donnons pas une preuve complète de ce théorème, au sens où le procédé de recollement utilisé est juste esquissé. Nous renvoyons le lecteur au cas du disque pour des détails.

Théorème 4.2.
Soit Γ un arbre fini, connexe et $\mathcal{H}:=(r_0,d_0,\epsilon,m,h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ. Alors $(\Gamma,\mathcal{H})$ provient d'un automorphisme σ d'ordre p d'une couronne formelle (ne permutant pas les bords) si et seulement si il vérifie les conditions $C[i]$, $1\leq i\leq 4$ ci-dessous.

$C[1]$ *La racine r_0 est de valence 1*

$C[2]$ *Il existe un unique sommet maximal r_0' de Γ_σ tel que l'unique arête a d'origine r_0' vérifie $\epsilon(a)\neq 0$. On appelle alors la chaîne reliant r_0 à r_0' la chaîne fondamentale, et on la notera Γ_0. Les sommets (resp. arêtes) de la chaîne fondamentale seront dits fondamentaux (resp. fondamentales).*

$C[3]$ *Si s est un sommet maximal de Γ_σ distinct de r_0', l'unique arête de sommet terminal s est une feuille.*

$C[4]$ Tout sommet de valence supérieure ou égale à 3 est réalisable.

De plus, l'épaisseur de la couronne formelle est alors la somme $\sum_{a\in \mathrm{ar}^+(\Gamma_0)} \epsilon(a)$ des longueurs des arêtes fondamentales..

Démonstration.

Soit σ un automorphisme d'une couronne formelle, ne permutant pas les bords. $C[1]$ résulte de la construction du modèle minimal. Les assertions restantes ont déjà été vues.

Montrons maintenant la réciproque. On suppose donc que $(\Gamma, \mathcal{H})$ vérifie les propriétés $C[i]$, $1 \leq i \leq 4$. On voit alors immédiatement le

Lemme 4.3. *Si s est un sommet fondamental et a une arête non fondamentale d'origine s, l'arbre $(\Gamma[a], \mathcal{H}[a])$ vérifie les propriétés $D[i]$, $1 \leq i \leq 3$ du théorème 3.5.*

On procède alors par récurrence sur le nombre N de sommets de la chaîne fondamentale.

Supposons d'abord $N = 2$. L'arbre de Hurwitz est alors réduit à sa chaîne fondamentale, d'après $C[1]$ et $C[2]$ (r_0' est maximal). Notons a l'unique arête positive de Γ, et $e := \epsilon(a)$, qui est non nul d'après $C[2]$. Si la racine r_0 est additive ou étale, alors $m(a)$ est premier à p. Soit n l'entier déterminé par $v_K(p) = d_0 + n(p-1)$, Z une coordonnée de Laurent sur $\mathcal{C}_e$; l'automorphisme σ de $\mathcal{C}_e$ donné par $\sigma(Z) = \zeta^{-\frac{1}{m(a)}} Z(1 + \pi^n Z^{m(a)})^{-\frac{1}{m(a)}}$ a alors un arbre de Hurwitz équivalent à $(\Gamma, \mathcal{H})$. Si maintenant r_0 est multiplicatif, $h(a) \neq 0 \mod p$. L'automorphisme σ de $\mathcal{C}_e$ donné par $\sigma(Z) = \zeta^{-\frac{1}{h(a)}} Z$ a alors un arbre de Hurwitz équivalent à $(\Gamma, \mathcal{H})$.

Supposons maintenant $N \geq 3$, et le théorème démontré pour $N-1$. Soit s le sommet fondamental qui est l'origine de l'unique arête a' de sommet terminal r_0'. Soit Γ_1 le sous-arbre de Γ obtenu en retirant les arêtes positives d'origine s, et $\mathcal{H}_1$ la donnée de Hurwitz restreinte de $\mathcal{H}$ sur Γ_1. Alors, la chaîne fondamentale de $(\Gamma_1, \mathcal{H}_1)$ possède $N-1$ sommets, et $(\Gamma_1, \mathcal{H}_1)$ vérifie les conditions $C[i]$, pour $1 \leq i \leq 4$. Il existe alors un automorphisme σ_1 d'ordre p de la couronne formelle d'épaisseur $e_1 := \sum_{a\in \mathrm{ar}^+\Gamma_0, a\neq a'} \epsilon(a) = e - \epsilon(a')$. dont l'arbre de Hurwitz est équivalent à $(\Gamma_1, \mathcal{H}_1)$.

Par ailleurs, soit Γ_2 le sous-arbre de Γ de sommets s et r_0' et dont l'unique arête est a, et $\mathcal{H}_2$ la donnée de Hurwitz restreinte de $\mathcal{H}$ sur Γ_2. D'après le cas $N = 2$, il existe un automorphisme σ_2 d'ordre p de la couronne formelle d'épaisseur $e_2 = \epsilon(a')$ dont l'arbre de Hurwitz est équivalent à $(\Gamma_2, \mathcal{H}_2)$. Par hypothèse, s est réalisable. Soit (u_s, j_s) vérifiant les conditions de $[M]$ si s est multiplicatif, et celles de $[A]$ si s est additif (Le sommet s ne peut pas être étale). On construit à l'aide de u_s et du lemme 4.3 un automorphisme d'ordre p de $R\{Z, Z^{-1}\}$, et on peut alors recoller d'un côté la couronne d'épaisseur e_1 munie de σ_1 et de l'autre la couronne d'épaisseur e_2, munie de l'automorphisme σ_2. On obtient alors une couronne formelle d'épaisseur e munie d'un automorphisme σ dont l'arbre de Hurwitz est équivalent à $(\Gamma, \mathcal{H})$. $\square$

4.4. **Un critère suffisant de réalisabilité.** Nous ne donnons ici que le critère pour un sommet fondamental s pour lequel les deux arêtes a_1 et a_2 fondamentales d'origine s vérifient $m_1 := -m(a_1) > 0$ et $m_2 := -m(a_2) > 0$. Les autres sommets peuvent se traiter par le critère 3.18. La preuve est très similaire à celle de ce dernier, et est laissée au lecteur à titre d'exercice.

Proposition 4.4.
(a) Supposons que s est multiplicatif. Notons $I_s := \mathrm{ar}(s) \setminus \{a_1, a_2\}$ et $\underline{h} := (h(a))_{a \in I_s}$. Alors, si il existe une partition maximale $\underline{h}$-adaptée P de I_s avec $\mathrm{card}(P) \leq [\frac{m_1}{p}] + [\frac{m_2}{p}] + 1$, *le sommet s est réalisable.*
(b) Supposons que s est additif. Notons I_s la réunion disjointe de l'ensemble fini $I'_s := \mathrm{ar}(s) \setminus \{a_1, a_2\}$ et d'un ensemble fini à $m_1 + m_2 - \mathrm{card}(I'_s)$ éléments, et $\underline{e} = (e_i)_{i \in I_s}$ la famille définie par $e_i := m(i)$ si $i \in I'_s$ et $e_i = -1$ sinon. Alors, si il existe une partition maximale $\underline{e}$-adaptée P de I_s avec $\mathrm{card}(P) \leq [\frac{m_1}{p}] + [\frac{m_2}{p}] + 1$, *le sommet s est réalisable.*

4.5. **Structure des automorphismes d'ordre p à petits conducteurs.** Dans ce qui suit, σ désigne un automorphisme d'ordre p de $\mathcal{C}_e$, qui ne permute pas les bords, opérant sans inertie aux bords. On fera l'hypothèse ici que $m_1 < p$ et $m_2 < p$, où $m_1 + 1$ et $m_2 + 1$ désignent les conducteurs aux bords η_1 et η_2.

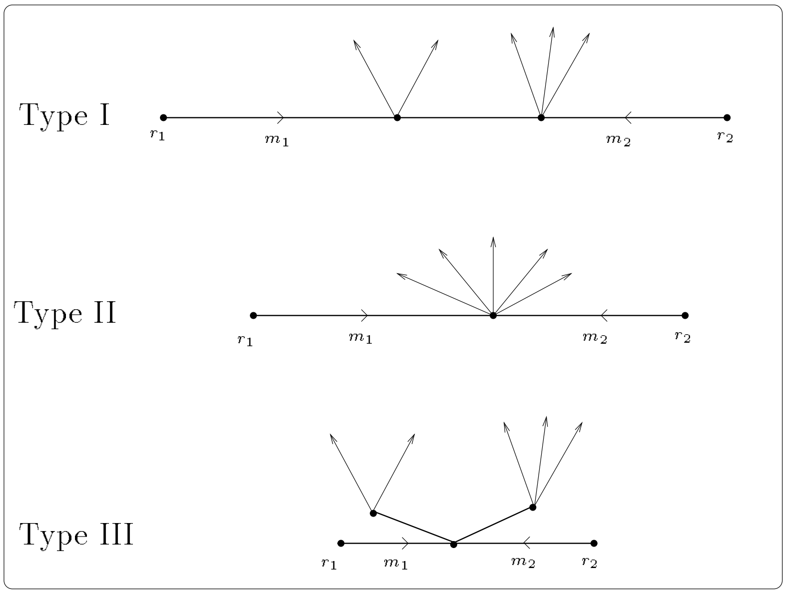

FIG. 5. Les trois types d'arbre de Hurwitz de couronnes à petits conducteurs

Théorème 4.5. *Soit σ un automorphisme de $\mathcal{C}_e$ d'ordre p, ne permutant pas les bords, qui opère sans inertie aux bords. Soit m_i le conducteurs au bord η_i, $i = 1, 2$. On note r_i le sommet de l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ qui correspond au bord η_i. Si $m_1 < p$ et $m_2 < p$, la chaîne fondamentale de $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ contient au plus deux sommets en dehors de r_1, r_2. De plus, s'il y en a deux, ils sont multiplicatifs. Autrement dit, l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ (avec pour fixer les idées la racine r_1) est de l'un des trois types ci-dessous :*

Type I : $e > (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\zeta - 1)$

Si $e > (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\lambda)$, la chaîne fondamentale de l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ est formée de la racine r_1, origine d'une arête a_1 de sommet terminal multiplicatif s_1, lui-même origine d'une arête dont le sommet terminal s_2 est multiplicatif et enfin du sommet r_2 (sommet terminal de a_2). De plus, pour $i = 1, 2$, il y a exactement m_i feuilles d'origine s_i. Enfin, $\epsilon(a_i) = \dfrac{1}{m_i} v_K(\lambda)$.

Type II : $e = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\zeta - 1)$

Si $e = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\lambda)$, la chaîne fondamentale de l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ est formée d'un sommet multiplicatif s, relié à r_i par une arête a_i au sommet r_i, pour $i = 1, 2$. De plus s est le sommet d'exactement $m_1 + m_2$ feuilles. Enfin, $\epsilon(a_i) = \dfrac{1}{m_i} v_K(\lambda)$.

Type III : $e < (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\zeta - 1)$

Si $e < (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\lambda)$, la chaîne fondamentale de l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ est formée d'un sommet additif s, relié à r_i par une arête a_i au sommet r_i, pour $i = 1, 2$. Le nombre d'arêtes non fondamentales d'origine s est inférieur à $\inf(m_1, m_2)$. Si a est une telle arête, et si $m(a) < p$, les arêtes positives d'origine le sommet terminal de a sont des feuilles. Il y a au plus une arête a d'origine s pour laquelle $m(a) > p$. Enfin, $\epsilon(a_i) < \dfrac{1}{m_i} v_K(\lambda)$ pour $i = 1, 2$.

Démonstration.

L'automorphisme σ possède $m_1 + m_2$ points fixes. Ainsi, la chaîne fondamentale est formée d'au moins trois sommets. Soit s un sommet fondamental différent de r_1 et r_2, on note a_1 l'unique arête fondamentale positive d'origine le sommet terminal s et a_2 l'unique arête fondamentale positive d'origine s. Supposons $m(a_1) > 0$ et $m(a_2) > 0$. En particulier, s est un sommet additif réalisable, on prend les notations de la définition 2.3, $[A]$. Soit $\omega = d\bar{u}_s$. On peut supposer $j_s(\bar{a}_1) = +\infty$ et $t_{a_2} = 0$. Comme $\mathrm{ord}_\infty d\bar{u}_s = m(a_1) > 0$, quitte à ajouter une puissance p-ième, on peut de plus supposer $\bar{u}_s$ de la forme

$$\bar{u}_s = \frac{P(t)}{\prod_{a \in \mathrm{ar}^+(s)} (t - t_a)^{m(a)}}$$

avec $\deg(P) = \sum_{a\in \mathrm{ar}^+(s)} m(a)$, et $P(t_a) \neq 0$ pour a dans $\mathrm{ar}^+(s)$. Prenant la coordonnée $x := t^{-1}$, en notant Q le polynôme $Q(x) := x^{\sum_{a\in \mathrm{ar}^+(s)} m(a)} P(\frac{1}{x})$, on a alors

$$\bar{u}_s = \frac{Q(x)}{\prod_{a\in \mathrm{ar}^+(s)} (1 - t_a x)^{m(a)}}.$$

Comme par ailleurs $1 \leq 1 + \mathrm{ord}_\infty \omega = m(a_1) \leq m_1 < p$, on a le développement en série de Laurent

$$\bar{u}_s = 1 + \alpha x^{m(a_1)} \mod x^{m(a_1)+1},$$

où α est non nul. Mais alors,

$$Q(x) = (1 + \alpha x^{m(a_1)} + x^{m(a_1)+1} l(x)) \prod_{a\in \mathrm{ar}^+(s)} (1 - t_a x)^{m(a)}.$$

On a $(\sum_{a\in \mathrm{ar}^+(s)} m(a)) - (m(a_1)) \leq \sum_{a\in \mathrm{ar}^+(s)} m(a) - m(a_1) = 2 - \mathrm{card}(\mathrm{ar}(s)) < 0$. Le coefficient de $x^{m(a_1)}$ dans $Q(x)$ est donc $\alpha \neq 0$. Or, le degré de Q est égal à $\sum_{a\in \mathrm{ar}^+(s)} m(a)$, on obtient donc une contradiction. On ne peut pas avoir $m(a_1) > 0$ et $m(a_2) > 0$. Il existe donc au plus une arête fondamentale positive a telle que $m(a) > 0$, et c'est donc forcément l'arête d'origine r_1. De même, la seule arête fondamentale positive a telle que $m(a) < 0$ est l'arête de sommet terminal r_2. On voit qu'il y a trois cas : Notons s_1 le sommet terminal de l'arête a_1 d'origine r_1, et a_0 l'arête fondamentale positive d'origine s_1.

Si $m(a_0) = 0$, s_1 est multiplicatif, et le sommet terminal s_2 de a est multiplicatif. On tombe sur le type I. On a $m_1 = m(a_1)$, les arêtes positives d'origine s distinctes de a sont des feuilles, et la relation $\sum_{a\in \mathrm{ar}(s)} (m(a) + 1) = 2$ montre qu'il y en a m_1. De même, il y a m_2 feuilles d'origine s_2 (le sommet terminal de a_0). Le calcul de $\epsilon(a_i)$ se fait en utilisant la loi de variation de la différente. On a alors $e > \epsilon(a_1) + \epsilon(a_2) = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\lambda)$.

Supposons à présent $m(a_0) < 0$ et s_1 multiplicatif. Alors le sommet terminal de a_0 est r_2. On tombe sur le type II. On voit alors que les sommets non fondamentaux d'origine s_1 sont des feuilles, et la relation $\sum_{a\in \mathrm{ar}(s)} (m(a) + 1) = 2$ montre qu'il y en a $m_1 + m_2$. On voit alors facilement que $e = \epsilon(a_1) + \epsilon(a_2) = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\lambda)$.

Supposons enfin $m(a_0) < 0$ (i.e. $m(a_0) = -m_2$) et s_1 additif. Soit q le nombre d'arêtes non fondamentales d'origine $s = s_1$. On peut alors supposer, avec les notations de la proposition 4.4,

$$\bar{u}_s = \frac{P(t)}{\prod_{a\in I'_s} (t - t_a)^{m(a)}}$$

où $\deg(P) = \sum_{a\in I'_s} m(a)$, $j_s(\bar{a}_1) = \infty$, $j_s(a_2) = 0$, $j_s(a) = t_a \neq 0$ pour a dans I'_s, $P(0) \prod_{a\in I'_s} P(t_a) \neq 0$, et $\mathrm{ord}_\infty d\bar{u}_s = m_1 - 1$, $\mathrm{ord}_0 d\bar{u}_s = m_2 - 1$. On a $\bar{u}_s = 1 + \alpha t^{m_2}$

mod t^{m_2+1}, où $\alpha \neq 0$. Ainsi,

$$P(t) = (1 + \alpha t^{m_2} + t^{m_2+1} l(x)) \prod_{a \in I'_s} (1 - t_a^{-1} t)^{m(a)}.$$

Or, $\deg(P) = \sum_{a \in I'_s} m(a) = m_1 + m_2 - q$. Si $m_1 < q$, on a $\deg(P) < m_2$ et on obtient alors une contradiction en remarquant que le coefficient de t^{m_2} doit être α. Donc $q \leq m_1$, et en regardant également le dévelloppement de $\bar{u}_s$ en ∞, on voit que $q \leq m_2$. Le fait qu'il y ait au plus une arête non fondamentale a d'origine s pour laquelle $m(a) > p$ résulte de $m_1 + m_2 < 2p$. Si a est une arête non fondamentale d'origine s pour laquelle $m(a) < p$, toute arête d'origine $t_{\Gamma_\sigma}(a)$ est une feuille d'après le théorème III 3.1 de [2]. Enfin, la loi de variation de la différente entraîne que $e < (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\lambda)$.

$\square$

Références

[1] Green B., Matignon M. : Lifting of Galois covers of smooth curves. Compositio Math. 113 (n^o 3), 237-272 (1998)

[2] Green B., Matignon M. : Order p automorphisms of the open disc of a p-adic field. J. Amer. Math. Soc 12 (n^o 1), 269-303 (1999)

[3] Henrio Y. : Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p-adiques formels. Thèse, université Bordeaux I (1999)

[4] Henrio Y. : Automorphismes d'ordre p des couronnes p-adiques ouvertes. C. R. Acad. Sci Paris, t. 329, Série I, 47-50 (1999)

[5] Henrio Y. : Relèvement galoisien des revêtements de courbes nodales, soumis pour publication.

[6] Oort F., Sekiguchi T., Suwa N. : On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 22, 345-375 (1989)