RELÈVEMENT GALOISIEN DES REVÊTEMENTS DE COURBES NODALES

YANNICK HENRIO

Résumé. Let R be a complete discrete valuation ring of mixed characteristics, with algebraically closed residue field k. We study the existence problem of equivariant liftings to R of Galois covers of nodal curves over k. Using formal geometry, we show that this problem is actually a local one. We apply this local-to-global principle to obtain new results concerning the existence of such liftings.

On fixe un corps algébriquement clos k de caractéristique $p > 0$, et R un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k. On note K le corps des fractions de R, de caractéristique nulle. Soit Y_0 une courbe algébrique projective sur k nodale (c'est-à-dire connexe, réduite, avec pour uniques singularités des points doubles ordinaires), nous appellerons modèle de Y_0 sur R un couple (Y, ψ), où Y est un schéma normal, propre et plat sur R, de fibre générique lisse et géométriquement connexe sur K, et $\psi : Y \times_R k \to Y_0$ est un isomorphisme de k-schémas. Dans ce travail, nous étudions la question suivante :

Si G est un groupe fini de k-automorphismes de Y_0, agissant librement sur un ouvert dense, existe-t'il un triplet (Y, ψ, ρ), où :

– (Y, ψ) est un modèle de Y_0 sur R.

– $\rho : G \to \mathrm{Aut}_R Y$ est un homomorphisme injectif qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr] & \mathrm{Aut}_R Y \arrow[d] \\ & \mathrm{Aut}_k Y_0 \end{tikzcd}$$

(où la flèche verticale associe à un automorphisme σ de $\mathrm{Aut}_R Y$ l'automorphisme $\psi \circ \sigma_{|Y \times_R k} \circ \psi^{-1}$.)

Soit (Y, ψ, ρ) un tel relèvement, le quotient $X := Y/G$ est une courbe propre sur R, de fibre générique lisse sur K, et de fibre spéciale nodale $X_0 := Y_0/G$. Ainsi le morphisme quotient $f : Y \to X$ est un relèvement G-galoisien du revêtement $f_0 : Y_0 \to X_0$.

Si le morphisme quotient $f_0 : Y_0 \to X_0$ est étale, et si (X, ϕ) est un modèle de X_0 sur R, il résulte de la théorie du groupe fondamental de Grothendieck qu'il existe un unique revêtement étale G-galoisien $Y \to X$ de fibre spéciale f_0. Les obstructions au relèvement sont donc liés à la ramification du morphisme f_0. En fait, si Y_0 (et donc X_0) est une courbe lisse, le résultat précédant s'étend au cas où f_0 est modérément ramifié. Toutefois, la ramification modérée impose des obstructions au relèvement local des points doubles : On doit supposer l'action de G kummérienne (voir [16], théorème 5.7).

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14G20, 14L27; Secondary 14D15, 14E22.

[1]Mathématiques Pures de Bordeaux, UPRES-A 5467 CNRS, Université Bordeaux I
351 cours de la libération 33 405 Talence cedex, France
e-mail : henrio@math.u-bordeaux.fr

Si f_0 est sauvagement ramifié, il est nécessaire de faire des hypothèses sur les sous-groupes d'inertie pour obtenir des énoncés de relèvement. Par exemple, B. Green et M. Matignon ont montré que si la courbe Y_0 est lisse, si (X, ϕ) est un modèle de X_0 sur R, et si les groupes d'inertie sont tous cycliques de p-exposant inférieur ou égal à 2, il existe un revêtement $f : Y \to X$ galoisien de groupe G qui relève f_0. En revanche, il n'y a plus unicité du relèvement lorsque X est fixé. Par ailleurs, une conjecture due à Oort ([12], [13]) dit que si la courbe Y_0 est lisse et si les groupes d'inertie sont tous cycliques, il existe un relèvement sur un R convenable. Dans ce travail, nous montrons le résultat suivant :

Théorème *Supposons l'action de G kummérienne et que pour un point fermé y de Y_0 :*
1. Si y est un point lisse, le groupe d'inertie I_y de y est cyclique d'ordre $n(y)p^{r(y)}$, avec $(n(y), p) = 1$ et $0 \leq r(y) \leq 2$.
2. Si y est un point double, on a alors (i) ou bien (ii) :

- *(i) Le groupe d'inertie I_y de y est cyclique d'ordre $n(y)p^{r(y)}$ et l'action de I_y sur les branches est triviale.*
- *(ii) Le groupe d'inertie I_y de y est diédral d'ordre $2n(y)p^{r(y)}$, avec $(n(y), p) = 1$ et $0 \leq r(y) \leq 2$, de présentation*
$$I_y = \langle \sigma, \tau | \sigma^{n(y)p^{r(y)}} = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle.$$
Les branches du point double y sont permutées par τ et σ induit un automorphisme d'ordre $n(y)p^{r(y)}$ de chacune des deux branches.

Alors, quitte à faire une extension finie de K, il existe un relèvement de (Y_0, G).

Green et Matignon ont étudié le cas des courbes lisses à l'aide des méthodes de la géométrie rigide. Nous utilisons ici la géométrie formelle, qui est sans doute mieux adaptée aux questions concernant les modèles entiers (on pourra consulter [15] pour la comparaison des deux théories). Plus précisément, nous nous sommes amplement inspiré du recollement formel (formal patching) à la Harbater (voir [7] et [8]). On en déduit un principe local-global formel, qui montre que le problème de relèvement galoisien est essentiellement de nature locale. On est ainsi ramené à construire des actions de groupes sur les disques et les couronnes formels.

La première partie consiste en quelques rappels sur la géométrie des disques et des couronnes formels. La seconde présente les méthodes de recollement formel. En application, on déduit l'existence d'un modèle à épaisseurs fixées sur R pour toute courbe nodale projective. Nous montrons ensuite le principe local-global formel. Dans une troisième partie, nous construisons des relèvements locaux pour certaines actions de groupe sur un point double. La quatrième partie est consacrée à la démonstration du théorème de relèvement énoncé plus haut.

Ce travail constitue une partie des résultats de ma thèse ([9]), dont certains ont été annoncés dans ([10]). Dans un article ultérieur, nous étudierons la structure des automorphismes d'ordre p du disque formel sur R (à la suite de [4]) et nous montrerons comment la géométrie formelle permet également de construire des automorphismes de disques ou de couronnes formels.

Nous utiliserons constamment les notations suivantes :

- π désigne une uniformisante de R.
- Si M est un R-module, on note $\overline{M}$ le k-espace vectoriel $M \otimes_R k$.
- Si A est une R-algèbre, A_K (resp. $\bar{A}$) désigne $A \otimes_R K$ (resp. $A \otimes_R k$), et pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on note $\hat{A}_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}^{\wedge}$ le complété de $A_{\mathfrak{p}}$ pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique.
- Si $T_1, \ldots, T_n$ sont des indéterminées, on note $R\{T_1, \ldots, T_n\}$ la R-algèbre des séries restreintes, c'est-à-dire la sous-R-algèbre de $R[[T_1, \ldots, T_n]]$ formée des séries
$$\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}^n} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} T_1^{\nu_1} \ldots T_n^{\nu_n} \text{ telles que } \lim_{\nu_1+\cdots+\nu_n\to+\infty} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} = 0.$$
- On désigne par $R[[T]]\{T^{-1}\}$ la R-algèbre des séries de Laurent $f := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu T^\nu$, à coefficients dans R, avec $\lim_{\nu\to-\infty} a_\nu = 0$. C'est un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π et de corps résiduel $k((t))$.

1. Disques et couronnes formels

1.1. Quelques définitions et rappels.

Définition 1.1. Soit X un R-schéma et x un point fermé de la fibre spéciale de X, on appelle fibre formelle de X au point x le R-schéma affine $\mathcal{F}(X,x) := \operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$, où $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ désigne le complété de l'anneau local de X en x.

Soit X une courbe plate et de type fini sur R, de fibre générique lisse sur K. Si x est un point lisse de la fibre spéciale de X, le complété de l'anneau local de X en x est isomorphe à la R-algèbre $R[[Z]]$ des séries formelles en une variable à coefficients dans R. Si maintenant x est un point double ordinaire de la fibre spéciale de X, il existe un entier e strictement positif, qu'on appelle **épaisseur** du point double x, tel que le complété de l'anneau local de X en x est isomorphe à la R-algèbre $\dfrac{R[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2-\pi^e)}$. Ceci nous conduit à poser les définitions suivantes :

Définition 1.2. On appelle **disque formel** sur R le R-schéma $\mathcal{D} := \operatorname{Spec} R[[Z]]$ et **couronne formelle d'épaisseur** $e \in \mathbb{N}_{>0}$ le R-schéma $\mathcal{C}_e := \operatorname{Spec} \dfrac{R[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2-\pi^e)}$.

1.2. Géométrie du disque formel.

Le disque formel sur R est un R-schéma lisse. Sa fibre spéciale est le germe analytique d'un point lisse d'une courbe algébrique sur k. Considérons le disque $D := \{z \in K^a | v_K(z) > 0\}$, si f appartient à $R[[Z]]$, pour tout point z de D, la série $f(z)$ converge. On obtient alors une application $\Phi_{\mathcal{D}}$ de D dans la fibre générique de $\mathcal{D}$, qui à z associe l'idéal premier formé des f dans $R[[Z]]$ qui s'annulent en z.

Lemme 1.3. *L'application $\Phi_{\mathcal{D}}$ induit une bijection de D/G_K sur la fibre générique de $\mathcal{D}$.*

Soit d un entier strictement positif. Rappelons qu'un polynôme $\displaystyle\sum_{i=0}^{d} c_i Z^i$ unitaire de degré d à coefficients dans R est dit distingué si π divise c_i pour $0 \leq i < d$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $R[[Z]]$ ne contenant pas π, le théorème de préparation de Weierstrass entraîne que $\mathfrak{p}$ est principal, engendré par un polynôme distingué irréductible P. Si z est une racine de P dans K^a, z appartient à D car P est distingué, et $\Phi_{\mathcal{D}}(z) = \mathfrak{p}$. Ainsi $\Phi_{\mathcal{D}}$ est surjective. Par ailleurs, il est clair que $\Phi_{\mathcal{D}}$ passe au quotient. De plus, si z' appartient à D et $\Phi_{\mathcal{D}}(z') = \mathfrak{p}$, alors z' est une racine de P et donc z' est un conjugué de z sous l'action de G_K. ∎

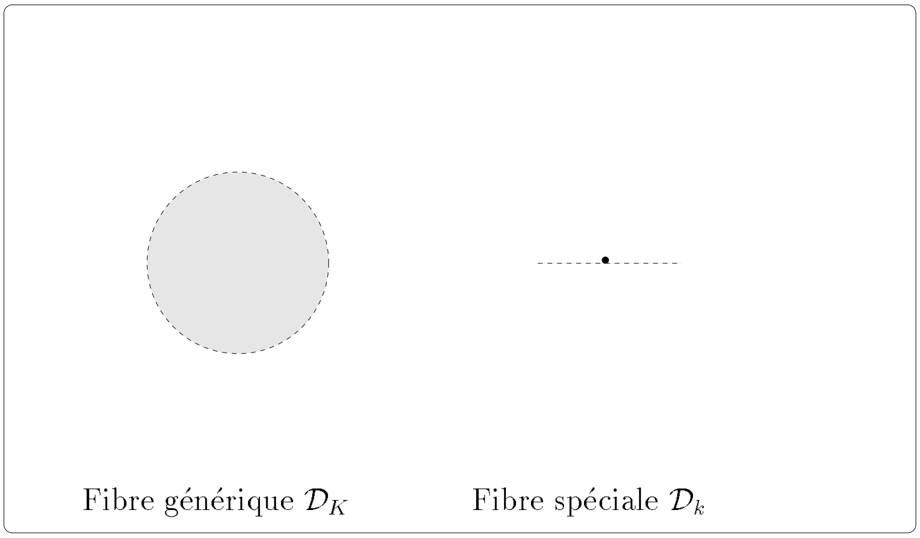

FIG. 1. Le disque formel $\mathcal{D}$ sur R

1.3. Géométrie de la couronne formelle d'épaisseur e.

L'anneau $\mathcal{A}_e := \dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^e)}$ est local complet, d'idéal maximal (π, Z_1, Z_2), intègre, noethérien et de dimension 2. Un élément f de $\mathcal{A}_e$ s'écrit de manière unique comme une série de Laurent à coefficients dans R

$$(*) \qquad f := \sum_{\nu \geq 0} a_\nu Z_1^\nu + \sum_{\nu > 0} a_{-\nu} Z_2^\nu .$$

Cette remarque conduit à la

Définition 1.4. On appelle **coordonnée de Laurent** sur la couronne formelle d'épaisseur e un élément Z de $\mathcal{A}_e$ tel que $\dfrac{\pi^e}{Z}$ appartienne à $\mathcal{A}_e$ et, pour tout f dans $\mathcal{A}_e$, il existe une unique famille $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$f := a_0 + \sum_{\nu > 0} (a_\nu Z^\nu + a_{-\nu} (\frac{\pi^e}{Z})^\nu).$$

Autrement dit, si $Z' := \dfrac{\pi^e}{Z}$, on a $\mathcal{A}_e = \dfrac{R[[Z, Z']]}{(ZZ' - \pi^e)}$.

Définition 1.5. On appellera **bord** de la couronne formelle le point générique d'une composante irréductible de la fibre spéciale de $\mathcal{C}_e$. Une couronne formelle possède donc deux bords. Si Z est une coordonnée de Laurent sur $\mathcal{C}_e$, alors l'idéal premier $\mathfrak{p}_Z := (\pi, \dfrac{\pi^e}{Z})$ de $\mathcal{A}_e$ est un bord de $\mathcal{C}_e$. On dira que $\mathfrak{p}_Z$ est le bord correspondant à Z.

Si η est un bord, l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_e, \eta}$ est un anneau de valuation discrète, d'uniformisante π. On notera v_η la valuation correspondante du corps des fractions $\mathcal{K}_e$ de $\mathcal{A}_e$ qui prolonge v_K. Le corps résiduel de $(\mathcal{K}_e, v_\eta)$ est un corps de séries de Laurent en une variable sur k, qu'on notera $k((\eta))$. Si Z est une coordonnée de Laurent avec $\eta = \mathfrak{p}_Z$, on notera également $v_Z = v_\eta$; on a alors $k((\eta)) = k((z))$, où $z = Z \bmod \pi$. On vérifie que si f appartient à $\mathcal{A}_e$, $f = a_0 + \sum_{\nu > 0} (a_\nu Z^\nu + a_{-\nu} (\frac{\pi^e}{Z})^\nu)$, alors

$$v_Z(f) = \min_{\nu \in \mathbb{Z}} (v_K(a_\nu) + e \max(0; -\nu)).$$

On remarquera que le complété de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_e, \eta}$ s'identifie à $R[[Z]]\{Z^{-1}\}$.

Le corps résiduel $k((\eta))$ de $(\mathcal{K}_e, v_\eta)$ est muni d'une valuation discrète ord_η, normalisée de façon à ce qu'une uniformisante de $k((\eta))$ ait pour valuation 1. Si f est non nul dans $\mathcal{K}_e$, f s'écrit de manière unique $f = \pi^{v_\eta(f)} f_0$, avec f_0 dans $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_e,\eta}$. On note alors $\mathrm{ord}_\eta(f) := \mathrm{ord}_\eta(\bar{f}_0)$, où $\bar{f}_0$ est l'image résiduelle de f_0 dans $k((\eta))$. Si Z est une coordonnée de Laurent correspondant au bord η, on vérifie que pour $f = a_0 + \sum_{\nu>0}(a_\nu Z^\nu + a_{-\nu}(\frac{\pi^e}{Z})^\nu)$,

$$\mathrm{ord}_Z(f) := \mathrm{ord}_\eta(f) = \min\{\nu \in \mathbb{Z} | v_K(a_\nu) + e\max(0; -\nu) = v_Z(f)\}.$$

L'application $w_Z : \mathcal{K}_e \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, qui à f non nul associe $(v_\eta(f), ord_\eta(f))$ est une valuation de rang 2, de corps résiduel k, en munissant $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'ordre lexicographique.

Comme pour le disque formel, le point clef pour comprendre la géométrie de la fibre générique d'une couronne formelle est une version adéquate du théorème de préparation de Weierstrass, que nous donnons ci-dessous :

Lemme 1.6. *Soient Z une coordonnée de Laurent de $\mathcal{C}_e$, $Z' = \frac{\pi^e}{Z}$, et $f \in \mathcal{A}_e$, non inversible, avec $v_{Z'}(f) = 0$, (en particulier, $ord_{Z'}(f) > 0$); il existe alors un polynôme distingué P à coefficients dans R et un inversible U de $\mathcal{A}_e$, tels que :*

$$Z^{ord_{Z'}(f)} f = \pi^{v_Z(f)} P(Z) U.$$

De plus, le degré de P est alors $ord_Z(f) + ord_{Z'}(f)$.

Nous donnons une preuve de ce résultat, par manque de référence adéquate dans la littérature.

Démonstration. Posons $\nu_0 := \mathrm{ord}_{Z'}(f)$, on définit les endomorphismes de $\mathcal{A}_e$ R-linéaires ω, φ, $pr^{>0}$, $pr^{\leq 0}$ par :

- $\omega(\sum_{\nu\geq 0} b_\nu Z^\nu + \sum_{\nu>0} b_{-\nu} Z'^\nu) := \sum_{\nu\geq 0} b_{-(\nu+\nu_0)} Z'^\nu$
- $\varphi(\sum_{\nu\geq 0} b_\nu Z^\nu + \sum_{\nu>0} b_{-\nu} Z'^\nu) := \sum_{\nu\geq 0} b_\nu Z^\nu + \sum_{0<\nu<\nu_0} b_{-\nu} Z'^\nu$
- $pr^{>0}(\sum_{\nu\geq 0} b_\nu Z^\nu + \sum_{\nu>0} b_{-\nu} Z'^\nu) := \sum_{\nu>0} b_\nu Z^\nu$
- $pr^{\leq 0} := id_{\mathcal{A}_e} - pr^{>0}$

Remarquons que, pour tout $g \in \mathcal{A}_e$, $g = \varphi(g) + Z'^{\nu_0}\omega(g)$. Montrons qu'il existe $q \in \mathcal{A}_e$ tel que $\omega(qf) = 1$. Pour f dans $\mathcal{A}_e$, $\omega(qf) = \omega(q\varphi(f)) + \omega(Z'^{\nu_0} q\omega(f))$. Or, si $h \in \mathcal{A}_e$, $\omega(Z'^{\nu_0} h) = pr^{\leq 0}(h)$. Il suit :

$$\forall q \in \mathcal{A}_e \ \ \omega(qf) = q\omega(f) + \omega(q\varphi(f)) - pr^{>0}(q\omega(f)).$$

Soit $\theta : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_e$ l'opérateur $\omega \circ \frac{\varphi(f)}{\omega(f)} - pr^{>0}$, l'élément $\omega(f)$ étant inversible dans $\mathcal{A}_e$, trouver q tel que $\omega(qf) = 1$ revient à trouver $W := q\omega(f)$ tel que $(id_{\mathcal{A}_e} + \theta)(W) = 1$. Par définition de ν_0, $\varphi(f) \in (\pi, Z)$, donc $\frac{\varphi(f)}{\omega(f)}\mathcal{A}_e \subset (\pi, Z)$. Posons $\delta := \omega \circ \frac{\varphi(f)}{\omega(f)}$. On a $\theta(1) = \delta(1)$. Comme $pr^{>0} \circ \omega = 0$, il suit par récurrence sur n que pour tout entier positif n, $\theta^n(1) = \delta^n(1)$. Ecrivons $\frac{\varphi(f)}{\omega(f)} := \pi f_1 + Z f_2$, $\omega(Zf_2)$ est divisible par π^e dans $\mathcal{A}_e$. Donc $\delta(1) \in \pi\mathcal{A}_e$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\theta^n(1) = \delta^n(1) \in \pi^n\mathcal{A}_e$. Posons alors $W := \sum_{h\geq 0}(-1)^h \theta^{\circ h}(1)$. On a $(id_{\mathcal{A}_e} + \theta)(W) = 1$. Soit $q := W\omega(f)^{-1}$. On a alors $\omega(qf) = 1$. En regardant le coefficient de Z'^{ν_0} dans qf, on en déduit aisément que q est inversible. Donc, $f = q^{-1}h$, où les coefficients de Z'^ν pour $\nu > \nu_0$ dans h sont tous nuls, i.e. $Z^{\nu_0}h \in R[[Z]]$. Le théorème de préparation de Weierstrass dans $R[[Z]]$ permet donc d'écrire $Z^{\nu_0}h = \pi^r P u_1$, avec $r \in \mathbb{N}$, u_1 inversible et P un polynôme distingué. Si $U := q^{-1}u_1$, on a $Z^{\nu_0}f = \pi^r PU$. Comme P est unitaire en Z, on a $v_Z(P) = 0$. Donc $v_Z(f) = r$. De plus, le degré de P vaut :

$$\deg(P) = \mathrm{ord}_Z(P) = \mathrm{ord}_Z(f) + \nu_0 = \mathrm{ord}_Z(f) + \mathrm{ord}_{Z'}(f).$$

□

Notons $C_e := \{z \in K^a | 0 < v_K(z) < e\}$, le choix d'une coordonnée de Laurent Z sur $\mathcal{C}_e$ permet de définir une application $\Phi_{\mathcal{C}_e}$ de C_e dans la fibre générique de $\mathcal{C}_e$ par $\Phi_{\mathcal{C}_e}(z) := \{f \in \mathcal{A}_e | f(z) = 0\}$.

Corollaire 1.7. *L'anneau $\mathcal{A}_e \otimes_R K$ est principal. De plus, l'application $\Phi_{\mathcal{C}_e}$ induit une bijection de C_e/G_K dans la fibre générique de $\mathcal{C}_e$*

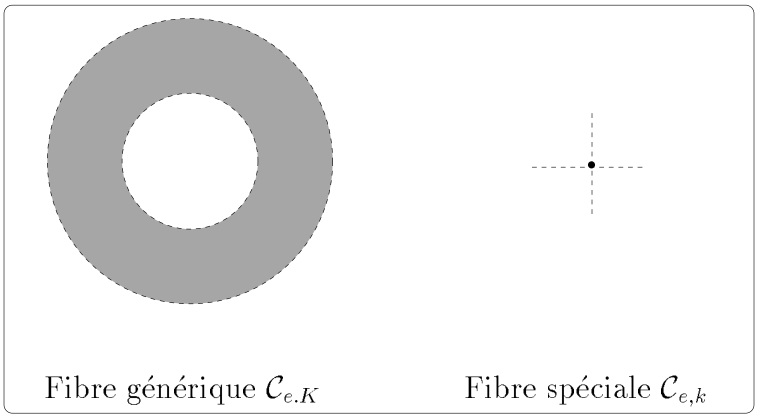

FIG. 2. La couronne formelle $\mathcal{C}_e$ sur R

2. Techniques de recollement formel

Considérons une R-courbe formelle nodale $\mathcal{X}$, si x est un point fermé de la fibre spéciale $\mathcal{X}_k := \mathcal{X} \times_R k$, $\mathcal{X}$ peut alors être vue comme recollement de la fibre formelle de x et de l'ouvert $\mathcal{X} \setminus \{x\}$. Les données du recollement sont inscrites dans une suite exacte de R-modules (2.2). Cette remarque est le point de départ d'une technique de construction de relèvements sur R de revêtements de courbes nodales sur k (2.8).

2.1. **Un lemme d'algèbre topologique.** Le lemme suivant, de preuve immédiate, sera utilisé constamment dans la suite. On fixe une uniformisante π de R. Par un R-module M complet pour la topologie π-adique, nous sous-entendrons ici un module séparé et complet. Pour tout R-module M, on désigne par $\overline{M}$ le k-espace vectoriel $M \otimes_R k$.

Lemme 2.1. *(i) Soit $M_1 \xrightarrow{\phi} M_2$ un homomorphisme de R-modules, on suppose M_1 complet et M_2 séparé pour la topologie π-adique. Si l'homomorphisme de k-espaces vectoriels $\overline{M_1} \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{M_2}$ est surjectif, alors ϕ est surjectif.*
(ii) Sous les mêmes hypothèses, si de plus M_2 est plat sur R et $\overline{\phi}$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels, alors ϕ est un isomorphisme de R-modules.
(iii) Soient $u : M_1 \longrightarrow M_2$ et $v : M_2 \longrightarrow M_3$ des homomorphismes de R-modules tels que $v \circ u = 0$, on suppose M_1 et M_2 complets, et M_3 séparé pour la topologie π-adique. On demande également que les modules M_2 et M_3 soient plats sur R, c'est-à-dire sans torsion. Si la suite de k-espaces vectoriels $0 \longrightarrow \overline{M_1} \xrightarrow{\overline{u}} \overline{M_2} \xrightarrow{\overline{v}} \overline{M_3} \longrightarrow 0$ est exacte, il en est de même de la suite de R-modules

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0.$$

2.2. **Une suite exacte de recollement.** Pour $\mathcal{X}$ un R-schéma formel, on notera $\mathrm{Irr}(\mathcal{X})$ l'ensemble des points génériques des composantes irréductibles de $\mathcal{X}$. Pour simplifier, si A est une R-algèbre complète pour la topologie π-adique, on notera $\mathrm{Irr}(A) := \mathrm{Irr}(\mathrm{Spf}\, A)$. Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma formel, de dimension 1, localement noethérien, plat sur R. Soient $x_1, \ldots, x_r$ des points fermés de $\mathcal{X}$, et $\mathcal{U} = \mathcal{X} \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$. Le diagramme de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathcal{U}} \arrow[dr, "l'_1"] & \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \arrow[l, "\rho"'] \arrow[r, "l_0"] \arrow[d, "l_1"] & \prod_{q=1}^{r} \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x_q} \arrow[d, "l_2"] \\
 & \prod_{\xi \in \mathrm{Irr}\mathcal{X}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},\xi} \arrow[r, "l_3"] & \prod_{q=1}^{r} \prod_{\xi \in \mathrm{Irr}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x_q})} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x_q})^{\wedge}_{\xi}
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.2. *Soient $\mathcal{X}$ un schéma formel localement noethérien, de dimension 1, plat sur R, $x_1, \ldots, x_r$ des points fermés de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{U} := \mathcal{X} \setminus \{x_1, \ldots, x_r\}$. On a alors la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules :*

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \times \prod_{q=1}^{r} \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x_q} \xrightarrow{\theta} \prod_{q=1}^{r} \prod_{\xi \in Irr(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x_q})} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x_q})^{\wedge}_{\xi} \to 0$$

où $\Delta = (\rho, l_0)$ est le morphisme diagonal et $\theta(g, \{f_q\}) = (l_3 \circ l'_1(g) - l_2(\{f_q\}))$.

Remarque 2.3. Cette suite exacte apparait dans les travaux d'Harbater et Stevenson ([8] section 1) dans le contexte d'égale caractéristique.

Démonstration. On a $\theta \circ \Delta = 0$ par la commutativité du diagramme ci-dessus. Notons X (resp. U) la fibre spéciale de $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{U}$). D'après le lemme 2.1, il suffit de montrer que la suite ci-dessous obtenue en tensorisant par k est exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_U \times \prod_{q=1}^{r} \hat{\mathcal{O}}_{X,x_q} \to \prod_{q=1}^{r} \prod_{\xi \in \mathrm{Irr}(\hat{\mathcal{O}}_{X,x_q})} (\hat{\mathcal{O}}_{X,x_q})^{\wedge}_{\xi} \to 0$$

Comme X est localement noethérien, il suffit de tester l'exactitude au niveau des fibres complétées. La vérification est alors immédiate. □

Exemple 2.4. Si $\mathcal{X}$ est le disque unité fermé standard, c'est-à-dire $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}\ R\{T\}$, et $x := (\pi, T)$, on obtient la suite exacte

$$0 \longrightarrow R\{T\} \xrightarrow{\Delta} R\{T, T^{-1}\} \times R[[T]] \xrightarrow{-} R[[T]]\{T^{-1}\} \longrightarrow 0.$$

Exemple 2.5. Si $\mathcal{X}$ est la couronne fermée standard d'épaisseur e, c'est-à-dire $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}\ \dfrac{R\{T_1, T_2\}}{(T_1T_2 - \pi^e)}$, et $x := (\pi, T_1, T_2)$, on obtient la suite exacte

$$0 \to \frac{R\{T_1, T_2\}}{(T_1T_2 - \pi^e)} \xrightarrow{\Delta} \prod_{i=1,2} R\{T_i, T_i^{-1}\} \times \frac{R[[T_1, T_2]]}{(T_1T_2 - \pi^e)} \xrightarrow{\theta} \prod_{i=1,2} R[[T_i]]\{T_i^{-1}\} \to 0$$

où $\theta(f_1, f_2, g) = (f_1 - g, f_2 - g)$ (avec les identifications évidentes en termes de série de Laurent).

2.3. **Construction d'un modèle avec épaisseurs fixées.** Soit X_0 une courbe nodale projective sur k, on appelle modèle de X_0 sur R un couple (X, ϕ), où X est un R-schéma propre et plat, et $\phi : X \times_R k \to X_0$ est un isomorphisme de k-schémas.

Proposition 2.6. *Soit X_0 une courbe nodale projective sur k, S l'ensemble des points fermés singuliers de X_0, et $(e_x)_{x \in S}$ une famille d'entiers strictement positifs. Il existe alors un modèle (X, ϕ) de X_0 sur R tel que l'épaisseur de x dans X soit e_x, pour tout point x de S.*

Démonstration. Lorsque X_0 est lisse sur k, la proposition résulte du corollaire 7.4 de [6], exposé III. Supposons à présent X_0 irréductible. Soit $\tilde{X}_0$ la normalisée de X_0, elle possède un modèle $(\tilde{X}, \tilde{\phi})$ sur R. Notons, pour x dans S, x_1 et x_2 les points de $\tilde{X}_0$ au-dessus de x, et U_0 l'ouvert $X_0 \setminus S$ de X_0, qui s'identifie à un ouvert de $\tilde{X}_0$. Notons $\mathcal{U}$ le sous-schéma formel ouvert de $\tilde{\mathcal{X}}$ (complété de $\tilde{X}$ le long de la fibre spéciale) qui correspond à U_0. Si $\frac{R[[a_x,b_x]]}{(a_xb_x-\pi^{e_x})}$ et $(\mathcal{O}_{\tilde{X},x_1})^{\wedge}_{(\pi)} \times (\mathcal{O}_{\tilde{X},x_2})^{\wedge}_{(\pi)}$ sont vus comme faisceau gratte-ciel en $x \in S$, considérons l'homomorphisme de faisceau de R-modules sur X_0 :

$$\theta : \mathcal{O}_{\mathcal{U}} \times \prod_{x \in S} \frac{R[[a_x, b_x]]}{(a_xb_x - \pi^{e_x})} \to \prod_{x \in S}((\mathcal{O}_{\tilde{X},x_1})^{\wedge}_{(\pi)} \times (\mathcal{O}_{\tilde{X},x_2})^{\wedge}_{(\pi)})$$

obtenu en identifiant $(\mathcal{O}_{\tilde{X},x_1})^{\wedge}_{(\pi)}$ (resp. $(\mathcal{O}_{\tilde{X},x_2})^{\wedge}_{(\pi)}$) à $R[[a_x]]\{a_x^{-1}\}$ (resp. $R[[b_x]]\{b_x^{-1}\}$). Le lemme 2.1 montre que θ est surjectif. Son noyau, noté $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est un faisceau de R-algèbres sur l'espace topologique X_0, et on voit que l'espace localement annelé $(X_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ est un R-schéma formel propre et plat, de fibre spéciale projective. C'est donc le complété d'un R-schéma propre et plat le long de la fibre spéciale, qui fournit un modèle pour X_0. Si maintenant on ne suppose plus X_0 irréductible, soit S' le sous-ensemble de S formé des x qui appartiennent à deux composantes irréductibles distinctes et U_0' l'ouvert $X_0 \setminus S'$, on choisit un modèle $\tilde{X}_i$ pour chaque composante irréductible $X_{0,i}$ de X_0. Comme ci-dessus, on construit un homomorphisme surjectif de faisceaux de R-modules sur X_0

$$\prod_i \mathcal{O}_{\tilde{X}_i} \times \prod_{x \in S} \frac{R[[a_x, b_x]]}{(a_xb_x - \pi^{e_x})} \to \prod_{x \in S}((\mathcal{O}_{\tilde{X},x_1})^{\wedge}_{(\pi)} \times (\mathcal{O}_{\tilde{X},x_2})^{\wedge}_{(\pi)})$$

dont le noyau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est un faisceau de R-algèbres sur l'espace topologique X_0. Le R-schéma formel propre et plat $(X_0, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ s'algébrise comme ci-dessus, et on obtient ainsi le modèle désiré. □

Remarque 2.7. Le lecteur trouvera une preuve rigide dans [16], lemme 6.3.

2.4. **Principe local-global pour les revêtements de courbes formelles.** Soit $\overline{f} : Y \longrightarrow X$ un morphisme séparable fini entres courbes algébriques sur k, connexes, affines, réduites. Soient x un point fermé de X et X' l'ouvert complémentaire du point x. On suppose X' lisse sur k, $\overline{f}$ étale au-dessus de X' et l'image réciproque de x réduite à un point fermé y. On se placera dans l'une des deux situations suivantes :
(A) x (resp. y) est un point lisse de X (resp. Y).

Soient t (resp. z) une uniformisante de X (resp. Y) en x (resp. y). On suppose

$$\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} = k[[z]] = k[[t]][z]/(\overline{P}(z))$$

où $\overline{P}$ est un polynôme d'Eisenstein séparable de $k[[t]]$.
(B) x (resp. y) est un point double ordinaire de X (resp. Y),

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} = \frac{k[[t_1, t_2]]}{(t_1t_2)} \text{ et } \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} = \frac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1z_2)} = \frac{\hat{\mathcal{O}}_{X,x}[z_1, z_2]}{(\overline{P}(z_1), \overline{Q}(z_2), z_1z_2)},$$

où $\overline{P}$ (resp. $\overline{Q}$) est un polynôme d'Eisenstein séparable de $k[[t_1]]$ (resp. $k[[t_2]]$).

Théorème 2.8. (Principe local-global formel) *Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel affine normal, plat et topologiquement de type fini sur R, de fibre spéciale X. On note $\mathcal{X}'$ l'ouvert de $\mathcal{X}$ correspondant à X'. La restriction de $\overline{f}$ au-dessus de X' s'étend de manière unique (à isomorphisme près) en un revêtement étale $f' : \mathcal{Y}' \longrightarrow \mathcal{X}'$.*

On se donne une $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}$-algèbre A finie, normale, R-plate et un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_{X,x} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(i) Il existe alors un revêtement fini $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ relevant $\overline{f}$ tel que $\mathcal{Y}$ est normal, $f_{|\mathcal{X}'} = f'$ et f induit l'extension $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \longrightarrow A$.
(ii) Si de plus $\overline{f}$ est galoisien de groupe de Galois G, et si A est munie d'une action de G de sorte que $A^G = \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}$ et que l'homomorphisme de R-algèbres $A \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ soit G-équivariant, le revêtement $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ est galoisien, de groupe de Galois G, relevant l'action sur Y.

Démonstration. On commence par traiter le cas (A) :
(i) La R-algèbre $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$ est isomorphe à $R[[T]]\{T^{-1}\}$. C'est donc un anneau de valuation discrète complet. Comme $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$ est fini sur $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$, il est semi-local complet. On a de plus le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)} & \xrightarrow{\text{mod } \pi} & Fr(\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}) = k((z)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)} & \xrightarrow{\text{mod } \pi} & Fr(\hat{\mathcal{O}}_{X,x}) = k((t)) \end{array}$$

Il suit que $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$ est local complet, noethérien, d'idéal maximal engendré par π. C'est donc un anneau de valuation discrète complet. Soit P un polynôme unitaire de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}[X]$ relevant $\overline{P} \in k((t))[X]$. L'anneau local $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$ étant hensélien, la racine z de $\overline{P}$ dans $k((z))$ se relève en une racine Z de P dans $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$. L'homomorphisme de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$-algèbres

$$\frac{(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}[X]}{(P(X))} \xrightarrow{u} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$$

qui envoie X sur Z est un isomorphisme : Il nous suffit d'appliquer le lemme 2.1(ii), car c'est vrai au niveau résiduel par hypothèse.

L'anneau $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$ est fini sur $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$, donc semi-local complet.

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}}{(\pi)} & \simeq & \overline{\mathcal{O}(\mathcal{Y}')} \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)} \\ & = & \overline{\mathcal{O}(\mathcal{Y}')} \otimes_{\overline{\mathcal{O}(\mathcal{X}')}} \overline{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)} \\ & = & \mathcal{O}(Y') \otimes_{\mathcal{O}(X')} k((t)) \\ & = & k((z)) \end{array}$$

L'anneau $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$ est donc en fait local complet, noethérien, d'idéal maximal engendré par π. C'est donc un anneau de valuation discrète complet. Comme ci-dessus, on en déduit l'isomorphisme de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$-algèbres

$$\frac{(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}[X]}{(P(X))} \xrightarrow{w} \mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$$

qui envoie X sur Z', où Z' est une racine de P dans $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}$ relevant z.

Soit $\mu := u \circ w^{-1}$. C'est un isomorphisme de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$-algèbres :

$$\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)} \overset{\mu}{\simeq} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}.$$

Notons θ l'homomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{X})$-modules défini ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{O}(\mathcal{Y}') \times A & \xrightarrow{\theta} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)} \\ (h', g) & \mapsto \mu(h' \otimes 1) - g \otimes 1 \end{array}$$

Remarquons que θ est surjectif d'après le lemme 2.1(i). On voit aisément que son noyau $\mathcal{A}$ est une sous-$\mathcal{O}(\mathcal{X})$-algèbre de $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \times A$. Comme $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(Y)$ est fini sur $\overline{\mathcal{O}(\mathcal{X})} = \mathcal{O}(X)$, le lemme (i) dit que $\mathcal{A}$ est fini sur $\mathcal{O}(\mathcal{X})$. En particulier, $\mathcal{A}$ est topologiquement de type fini sur R. En vertu du lemme 2.1(iii), les homomorphismes canoniques ci-dessous sont des isomorphismes.

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X})} \mathcal{O}(\mathcal{X}') \simeq \mathcal{O}(\mathcal{Y}') \text{ et } \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X})} \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \simeq A$$

Le revêtement $f : \mathcal{Y} := \operatorname{Spf} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ convient.
(ii) Pour le cas galoisien, remarquons tout d'abord que $\mathcal{X}'$ est muni canoniquement d'une action de G relevant l'action sur X'. On en déduit une action de G sur $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$. Il suffit de voir que l'isomorphisme μ donné ci-dessus est équivariant. Comme $\overline{\mu}$ est égal à l'identité de $k((z))$, il est G-équivariant. Ainsi, si $\sigma \in G$, $\mu(\sigma(Z')) = \sigma(\mu(Z')) \mod \pi$. Comme tous deux sont des racines de P, ils sont égaux, ce qui achève la preuve de (ii).

Plaçons nous à présent dans le cas (B) : On remarque que, pour $i = 1, 2$, $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$ est isomorphe à l'algèbre $R[[T_i]]\{T_i^{-1}\}$. C'est donc un anneau de valuation discrète complet. L'anneau $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$ est fini sur $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$, donc semi-local complet. On a de plus les diagrammes commutatifs pour $i = 1, 2$:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i} & \xrightarrow{\bmod \pi} & k((z_i)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i} & \xrightarrow{\bmod \pi} & k((t_i)) \end{array}$$

On en déduit comme dans le cas A un isomorphisme de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$-algèbres pour $i = 1, 2$:

$$\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(X')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i} \overset{\mu_i}{\simeq} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$$

Notons θ l'homomorphisme $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \times A \xrightarrow{\theta} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_1} \times A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_2}$ de A-modules défini par :

$$\theta((h', g)) = (\mu_1(f' \otimes 1) - g \otimes 1, \mu_2(h' \otimes 1) - g \otimes 1)$$

On finit comme pour le cas A en considérant $\mathcal{A} := \ker \theta$. Le revêtement $f : \mathcal{Y} := \operatorname{Spf} \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ convient. Le cas galoisien se traite comme dans le cas (A), en montrant que μ_1 et μ_2 sont automatiquement équivariants. $\square$

Remarque 2.9. Le cas (A) est traité par des méthodes rigides par B.Green et M. Matignon dans [3] (III 1.1). Toujours dans ce cas, une preuve cohomologique a été donnée par J. Bertin et A. Mézard ([1]).

Proposition 2.10. *Soient σ une involution de Y, $X = Y/\langle\sigma\rangle$, y un point double de Y fixe par σ, au-dessus du point x. On suppose que σ permute les deux points génériques de Spec $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$, x est alors régulier. De plus, on peut trouver z_1, z_2, $t = z_1 + z_2$ tels que $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} = k[[t]]$, $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} = \dfrac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1 z_2)}$ et $\sigma(z_1) = z_2$.*

Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel affine normal, plat et topologiquement de type fini sur R, de fibre spéciale X. Il existe alors un revêtement 2-cyclique $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ prolongeant $Y \to X$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'on dispose d'un relèvement local équivariant évident (avec e un entier strictement positif)

$$\begin{tikzcd} \frac{R[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2-\pi^e)} \arrow[r, "\bmod \pi"] & \frac{k[[z_1,z_2]]}{(z_1z_2)} \\ R[[T]] \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\bmod \pi"] & k[[t]] \arrow[u, "\overline{\psi}"'] \end{tikzcd}$$

avec $\psi(T) = Z_1 + Z_2$, et $\sigma(Z_1) = Z_2$, $\sigma(Z_2) = Z_1$.

On note $\mathcal{X}'$ l'ouvert de $\mathcal{X}$ correspondant à X'. Comme ci-dessus, la restriction de $\overline{f}$ au-dessus de X' s'étend de manière unique (à isomorphisme près) en un revêtement étale $f' : \mathcal{Y}' \longrightarrow \mathcal{X}'$, galoisien de groupe $\langle\sigma\rangle$.

L'anneau $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ est fini sur $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$, donc semi-local complet. Comme de plus $\overline{\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}} = \mathcal{O}(Y') \otimes_{\mathcal{O}(X')} k((t)) = k((z_1)) \times k((z_2))$, $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ est le produit $A_1 \times A_2$ de deux anneaux locaux. En fait, A_i est une R-algèbre qui est un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π, de corps résiduel $k((z_i))$, pour $i = 1, 2$. Il suit que A_i est isomorphe à $R[[Z_i]]\{Z_i^{-1}\}$. On notera μ l'isomorphisme équivariant de $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ sur $R[[Z_1]]\{Z_1^{-1}\} \times R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$ qui envoie un relèvement Z_1' de z_1 sur Z_1 et $\sigma(Z_1')$ (qui est un relèvement de z_2) sur Z_2 . Notons θ l'homomorphisme

$$\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \times \frac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1Z_2 - \pi^e)} \xrightarrow{\theta} R[[Z_1]]\{Z_1^{-1}\} \times R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$$

défini par $\theta(g, h) = \mu(g \otimes 1) - (\phi_1(h), \phi_2(h))$, où ϕ_i désigne l'injection canonique $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1Z_2 - \pi^e)} \to R[[Z_i]]\{Z_i^{-1}\}$. Comme précédemment, on conclut en considérant la R-algèbre $\ker\theta$. □

3. Construction d'automorphismes de couronnes formelles

Le paragraphe précédent montre que pour construire un relèvement formel sur R d'une courbe nodale sur k avec action d'un groupe fini, on doit construire un relèvement local pour la fibre formelle d'un point fermé y fixe sous l'action du groupe. Une telle fibre formelle est un disque formel si y est un point lisse et une couronne formelle si y est un point double. Le cas des disques formels a été traité dans [3]. Ici, nous montrons comment les résultats de relèvement local contenus dans loc. cit. permettent d'obtenir des résultats de relèvement local pour des groupes cycliques ou diédraux agissant sur un point double, en utilisant des méthodes de recollement formel.

3.1. **Compléments sur le relèvement lisse.** Pour la construction de relèvements locaux galoisiens pour un point double, nous aurons besoin d'ajuster convenablement des relèvements locaux pour chacune des deux branches du point double. C'est le rôle du lemme qui suit :

Lemme 3.1. *Notons K_0 le corps des fractions de $W(k)$. On suppose l'extension K/K_0 galoisienne. Soient r un entier supérieur à 1 et $\bar{\sigma}$ un automorphisme d'ordre p^r de $k[[z]]$. S'il existe un automorphisme d'ordre p^r de $R[[Z]]$ fixant 0 et relevant $\bar{\sigma}$, alors pour toute racine primitive p^r-ième de l'unité $\zeta^l_{(r)}$ dans K^{alg}, il existe un automorphisme σ d'ordre p^r de $R[[Z]]$, fixant 0 et relevant $\bar{\sigma}$, tel que $\dfrac{d\sigma}{dZ}(0) = \zeta^l_{(r)}$.*

Démonstration. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{alg}/K_0)$ agit sur l'ensemble des automorphismes σ d'ordre p^r de $R[[Z]]$ fixant 0 par l'action sur les coefficients de la série $\sigma(Z)$. De plus, si $\tau \in \mathrm{Gal}(K^{alg}/K_0)$, on a $\bar{\sigma^{\tau}} = \bar{\sigma}$. Comme $\mathrm{Gal}(K^{alg}/K_0)$ permute transitivement les racines primitives p^r-ièmes de l'unité, on en déduit le résultat annoncé. $\square$

Par ailleurs, nous aurons besoin du lemme ci-dessous, qui établit la linéarisabilité locale de l'action d'un automorphisme d'ordre une puissance de p au voisinage d'un point fixe.

Lemme 3.2. *Soit σ un R-automorphisme d'ordre p^r de $R[[Z]]$, fixant 0. Il existe ρ dans K, avec $v_K(\rho) > 0$, une racine primitive p^r-ième de l'unité $\zeta_{(r)}^l$ et un paramètre Z' de $R\{\frac{Z}{\rho}\}$ tels que $\sigma(Z') = \zeta_{(r)}^l Z'$. Autrement dit, σ est linéarisable sur un sous-disque fermé de centre 0.*

Démonstration. Notons $B := R[[Z]]$, $A := R[[Z]]^{\sigma} = R[[T]]$. L'extension de corps FrB/FrA est donnée, d'après la théorie de Kummer, par une équation $Y^{p^r} = u$, où $u \in A$, $\bar{u} \neq 0$. Si on restreint le disque à un sous-disque fermé (de paramètre $Z_0 = \frac{Z}{\rho}$) centré en 0, on aura $R\{Z_0\}^{\sigma} = R\{T_0\}$ pour un T_0 convenable (par exemple la norme de Z_0). Si la valuation de ρ est suffisamment grande, 0 est le seul point de ramification, on peut alors supposer que u s'écrit $u = T_0^h(1 + \sum_{\nu>0} a_\nu T_0^\nu)$, avec $v_K(a_\nu) > 0$ pour tout $\nu > 0$ et $(h, p) = 1$. En utilisant Bezout, on peut supposer $h = 1$, et finalement, quitte à changer le paramètre T_0, que $u = T_0$. Mais $\frac{R\{T_0\}[Y]}{(Y^{p^r} - T_0)}$ est intégralement clos et contenu dans $R\{Z_0\}$, donc finalement, $R\{Z_0\} = \frac{R\{T_0\}[Y]}{(Y^{p^r} - T_0)}$ et $Z' := Y$ est un paramètre de $R\{Z_0\}$ qui convient. $\square$

Remarque 3.3. La preuve ci-dessus montre que si $r = 1$ et si σ possède un unique point fixe, l'automorphisme σ est linéarisable sur $R[[Z]]$, on retrouve ainsi la proposition 6.2.1 de [4]. C'est une question ouverte de savoir si, pour $r > 1$, le résultat est encore vrai : La remarque 6.2.2 de [4] semble erronée. Toutefois, si $\sigma^{p^{r-1}}$ possède un unique point fixe, alors σ est encore linéarisable sur $R[[Z]]$.

3.2. Relèvement local cyclique pour les points doubles.

Proposition 3.4. *(i) Pour tout entier $r \geq 1$, quitte à faire une extension finie de K, il existe un entier $e \geq 1$ et un automorphisme d'ordre p^r de $\mathcal{C}_e$ qui induit un automorphisme d'ordre p^r de chaque branche de $\mathcal{C}_{e,k}$.*
(ii) Si $\bar{\sigma}$ est un automorphisme de Spec $\frac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1 z_2)}$, ne permutant pas les branches du point double, qui induit un automorphisme d'ordre p^r $(1 \leq r \leq 2)$ de chaque branche, alors, quitte à faire une extension finie de K, il existe un entier $e \geq 1$ et un R-automorphisme σ d'ordre p^r de $\mathcal{C}_e$ qui induit $\bar{\sigma}$ sur $\mathcal{C}_{e,k} = $ Spec $\frac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1 z_2)}$.

Démonstration. Soit $r \geq 1$, on fixe une racine primitive p^r-ième de l'unité $\zeta_{(r)}$ dans K^{alg}. On considère deux R-automorphismes σ_1 et σ_2 d'ordre p^r de $\mathcal{D}$ fixant 0, on supposera les points de F_{σ_1} (resp. F_{σ_2}) rationnels sur K. Pour $i = 1, 2$, il existe un unique h_i inversible dans $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ tel que $\frac{d\sigma_i}{dZ}(0) = \zeta_{(r)}^{h_i^{-1}}$. D'après le lemme qui précède, il existe un paramètre W_i d'un sous-disque fermé $D_i' := \{\omega \in D | v_K(\omega) \geq e_i\}$ de $D := \mathcal{D}_K$ centré en 0 tel que $\sigma_i(W_i) = \zeta_{(r)}^{h_i^{-1}} W_i$. En utilisant le lemme 3.1, on peut supposer que $h_1 = -h_2$ (noter que $\bar{\sigma}_2$ ne change pas). On construit alors un automorphisme d'une couronne formelle de la façon suivante :

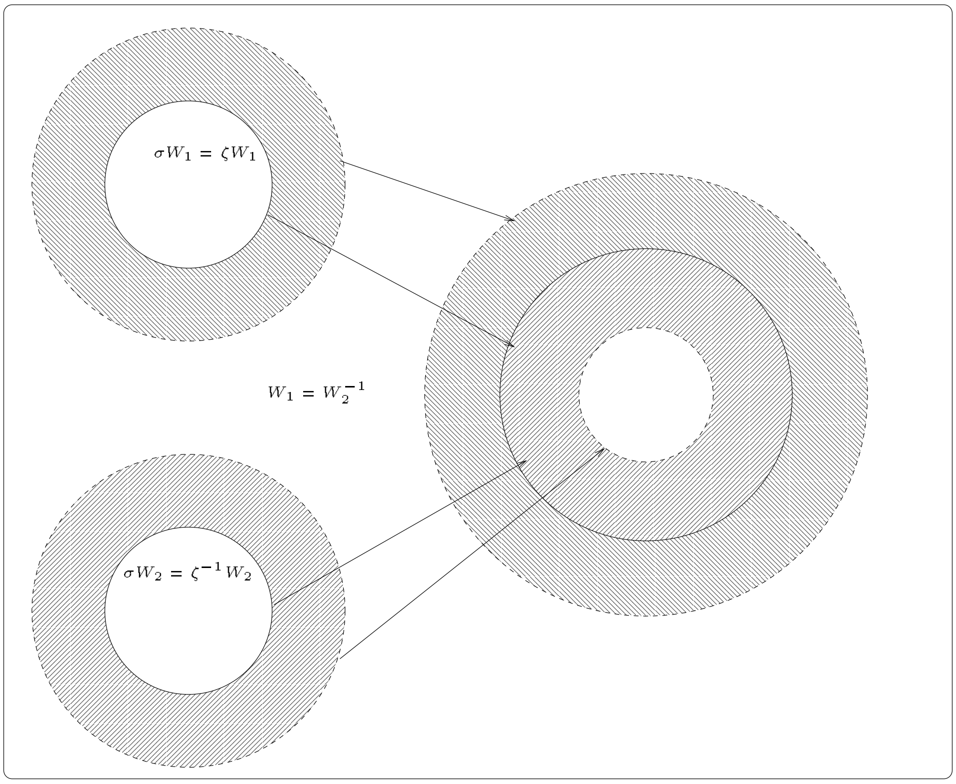

FIG. 3. Construction d'un automorphisme de couronnes par recollement

Soit e_0 un entier positif ou nul, notons σ_0 l'automorphisme de $\dfrac{R\{W_1, W_2\}}{(W_1W_2 - \pi^{e_0})}$ défini par $\sigma_0(W_1) = \zeta_{(r)}^{h_1^{-1}} W_1$, $\sigma_0(W_2) = \zeta_{(r)}^{h_2^{-1}} W_2$. Notons, pour $i = 1, 2$, j_i l'inclusion $\dfrac{R[[Z_i]]\{X_i\}}{(Z_iX_i - \pi^{e_i})} \to R\{X_i, X_i^{-1}\} = R\{W_i, W_i^{-1}\}$ (où X_i s'écrit $X_i = W_i^{-1}(1+\pi g_i)$ dans $R\{X_i, X_i^{-1}\}$). On munit, pour $i = 1, 2$, $\dfrac{R[[Z_i]]\{X_i\}}{(Z_iX_i - \pi^{e_i})}$ (resp. $\dfrac{R\{W_1, W_2\}}{(W_1W_2 - \pi^{e_0})}$), d'une structure de $R[\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}]$-module par $l.f_i := \sigma_i^l f_i$ (resp. $l.f_0 := \sigma_i^l f_0$) pour $l \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. On définit alors un morphisme

$$\theta : \frac{R[[Z_1]]\{X_1\}}{(Z_1X_1 - \pi^{e_1})} \times \frac{R[[Z_2]]\{X_2\}}{(Z_2X_2 - \pi^{e_2})} \times \frac{R\{W_1, W_2\}}{(W_1W_2 - \pi^{e_0})} \to R\{W_1, W_1^{-1}\} \times R\{W_2, W_2^{-1}\}$$

de $R[\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}]$-modules par $\theta(f_1, f_2, f_0) = (j_1(f_1) - f_0, j_2(f_2) - f_0)$. On obtient ainsi une structure de $R[\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}]$-module sur le noyau de θ, qui s'identifie au R-module $\dfrac{R[[Z_1', Z_2']]}{(Z_1'Z_2' - \pi^{e_0+e_1+e_2})}$. (En effet, on vérifie aisément que $\ker\bar{\theta}$ est égal à $\dfrac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1z_2)}$, et donc par le lemme 2.1 (ii), on montre que $\ker\theta$ est isomorphe à $\mathcal{A}_e$, avec $e = e_0 + e_1 + e_2$). On en déduit un automorphisme d'ordre p^r d'une couronne formelle d'épaisseur e qui induit $\bar{\sigma}$.

L'assertion (ii) résulte alors de [3], théorèmes II 4.1 et 5.5. L'assertion (i) résulte quant à elle de [4] II, paragraphe 3.3.3. □

Corollaire 3.5. *On considère des entiers a et n, avec $1 \leq a \leq 2$ et $(n, p) = 1$. Soit $\bar{\sigma}$ un automorphisme d'ordre $p^a n$ de $\dfrac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1z_2)}$, ne permutant pas les branches, induisant un automorphisme d'ordre $p^a n$ de chaque branche. On suppose de plus que*

$\bar\sigma^{p^a}$ agit de manière kummérienne, c'est à dire que quitte à changer de paramètres (z_1,z_2), $\bar\sigma^{p^a}(z_1)=\bar\theta z_1$ et $\bar\sigma^{p^a}(z_2)=\bar\theta^{-1}z_2$, où $\bar\theta$ est une racine primitive n-ième de l'unité dans k. Alors, quitte à faire une extension finie de K, $\bar\sigma$ se relève en un automorphisme d'ordre p^an de $\mathcal{C}_e$, pour un entier $e\geq 1$ convenable.

Démonstration. Comme $\bar\sigma^{p^a}$ agit de manière kummérienne, quitte à changer de paramètres, on peut supposer $\bar\sigma^{p^a}(z_1)=\bar\theta z_1$ et $\bar\sigma^{p^a}(z_2)=\bar\theta^{-1}z_2$, où θ est une racine primitive n-ième de l'unité dans R. Le sous-anneau de $\dfrac{k[[z_1,z_2]]}{(z_1z_2)}$ formé des éléments fixes sous $\bar\sigma^{p^a}$ est alors $\dfrac{k[[x_1,x_2]]}{(x_1x_2)}$, où $x_i=z_i^n$. L'automorphisme $\bar\sigma^n$ induit un automorphisme $\bar\tau$ d'ordre p^a de $\dfrac{k[[x_1,x_2]]}{(x_1x_2)}$. Cet automorphisme se relève alors en un automorphisme τ d'ordre p^a de $\dfrac{R[[X_1,X_2]]}{(X_1X_2-\pi^{en})}$, pour un entier e convenable (quitte à faire une extension finie de K). Ecrivons

$$\tau(X_1)=X_1(1+\pi b+\sum_{\nu>0}(a_\nu X_1^\nu+a_{-\nu}X_2^{-\nu})).$$

Considérons la R-algèbre $\dfrac{R[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2-\pi^e)}$, où Z_i relève z_i pour $i=1,2$. En identifiant $X_i=Z_i^n$, $\dfrac{R[[X_1,X_2]]}{(X_1X_2-\pi^{en})}$ est un sous-anneau de $\dfrac{R[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2-\pi^e)}$. Posons

$$\tilde\tau(Z_1)=Z_1(1+\pi b+\sum_{\nu>0}(a_\nu Z_1^{n\nu}+a_{-\nu}Z_2^{-n\nu}))^{\frac{1}{n}},$$

$\tilde\tau$ prolonge alors τ et est d'ordre p^a. De plus $\tilde\tau$ commute avec l'automorphisme μ d'ordre n défini par $\mu(Z_1)=\theta Z_1$. Par suite, le groupe engendré par $\tilde\tau$ et μ est cyclique d'ordre p^an, et un générateur convenable relève $\bar\sigma$. □

3.3. **Relèvement local pour le groupe diédral.** Soit D le groupe diédral d'ordre $2np^r$, où n est un entier premier à p et r un entier inférieur ou égal à 2. Le groupe D admet une présentation

$$D=\langle\sigma,\tau|\sigma^{np^r}=1,\tau^2=1,\tau\sigma\tau=\sigma^{-1}\rangle.$$

Les méthodes formelles ci-dessus permettent encore de construire un relèvement d'une action de D sur un point double :

Proposition 3.6. *On considère une action de D sur Spec $\dfrac{k[[z_1,z_2]]}{(z_1z_2)}$, telle que τ permute les branches du point double, σ les fixe, et σ induit un automorphisme d'ordre np^r de chaque branche. Alors, l'action de D se relève en une action de D sur une couronne formelle sur $R:=W(k)[\zeta_{(r)}]$ d'épaisseur paire, où $\zeta_{(r)}$ est une racine primitive p^r-ième de l'unité.*

Démonstration. L'action de D peut s'écrire, pour un bon choix de coordonnées (z_1,z_2), $\tau z_1=z_2$, $\sigma(z_1)=f(z_1)$, où $f(x)\in k[[x]]$ est une série qui définit un automorphisme d'ordre np^r de $k[[x]]$. Remarquons que cette écriture et la relation $\tau\sigma\tau=\sigma^{-1}$ entraînent que l'action du groupe cyclique engendré par σ est kummérienne. On peut relever la série f en une série qui définit un automorphisme d'ordre np^r de $R[[X]]$, encore noté σ et qui fixe 0. Il existe alors un sous-disque fermé formel Spec $R\{X_0\}$ de Spec $R[[X]]$, centré en 0, fixé par σ, tel que $\sigma(X_0)=\mu X_0$, où μ est une racine primitive np^r-ième de l'unité dans R. Notons e l'épaisseur de la couronne formelle "complémentaire". On en déduit de manière analogue à la preuve de 3.2 une suite exacte de R-modules

$$0\to\frac{R[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2-\pi^{2e})}\to R[[X]]\{\frac{\pi^e}{X}\}\times R[[Y]]\{\frac{\pi^e}{Y}\}\to R\{X_0,X_0^{-1}\}\to 0$$

En fait, le morphisme surjectif est équivariant sous l'action de D, si on munit le R-module du milieu de l'action $\sigma(g(X), h(Y)) := (g(\sigma(X)), h(\sigma^{-1}(Y))$ et $\tau(X) = Y$. On obtient ainsi une action de D sur le disque formel (d'épaisseur $2e$)

$$\operatorname{Spec} \frac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^{2e})}$$

qui relève l'action de D sur le point double. $\square$

3.4. **Application au relèvement galoisien.** On considère une courbe algébrique Y sur k, propre, connexe, nodale, muni d'un sous-groupe fini G de $\operatorname{Aut}_k Y$, opérant librement sur un ouvert dense. Soit y un point double de Y, de stabilisateur I_y cyclique. Le sous-groupe H_y de I_y formé des automorphismes ne permutant pas les branches analytiques du point double y et d'ordre premier à p est muni de deux caractères $\chi_{y,1}, \chi_{y,2} : H_y \to k^*$ correspondant à l'action de H_y sur l'espace tangent en y. Suivant [16], on dira que l'action de G sur Y est kummérienne si, pour tout point double y de Y, de stabilisateur cyclique, on a $\chi_{y,1}\chi_{y,2} = 1$. Cette définition coïncide avec la précédente lorsque G est cyclique d'ordre premier à p.

Théorème 3.7. *Supposons l'action de G kummérienne et que pour un point fermé y de Y_0 :*
1. Si y est un point lisse, le groupe d'inertie I_y de y est cyclique d'ordre $n(y)p^{r(y)}$, avec $(n(y), p) = 1$ et $0 \leq r(y) \leq 2$.
2. Si y est un point double, on a alors (i) ou bien (ii) :

- *(i) Le groupe d'inertie I_y de y est cyclique d'ordre $n(y)p^{r(y)}$ et l'action de I_y sur les branches est triviale.*
- *(ii) Le groupe d'inertie I_y de y est diédral d'ordre $2n(y)p^{r(y)}$, avec $(n(y), p) = 1$ et $0 \leq r(y) \leq 2$, de présentation*

$$I_y = \langle \sigma, \tau | \sigma^{n(y)p^{r(y)}} = 1, \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle.$$

Les branches du point double y sont permutées par τ et σ induit un automorphisme d'ordre $n(y)p^{r(y)}$ de chacune des deux branches.

Quitte à faire une extension finie de K, il existe un R-schéma $\mathcal{Y}$ normal, propre, plat, de fibre spéciale Y, de fibre générique lisse et géométriquement connexe sur K, muni d'une action de G relevant celle sur Y.

Démonstration.

Soit $X := Y/G$ le quotient de Y par G. C'est encore une courbe nodale (voir [11] prop. 4.2). Notons B l'ensemble des points de branchement dans X du morphisme quotient $\overline{f} : Y \longrightarrow X$, et *Ram* l'ensemble des points de ramification de $\overline{f}$. On choisit, pour $x \in B$, un point y_x de *Ram* tel que $f(y_x) = x$. Soit B_1 (resp. B_2, B_3) le sous-ensemble de X formé des x tels que y_x soit un point lisse de Y (resp. un point double d'inertie cyclique, un point double d'inertie diédrale). Remarquons que pour x dans $B_1 \cup B_3$ (resp. B_2), x est un point lisse de X (resp. x est un point double de X).

Pour x dans B, il existe un relèvement local

$$\begin{array}{ccc} I_{y_x} & \longrightarrow & \operatorname{Aut}_R \mathcal{A}_x \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \operatorname{Aut}_k \mathcal{O}_{Y,y_x} \end{array}$$

où $\mathcal{A}_x$ est isomorphe à $R[[Z]]$ si x appartient à B_1 et $\mathcal{A}_x$ est isomorphe à $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^{e_x})}$ pour x dans $B_2 \cup B_3$, où e_x est un entier supérieur ou égal à 1, qui est de plus pair pour x dans B_2.

Pour x un point de B, on note U_x un voisinage affine de x dans X, inclus dans la réunion des composantes irréductibles de X qui contiennent x, et $V_x := \overline{f}^{-1}(U_x)$. On note U l'ouvert dense $X \setminus B$ et $V := \overline{f}^{-1}(U)$.

D'après 2.6, il existe un R-schéma $\mathcal{X}$ propre et plat, normal, de fibre générique lisse sur K, de fibre spéciale X, dont l'épaisseur au point double x de B_2 est pe_x. On notera $\hat{\mathcal{X}}$ le R-schéma formel complété de $\mathcal{X}$ le long de sa fibre spéciale, et $\mathcal{U}_x$ l'ouvert de $\hat{\mathcal{X}}$ correspondant à U_x, pour x dans B.

Pour x dans B, il existe un morphisme étale $U'_x \to U_x$ (qu'on peut supposer surjectif, quitte à restreindre U_x) tel que le morphisme $V'_x \to U'_x$ obtenu par changement de base à partir de $V_x \to U_x$ soit décomposé, ie $V'_x = \mathrm{Ind}_{I_{y_x}}^G W'_x$, où W'_x est la composante connexe de V'_x contenant l'unique point au-dessus de y_x. En utilisant les relèvements locaux choisis et le théorème 2.8, on construit un relèvement $\mathcal{W}'_x \to \mathcal{U}'_x$ de $\overline{f}_{|W'_x}$ compatible avec l'action de I_{y_x}.

Posons alors $\mathcal{V}'_x := \mathrm{Ind}_{I_{y_x}}^G \mathcal{W}'_x$. C'est un relèvement de $\overline{f}_{|V'_x}$ compatible avec l'action de G. Un argument de descente étale (voir [2] lemme 3.6) permet alors de construire un relèvement $\mathcal{V}_x \to \mathcal{U}_x$, galoisien de groupe G, de $V_x \to U_x$. L'unicité du relèvement du lieu étale nous permet de recoller ces relèvements en un relèvement $\hat{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{\mathcal{X}}$ de $\overline{f}$, galoisien de groupe G. Comme $\hat{f}$ est propre, le théorème d'algébrisation des faisceaux cohérents ([5] corollaire 5.1.6) permet de construire une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre cohérente $\mathcal{A}$ dont le complété s'identifie à la $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{X}}}$-algèbre cohérente $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{Y}}}$. Posons alors $\mathcal{Y} := \mathrm{Spec}\ \mathcal{A}$. L'action du groupe G sur $\hat{\mathcal{Y}}$ se relève de manière unique en une action de G sur $\mathcal{Y}$. Le couple $(\mathcal{Y}, G)$ convient. $\square$

Références

[1] Bertin J., Mézard A. : Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques. Prépublication n^o439 de l'institut Fourier, (1998)

[2] Garuti M. : Prolongement de revêtements galoisiens en géométrie rigide. Compositio Math. 104 (n^o3), 305-331 (1996)

[3] Green B., Matignon M. : Lifting of Galois covers of smooth curves. Compositio Math. 113 (n^o 3), 237-272 (1998)

[4] Green B., Matignon M. : Order p automorphisms of the open disc of a p-adic field. J. Amer. Soc 12 (n^o 1), 269-303 (1999)

[5] Grothendieck A., Dieudonné J. : Eléments de Géométrie Algébrique, chap. III, Publ. Math. IHES 11 (1961)

[6] Grothendieck A. : SGA1, Revêtements étales et groupe fondamental (Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie), LNM 224 Springer-Verlag (1960-61)

[7] Harbater D. : Formal patching and adding branch points. Amer. J. of Math. 115 (n^o3), 487-508 (1993)

[8] Harbater D., Stevenson K. : Patching and thickening problems. J. of Alg. 212, 272-304 (1999)

[9] Henrio Y. : Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p-adiques formels. Thèse, université Bordeaux I (1999)

[10] Henrio Y. : Automorphismes d'ordre p des couronnes p-adiques ouvertes. C. R. Acad. Sci Paris, t. 329, Série I, 47-50 (1999)

[11] de Jong A.J. : Families of curves and alterations. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 47 (n^o2), 599-621 (1997)

[12] Oort F. : Lifting algebraic curves, abelian varieties, and their endomorphisms to characteristic zero. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 46 (1987)

[13] Oort F. : Some Questions in Algebraic Geometry. Utrecht Univ., Math. Dept. Preprint Series, June 1995.

[14] Oort F., Sekiguchi T., Suwa N. : On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 22, 345-375 (1989)

[15] Raynaud M. : Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar. Invent. Math 116, 425-462 (1994)

[16] Saïdi M. : Revêtements étales abéliens, courants sur les graphes et réduction semi-stable des courbes. Manuscripta Math. 89, 245-265 (1996)