Autour d'une conjecture de F. Oort sur le relèvement de revêtements Galoisiens de courbes

M. Matignon
Institut de Mathématiques
Laboratoire A2X
Université de Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 – Talence, Cedex
France
email: matignon@math.u-bordeaux.fr

Notations

k est un corps algébriquement clos de car. $p > 0$.

R est un anneau de valuation discrète fini sur $W(k)$

π est un paramètre uniformisant de R

$\mathrm{Fr} R =: K \subset K^{alg}$ est muni de l'unique

prolongement de la valuation v

O. Introduction

$C/k :=$ désigne une courbe lisse irréductible

et complete de genre g

Problème de relèvement global

Soit G, fini, $\subset \mathrm{Aut}\,_k C$.

On cherche R et $\mathcal{C}/R$ une R-courbe relative lisse

telle que

$G \subset \mathrm{Aut}\,_k \mathcal{C}$, et $(C, G) = \mathcal{C}/R \quad \mathrm{mod}\pi$, i.e.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}_k C & \mathrm{Aut}_R \mathcal{C} \arrow[l] \\
G \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En termes de G-revêtement cela signifie

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \stackrel{f}{\longrightarrow} & \mathcal{C}/G := \mathcal{D} \\ \searrow & & \swarrow \\ & \operatorname{Spec} R & \end{array}$$

Releve

$$\begin{array}{ccc} C & \stackrel{f_k}{\longrightarrow} & C/G := D \\ \searrow & & \swarrow \\ & \operatorname{Spec} k & \end{array}$$

$I_y :=$ groupe d'inertie en $y \in C$; alors

$$I_y \subset \operatorname{Aut}_k \hat{\mathcal{O}}_{C,y} \simeq \operatorname{Aut}_k k[\![z]\!]$$

Dans le processus de relèvement I_y est relevé en

$$I_y \subset \operatorname{Aut}_R \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},y} \simeq \operatorname{Aut}_R R[\![Z]\!]$$

Résultats

- Revêtements modérés: $(I_y, p) = 1 \ \forall y \in C$, OUI pour tout R (SGA 1); c'est le cas si $(G, p) = 1$

- $|G| > 84(g(C) - 1)$, NON (bornes d'Hurwitz)

- $G \simeq \mathbb{Z}/p^a e\,,\ (e, p) = 1$

$a = 1$ OUI $R \ni \zeta_{(1)}$ Oort-Sekiguchi-Suwa ([O-S-S])

$a = 2$ OUI $R \ni \zeta_{(2)}$ Green-Matignon ([G-M 1])

$a \geq 3$ CONJECTURE, OUI si $R \ni \zeta_{(a)}$ ([O1],[O2])

Problème de relèvement local

Soit G, fini, $\subset \mathrm{Aut}\,_k k[\![z]\!]$.

On cherche R et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Aut}_k k[\![z]\!] & \mathrm{Aut}_R R[\![Z]\!] \arrow[l] \\ G \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Problème de relèvement local du type Galois inverse

Soit G un p-groupe fini, G peut être réalisé comme groupe d'automorphismes de $k[[z]]$ d'une infinité de manière (Shafarevich).

On cherche R et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Aut}_k k[\![z]\!] & \mathrm{Aut}_R R[\![Z]\!] \arrow[l] \\ G \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "j"] & \end{tikzcd}$$

I. Principe local global

Thm [G-M 1] Le problème de relèvement global sur R pour (C, G) est équivalent au problème de relèvement local sur R pour tout $(\hat{\mathcal{O}}_{C,y}, I_y) \subset \mathrm{Aut}_{\,k}\hat{\mathcal{O}}_{C,y})$ où y parcourt le lieu de branchement $C \xrightarrow{f_k} C/G$.

On utilise la géométrie analytique rigide: on relève le lieu étale et on recolle à une solution locale du problème local en chaque point de branchement. Une preuve plus simple utilisant le "patching formel" à la Harbater est donnée par Henrio dans sa thèse ([H]).

Une preuve utilisant la cohomologie équiva--riante est donnée par Bertin-Mézard dans ([B-M]). Une généralisation pour des actions de schémas en groupes est donnée par S. Wewers ([W]).

II. Relèvement local des automorphismes d'ordre p ou p^2

Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_k k[\![z]\!]$ d'ordre p^a, alors $\sigma(z)$ est une série d'ordre p^a pour la composition. Il est difficile d'écrire explicitement une telle série; la méthode est d'écrire une équation de l'extension Galoisienne $k[\![z]\!]/k[\![z]\!]^\sigma = k[\![t]\!]$ en utilisant l'isogénie (ASW) =Artin-Schreier-Witt; la difficulté est alors de trouver la clôture intégrale $k[\![z]\!]$ dans l'extension (désingularisation).

On peut trouver $A/R[\![T]\!] = A^G$ où A est normal et fini sur $R[\![T]\!]$ et qui modulo π est birationnel à $k[\![z]\!]/k[\![z]\!]^G = k[\![t]\!]$ i.e. on peut avoir un cusp (Garuti, [Ga]). Pour le problème de relèvement local on veut A lisse sur R i.e. avec bonne réduction sur R. Nous utilisons

Thm ([K]). Soit $A/R[\![T]\!]$ une extension finie d'an-
-neaux locaux normaux telle que

A/π réduite , $k((z)) = \mathrm{Fr}(A/\pi)/k((t))$ séparable

$\mathrm{rk}_{\,R[\![T]\!]} A = \mathrm{rk}_{\,k((t))}$

d_k le degré de la différente dans $k((z))/k((t))$

d_K le degré de la différente dans l'extension d'an-

-neaux de Dedekind $A \otimes_R K / R[\![T]\!] \otimes_R K$

Alors A/R est lisse (i.e. $A \simeq R[\![Z]\!]$) ssi $d_K = d_k$.

L'autre outil important est la théorie (SS)=

Sekiguchi-Suwa ([S-S1]) qui déforme sur $\mathbb{Z}_p[\zeta_{(a)}]$

l'isogénie (ASW)=Artin-Schreier-Witt

• **Le cas d'ordre** p (voir aussi [O-S-S])

Par (ASW) $\exists x \in k((z))$ avec $\sigma(x) = x+1$ et $\wp(x) = x^p - x = f(t) \in k[1/t]$. Après une translation sur x et un changement de paramètre on peut supposer que $f(t) = 1/t^m$ pour $(m,p) = 1$

$m+1$ est le conducteur de Hasse; il coincide avec le degré de Weierstrass de la série $\sigma(z) - z$. Ainsi $d_k = (m+1)(p-1)$

Par [O-S-S] on déforme (AS) à Kummer sur

$R := W(k)[\zeta_{(1)}]$, $\lambda = \zeta_{(1)} - 1$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \mathbb{G}_a & \longrightarrow & \mathbb{G}_a & \longrightarrow & 0 \\ & & & & x & \mapsto & x^p - x & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}} & \to & \mathcal{G}^{(\lambda)} & \to & \mathcal{G}^{(\lambda^p)} & \to & 0 \\ & & & & x & \mapsto & \dfrac{(\lambda X + 1)^p - 1}{\lambda^p} & & \end{array}$$

$A =$ clôture intégrale de $R[[T]]$ dans $\mathrm{Fr}R[[T]](X)$ où $\dfrac{(\lambda X+1)^p-1}{\lambda^p} = \dfrac{1}{T^m}$, est un revêtement p-cyclique de $\mathbb{P}^1$ ramifié en $T=0$, $T^m = -\lambda^p$ dans le disque ouvert $v(T)<0$. Ainsi $d_K = (m+1)(p-1) = d_k$ et $Z := X^{-1/m}$ est un paramètre du disque au-dessus de $v(T)<0$; alors $\sigma(Z) := \zeta_{(1)}Z(1+(\zeta_{(1)}Z)^m)^{-1/m}$ relève σ

Remarque. Considérons un autre relèvement

$[(\lambda X+1)^p-1]/\lambda^p = [1/(T-t_1)...(T-t_m)]$

avec $t_i \in \pi R$, distincts 2 à 2; alors

$d_K = 2m(p-1) > d_k$ et ce revêtement induit à la fibre spéciale un revêtement avec un cusp.

• **Le cas d'ordre p^2.** ASW donne

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \dfrac{\mathbb{Z}}{p^2\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\wp} & W_2 & \to & W_2 & \to & 0 \\ & & & & (x_1, x_2) & \mapsto & (y_1, y_2) & & \end{array}$$

$$y_1 = x_1^p - x_1, \quad y_2 = x_2^p - x_2 - c(x_1^p, -x_1)$$

$$c(x_1^p, -x_1) := \frac{(x_1^p - x_1)^p - (x_1^p + (-x_1)^p)}{p}$$

Après une transformation classique on a

$$\wp(x_1, x_2) = (1/t^{d_1}, f_2(1/t) = c_2/t^{d_2} + ...),\ (d_i, p) = 1$$

$$d_k = (p-1)(d_1+1) + (p^2 - p)(\mathrm{Max}\,(d_2, pd_1) + 1)$$

Thm (G-M1). $\pi = \zeta_{(2)} - 1,\ \mu = Log_p(1+\pi)$

le logarithme tronqué au degré p

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{(\lambda X_1 + 1)^p - 1}{\lambda^p} \\ Y_2 &= \frac{1}{\lambda^p}[(\lambda X_2 + Exp_p \mu X_1)^p - (\lambda X_1 + 1) Exp_p \mu^p Y_1] \end{aligned}$$

relève l'isogénie ASW.

Nous montrons que

$$\frac{1}{\lambda^p}[(Exp_p\mu X_1)^p - (\lambda X_1 + 1)Exp_p\mu^p Y_1]$$

relève le cocycle $c(x_1^p, -x_1)$; en particulier

$$(*) \quad p\mu - \lambda - p\frac{\mu^p}{\lambda^{p-1}} \equiv 0 \bmod \pi^{p^2+1}$$

Application. $(Y_1, Y_2) = (\frac{1}{T^{d_1}}, 0)$ relève le revêtement $\wp(x_1, x_2) = (\frac{1}{t^{d_1}}, 0)$ Le cas général de degré p^2 peut-être relevé (voir [G-M1])

• **Le cas d'ordre** p^a, $a > 2$. Les mêmes difficultés qui apparaissent dans le cas de degré p^2 doivent être résolues. Sekiguchi-Suwa ([S-S2]) ont étendu leur théorie de façon à décrire explicitement les applications qui apparaissent dans la déformation de l'isogénie (ASW); en particulier la formule (*) a une interprétation naturelle et des congruences analogues apparaissent. Le problème principal restant est donc la lissité.

III. Problème de Galois inverse

Def. Un groupe fini G a la propriété de relèvement si il y a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Aut}_k k[\![z]\!] & \longleftarrow & \mathrm{Aut}_R R[\![Z]\!] \\ i\uparrow & j\nearrow & \\ G & & \end{array}$$

G doit être résoluble pour qu'une application i existe et des obstructions peuvent alors apparaître pour l'application j; par exemple soit G un groupe abélie ayant la propriété de relèvement alors G est cyclique ou un p-groupe.

• **Propriété de relèvement pour les groupes cycliques**

Thm. Les groupes cycliques ont la propriété de relèvement.

Il est suffisant de montrer le résultat pour les groupes d'ordre p^a. Soit K une extension totalement ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré n et $\zeta_{(a)} \in K$. Considérons le logarithme d'Artin-Hasse

$$f(Z) = Z + \frac{Z^p}{\pi} + \frac{Z^{p^2}}{\pi^2} + ... \in K[[Z]]$$

On montre que R apparait comme groupe d'endo--morphismes du groupe formel de Lubin-Tate correspondant; en particulier

$$\sigma(Z) := f^{-1}(\zeta_{(a)} f(Z)) \in R[[Z]]$$

est un R-automorphisme de $R[[Z]]$ d'ordre p^a induit modulo π un $\mathbb{F}_p$-automorphisme d'ordre p^a.

• **Obstructions au relèvement pour** $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$

Thm (G-M1). Soit $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}_k k[[z]]$, $G =< \sigma_1, \sigma_2 >$; il y a $p+1$ extensions p-cyclic intermédiaires de conducteur de Hasse

$$m_1 + 1 \leq m_2 + 1 = m_3 + 1 = ... = m_{p+1} + 1$$

$$m_1' + 1 = m_1 + 1 + (m_2 - m_1)(p-1), m_i' = m_1, \ i > 1$$

$$\begin{array}{ccccc} & & k[[z]] & & \\ & m_1' \nearrow & & \nwarrow m_{p+1}' & \\ k[[z_1]] & & \cdots & & k[[z_{p+1}]] \\ & m_1 \nwarrow & & \nearrow m_{p+1} & \\ & & k[[t]] & & \end{array}$$

Une condition nécessaire pour satisfaire la propriété de relèvement est que $p | m_1 + 1$; de plus soit

$$\begin{array}{ccc} R[[Z_1]] & & R[[Z_2]] \\ f_1 \nwarrow & & \nearrow f_2 \\ & R[[T]] & \end{array}$$

des relèvements des deux applications du premier étage; alors leur compositum donne un relèvement de tout le diagramme ssi le lieu de branchement des deux applications $f_{1(K)}$ et $f_{2(K)}$ se rencontre en $\dfrac{m_1+1}{p}(p-1)$ points.

Puisque σ_2 agit librement sur les $m_1'+1$ points fixes du relèvement de σ_1, la congruence suit. La condition sur le lieu de branchement est conséquence du critère suivant du à Kato.

Remarque. La congruence du dessus a été géné-

-ralisée par J. Bertin [B]. En fait il montre que la représentation d'Artin peut s'exprimer à l'aide de la représentation régulière et d'une représentation de permutation donnée par l'action sur le lieu de ramification; en particulier elle est rationnelle.

- **Propriété de relèvement pour les p-groupes élémentaires.**

Thm (M). Les p-groupes abéliens de type $(p, ..., p)$ ont la propriété de relèvement.

- Cas $p = 2$ et $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$

Lemme. Soit $\alpha_i, i = 1, 2, 3, \in \mathbb{Z}_2^{ur}$, $\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2) \neq 0 \bmod 2$. La courbe elliptique

$$y^2 = (1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x)(1 + (\sqrt{\alpha}_1 + \sqrt{\alpha}_2)^2 x)$$

a potentiellement bonne réduction; la fibre spéciale géometrique est $z^2 - z = \overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2(\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2)s^3$, (qui est une courbe elliptique supersingulière comme revê- -tement 2-cyclique de $\mathbb{A}^1$).

Preuve. on a

$$\begin{aligned} y^2 = 1 &+ (\alpha_1 + \alpha_2 + (\sqrt{\alpha}_1 + \sqrt{\alpha}_2)^2)x \\ &+(\alpha_1\alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)(\sqrt{\alpha}_1 + \sqrt{\alpha}_2)^2)x^2 \\ &+\alpha_1\alpha_2 + (\sqrt{\alpha}_1 + \sqrt{\alpha}_2)^2x^3 \end{aligned}$$

Soit $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \sqrt{\alpha}_1\sqrt{\alpha}_2$ alors

$y^2 = (1 + \gamma x)^2 + \alpha_1\alpha_2(\sqrt{\alpha}_1 + \sqrt{\alpha}_2)^2x^3$

Appellons $x = 2^{2/3}s,\ y = 1 + \gamma x - 2z$ ///

Considérons les 3 courbes elliptiques suivantes

$y^2 = (1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x)(1 + (\sqrt{\alpha}_1 + \sqrt{\alpha}_2)^2 x)$

$y^2 = (1 + \alpha_2 x)(1 + \alpha_3 x)(1 + (\sqrt{\alpha}_2 + \sqrt{\alpha}_3)^2 x)$

$y^2 = (1 + \alpha_3 x)(1 + \alpha_1 x)(1 + (\sqrt{\alpha}_3 + \sqrt{\alpha}_1)^2 x)$

où $\alpha_i, i = 1, 2, 3, \in \mathbb{Z}_2^{ur}$ avec

$\prod(\epsilon_1 A_1 + \epsilon_2 A_2 + \epsilon_3 A_3) \neq 0$

$(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 - (0,0,0)$ où

$A_1 = \overline{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}$, $A_2 = \overline{\alpha_2\alpha_3(\alpha_2+\alpha_3)}$,

$A_3 = \overline{\alpha_3\alpha_1(\alpha_3+\alpha_1)}$. Puisque $d_k = 4(2-1)(1+2+2^2)$, $d_K = \#\{\mathrm{Br}\}2^2(2-1)$ où $\mathrm{Br} = \{-\frac{1}{\mathrm{x}} = 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, (\sqrt{\alpha}_{\mathrm{i}} + \sqrt{\alpha}_{\mathrm{j}})^2_{\mathrm{i}\neq\mathrm{j}}\}$ ainsi $d_k = d_K$

Les 3 courbes ont simultanément bonne réduction et la normalisation du compositum au-dessus de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_2^{ur}}$ est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$-revêtement avec potentielle bonne réduction et la fibre spéciale géométrique est le $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$-revêtement étale de la droite affine défini par les trois équations

$z_i^2 - z_i = A_i s^3$, $i = 1,2,3$ ///

Dans le cas général le lemme du dessus est remplacé par le lemme suivant:

Lemme. Soit $a_1, .., a_n \in \mathbb{Z}_p^{ur}$ et

$$P(X) = \prod_{(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{0,\dots,p-1\}^n} [1 + (\sum_{1\leq i\leq n} \epsilon_i a_i)^p X]^{\epsilon_1}$$

Alors $\exists u \in \mathbb{Z}_p^{ur}; Q(X), R(X), S(X), T(X) \in \mathbb{Z}_p^{ur}[X]$ et $m_n + 1 = p^{n-1}(p-1)$ tels que

$$\begin{aligned} P(X) = (1 + XQ(X))^p + u^p X^{m_n}(1 + XR(X)) \\ +pX^{(m_n+1)/p} S(X) + p^2 T(X) \end{aligned}$$

De plus il y a une infinité de a_i tels que $Y^p = P(X)$ ont potentiellement bonne réduction en p relativement à la coordonnée $S = \lambda^{-p/m_n} X$ et tels que la fibre spéciale soit un revêtement étale de $\mathbb{A}^1$ avec conducteur $m_n + 1$ à l'infini.

En particulier le morphisme induit au niveau des fibres formelles à l'infini un automorphisme d'ordre p du disque ouvert p-adique ayant m_n+1 points fixes. Ils sont équidistants et les données d'Hurwitz sont:

$$p^n \text{fois}\{1\}, p^n \text{fois}\{2\}, .., p^n \text{fois}\{p-1\}.$$

IV. Développements récents

• Automorphismes d'ordre p du disque ouvert

Soit $X = \operatorname{Spec} R[[Z]]$; la fibre générique géométrique est identifiée avec le disque ouvert $z \in K^{alg} | \ v(z) > 0$, il est muni d'une distance induite par la valuation. Soit σ un automorphisme d'ordre p. Quelle est la géométrie de l'ensemble F_σ des points fixes ?

Dans [G-M2] nous considérons le cas $|F_\sigma| \geq 2$ et décrivons l'arbre associé au modèle minimal semi-stable pour lequel la clôture schématique de F_σ est lisse; l'arbre dual est muni d'une métrique et à chaque sommet on associe une différentielle dont le diviseur peut-être lu sur l'arbre; Henrio appelle ces arbres "arbres d'Hurwitz" et dans sa thèse ([H]) il montre la réciproque de notre théorème. La preuve est un "lego Galoisien" qui utilise le patching formel "à la Harbater".

Notons que dans [M], nous considérons le cas des automorphismes sans points fixes. Nous montrons que tout p-groupe fini est groupe d'automorphismes de $X = \operatorname{Spec} R[[Z]]$ pour un R convenable (ils sont donc triviaux modulo π).

• Les p-groupes élémentaires comme groupe d'automorphismes du disque

Le problème de relèvement local de type Galois inverse pour un p-groupe non abélien est un problème ouvert.

Il semble necessaire de faire une étude approfondie du problème analogue pour les p-groupe abéliens élémentaires. Dans sa thèse (décembre 02) Pagot a commencé une étude systématique à la Henrio.

Il a en particulier dégagé les notions différentiel-

-les clés des réalisations dans ([M]).

Définition. On appelle espace $L_{m+1,n}$ un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ de formes différentielles logarithmiques sur ${\mathbb{P}^1}_k$, dont les éléments non nuls ont un seul zéro d'ordre $(m-1)$ en ∞.

• **Espaces** $L_{m+1,1}$

Un tel espace est de la forme $\mathbb{F}_p\omega$ où $\omega = df/f$ et $f = \prod_{1\leq i\leq m+1}(z-x_i)^{h_i}$ où $m \notin p\mathbb{Z}$, les x_i sont 2 à 2 distincts, $h_i \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ et satisfont le système

$(*) 1 \leq \ell \leq m-1 \quad \sum_{1\leq i\leq m+1} h_i x_i^{\ell} = 0$

A. Soit $m \notin pZ$, soit $f = z^m - 1$, alors $df/f = \dfrac{mz^{m-1}dz}{z^m-1}$ engendre un $L_{m+1,1}$.

B. Soit $m = p-1$ et $f = \prod_{1\leq i\leq p-1}(z-i)^i$ alors $\dfrac{df}{f}$ engendre un $L_{p,1}$.

- **Espaces** $L_{m+1,2}$

G. Pagot en donne la caractérisation suivante:

Théoréme. ([P]) Soit ω_0, ω_p deux formes diffé-

-rentielles sur ${\mathbb{P}^1}_k$. Alors $\mathbb{F}_p\omega_0 + \mathbb{F}_p\omega_p$ est un $L_{m+1,2}$

ssi $p|m+1$ et il existe 2 polynômes A et B avec

$$\forall [i,j] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \quad \deg(iA + jB) = (m+1)/p,$$

$$((A^p - AB^{p-1})^{p-1})^{(p-1)} = -1.$$

Alors

$$\omega_0 = \frac{Adz}{A^pB - AB^p} \text{ et } \omega_p = \frac{Bdz}{A^pB - AB^p}.$$

- **Espaces** $L_{m+1,n}$

Soit $(\omega_1, ..., \omega_n)$ une base d'un $L_{m+1,n}$, alors $p^{n-1}|m{+}1$ et ces n formes ont $(m{+}1)(p{-}1)^{n-1}/p^{n-1}$ pôles en commun.

Soit $m+1 = p^{n-1}(p-1)$ et $a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}_p^{alg}$, 2 à 2 distincts. Pour $1 \leq j \leq n$, soit

$f_j = \prod_{(\epsilon_1,...,\epsilon_n)\in\{0,1,...,p-1\}^n} (z - \sum_{1\leq i\leq n} \epsilon_i a_i)^{\epsilon_j}$ et

$\omega_j = df_j/f_j$, alors il existe $P \in \mathbb{F}_p[x_1, ..., x_n]$ tel que si $P(a_1, ..., a_n) \neq 0$ alors

$$\sum_{1\leq j\leq n} \mathbb{F}_p\omega_j \text{ est un } L_{m+1,n}.$$

Le lien entre espaces $L_{m+1,n}$ et $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ groupe d'automorphismes du disque est donné par le

Théoréme. ([P]) Soit $\omega_1, \cdots, \omega_n$ une base d'un espace $L_{m+1,n}$; $\omega_i = df_i/f_i$. Soit ζ une racine primitive p-ième de l'unité et $R = W(k)[\pi]$ où $\pi^m := \lambda := \zeta - 1$. Alors on peut trouver $F_i \in R[X]$ relevant f_i tels que le produit fibré des revtements de ${\mathbb{P}^1}_K$ donnés par les équations $Y_i^p = F_i(X)$ induisent après normalisation un revêtement de ${\mathbb{P}^1}_K$ galoisien de groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ ayant bonne réduction relativement à $T := \pi^{-p}X$. La fibre spéciale du modèle lisse est un revêtement étale, galoisien de groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ de la droite affine $\mathbb{A}^1_k$.

Théoréme. ([P]) Soit $p \geq 3$ un nombre premier et $G := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. On suppose que G est un groupe de k-automorphismes de $k[[z]]$ et que chacune des sous-extensions de $k[[z]]^G$ de degré p a conducteur $m+1$.

- Si $m+1=p$, alors on ne peut pas relever G en un groupe de R-automorphismes de $R[[Z]]$.

- Supposons que $m+1=2p$. Si G se relève en un groupe de R-automorphismes de $R[[Z]]$, alors la géométrie du lieu de branchement du revêtement $\operatorname{Spec} R[[Z]] \to \operatorname{Spec} R[[Z]]^G$ est équidistante. Il suit que p doit être égal à 3.

- Supposons que $m+1=3p$. Si G se relève en un groupe de R-automorphismes de $R[[Z]]$, alors $p = 3$ et la géométrie du lieu de branchement du revêtement $\operatorname{Spec} R[[Z]] \to \operatorname{Spec} R[[Z]]^G$ a la forme suivante :

Le théorème suivant utilise d'autres types d' espaces vectoriels de formes différentielles dans le cas de géométries non équidistantes

Théoréme. ([P]) Soit $p \geq 5$, un nombre premier et $G := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. On suppose que G est un groupe de k-automorphismes de $k[[z]]$ et que l'une des sous-extensions de $k[[z]]^G$ de degré p a un conducteur $m_1 + 1$ égal à p, tandis que les autres ont un conducteur $m_2 + 1$ tel que $p + 1 < m_2 + 1 < 2p - 1$. Alors on ne peut pas relever G en un groupe de R-automorphismes de $R[[Z]]$.

Enfin dans le cas $p = 2$ G. Pagot montre le théorème de relèvement suivant:

Théoréme. ([P]) Soit $G := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$, un groupe de k-automorphismes de $k[[z]]$; alors on peut trouver R un anneau de valuation discrète dominant $W(k)$ tel que G se relève en un R-groupe d'automorphismes de $R[[Z]]$.

Dans [P1], on trouve une preuve spécifique au cas où les conducteurs intermédiaires sont égaux (la géométrie équidistante est alors possible!).

[B] J. Bertin, *Obstructions locales au relèvement de revêtements galoisiens de courbes lisses*, C.R. Acad. Sci. Paris, 326, Série I, (1998), 55–58.

[B-M] J. Bertin, A. Mézard, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques*, Invent. Math. 141 (2000), no. 1, 195–238.

[G] M. Garuti, *Prolongement de revêtement galoisiens en géométrie rigide*, Compositio Math., 104 (1996), 305-331.

[G-M1] B. Green, M. Matignon, *Liftings of Galois Covers of Smooth Curves*, Compositio Math., Vol 113 (1998), 239–274.

[G-M2] B. Green, M. Matignon, *Order p automorphisms of the open disc of a p-adic field*, J. Amer. Math. Soc. 12 (1999), pp. 269-303.

[H] Y. Henrio, *Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p-adiques formels*, Thèse, Univ. Bordeaux (1999).

[K] K. Kato (with collaboration of T. Saito), *Vanishing cycles, ramification of valuations, and class field theory*, Duke Math. J. 55, 3 (1987), 629–659.

[M] M. Matignon, *p-groupes abéliens de type $(p, \cdots, p)$ et disques ouverts p-adiques*, Manuscripta Math. 99 (1999), no. 1, 93–109.

[O-S-S] F. Oort, T. Sekiguchi, N. Suwa, *On the deformation of Artin-Schreier to Kummer*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 22 (1989), 345–375.

[O1] F. Oort, *Lifting Algebraic Curves, Abelian Varieties, and their Endomorphisms to Characteristic Zero*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol 46 (1987).

[O2] F. Oort, *Some questions in algebraic geometry*, Utrecht Univ., Math. Dept. Preprint Series, June 1995.

[P] G. Pagot, *Relèvement en caractéristique zéro d'actions de groupes abéliens de type* $(p, \cdots, p)$, Thèse, Univ. Bordeaux (2002).

[P1] G. Pagot, *Espaces vectoriels de formes différentielles logarithmiques en caractéristique* > 0 *et automorphismes du disque ouvert* p *-adique*,J. Number Theory 97 (2002), no. 1, 58–94.

[S-S1] T. Sekiguchi, N. Suwa *Théories de Kummer-Artin-Schreier-Witt*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I (1994), 105–110.

[S-S2] T. Sekiguchi, N. Suwa, *On the unified Kummer-Artin-Schreier-Witt Theory*, Pré--publication 111 (1999), Laboratoire de Mathématiques pures de Bordeaux.

[W] S. Wewers, *Formal deformation of curves with group scheme action*, Preprint Bonn (2003).