Le groupe fondamental algébrique
Théorèmes de Grothendieck et conjectures d'Abhyankar

M. Matignon

I. Introduction

I.1. Le problème Soit k un corps algébriquement clos. Soit C une courbe algébrique sur k, supposée irréductible et lisse. On a:

$$C = \overline{C} - S$$

où $\overline{C}$ est une courbe projective lisse, et S un sous-ensemble fini de $\overline{C}(k)$.

Quels sont les revêtements galoisiens non ramifiés de C?

On peut préciser cette question de deux façons:

(a) On se donne un groupe fini G. On demande à quelle condition il existe un revêtement galoisien non ramifié connexe $C' \to C$ de groupe G.

(b) Soit $k(C)^{alg}$ une clôture algébrique du corps de fonctions rationnelles de C sur k (on fixe ainsi un point base), et soit $\Omega \subset k(C)^{alg}$ l'extension non ramifiée maximale de $k(C)$ et $\Omega^t \subset \Omega$ la sous-extension maximale qui est modérément ramifiée au-dessus de S. Le *groupe fondamental algébrique* (resp. *groupe fondamental algébrique modéré*) $\pi_1^{alg}(C)$ (resp. $\pi_1^{alg,t}(C)$) est le groupe de Galois de Ω (resp. Ω^t) sur $k(C)$; c'est un groupe profini que l'on note π_C (resp. π_C^t). On demande de déterminer sa structure.

Remarques.- 1) Noter que (b) est plus précis que (a): un groupe G satisfait (a) si et seulement G est isomorphe à un quotient de π_C.

2) Lorsque l'on change le corps de base k par une extension algebriquement close k', le groupe π_C ne change pas si la caractéristique est nulle; il n'en va plus de même en caractéristique non nulle et si $S \neq \emptyset$ (par exemple le revêtement de la droite affine $f : A^1_{k(\alpha)} \to A^1_{k(\alpha)}$ donné par l'équation $X^p - X = \alpha T$ ne descend pas à k si $\alpha \notin k$); cependant un argument de spécialisation montre que les quotients finis de π_C et $\pi_{C\times k'}$ sont les mêmes. La question (a) est donc indépendante du corps de base choisi.

I.2. Le cas complexe

Ici $k = C$, la courbe algébrique est alors une variété analytique (connexe) de dimension 1. Riemann a posé le problème suivant ("Probléme d'existence de Riemann"): *Un morphisme fini étale d'une surface de Riemann sur une courbe algébrique est-il induit par un morphisme algébrique?*

I.2.1. Théorème. *Soit C une courbe algébrique lisse sur C, et $p : C'(C) \to C(C)$ un revêtement topologique fini (donc non ramifié) de $C(C)$. Alors il y a une unique structure algébrique sur $C'(C)$ compatible avec p.*

En dimension 1 tout se lit au niveau des corps de fonctions méromorphes (cf. [Do] pour des démonstrations dans le cadre de la théorie des surfaces de Riemann). Les ingrédients de la preuve sont:

1. Toute variété analytique complexe compacte, de dimension 1 est algébrique (Ceci nécessite de l'analyse fine; on montre qu'il existe une fonction méromorphe

non constante: c'est le *théorème de séparation de Riemann* qui d'ailleurs est confondu dans la littérature avec le théorème d'existence de Riemann).

2. Montrer que l'on peut prolonger le revêtement à $\overline{C}$ (théorème d'extension)

3. Le principe GAGA (que nous rappelons ci-dessous)

Nous allons rappeler maintenant la généralisation en dimension quelconque (du théorème d'extension).

I.2.2. Théorème d'existence de Riemann. ([SGA I, exp. XII, p.21) *Soient X un C-schéma localement de type fini, X^{an} l'espace analytique associé à X. Le foncteur Ψ qui, à tout revêtement étale fini X' de X, associe X'^{an} est une équivalence de la catégorie des revêtements étales finis de X dans la catégorie des revêtements étales finis de X^{an}.*

La difficulté ici est de se ramener au cas propre par un théorème d'extension (Grothendieck utilise la désingularisation); on applique alors le

I.2.3. Principe GAGA. ([Se 1],[SGA I, exp. XII) *Il dit que le foncteur $X \to X^{an}$ de la catégorie des C-schémas propres dans celle des espaces analytiques complexes est fidèlement plat: soient X, Y des C-schémas propres et soient X^{an}, Y^{an} les espaces analytiques complexes correspondant. Alors*

1. Chaque morphisme analytique $X^{an} \to Y^{an}$ est algébrique.

2. Chaque faisceau analytique cohérent sur X^{an} est algébrique, et sa cohomologie algébrique coïncide avec sa cohomologie analytique.

Remarque. Le théorème d'existence de Riemann p-adique vient d'être montré par Lütkebohmert ([Lu])

Tout cela pour dire que l'on se ramène à la classification topologique:

I.2.4. Théorème. *Pour tout $g \geq 0$, il y a, à homéomorphisme près , une unique surface topologique complexe compacte, connexe, orientée, X_g, de genre g (i.e. le premier nombre de Betti est $2g$).*

La surface X_g est homéomorphe soit à la sphère S^2 soit à un polygone à $4g$ côtés nommés a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1},$\ldots$ a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1} en identifiant le côté c avec c^{-1} pris en sens inverse.

De cette description on peut voir que le groupe fondamental topologique $\pi_1(X_g - S)$ relatif à un point de base x_0 et à un ensemble fini S de points de cardinal s, est le groupe engendré par $2g + s$ générateurs $a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g$ et $c_j (j = 1, .., s)$ liés par la relation $\prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] c_1 ... c_s = 1$, où $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

On notera désormais ce groupe $\Gamma_{g,s}$

Si X est un espace topologique connexe par arcs, localement connexe, et localement simplement connexe, X admet un revêtement universel $\tilde{X}$ et une projection

$$p : \tilde{X} \to X$$

qui fait de $\tilde{X}$ un revêtement non ramifié (topologique). Les homéomorphismes σ de $\tilde{X}$ dans lui-même pour lesquels $p \circ \sigma = p$ forment un groupe G qui est isomorphe au groupe fondamental topologique $\pi_1(X)$ de X ; ainsi $\pi_1(X)$ classifie les revêtements non ramifié (topologique) de X. Si de plus X est une variété analytique on peut munir $\tilde{X}$ d'une structure d'espace analytique telle que p soit holomorphe. Alors X et $\tilde{X}/G$ sont des variétés isomorphes (analytiquement) et ainsi $\pi_1(X)$ classifie les revêtements analytiques connexes non ramifiés de X.

I.3. Le cas de caractéristique 0

Lorsque la caractéristique de k est nulle, le principe de Lefschetz (i.e. tout corps algébriquement clos de type fini se plonge dans C), combiné avec des arguments de spécialisation (voir [Se]), et **I.2.** montrent que:

I.3.1. Théorème. *Si p=0, le groupe fondamental algébrique π_C est isomorphe au complété profini du groupe fondamental topologique,*

$$\hat{\Gamma}_{g,s} = \hat{\pi}_1(X_g - S) \simeq \pi_C.$$

Mieux, il y a un choix d'éléments x_i, y_i, z_j dans π_C où z_j est un générateur topologique de l'inertie en une place de Ω (l'extension maximale non ramifiée de $k(C)$), tels que:

1. $\prod_{i=1}^{g}[x_i, y_i]z_1 ... z_s = 1$

2. L'application $\pi_1(X_g - S) \to \pi_C$ qui envoie les générateurs a_i, b_i, c_j de $\pi_1(X_g - S)$ sur x_i, y_i, z_j, s'étend en un isomorphisme $\hat{\pi}_1(X_g - S) \simeq \pi_C$.

On est encore aujourd'hui à la recherche d'une preuve algébrique de ce résultat qui est pourtant de nature algébrique!

I.4. Le cas de caractéristique $p > 0$.

Ce cas est resté longtemps inexploré. C'est Weil, dans son célèbre mémoire sur les fonctions abéliennes ([We]) qui évoque un lien entre caractéristique 0 et caractéristique $p > 0$. Précisément il suggère deux choses:

(i) Pour les groupes d'ordre premier à p, la théorie est la même qu'en caractéristique zéro;

(ii) Il doit être possible de passer de la caractéristique zéro à la caractéristique p (et inversement).

L'assertion (i) a été précisée en 1956 par Abhyankar ([Ab 1]) sous la forme de la conjecture suivante:

(i') Soit π'_C le plus grand quotient de π_C dont l'ordre (comme groupe profini) soit premier à p. Alors π'_C est isomorphe au groupe correspondant pour une courbe sur C ayant mêmes invariants g et s.

II. Théorèmes de Grothendieck et conjectures d'Abhyankar

II.1. Les théorèmes de Grothendieck

L'un des premiers succès de la théorie des schémas de Grothendieck a été la démonstration, en 1958, de la conjecture (i') ([Gro], [SGA I] p. exp. X, XIII); sa méthode consiste à se ramener à la caractéristique 0 conformément à ce qu'avait prédit Weil.

Soit donc k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$,on note $\overline{C}$ une courbe algébrique projective lisse, connexe, $S = \{x_1, .., x_s\}$ un ensemble fini et $C = \overline{C} - S$.

On relève $\overline{C}$ en un schéma projectif C lisse sur l'anneau $R = W(k)$ des vecteurs de Witt sur k, soit $K = Fr\ W(k)$ et $C_{(K)}$ la fibre générique de C et

$C_{(K^{alg})}$ la courbe obtenue après extension des scalaires. Enfin soit $s_i : SpecR \to C$ des sections au-dessus des x_i et $U = C - \cup_i s_i(R)$ et $U = U \times \overline{K}$, sa fibre générique géométrique, alors (I.3.1) $\pi_U \simeq \Gamma_{g,s}$, de plus on a un morphisme de spécialisation $\Phi : \pi_U \to \pi_C^t$. Alors

II.1.1. Théorème. (Grothendieck) *Sous les hypothèses précédentes l'homomorphisme de spécialisation est surjectif, ainsi il existe des éléments $a_i, b_i,\ 1 \leq i \leq g, \sigma_j, 1 \leq j \leq s$ tels que π_C^t soit topologiquement engendré par les a_i, b_i, σ_j avec la relation $\prod[a_i, b_i]\prod \sigma_j = 1$ et tels que $\sigma_i \in \pi_C^t$ soit un générateur d'un groupe d'inertie au dessus de x_j, (il est défini à conjugaison près).*

De plus $Ker\ \phi \subset \bigcap N$, où l'intersection est prise sur les sous-groupes ouverts normaux de π_U tels que $p[\pi_U : N]$. On a donc

$$\pi_C^{(p)} \simeq \hat{\Gamma}_{g,s}^{(p)}$$

où $H^{(p)} := H/H_i$ est la limite projective des groupes quotient de H à finis d'ordre premier à p.

On "connait" donc les groupes finis G d'ordre premier à p qui sont quotient de π_C^t. Quels sont les G avec $p \mid |G|$? Une erreur serait de croire que ce sont ceux qui apparaîssent en caractéristique 0 qui sont avec indice de ramification premier à p.

Question: Déterminer le groupe $\pi_1^t(P^1_{\overline{F}_p} - \{0, 1, \infty\})$.

II.2. Le cas où C est une courbe complète.

Soit toujours k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$,on note C une courbe algébrique projective lisse, connexe de genre $g(C) \geq 2$; on ne connait pas π_C.

Cependant on sait déterminer (algébriquement) la structure du groupe fondamental abélianisé π_C^{ab} (noter que si $g(C) = 1$, π_C est abélien). On introduit l'invariant de Hasse-Witt γ_C; c'est le p-rang de la jacobienne de C; on montre l'inégalité $0 \leq \gamma_C \leq g$. On montre ([Mu])

$$\pi_C^{ab} \simeq (\prod_{\ell \neq p} Z_\ell^{2g}) \times Z_p^{\gamma_C}$$

Si p est un nombre premier on note $\pi_C^{(p)}$ le groupe profini limite projective des quotients finis de π_C d'ordre premier à p et π_C^p la limite projective des quotients finis d'ordre une puissance de p.

π_C^p est un pro-p-groupe libre à γ_C générateurs (Shafarevich [Sha]),

Soit ℓ un nombre premier, et soit G un groupe profini. On appelle ℓ-dimension cohomologique de G, et on note $cd_\ell G$ la borne inférieure des entiers n vérifiant la condition suivante:

(*) Pour tout G-module discret de torsion A, et tout $q > n$, la composante ℓ-primaire de $H^q(G, A)$ est nulle.

On peut montrer que:

$cd_p\pi_C = 1$ et $\dim H^1(\pi_C, Z/pZ) \leq g$;
$cd_\ell \pi_C = 2$, $\dim H^1(\pi_C, Z/\ell Z) = 2g$ et $\dim H^2(\pi_C, Z/lZ) = 1$ si $\ell \neq p$.

L'assertion $cd_p\pi_C \leq 1$ équivaut à dire que les p-groupes de Sylow de π_C sont des pro-p-groupes libres; il sont non triviaux par le théorème suivant dû à Raynaud [Ra] (seul le cas où C est supersingulière est à considérer):

II.2.1. Théorème *Pour tout nombre premier ℓ, $\ell \neq p$ et $\ell + 1 \geq (p-1)g$, il existe un revêtement étale cyclique de degré ℓ: $C' \to C$ qui induit un morphisme des Jacobiennes (à noyau fini) $J_C \to J_{C'}$ et tel que $J_{C'}/Im(J_C)$ soit ordinaire.*

La condition sur ℓ implique donc que le p-rang de $J_{C'}$ est au moins $g' - g = (l-1)(g-1) > 0$.

A la question π_C est-il déterminé par g et γ_C seulement Katsurada ([Ka]), apporte une réponse négative. Comme on l'a vu l'invariant de Hasse-Witt classifie les p-extensions abéliennes, Katsurada introduit des invariants (invariants de Hasse-Witt généralisés) qui sont attachés aux $G_{n,p}$-revêtements étales où

$$G_{n,p} = \{(\, a\, b 0 1) \in GL(2, F_q) \mid a^n = 1\},$$

où $q = p^m$ et m est l'ordre de p dans $(Z/nZ)^\times$.

Nakajima ([Na]) a donné la liste des invariants de Hasse-Witt généralisés pour les courbes de genre 2.

Ceci est résumé par le

II.2.2. Théorème(E. Kani) *Soit C une courbe lisse sur k et M un π_C^t-module d'ordre une puissance de p, alors*

$$|H^1(\pi_C^t, M)|/|H^0(\pi_C^t, M)| \leq |M|^{g-1+s}$$

Dans le cas où C est complète, $M = Z/pZ$ on a $|H^1(\pi_C, M)| = p^{\gamma_C}$ et si $|M| = p$, $M \neq Z/pZ$,alors $|H^1(\pi_C, M)| = p^{\gamma_C}$ où γ'_C est un invariant de Hasse-Witt généralisé.

Exemple. Soit $\overline{C}$ une courbe de genre g et soit s un entier. Pour des entiers positifs n, a, r avec pna soit $G_r = HE$ le produit semi-direct du groupe cyclique $H =< \sigma >$ d'ordre n par le groupe p-abélien élémentaire $E =< \tau_1, ..., \tau_r >$ de rang r et où l'action de H sur E est donnée par $\tau_i^\sigma = \tau_i^a$ pour $1 \leq i \leq r$.

Si $r \geq g+s$ et $a \not\equiv 1(p)$, alors G_r ne peut être réalisé comme groupe de Galois d'un revêtement modéré de $\overline{C}$ qui est ramifié en au plus s points de $\overline{C}$. Notez que $1 = \dim_{F_p}(G/p) \leq h$ où γ_C est l'invariant de Hasse-Witt de $\overline{C}$. **II.3. Le groupe fondamental d'une courbe générique.**

Dans ce paragraphe on fixe un entier $g \geq 2$, et on détermine un quotient du groupe fondamental d'une courbe générique de genre g. Soit $H_{g,Z}$ l'unique sous-schéma du schéma de Hilbert $Hilb^{P_g}_{P^{5g-6}}$ sur Z qui classifie les courbes stables $\pi : C \to S$ de genre g plus un isomorphisme: $P(\pi_*(\omega_{C/S}^{\otimes 3})) \simeq P^{5g-6} \times S$, où $\omega_{C/S}$ est le faisceau canonique sur C ([Mu-Fo], prop. 5.1, p.99), et soit $Z_{g,Z} \to H_{g,Z}$ *la courbe stable universelle* au-dessus de $H_{g,Z}$. Dans ce qui suit, k sera un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Nous noterons $Z_g := Z_{g,Z} \times_Z k$,

$H_g := H_{g,Z} \times_Z k$ et L une clôture algébrique de $k(\eta)$, où $k(\eta)$ est le corps résiduel de H_g en son point générique η (H_g est irréductible). On a la notion de *courbe générique* $X := Z_g \times_{H_g} L$ de genre g; c'est une courbe propre, lisse et connexe sur L.

II.3.1. "Dégénérescence" de la courbe générique $X_{/L}$.

Soit C une courbe stable de genre g sur k, qui correspond à une fibre de $Z_g \to H_g$ en un point rationnel x de H_g. Il existe un anneau de valuation discrète R, tel que si on note η' le point générique de $S := SpecR$ et s le point fermé de S, on ait un morphisme $f : S \to H_g$ qui induit un isomorphisme $Fr(R) \simeq k(\eta)$, et $f(s) = x$, $f(\eta') = \eta$ ([Gro], prop 7.1.7, p.140). Soit $X := Z_g \times_{H_g} S$, alors X est une S-courbe stable, dont la fibre générique géométrique est la courbe générique X/L et la fibre spéciale $X_{k(s)} = C \times_k k(s)$ est obtenue à partir de C par changement de base. Comme L est algébriquement clos, le morphisme $SpecL \to SpecR$ se factorise à travers un hensélisé strict de R, et on peut donc supposer R strictement hensélien.

On se trouve sous-les hypothèses du théorème de spécialisation du groupe fondamental que nous rappelons:

II.3.1.1. Théorème (Grothendieck).- *Soit R un anneau local noethérien complet et $S = SpecR$, soit $s_0 \in S$, le point fermé de S. Soit X un S-schéma propre et $C = X \times_s k(s_0)^{alg}$. Soit $\overline{a}_0$ un point géométrique de C, soit a_0 son image dans X. On suppose que C est connexe, alors la suite d'homomorphismes*

$$1 \to \pi_1(C, \overline{a}_0) \to \pi_1(X, a_0) \to \pi_1(S, s_0) \to 1$$

est exacte.

Ainsi dans notre cas l'homomorphisme de spécialisation $\Phi : \pi_1(X/L) \to \pi_1(C)$ est surjectif.

Il ne nous reste plus qu'à trouver une dégénéréscence en une courbe C propre pour laquelle on connait le groupe fondamental; nous sommes ainsi amenés à considérer des courbes stables dont les composantes irréductibles sont de genre géométrique < 2.

Exemple 1. C est une courbe rationnelle stable, on sait ([SGA 1] p.?) que $\pi_C \simeq L_g$ où L_g est le groupe profini libre à g générateurs.

Exemple 2. C est une "chaîne" de g courbes elliptiques ordinaires qui se croisent en des points doubles ordinaires. Alors ([SGA 1] p.?) π_C est le complété profini du produit libre de g copies de Z^2.

On voit tout l'intérêt ici d'une analyse fine du noyau de l'homomorphisme de spécialisation afin de produire des gros quotients du $\pi_1(X/L)$, ce travail a été mené à bien par Saïdi dans sa thèse. Avant d'énoncer ses résultats nous devons rappeler quelques définitions.

Considérons une courbe algébrique X projective lisse, géométriquement connexe sur K, et ayant un *modèle semi-stable* X sur R; c'est à dire qu'il existe une R-courbe semi-stable X, telle que X_K soit isomorphe à X, les composantes irréductibles $(C_i)_{1 \leq i \leq s}$ de X_k sont lisses et se croisent en des points doubles ordinaires $\{x_j\}_{1 \leq j \leq a}$. Il existe une extension finie R' de R, telle que $X \times_K FrR'$ possède un modèle semi-stable sur R' ([De-Mu]). On notera U l'ouvert connexe $X-\{x_j\}_{1\leq j\leq a}$, et si $\overline{R}$ désigne la clôture intégrale de R dans une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, on note $\overline{X} := X \times_K \overline{K}$ et $\overline{U} := U \times_R \overline{R}$. On a des morphismes naturels $\overline{X} \to \overline{U} \to X$, et notons que $\overline{U} \times_{\overline{R}} \overline{K} = \overline{X}$.

On associe à la fibre spéciale X_k du modèle semi-stable X de la courbe X, un graphe d'intersection Γ défini comme suit:

(i) les sommets de Γ sont les composantes irréductibles $(C_i)_{1\leq i\leq s}$ de X_k.

(ii) les arêtes de Γ sont définies par les points doubles $\{x_j\}_{1\leq j\leq a}$ de X_k, chaque point double où se croisent deux composantes C_i et C_l, définit une arête joignant les sommets C_i et C_l. On oriente Γ et on note $\{e_j, \bar{e}_j\}_{1\leq j\leq a}$ l'ensemble des arêtes orientées de Γ (une arête e_j est associée à un point double x_j, et $\bar{e}_j$ est son arête opposée). Le graphe Γ est connexe et fini.

On définit un graphe de groupes (Γ, G) ([Se], 4.4, déf.8, p.55) associé à la courbe semi-stable X_k. Pour tout sommet C_i de Γ, soient U_i l'ouvert affine $C_i - \{\{x_j\}_{1\leq j\leq a} \cap C_i\}$, et b_i un point géométrique de U_i, on pose $G_{C_i} := \pi_1^t(U_i, b_i)$ le groupe fondamental modéré de U_i en b_i ([SGA I], exp. XIII, 2.1.3, p.373). Soit $x_j \in C_i \cap C_l$ un point double de X_k, $O^h_{C_i,x_j}$ (resp. $O^h_{C_l,x_j}$) un hensélisé de l'anneau local O_{C_i,x_j} (resp. de O_{C_l,x_j}) et $K^h_{C_i,x_j} := FrO^h_{C_i,x_j}$ (resp. $K^h_{C_l,x_j} := FrO^h_{C_l,x_j}$). Soit a_j (resp. a'_j) un point géométrique de $SpecK^h_{C_i,x_j}$ (resp. de $SpecK^h_{C_l,x_j}$), il existe des monomorphismes $\lambda_{x_j} : \pi_1^t(SpecK^h_{C_i,x_j}, a_j) \to \pi_1^t(U_i, b_i)$ (resp. $\lambda_{x_j} : \pi_1^t(SpecK^h_{C_l,x_j}, a'_j) \to \pi_1^t(U_l, b_l)$) ([SGA I], exp. V, cor.6.7, p.138).

Il existe des isomorphismes $\pi_1^t(SpecK^h_{C_i,x_j}, a_j) \simeq \pi_1^t(SpecK^h_{C_l,x_j}, a'_j) \simeq \hat{Z}^{(p)} := \prod_{l\neq p} Z_l$. On fixe un générateur topologique de $\hat{Z}^{(p)}$; son image dans $\pi_1^t(SpecK^h_{C_i,x_j}, a_j)$ (resp. $\pi_1^t(SpecK^h_{C_l,x_j}, a'_j)$) via l'isomorphisme ci-dessus sera dit un générateur "canonique" Pour l'arête orientée e_j de Γ, de sommet origine C_l et de sommet extrémité C_i, on pose $G_{e_j} = G_{\bar{e}_j} =: \hat{Z}^{(p)}$; on définit les monomorphismes $\mu_{e_j} : G_{e_j} \to G_{C_i}$, avec $\mu_{e_j} := \lambda_{x_j}$ (resp. $\mu_{\bar{e}_j} : G_{\bar{e}_j} \to G_{C_l}$, avec $\mu_{\bar{e}_j} := \bar{\lambda}_{x_j}$ où $\bar{\lambda}_{x_j}$ est l'homomorphisme qui envoie un générateur "canonique" $\sigma(x_j)$ de $G_{\bar{e}_j}$ sur $\lambda_{x_j}(\sigma(x_j))^{-1}$). Nous noterons dans ce qui suit σ_{e_j} (resp. $\sigma_{\bar{e}_j}$) l'image d'un générateur "canonique" de $\pi_1^t(SpecK^h_{C_i,x_j}, a_j)$ dans $\pi_1^t(U_i, b_i)$ via l'homomorphisme λ_{x_j} (resp. l'image d'un générateur "canonique" de $\pi_1^t(SpecK^h_{C_l,x_j}, a'_j)$ dans $\pi_1^t(U_l, b_l)$ via l'homomorphisme λ_{x_j}), qui correspond à un générateur de l'inertie au-dessus de x_j. On a ainsi défini un graphe de groupes (Γ, G), on note $\pi_1(\Gamma, G)$ son groupe fondamental relativement à un arbre maximal T de Γ ([Se], 5.1, prop.20, p.63); c'est le groupe engendré par les groupes G_{C_i} $(1 \leq i \leq s)$, et les éléments $\{e_j, \bar{e}_j\}_{1\leq j\leq a}$, soumis aux relations:

(i) $e_j = \bar{e_j}^{-1}$

(ii) $e_j = 1$, si $e_j \in T$

(iii) $e_j \sigma_{e_j} e_j^{-1} = \sigma_{\bar{e}_j}^{-1}$, en particulier $\sigma_{e_j} = \sigma_{\bar{e}_j}^{-1}$ si $e_j \in T$.

II.3.1.2. Théorème [Sa]– *Il existe un isomorphisme* $\pi_1(\overline{U}, a) \simeq \pi_1(\Gamma, G)^\wedge$, *où* $\pi_1(\Gamma, G)^\wedge$ *est le complété profini de* $\pi_1(\Gamma, G)$

Soit R un anneau de valuation discrète strictement hensélien, de corps résiduel

k', et X une R-courbe semi-stable, dont la fibre générique géométrique est la courbe générique X/L, et la fibre spéciale X_k est une "chaîne" de g courbes rationnelles complètes ayant chacune un unique point double ordinaire et qui se croisent en des points doubles ordinaires. Soit U l'ouvert connexe de X obtenu en enlevant les points doubles de X_k, $\overline{R}$ la clôture intégrale de R dans L et $\overline{U} := U \times_R \overline{R}$, on a un homomorphisme canonique surjectif: $\pi_1(X) \to \pi_1(\overline{U})$. Soit (Γ, G) le graphe de groupes associé à la fibre spéciale X_k de X, et $\pi_1(\Gamma, G)^\wedge$ le groupe complété profini du groupe fondamental $\pi_1(\Gamma, G)$ du graphe de groupes (Γ, G). Il suit du théorème II.3.1.2. le résultat suivant:

II.3.1.3. Théorème [Sa]– *Le groupe $\pi_1(\Gamma, G)^\wedge$ est un quotient de $\pi_1(X)$.*

Il résulte alors de la description du groupe $\pi_1(\Gamma, G)$ ([Se], chap.5) que le groupe fondamental $\pi_1(X)$ de la courbe générique X/L possède un quotient qui est le complété profini d'un groupe extension d'un groupe profini libre à g gènerateurs (où g est le genre X par un groupe qui est un produit amalgamé de copies de $\pi_1^t(P^1_{\overline{F}_p} - \{0, 1, \infty\})$. L'intérêt du type de dégénérescence de la courbe générique X/L et du quotient du groupe fondamental $\pi_1(X)$ qu'on obtient ci-dessus, est motivé par le résultat suivant qui est un analogue du théorème de Belyi ([Be],[Se]) en caractéristique p;

II.3.1.4. Théorème. *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 2$, $\overline{F}_p$ la clôture algébrique du corps fini F_p dans k, et soit C une courbe projective, lisse et connexe sur k. Les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) C est définie sur $\overline{F}_p$.
(ii) il existe un morphisme fini $C \to P^1_k$ étale en dehors de $\{0, 1, \infty\}$ et modérément ramifié au-dessus de $\{0, 1, \infty\}$.

Remarque – On peut montrer que la p-partie $\pi_1^p(\Gamma, G)^\wedge$ du groupe $\pi_1(\Gamma, G)^\wedge$ est un p-groupe profini libre à g générateurs, autrement dit la courbe générique X/L est ordinaire. Plus généralement soit n un entier positif premier à p, et $1 \to H \to \pi_1(\Gamma, G)^\wedge \to Z/nZ \to 1$ une suite exacte. Alors la p-partie du sous-groupe H est un p-groupe profini libre à $n(g-1)+1$ générateurs. Autrement dit pour tout revêtement cyclique étale $X' \to X$ de degré n , avec X' connexe, la courbe X' est ordinaire. Ce qui est un résultat bien connu (cf. [Na], [Zh]).

Revenons au théorème de spécialisation. Les revêtements étales que nous n'atteignons pas par la méthode précédente sont ceux qui induisent à la fibre spéciale des revêtements inséparables. Une connaissance de la réduction stable pour de tels revêtements est du plus grand intérêt. Dans le cas où la fibre spéciale C est lisse Raynaud l'a décrite dans le cas des revêtements galoisiens de groupe de Galois un groupe nilpotent. Le résultat qui résume le mieux la complexité de cette situation est le suivant:

II.3.1.5. Théorème [Ra]– *Soit R un anneau de valuation discrète complet d'inégale caractéristique, de caractéristique résiduelle $p > 0$. Soit X une courbe propre et lisse sur R , à fibres géométriques connexes de genre $g \geq 2$. On suppose que X_k est générique. Soit $Y \to X$ un torseur sous μ_p, non trivial en réduction sur X_k. Alors le graphe de la fibre spéciale de la réduction semi-stable de Y_K est un arbre* *qui admet:*

$2g-2$ bouts, chacun d'eux étant une courbe de genre $(p-1)/2$, pour $p \neq 2$,
$g-1$ bouts, chacun d'eux étant une courbe de genre 1 si $p=2$.

II.4. Le cas où C est une courbe affine: conjectures d'Abhyankar

C'est le cas $S \neq \emptyset$; sur C,le groupe fondamental est libre de rang $2g+s-1$.

Soit G un groupe fini. Soit $p(G)$ le sous-groupe engendré par les sous-groupes de Sylow. Le groupe $G/p(G)$ est le plus grand quotient de G d'ordre premier à p. Si G est quotient alors, $G/p(G)$ peut-être engendré par $2g+s-1$ éléments. En 1957, Abhyankar a fait la conjecture que cette condition est suffisante:

Conjecture (AC). *Un groupe fini G est quotient de π_C ssi $p(G)$ peut-être engendré par $2g+s-1$ éléments.*

On a vu en II.1.1. que π_C^t est un quotient du groupe $\hat{\Gamma}_{g,s}$; il est donc "petit". On voit donc que la plupart des groupes qui apparaissent dans (AC) ne peuvent être réalisés par un revêtement modéré; on est ainsi amené avec Harbater à faire la conjecture suivante:

Conjecture (SAC). *Si $G/p(G)$ a $2g+s-1$, alors G est groupe de Galois d'un revêtement galoisien $\overline{C}' \to \overline{C}$ étale au-dessus de C et modérément ramifié au-dessus de $s-1$ points de S.*

II.4.1. La conjecture d'Abhyankar pour la droite affine

On a donc $C = D = Speck[X]$, le corps k étant algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Puisque $2g+s-1=0$, la conjecture (AC) prend alors la forme suivante:

Conjecture (AC-D) *Un groupe G est quotient de π_D si et seulement si G est engendré par ses p-groupes de Sylow.*

Un groupe tel que $G = p(G)$ sera appelé quasi-p-groupe.

Divers groupes ont été réalisés "explicitement".

Soit q, une puissance de p, et soit Σ un groupe algébrique semi-simple simplement connexe sur F_q. Soit $G = \Sigma(F_q)$, le groupe des F_q-points de Σ.

II.4.1.1. Théorème ([No]) *Le groupe G est quotient de π_D.*

II.4.1.2. Théorème *[Ab] Les groupes ci-dessous sont quotients de π_D:*
le groupe alterné A_n si $p \neq 2$ et $n \geq p$;
le groupe symétrique S_n si $p=2$.

Il les réalise comme clôture galoisienne des revêtements associés à l'équation pour diverses valeurs de p et t:

$$Y^n - XY^t + 1 = 0$$

II.4.1.3. Extensions par des groupes résolubles (Serre)

Soit $1 \to N \to \tilde{G} \to G \to 1$, une suite exacte de groupes finis. Supposons que $\tilde{G}$ soit un quasi-p-groupe, et que N soit résoluble. Alors

II.4.1.4. Théorème [Se]– *Sous les hypothèses ci-dessus, si G vérifie (AC-D), il en est de même pour $\tilde{G}$.*

II.4.1.5. Corollaire. *Les groupes résolubles satisfont (AC-D) i.e. tout quasi-p-groupe résoluble est quotient de π_D.*

II.4.1.6. Corollaire. *Si G est quotient de π_D, il en est de même de toute extension de G par un p-groupe.*

Démonstration. On se ramène par dévissage au cas où N est un groupe abélien élémentaire de type $(l, ..., l)$ avec l premier, l'action de G sur N étant irréductible.

Montrons cela; on suppose donc résolu ce dernier cas, il suffit alors de faire une récurrence sur l'ordre de $|N|$; précisément on a le lemme suivant:

Lemme. *Soit N un groupe résoluble et supposons montré le théorme dans le cas des extensions par des sous-groupes résolubles d'ordre plus petit que $|N|$. Alors le résultat vaut pour N.*

preuve. Soit donc $1 \to N \to \tilde{G} \to G \to 1$, une suite exacte où $\tilde{G}$ est un quasi-p-groupe et G vérifie (AC-D). Supposons que l'on a une suite exacte $1 \to N_2 \to N \to N_1 \to 1$, avec N_2 distingué dans $\tilde{G}$ et N_i non trivial. Alors $1 \to N_1 \to \tilde{G}/N_2 \to G \to 1$ est exacte et puisque $\tilde{G}/N_2$ est un quasi-p-groupe il satisfait donc (AC-D) par hypothèse de récurrence. Mais puisque $\tilde{G}$ est extension de $\tilde{G}/N_2$ par le groupe résoluble N_2, $\tilde{G}$ satisfait donc (AC-D). On est donc amené à considérer le cas où il n'y a pas de groupe N_1 avec $1 N_1 N$ qui soit distingué dans $\tilde{G}$.

Puisque le groupe dérivé de N est distingué dans $\tilde{G}$, il suit donc que N est abélien. Soit ℓ un nombre premier divisant $|N|$ et N_ℓ, le sous-groupe de N des éléments qui sont tués par ℓ; il est clairement distingué dans $\tilde{G}$ ainsi N est un ℓ-groupe abélien élémentaire et l'action de G est donc irréductible.

Revenons à la démonstration du théorème. Par hypothèse il existe un morphisme surjectif $\phi : \pi_D \to G$. On peut montrer que la dimension cohomologique $cd_\ell \pi_D \leq 1$ ainsi ([Se], I-23) on peut relever ϕ en $\tilde{\phi} : \pi_D \to \tilde{G}$.

Supposons que $\tilde{G}$ est une extension non scindée de G. Soit $H = \tilde{\phi}(\pi_D)$ alors $N.H = \tilde{G}$ et $N \cap H = \emptyset$ impliquerait que $\tilde{G}$ est produit semi-direct de H par N ce qui est absurde; ainsi $N \cap H$ est un sous-groupe de N qui est stable sous l'action de G (si $h = \tilde{\phi}(a) \in N$ et si $g \in G$ alors $g * h = \tilde{g} h \tilde{g}^{-1}$ où $\tilde{g}$ est un quelconque relèvement de g dans $\tilde{G}$, on a $g = \phi(b)$ ainsi $g * h = \tilde{\phi}(bab^{-1}) \in H \cap N$); ainsi puisque N est un G-module irréductible on a $N \subset H$ et donc $H = \tilde{G}$.

Le cas où $\tilde{G}$ est produit semi-direct de G par N est plus délicat. Si $l = p$, on montre que l'on peut choisir $\tilde{\phi}$ surjectif. Si $l \neq p$ on peut modifier ϕ pour que celà devienne possible; l'idée est de faire un changement de base par $f_m : D \to D$ donné par $x \to x^m$; le nouveau revêtement est "plus ramifié"....Pour plus de détails il faut un exposé.

II.4.1.7. La preuve de (AC-D) par Raynaud ([Ra])

On procède par récurrence sur l'ordre du quasi-p-groupe G. Soit S un p-Sylow de G, et $H_1, ..., H_n$ les quasi-p-groupes propres de G ayant un p-Sylow dans S. Il distingue trois cas:

Cas 1.- G a un p sous-groupe normal N non trivial. Alors G/N est plus petit et par conséquent est réalisé par récurrence. On achève par le théorème de Serre.

Cas 2.- $H_1, ..., H_n$ engendre G. Par récurrence on réalise les H_i sur D. Prenons une réunion de copies d'un H_1-revêtement de D indexées par les classes de H_1H_2 modulo H_1, on obtient un H_1H_2-revêtement de D (non connexe). Faisons le aussi pour H_2, utilisant l'hypothèse sur les H_i on peut recoller ces deux revêtements pour obtenir un H_1H_2-revêtement galoisien de D. On reitère le procédé avec $H_3, ..., H_n$. Puisque G est engendré par les groupes H_i on obtient un G-revêtement de D.

Cas 3.- Pour le cas restant, Raynaud utilise la géométrie des modèles semi-stables. Le groupe G est engendré par des éléments $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ d'ordre une puissance de p et quitte à rajouter de nouveaux générateurs, on peut supposer que $\alpha_1 ... \alpha_m = 1$. Soit R un anneau de valuation discrète complet de caractéristique nulle et dont le corps résiduel est k. Notons $\overline{K}$ une cloture algébrique de FrR. Choisissons m points $h_1, ..., h_m$ de la droite P^1_R, à valeur dans R, et ayant des supports disjoints. Enfin notons U, l'ouvert $P^1_R - \{h_1, ..., h_m\}$. On sait réaliser G comme groupe de Galois d'un G-revêtement Y_K de $U_{\overline{K}}$ tel que les groupes d'inertie en l'un des points au-dessus des h_i soit engendré par α_i. Tous les groupes d'inertie sont donc des p-groupes. Soit Y la normalisée de P^1_R dans Y_K. Quitte à faire une extension finie de K (et à normaliser), on peut supposer que la fibre spéciale Y_k est réduite (elle est en général singulière). Après extension finie de R il existe un éclatement convenable Y' de Y qui est semi-stable. Il en existe même un qui est minimal et donc G-équivariant. Le quotient Y'/G est une R-courbe P', déduite de P par éclatement et sa fibre spéciale est un arbre de droites projectives. Dans ce troisiéme cas Raynaud montre que G apparait comme groupe de Galois du revêtement en un bout du graphe d'intersection de la fibre spéciale de P'.

II.4.1.8. La preuve de (SAC) par D. Harbater([Ha])

1. Il se ramène au cas de $P^1 - \{0, \infty\}$. Pour cela soit $C = \overline{C} - \{x_0, ..., x_{s-1}\}$ et G avec $G/p(G)$ ayant $2g + s - 1$ générateurs. Par des arguments de théorie des groupes il se ramène au cas où G est produit semi-direct $p(G)F$ avec F d'ordre premier à p. On réalise F sur U d'après Grothendieck; et soit C le groupe d'inertie au-dessus de x_0, on réalise $E = p(G)C$ sur $P^1 - \{0, \infty\}$ par la conjecture dans ce cas. En recollant on obtient $G = EF$.

2. Le cas de $P^1 - \{0, \infty\}$. Par hypothèse $1 \to Q \to G \to C \to 1$ avec $Q = p(G)$. Par Raynaud on réalise Q sur D. On peut supposer que $H = PC$ est produit semi-direct pour un p-Sylow $P \subset G$. Recollant un certain H-revêtement de la droite au Q-revêtement on obtient le G-revêtement.

III. Relèvement de morphismes entre courbes semi-stables.

Suite...