Talence, Avril 92

PROLONGEMENT DE MORPHISMES DE FIBRES FORMELLES ET CYCLES EVANESCENTS

M. Matignon, Taoufik Youssefi

0. Introduction. Soit K un corps algébriquement clos, valué complet pour une valuation de rang 1, k son corps résiduel. Soit $f : U \to V$ un morphisme fini surjectif de K-espaces affinoïdes intègres réguliers de dimension 1.Soit $r : U \to \overline{U}^c$ (resp. $r : V \to \overline{V}^c$) laréduction canonique de U (resp. V); $p \in \overline{U}^c$ et $q = \overline{f}(p)$, où $\overline{f} : \overline{U}^c \to \overline{V}^c$ est laréduction du morphisme f; on veut comparer les singularités en p et en $q = f(p)$. Par exemple on peut montrer que si p est régulier il en est de même pour q (cf. th. 3.3); ceci n'est qu'un avatar d'une situation plus générale *i.e.* la singularité en $q = \overline{f}(p)$ est plus "simple" que celle en p.

Ce genre de considérations apparait dans le travail de H. Lange [La] où il montre que si $f : X \to Y$ est un morphisme fini entre deux courbes lisses sur le corps des fractions d'un trait et si X a bonne réduction alors Y a potentiellement bonne réduction; ce résultat a été généralisé par T. Youssefi, [Yo 1].

Rappellons avant d'énoncer les résultats quelques définitions classiques d'invariants attachés à la singularité en p. Soit m_p le nombre de branches de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\overline{U}^c,p}$, $\delta_p := \dim_k \frac{\mathcal{O}'_{\overline{U}^c,p}}{\mathcal{O}_{\overline{U}^c,p}}$ (le ' signifie clôture intégrale) et $\mu_p := 2\delta_p - m_p + 1$. Dans [Yo 2], T. Youssefi en utilisant le théorème de réduction stable a démontré que $m_p \geq m_q$ et que $\delta_p - m_p + 1 \geq \delta_q - m_q + 1 \geq 0$. Nous nous proposons ici de donner une formule liant les invariants μ_p et $\mu_{f(p)}$.

Un résultat dû à S. Bosch [Bo], dit que l'anneau local complété en p de l'anneau local $\mathcal{O}_{\overline{U}^c,p}$ dépend fonctoriellement de l'espace analytique $r^{-1}(p) \subset U$ (fibre formelle en p). De plus on montre [Bo-Lü], que le bord de $r^{-1}(p)$ est isomorphe à une réunion disjointe de couronnes semi-ouvertes de $\mathbb{P}^1_K$; ainsi l'on peut compactifier $r^{-1}(p)$ en une courbe C^p (GAGA rigide) de genre$g(C^p) = \delta_p - m_p + 1$. Ceci étant, le morphisme f induit $f_p := f_{|r^{-1}(p)} : r^{-1}(p) \to r^{-1}(q)$, unmorphisme fini surjectif. On montre, prop. 4.1., sous des hypothèses de ramification modérée, qu'il existe des compactifications C^p, C^q et un morphisme fini $\tilde{f}_p : C^p \to C^q$ qui prolonge f_p. La formule d'Hurwitz appliquée à $\tilde{f}_p$ prend la forme (cor.4.2.)

$$(*) \qquad \mu_p - 1 = n(\mu_q - 1) + R_{|r^{-1}(p)}$$

où n est le degré du morphisme fini $\tilde{f}_p : C^p \to C^q$ et $R_{|r^{-1}(p)}$ désigne le degré du diviseur de ramification R du morphisme f_p.

Dans le cas général, on montre qu'il n'est pas possible de prolonger f comme précédement. Par exemple si p et donc $f(p)$ sont réguliers i.e. $C^p \simeq \mathbb{P}^1_k$, alors le prolongement est possible si et seulement si la différente de $\mathcal{O}_{\overline{U}^c,p}/\mathcal{O}_{\overline{V}^c,q}$ est en valuation $\leq 2n - 2$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Nous donnons (cor. 5.9) une formule faisant appel à une compactification E^p de $r^{-1}(p)$ qui est une courbe projective, par des affinoïdes connexes ayant bonne réduction; en fait on peut choisir E^p et un recouvrement pur $\mathcal{V}$ de C^q qui induit un recouvrement pur $\mathcal{V}'$ de E^p et un morphisme fini formel $\tilde{f}_p : (E^p, \mathcal{V}') \to (C^q, \mathcal{V})$ qui prolonge $f_p : r^{-1}(p) \to r^{-1}(q)$. Une écriture des diverses caractéristiques d'Euler des faisceaux structuraux aboutit à la formule suivante (cor. 5.9) qui généralise (*)

$$(**) \qquad \mu_p - 1 = n(\mu_q - 1) + R_{|r^{-1}(p)} - \sum_{i,j} d^w_{p_{i,j},q_j}$$

où $\sum_{i,j} d^w_{p_{i,j},q_j}$ mesure la contribution sauvage dans la différente du morphisme induit par f entre les normalisations des anneaux locaux en p et q.

Pour construire le morphisme formel $\tilde{f}_p$ on procède ainsi: la donnée de f_p induit une extension finie $\mathcal{O}'_{\overline{U}^c,p}/\mathcal{O}'_{\overline{V}^c,q}$ d'anneaux semi-locaux et donc en passant aux complétés on obtient des extensions $k[\![z]\!]/k[\![t]\!]$; ces extensions sont approximées par des morphismes finis d'une courbe lisse sur $\mathbb{P}^1_k$ que l'on sait relever sur l'anneau des vecteurs de Witt sur k (th.5.6) toujours grâce à GAGA rigide. On dispose ainsi de morphismes finis d'affinoïdes connexes ayant bonne réduction sur les boules de $\mathbb{P}^1_K$ utilisées pour la compactification C^q de $r^{-1}(q)$. Un lemme de recollement (lemme 5.3) permet de conclure.

Au paragraphe 6 on étudie les compactifications E^p de genre minimal; on est amené à étudier des revêtements "faiblement" ramifiés de la droite affine en caractéristique $p > 0$ ayant un comportement prescrit à l'infini, pour cela on utilise des résultats de Katz et Gabber [Ka].

Dans le cas où notre morphisme provient par complétion formelle d'un morphisme de courbes normales lisses sur S en dehors d'un point fermé (où S est le spectre d'un trait hensélien) la formule (**) donne, grâce à une formule dûe à Kato un comportement des dimensions des cycles evanescents dans les morphismes finis (prop. 2.1).

Dans ce travail, K désigne un corps valué complet pour une valuation de rang 1. Les K-espaces analytiques rigides qui seront considérés sont séparés, on les munira de la topologie de Grothendieck forte comme dans [B-G-R] 9.1.4.

1. Compactification d'une fibre formelle

Nous rappellons la descriptionde la fibre formelle au dessus d'un point singulier de la réduction analytique d'un espace analytique formel.

Lemme 1.1.([Bo-Lü])*Soient K un corps valué complet algébriquement clos, X un K-espace analytique formel de dimension pure 1 et $r : X \to \overline{X}$ sa réduction. Soit p un point de $\overline{X}$ et soient U un voisinage affinoïde connexe formel de sa fibre formelle$r^{-1}(p)$, g une fonction de $\mathcal{O}_X(U)^\circ$ telle que p soit unzéro isolé de $\overline{g} \in \mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{U})$. On note$(p'_i)_{1\leq i\leq m_p}$ les points dans la normalisation $\overline{X}'$ de Xau dessus de p.*

Alors pour $\alpha \in |K^\times|, \alpha < 1$ et proche de 1, l'ouvert analytique$W = \{x \in r^{-1}(p) |\ |g(x)| \geq |\alpha|\}$ se décompose en m composantes connexes$W_1, \ldots, W_m$ qui sont des couronnes semi-ouvertes.

Plus précisement, soit ξ une fonction coordonnée de $\mathbb{B}^1$ et soit$t_i = v_{p'_i}(\overline{g})$ la valuation dans $\mathcal{O}_{\overline{X}',p'_i}$ de $\overline{g}$, pour$1 \leq i \leq m$. Il existe des isomorphismes $\varphi_i : W_i \tilde{\rightarrow} \{z \in \mathbb{B}^1 \big| \ \alpha^{1/t_i} \leq |\xi(z)| < 1\}$ tels que, à une unité de $\mathcal{O}_X(W_i)^\circ$ près, la fonction $g_{|W_i}$ soit égale à$\varphi_i^{\#}(\xi^{t_i})$.

Définition et proposition 1.2. ([Bo-Lü]) *Soient Kun corps valué complet algébrique-
ment clos, X un K-espace affinoïde, connexe régulier de dimension 1 ou l'analytfication d'une courbeprojective, connexe non singulière et $r : X \to \overline{X}$ uneréduction analytique de X. Soient p un point de $\overline{X}$, U unvoisinage affinoïde formel de $r^{-1}(p)$ et soit $g \in \mathcal{O}_X(U)^\circ$ telle que p soit un zéro isolé de $\overline{g} \in \mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{U})$. Notons m_p le nombre de points au dessus de $p$dans $\overline{X}'$ la normalisation de $\overline{X}$ et considérons$\alpha \in |K^\times|, \alpha < 1$ et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m_p} \in |K^\times|$, $\alpha_i < 1$ tels que*

$$W := r^{-1}(p) \cap \{x \in U \big| \ |g(x)| \geq \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{m_p} W_i$$

et

$$\varphi_i : W_i \tilde{\rightarrow} \{z \in \mathbb{B}^1 \big| \ \alpha_i \leq |z| < 1\}$$

soit une description du bord de la fibre formelle en p (lemme 1.1). Alors l'espace analytique C^p est, par définition, le recollement de l'ouvertanalytique $r^{-1}(p)$ avec les disques fermés $E_i = \{z \in \mathbb{P}^1_K \big| \ \alpha_i \leq |z|\}, 1 \leq i \leq m_p$, à l'aide des isomorphismes $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq m_p}$ et c'est l'analytifié d'une courbe algébriqueprojective intègre et non singulière sur K.

Démonstration. $W = r^{-1}(p) \cap \{x \in U \big| \ |g(x)| \geq \alpha\}$ est un ouvert admissible de $r^{-1}(p)$ et, pour tout i,$\{z \in \mathbb{B}^1 \big| \ \alpha_i \leq |z| < 1\}$ est un ouvert admissible du disque fermé$E_i = \{z \in \mathbb{P}^1_K \big| \ \alpha_i \leq |z|\}$, d'où C^p est bien défini. Il est immédiat que l'espace analytique C^p est connexe et régulier, montronsqu'il est aussi propre.

C^p est séparé. Soit $\alpha' \in |K^\times|, \alpha < \alpha' < 1$ etsoient
$(\alpha'_i := (\alpha')^{1/t_i})_{1 \leq i \leq m_p} \in |K^\times|$ qui sontdéfinis à partir de α' dans le lemme 1.1. Considérons alors lesouverts affinoïdes $R = r^{-1}(p) \cap \{x \in U \big| \ |g(x)| \leq \alpha\}, R' = r^{-1}(p) \cap \{x \in U \big| \ \alpha \leq |g(x)| \leq \alpha'\}$ et, pour $1 \leq i \leq m_p, E'_i = \{z \in \mathbb{P}^1_K \big| \ \alpha'_i \leq |z|\}$. Ils constituent un recouvrementadmissible affinoïde de C^p. De plus $R \cap R' = r^{-1}(p) \cap \{x \in U \big| \ |g(x)| = \alpha\}, R \cap E'_i = \emptyset$, et $R' \cap E'_i = \{z \in \mathbb{P}^1_K \big| \ |z| = \alpha'_i\}$ pour tout i. Puisque $R \cup R' = r^{-1}(p) \cap \{x \in U \big| \ |g(x)| \leq \alpha'\}$ est un affinoïde (donc séparé), le morphisme $R \cap R' \to R \times R'$ est une immersion fermée. De même puisque $R' \subset \underset{i}{\cup} E_i, \underset{i}{\cup} E'_i \subset \underset{i}{\cup} E_i$ et $R' \cup (\underset{i}{\cup} E'_i) = \underset{i}{\cup} E_i$, le morphisme $R' \cap (\underset{i}{\cup} E_i) \to R' \times (\underset{i}{\cup} E_i)$ est une immersion fermée. On en déduit que l'espace analytique C^p est séparé.

C^p est propre. Considérons, à présent, les ouverts affinoïdes de C^p, $R_{\alpha'} = r^{-1}(p) \cap \{x \in U \big| \ |g(x) \leq \alpha'\}$ et$R_{\alpha''} = r^{-1}(p) \cap \{x \in U \big| \ |g(x)| \leq \alpha''\}$ où$\alpha'' \in |K^\times|, \alpha < \alpha' < \alpha'' < 1$. Alors les ensembles $\{R_{\alpha'}, (E'_i)_{1 \leq i \leq m_p}\}$ et $\{R_{\alpha''}, (E_i)_{1 \leq i \leq m_p}\}$ sont des recouvrements admissibles affinoïdes de C^p avec $R_{\alpha'}$ relativement compact dans $R_{\alpha''}$ et $(\underset{i}{\cup} E'_i)$ relativement compact dans $(\underset{i}{\cup} E_i)$ (cf. [B-G-R] p. 394).Par conséquent C^p est propre.

C^p est une courbe algébrique. Puisque C^p est un espace algébrique régulier, connexe et propre, il suit du théorème de l'image directe deKiehl ([B-G-R] p. 397) que $dim_K H^0(C^p, \mathcal{O}_{C^p}) = 1$ et $dim_K H^1(C^p, \mathcal{O}_{C^p}) = g < \infty$. C'est un exercice classique analogue au cas des surfacesde Riemann d'en déduire que C^p est l'analytifié d'une courbe algébrique projective de genre g (cf. [Re] pour une preuve détaillée).

1.3.1. Definition. On peut généraliser le procédé de compactification de la manière suivante; soit toujours comme précédemment z une coordonnée locale de $W_i \tilde{\to} \{z \in \mathbb{B}^1 \big| \ \alpha_i \leq |z| < 1\}$ et supposons donnée C_i une courbe algébrique lisse complète ayant bonne réduction $s : C_i \to \overline{C_i}$. Soit $0 \in \overline{C_i}$, alors $s^{-1}(0) \simeq \{\zeta \in \mathbb{P}^1_K \big| \ |\zeta| < 1\}$, enfin soit $E_i = C_i - \{\zeta \in \mathbb{P}^1_K \big| \ |\zeta| < \alpha_i\}$.Alors*l'espace analytique $\tilde{C}^p$ obtenu par le recollement de l'ouvertanalytique $r^{-1}(p)$ avec les affinoïdes connexes E_i à l'aide des isomorphismes $\varphi_i : W_i \tilde{\to} \{\zeta \in s^{-1}(0) \big| \ \alpha_i \leq |\zeta| < 1\}$est l'analytifié d'une courbe algébrique projective intègre et non singulière sur K.* La proposition 1.2. correspond au cas où les courbes $C_i \simeq \mathbb{P}^1_K$.

1.3.2. Remarque. Dans [Bo-Lü], on soulève la question de savoir si la courbe C^p dépend du type de recollement utilisé dans 1.2. L'exemple qui suit montre qu'elle en dépend (comparer avec [Co], Remark p. 216).

Exemple. Soit K un corps algébriquement clos, valué complet. On suppose que $\mathrm{car}\, K \neq 2$. Soit C_1 la courbe elliptique d'équation de Weierstrass $y^2 = x(x-1)(x+1)$ et soit C_2 la courbe elliptique de corps defonctions $L_2 = K(x, y')$ où ${y'}^2 = x(x^2-1)(1+\alpha x), \alpha \in K^\times$ et$|\alpha| < 1$ (si $z = \frac{1}{x}$ et $t = \frac{y'}{x}$ alors $L_2 = K(z,t)$ et$t^2 = (z+\alpha)(z^2-1)$). Il est facile de voir que $j(C_1) \neq j(C_2)$, où $j$désigne l'invariant modulaire d'une courbe elliptique. Donc C_1 et C_2 nesont pas isomorphes.

Soit U_1 l'ouvert affinoïde de C_1 défini par

$U_1 = \{u \in C_1 \big| \ |x(u)| \leq \beta^2\}$ où $\beta \in K, \ 1 < |\beta^2| < |\alpha|^{-1}$, la K-algèbre de ses fonctions holomorphes est $\mathcal{O}(U_1) = K\langle \frac{x}{\beta^2} \rangle [\frac{y}{\beta^3}]$ avec $(\frac{y}{\beta^3})^2 = \frac{x}{\beta^2}((\frac{x}{\beta^2})^2 - \frac{1}{\beta^4})$.affine de C_2. Soit $U_2 = \{u \in C_2 \big| \ |x(u)| \leq |\beta^2|, |y'(u)| \leq |\beta^3|\}$ c'est unouvert affinoïde C_2 et on a $\mathcal{O}(U_2) = K\langle \frac{x}{\beta^2} \rangle [\frac{y'}{\beta^3}], (\frac{y'}{\beta^3})^2 = \frac{x}{\beta^2}((\frac{x}{\beta^2})^2 - \frac{1}{\beta^4})(1 + (\alpha\beta^2)\frac{x}{\beta^2})$.

Montrons que U_1 et U_2 sont isomorphes. Considérons le polynôme sur $\mathcal{O}(U_1), P(T) = T^2 - \frac{x}{\beta^2}((\frac{x}{\beta^2})^2 - \frac{1}{\beta^4})(1+\alpha x) = T^2 - (\frac{y}{\beta^3})^2(1 + \alpha\beta^2\frac{x}{\beta^2})$. Puisque $|\alpha\beta^2| < 1, 1 + \alpha x$ est un carré dans $K\langle \frac{x}{\beta^2} \rangle$. Donc$P(T)$ admet une racine dans $\mathcal{O}(U_1)$. Il suit qu'il existe un homomorphisme de K-algèbres affinoïdes $\varphi : \mathcal{O}(U_2) \to \mathcal{O}(U_1)$ défini par $\varphi(x) = x$ et $\varphi(y') = y'w$ ou $w^2 = 1 + \alpha x$. De plus φ est surjectif car w est une unité et φ est injectif car $\mathcal{O}(U_1)$ et $\mathcal{O}(U_2)$ sont intègres de dimension 1. Par conséquentφ est un isomorphisme et donc U_1 est isomorphe à U_2.

On a en réduction $\overline{U}_1^c \tilde{-} \overline{U}_2^C \tilde{-} \frac{\overline{K}[X,Y]}{Y^2 - X^3}$, ainsi les fibresformelles U_{1+} (resp. U_{2+}) au point singulier de $\overline{U}_1^c$(resp. $\overline{U}_2^c$) sont isomorphes. Et puisque $C_i - U_i$ est isomorpheà la boule fermée unité $\mathbb{B}^1$ de $\mathbb{P}^1_K$, il suit que les deux courbes $C_i (i = 1, 2)$ sont non isomorphes et sont chacune recollement du même ouvert analytique $U_{i+} \tilde{-} U_{2+}$ avec la boule $\mathbb{B}^1$.

1.4. Notations. Si C est une courbe algébrique réduitesur le corps k, $x \in C$, $\mathcal{O}_{C,x}$ l'anneau local en x, $\mathcal{O}'_{C,x}$ laclôture intégrale de $\mathcal{O}_{C,x}$ dans son anneau total des fractions, on note $m_x :=$ le nombre de branches de C en x *i.e.* le nombre d'idéaux maximaux de $\mathcal{O}'_{C,x}$. On note$\delta_x := dim_k \frac{\mathcal{O}'_{C,x}}{\mathcal{O}_{C,x}}$ et enfin $\mu_x := 2\delta_x - m_x + 1$.

La formule qui suit relie le genre de la courbe C^p (resp. $\tilde{C}^p$) et les invariants numériques de la singularité en p.

Proposition 1.5. *Avec les notations de la proposition précédente, on a l'égalité suivante*

$$g(C^p) = \delta_p - m_p + 1,$$

et plus généralement (avec les notations de 1.3.1.)

$$g(\tilde{C}^p) = \delta_p - m_p + 1 + \sum_{1 \leq i \leq m_p} g(C_i)$$

Démonstration. Soient $B_i = \{z \in E_i \big| \ 1 \leq |z|\}, 1 \leq i \leq m_p$, ce sont des disques formés de C^p. Donc l'ensemble $\{B_1, \ldots, B_{m_p}, C^p - \overset{m_p}{\underset{i=1}{\cup}} B_{i+}\}$ est un recouvrement pur de C^p, où $(B_{i+})_{1 \leq i \leq m_p}$ désignent les disques ouverts. Il induit une réduction analytique $\overline{C^p}$ de C^p, ayant $m_p$composantes irréductibles rationnelles qui se rencontrent en un unique pointp', on a donc $g(C^p) = \delta_{p'} - m_p + 1$. La fibre

formelle en p' est $C^p - \underset{i}{\cup} B_i$, qui est isomorphe à$r^{-1}(p)$, donc le lemme 2.1. de [Bo-Lu] montre que $\hat{\mathcal{O}}_{\overline{C^p},p'} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{\overline{U}^c,p}$. Et on conclut que$\delta_{p'} = \delta_p$, à cause de la commutativité entre le passage à la normalisation et le passage à la complétion. D'où $g(C^p) = \delta_p - m_p + 1$.

Dans le cas général, cf. remarque 1.3.1., on procède de la même manière en remplaçant B_i par $\tilde{B}_i = s^{-1}(\overline{C}_i - 0)$ et B_{i+} par une fibre formelle de B_i, alors la réduction de $\tilde{C}^p$ pour ce recouvrement a m_p composantes qui se coupent en un seul point p', en dehors de ce point la courbe est réunion des courbes lisses $\overline{C}_i - \{0\}$ et la fibre formelle est isomorphe à $r^{-1}(p)$.

Définition 1.6. *On appelle genre de l'espace analytique* $r^{-1}(p)$ *l'entier* $g(r^{-1}(p)) := g(C^p) = \delta_p - m_p + 1$. *En fait on peut définir le genre d' un* K*-espace analytique régulier séparé de dimension 1* (cf. [vdP], [Li]).

2. Cycles evanescents

Dans ce paragraphe $S = \operatorname{Spec} R$ où R désigne un anneau de valuation discrète hensélien à corps résiduel algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, s le point fermé de S, une S-courbe X est un S-schéma séparé de type fini purement de dimension relative 1, X_s désigne la fibre spéciale $X \times_S k(s)$. Soit x un point fermé de X, la dimension des cycles évanescents est notée $r^1_x := \dim_\Lambda R^1\Psi\Lambda_x$ où $\Lambda := \mathbb{Q}_l$ et l un nombre premier distinct de p.

La proposition suivante est due à Kato; T. Saito donne une autre preuve ne dépendant que du théorème de réduction stable [Sa].

Proposition 2.1.[Ka] *Soit* X *une* S*-courbe normale et* x *un point* *fermé de X_s tel que $X - \{x\}$ soit lisse sur S. Alors avec les notations précédentes*

$$r_x^1 = 2\delta_x - m_x + 1 = \mu_x$$

2.2. Remarque. Dans la proposition 2.1 on peut supposer X affine; alors $X = \operatorname{Spec} A$ où $A = R[X_1, \cdots, X_n]\big| \mathcal{I}$ est une R-algèbre plate. Soit K le complété d'une clôture algébrique de $\operatorname{Fr} R$, alors $X^{an} = \operatorname{Spm} K\langle X_1, \cdots, X_n\rangle \big| \mathcal{I}K\langle X_1, \cdots, X_n\rangle$ est un espace affinoïde dont la réduction canonique est X_s.

3. Morphismes finis de fibres formelles

Dans ce paragraphe nous examinons quelques propriétés des morphismes de fibres formelles qui seront utilisées par la suite.

Lemme 3.1. *Soient K un corps valué complet, $f : U \to V$ un morphisme fini surjectif de K-espaces affinoïdes intègres de dimension 1.Soit $r : U \to \overline{U}^c$ (resp. $r : V \to \overline{V}^c$) laréduction canonique de U (resp. V). Si $p \in \overline{U}^c$ et $q = \overline{f}(p)$, où $\overline{f} : \overline{U}^c \to \overline{V}^c$ est la réduction du morphisme f, alors le morphisme$f_p := f_{|r^{-1}(p)} : r^{-1}(p) \to r^{-1}(q)$ est unmorphisme fini surjectif.*

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \overline{U}^c & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{V}^c \end{array}$$

et soit $\overline{f}^{-1}(q) = \{p_1 = p, p_2, \ldots, p_n\}$.

Donc $f : \bigcup_{i=1}^{n} r^{-1}(p_i) \to r^{-1}(q)$ est un morphismed'espaces analytiques, fini surjectif et puisque la réunion $\bigcup_{i=1}^{n} r^{-1}(p_i)$ est disjointe le lemme suit.

3.2. Considérons un morphisme $f : U \to V$ d'espaces affinoïdes intègres réguliers surun corps K valué complet algébriquement clos. Soient $p \in \overline{U}^c$ et $q = \overline{f}(p) \in \overline{V}^c$, et supposons que p est un point régulier de $\overline{U}^c$. Nous allons montrer à l'aide du théorème de réduction pré-stableque q est aussi un point régulier (comparer avec Raynaud [Ra], appendice).

Théorème 3.3. *Soient K un corps valué complet algébriquementclos et $f : U \to V$ un morphisme fini de K-espaces affinoïdesintègres réguliers. Soit $r : U \to \overline{U}^c$ (resp. $r : V \to \overline{V}^c$) la réduction canonique de U (resp. V) et soit$\overline{f} : \overline{U}^c \to \overline{V}^c$ la réduction du morphisme f.*

Alors l'image par $\overline{f}$, d'un point régulierde $\overline{U}^c$ est un point régulier de $\overline{V}^c$.

La preuve du théorème utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.4. *Soient K un corps valué completalgébriquement clos, U un ouvert affinoïde connexe de la droite projective$\mathbb{P}_K^1$, V un K-espace affinoïde connexe* *régulier et $f : U \to V$ un morphisme fini surjectif. Alors V est un ouvert affinoïde de $\mathbb{P}^1_K$.*

Démonstration du lemme 3.4. D'après le théorème de réduction stable [Bo-Lü], [vdP], il existe un recouvrement pur $\mathcal{W}$ de V tel que $\widetilde{V} := \overline{V}_{\mathcal{W}}$ soit pré-stable. Notons également $\mathcal{W}$ le recouvrement pur de$U$, image réciproque par f de $\mathcal{W}$. Puisque U est un ouvert affinoïdede $\mathbb{P}^1_K$, les composantes irréductibles de $\widetilde{U} := \overline{U}_{\mathcal{W}}$ sont de genre 0, les points singuliers de $\widetilde{U}$ sont des intersections multiples (i.e. le point est régulier sur chaquecomposante irréductible qui le contient et les tangentes en ce point des composantes irréductibles sont linéairement indépendantes) et il n'y a pas de cycle dans le graphe G, ayant pour sommets les points singuliers de $\widetilde{U}$ et pour arêtes lescomposantes irréductibles de $\widetilde{U}$ ([vdP] p. 463).

Considérons le morphisme fini $\widetilde{f} : \widetilde{U} \to \widetilde{V}$ quicommute avec f et les réductions $U \to \widetilde{U}, V \to \widetilde{V}$,et prolongeons $\widetilde{f}$ aux complétés projectifs de $\widetilde{U}$ et$\widetilde{V}$. On obtient un morphisme fini $\hat{\widetilde{f}} : \hat{\widetilde{U}} \to \hat{\widetilde{V}}$. Donc, par le théorème de Luröth, on conclut que toutes les composantes irréductibles de $\widetilde{V}$ sont de genre 0.

Soit G' le graphe de $\widetilde{V}$ défini de façon analogue à G, montrons que G' ne contient pas de cycle. Sinon, quitte à prendre l'image inversepar $\widetilde{f}$ d'un cycle de longueur minimale, on se ramène à la situation d'un n-gone. Par exemple

Or il suit du "going down" appliqué à l'homomorphisme $\mathcal{O}(V)^0 \to \mathcal{O}(U)^0$, que l'image réciproque par $\widetilde{f}$ d'un point double ordinaire de $\widetilde{V}$ (c'est une intersection multiple) est un point singulier de $\widetilde{U}$. Donc toutes les composantes irréductibles de$\widetilde{U}$ ont au moins deux points singuliers. Il suit que G contient nécessairement un cycle, ce qui est impossible. Par conséquent, G' necontient pas de cycles.

On en déduit que $\dim_{\overline{K}} H^1(\hat{\widetilde{V}}, \mathcal{O}_{\hat{\widetilde{V}}}) = g(\hat{\widetilde{V}}) = 0$. D'où pardéfinition du genre d'un affinoïde, $g(V) = 0$ et ainsi, d'après [vdP]1.2.5., V est un ouvert affinoïde de $\mathbb{P}^1_K$.

0.3truecm**Lemme 3.5.** *Soient K un corps valué complet, soit X le complémentaire dans $\mathbb{P}^1_K$ d'une réunion finie de n disques fermés disjoints et supposons qu'il existe un morphisme f fini surjectif d'espaces analytiques de la boule unité ouverte $\mathbb{B}_+$ sur X, alors $n = 1$.*

Démonstration du lemme 3.5. Nous raisonnons par l'absurde. Pour illustrer la démonstration nous supposerons que $n = 2$ le cas général se traite de la même manière. Soit $f : \mathbb{B}_+ \to C_{\pi^+}$ un morphisme fini surjectif, alors f induit unhomomorphisme de K-algèbres, injectif

$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} f^{\#}(C_{\pi^+}) : K << S, \frac{\pi}{S} >> \to K << T >>$ avec

$$\mathcal{O}(\mathbb{B}_+) \stackrel{\text{not}}{=} K << T >> = \varprojlim_{0<\epsilon<1, \epsilon\in|K^\times|} K < \frac{T}{\epsilon} >, K < \frac{T}{\epsilon} > \stackrel{\text{def}}{=} \{\sum_{\nu} a_\nu T^\nu / |a_\nu|\epsilon^\nu \to 0\}$$

et

$$\mathcal{O}(C_{\pi^+}) \stackrel{\text{not}}{=} K << S, \frac{\pi}{S} >> = \varprojlim_{0<\epsilon<1, \epsilon\in|K^\times|} K < \frac{S}{\epsilon}, \frac{\pi}{\epsilon S} >$$

.

Donc $\varphi(S)$ est inversible dans $K << T >>$. Il suit que $\|\varphi(S)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x\in\mathbb{B}_+} |\varphi(S)(x)| < \infty$ et que pour tout $x \in \mathbb{B}_+, |\varphi(S)(x)| = \|\varphi(S)\|$. Pour tout $\epsilon \in |K^\times|, |\pi| < \epsilon < 1$, soit $y_\epsilon \in C_{\pi^+}$ tel que $|S(y_\epsilon)| = \epsilon$et soit $x_\epsilon \in \mathbb{B}_+$ tel que $f(x_\epsilon) = y_\epsilon$. Puisque f est un morphisme fini, on a $|\varphi(S)(x_\epsilon)| = |S(y_\epsilon)| = \epsilon$;contradiction.

Démonstration du théorème. Soient p un point régulier de$\overline{U}^c$, $q = \overline{f}(p) \in \overline{V}^c$ et considérons le morphisme fini surjectif $f_p : r^{-1}(p) \to r^{-1}(q)$. Soit S un ouvert affinoïde connexe de $r^{-1}(q)$ et soit $R = f_p^{-1}(S)$. Puisque $r^{-1}(p)$ est isomorphe à la boule unité ouverte $\mathbb{B}_+$, R est un ouvert affinoïde$\mathbb{P}^1_K$. Donc le lemme 3.4. appliqué au morphisme fini $f_p : R \to S$ montre que S est un ouvert affinoïde de $\mathbb{P}^1_K$. Par conséquent la fibre formelle $r^{-1}(q)$ est localement isomorphe à $\mathbb{P}^1_K$. Il suit, parle théorème 9 de [Fr-vdP], que le point q est un point multiple ordinaire de$\overline{V}^c$. Mais d'après ce qui précède, q est nécéssairement un point régulier de $\overline{V}^c$. D'où le théorème.

Dans [Yo] chap.2, T. Youssefi utilise le théorème de réduction stable pour les espaces affinoïdes ([Bo-Lu], [vdP]) pour montrer les inégalités suivantes
qui généralisent le lemme 3.4.

Théorème 3.6. [Yo 2] *Soient K un corps valué complet algébriquementclos, $f : U \to V$ un morphisme fini de K-espaces affinoïdesintègres réguliers, de dimension 1 et $\overline{f} : \overline{U}^c \to \overline{V}^c$ le morphisme en réduction induit par f. Soit p un point de $\overline{U}^c$ et soit $q = \overline{f}(p)$. Alors suivant les notations de1.4. on a les inégalités suivantes :*

1) $m_p \geq m_q$
2) $\delta_p - m_p + 1 \geq \delta_q - m_q + 1 \geq 0$.

3.6.1. Exemple. Soit K un corps valué complet algébriquement clostel que car $\overline{K} \neq 2$. Soit $\pi \in K^\times, |\pi| < 1$ et soient $C_L$la courbe elliptique de corps de fonctions $L = K(x, y)$, où $y^2 = x(x-1)(x-\pi)$et C_M la courbe elliptique de corps de fonctions $M = L(z)$, $z^2 = x - 1$.

Considérons le morphisme étale $f : C_M \to C_L$ défini par l'extension M/L et soit $\mathcal{V}$ le recouvrement pur $\{V, V^{-1}\}$ deC_L^{an}, où $V = \{v \in C_L \big| \ |x(v)| \leq 1\}$ et $V^{-1} = \{v \in C_L \big| \ |x(v)| \geq 1\}$. On note $U := f^{-1}(V) = \{u \in C_M \big| \ |x(u)| \leq 1\}, U^{-1} := f^{-1}(V^{-1}) = \{u \in C_M \big| \ |x(u)| \geq 1\}$ et $\mathcal{V} := f^{-1}(\mathcal{V}) = \{U, U^{-1}\}$.

On a $A := \mathcal{O}(V) = \frac{K<X,Y>}{Y^2 - X(X-1)(X-\pi)}$. Puisque la réduction pour la norme spectrale de $K < X, Y >$ de l'idéal $(Y^2 - X(X-1)(X-\pi))$ est un idéal réduit de $\overline{K}[\overline{X},\overline{Y}]$, il suit que $\overline{A} = \frac{\overline{K}[\overline{X},\overline{Y}]}{\overline{Y}^2-\overline{X}^2(\overline{X}-1)}$ (la réduction canonique de A). D'où $\overline{V}^c = Spm\overline{K}[\overline{x},\overline{y}]$, où $\overline{y}^2 = \overline{x}^2(\overline{x}-1)$ et la réduction de l'espace analytique formel $(C_L^{an},\mathcal{V})$ est $\overline{C}_L = Proj\overline{K}[\overline{x},\overline{y},\overline{t}]$, où $\overline{y}^2\overline{t} = \overline{x}^2(\overline{x}+\overline{t})$. Ainsi $\overline{C}_L = \widehat{\overline{V}^c}$ et $\overline{C}_L$ possède un unique point singulier q, qui est un point doubleordinaire et qui correspond au maximal $(\overline{x},\overline{y})$ de$\overline{K}[\overline{x},\overline{y}]$.

On a $B := \mathcal{O}(U) = \frac{K<X,Y,Z>}{(Y^2-X(X-1)(X-\pi),Z^2-(X-1))}$. Soit $w = \frac{y}{z} \in M$, alors $w^2 = x(x-\pi) = (z^2+1)(z^2+1-\pi)$ et $U = \{u \in C_M \big| \ |w(u)| \leq 1, |z| \leq 1\}$. Donc $B = \frac{K<W,Z>}{W^2-(Z^2+1)(Z^2+1-\pi)}$ et $\overline{B} = \frac{\overline{K}[\overline{W},\overline{Z}]}{(\overline{W}-(\overline{Z}^2+1))(\overline{W}+\overline{Z}^2+1)}$ (puisque la réduction pour la norme spectrale de $K < W,Z >$ de l'idéal $(W^2-(Z^2+1)(Z^2+1-\pi))$ est l'idéal radiciel $(\overline{W}-(\overline{Z}^2+1)(\overline{W}+\overline{Z}^2+1))$. Par conséquent $\overline{U}^c = Spm\overline{K}[\overline{w},\overline{z}]$, où $\overline{w}^2 = (\overline{z}^2+1)^2, \overline{C}_M$ est le complété projectif $\widehat{\overline{U}^c}$ de $\overline{U}^c$ et $\overline{C}_M$ possède exactement deux points singuliers p_1 et p_2 qui sont des points doubles ordinaires appartenant aux deux composantes irréductibles de $\overline{C}_M$ et qui correspondent aux maximaux $(\overline{w},\overline{z}-i)$ et $(\overline{w},\overline{z}+i)$ de $\overline{K}[\overline{w},\overline{y}]$ $(i^2=-1)$. De plus $\overline{f}(p_1) = \overline{f}(p_2) = q$.
Il suit que :
$\delta_{p_i} - m_{p_i} + 1 = \delta_q - m_q + 1 = 0$ où $i = 1,2$; c'est un cas d'égalité dans la formule du théorème 3.6.

3.6.2. L'inégalité (2) du théorème est équivalente, via la définition 1.6.à l'inégalité :

$$(*) \qquad g(r^{-1}(p)) - 1 \geq g(r^{-1}(q)) - 1$$

Si le morphisme fini $f_p : r^{-1}(p) \to r^{-1}(q)$ se prolongeait en un morphisme fini $\widetilde{f}_p : C^p \to C^q$, l'inégalité (*)apparaîtrait comme un sous-produit de la formule d'Hurwitz (puisque $g(r^{-1}(p)) = g(C^p)$ et $g(r^{-1}(q)) = g(C^q)$).

Dans la suite de ce travail nous allons étudier l'existence du morphisme$\widetilde{f}_p$.

4. Prolongement de morphismes de fibres formelles et ramification modérée

Nous parvenons à démontrer l'existence de $\widetilde{f}_p$ sous une hypothèse de ramification modérée.

Proposition 4.1.*Soient K un corps valué complet algébriquementclos, $f : X \to Y$ un morphisme fini de K-espaces affinoïdesintègres réguliers, de dimension 1 et $\overline{f} : \overline{X}^c \to \overline{Y}^c$ le morphisme en réduction induit par f. Soit p un point de $\overline{X}^c$ et soit $q = \overline{f}(p)$. On a le diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \overline{X} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{Y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \overline{X}' & \xrightarrow{\overline{f}'} & \overline{Y}' \end{array}$$

où r désigne les réductions canoniques, $\overline{X}'$ (resp.$\overline{Y}'$) désignent les normalisations de $\overline{X}$ (resp. $\overline{Y}$) et $\overline{f}$, $\overline{f}'$ sont les morphismes finis induits par f. Soient $p \in \overline{X}$, $q = \overline{f}(p) \in \overline{Y}$, $(q_j)_{1\leq j\leq m_q}$ les points de $\overline{Y}'$ au dessus de q, $p_{i,j} \in \overline{X}'$ les points de $\overline{X}'$ au dessus de q_j. On suppose que le morphisme $\overline{f}'$ est modérément ramifié aux points $p_{i,j}$, alors il

existe des courbes projectives C^p et C^q définies par la proposition 1.2. telles que le morphisme fini des fibres formelles déduit de f, $f_p :\ r^{-1}(p) \to r^{-1}(q)$ se prolonge en un morphisme fini $\tilde{f}_p :\ C^p \to C^q$.

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{O}(Y)^\circ$ tel que q soit un zero isolé de $\overline{g}$ dans $\overline{Y}^c$. Puisque le morphisme $\overline{f}$ est fini, p est aussi un zéro isolé de $\overline{g}$ dans $\overline{U}^c$. Soit $\alpha \in |K^*|$, $\alpha < 1$ et proche de 1, considérons les ouverts analytiques

$$V = r^{-1}(p) \cap \{y \in Y \big| |g(y)| \geq \alpha\} \text{ et } U = r^{-1}(q) \cap \{x \in X \big| |g(x)| \geq \alpha\},$$

d'après le lemme 1.1. V (resp. U) admet m_p (resp. m_q) composantes connexes $(V_i)_{1\leq i\leq m_p}$ (resp. $(U_j)_{1\leq j\leq m_q}$) qui sont isomorphes àdes couronnes semi-ouvertes. Plus précisément, soit ζ une fonction coordonnée de $\mathbb{B}^1 = \{z \in \mathbb{P}^1_K \big| |\zeta(z)| \leq 1\}$ et soient

$s_i = v_{p_i}(\overline{g})$, où v_{p_i} est la valuation discrète associée au point p_i, $1 \leq i \leq m_p$, il existe des isomorphismes

$$\varphi_i :\ V_i \to C_i := \{z \in \mathbb{B}^1 \big| \alpha^{1/s_i} \leq |\zeta(z)| < 1\}$$

tels que $g_{|V_i} = \varphi_i^{\#}(\zeta^{s_i})u_i$ où u_i est une unité de $\mathcal{O}(V_i)^\circ$. De même, si ξ est une fonction coordonnée de $\mathbb{B}^1$ et si $t_j = v_{q_j}(\overline{g})$ où $(q_j)_{1\leq j\leq m_q}$ désignent les points de $\overline{Y}'$ au dessus de q et $(v_{q_j})_{1\leq j\leq m_q}$ sont les valuations discrètes associées, il existe des isomorphismes

$$\psi_j :\ U_j \to D_j := \{z \in \mathbb{B}^1 \big| \alpha^{1/t_j} \leq |\xi(z)| < 1\}$$

tels que $g_{|U_j} = \psi_j^{\#}(\xi^{t_j})v_j$ où v_j est une unité de $\mathcal{O}(U_j)^\circ$.

Puisque $f_p :\ r^{-1}(p) \to r^{-1}(q)$ est un morphisme fini surjectif (lemme 3.1.), il en est de même pour sa restriction àV, $f_p :\ V \to U$, on a donc des morphismes finis surjectifs

$f_p :\ V_i \to U_j$ pour tout (i,j) tel que $\overline{f}'(p_i) = q_j$. Ainsi on a les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{f_p} & U_j \\ {\scriptstyle\varphi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi_j} \\ C_i & \xrightarrow{\theta_{ij}} & D_j \end{array}$$

où $\theta_{ij} := \psi_j \circ f_p \circ \varphi_i^{-1}$. Déterminons le morphisme θ_{ij}: soit l'injection $f_p^{\#} :\ \mathcal{O}(U_j) \to \mathcal{O}(V_i)$, on a $g_{|V_i} = \varphi_i^{\#}(\zeta^{s_i})u_i = \psi_j^{\#}(\xi^{t_j})v_j$. Or $s_i = e_{ij}t_j$, où e_{ij} est l'indice de ramification du morphisme $\overline{f}'$ au point p_i', ainsi $\left[\frac{\psi_j^{\#}(\xi)}{\varphi_i^{\#}(\zeta)^{e_{ij}}}\right]^{t_j} = \frac{v_j}{u_i}$. Puisque

$\mathcal{O}(V_i)^\circ$ est intégralement clos, il suit que $\frac{\psi_j^\#(\xi)}{\varphi_i^\#(\zeta)^{e_{ij}}}$ est une unité de $\mathcal{O}(V_i)^\circ$ et donc $\theta_{ij}^\#(\xi) = \zeta^{e_{ij}} u_{ij}$, où u_{ij} est une unité de $\mathcal{O}(C_i)^\circ$.

Soit $\pi_i \in K$ avec $|\pi_i| = \alpha^{1/s_i}$, on a

$$\mathcal{O}(C_i) = \varprojlim_{\epsilon \in K^*,\ |\epsilon|<1,\ |\epsilon|\to 1} \mathcal{O}(C_{i,\epsilon}) = \varprojlim_{\epsilon \in K^*,\ |\epsilon|<1,\ |\epsilon|\to 1} K\langle \frac{\pi_i}{\zeta}, \frac{\zeta}{\epsilon} \rangle$$

où $C_{i,\epsilon} = \{z \in \mathbb{B}^1 \big| |\pi_i| \leq |z| \leq |\epsilon|\}$. De plus

$$\mathcal{O}(C_{i,\epsilon})^{\circ *} = \{a_0(1 + \sum_{\nu\neq 0} a_\nu \zeta^\nu) \,\big|\, |a_0| = 1 \text{ et } \| \sum_{\nu\neq 0} a_\nu \zeta^\nu \|_{sp}^{C_{i,\epsilon}} < 1\}$$

et donc

$$\mathcal{O}(C_i)^{\circ *} = \{a_0(1+h) \,\big|\, |a_0| = 1 \text{ et } \|h\|_{sp}^{C_{i,\epsilon}} < 1 \ \forall \epsilon \in K^*,\ |\epsilon| \to 1\}.$$

Il suit que $u_{ij} = a_0(1+h)$, $|a_0| = 1$ et $\|h\|_{sp}^{C_{i,\epsilon}} < 1$ pour tout $\epsilon \in K^*$, $|\pi| < |\epsilon| < 1$. Ainsi puisque car $\overline{K} \nmid e_{ij}$, il existe $w_{ij} \in \mathcal{O}(C_i)^{\circ *}$ tel que $u_{ij} = w_{ij}^{e_{ij}}$. Soit alors $\tau_{ij} : C_i \to C_i$ l'automorphisme de C_i défini par $\tau_{ij}^\#(\zeta) = \zeta w_{ij}$, il induit un isomorphisme $\tau_{ij} \circ \varphi_i : V_i \to C_i$. Soient $E_i = \{z \in \mathbb{P}_K^1 \big| |\pi_i| \leq |\zeta(z)|\}$ (resp. $F_j = \{z \in \mathbb{P}_K^1 \big| \alpha^{1/t_j} \leq |\zeta(z)|\}$) et considérons la courbe C^p (resp. C^q) définie par le recollement de $r^{-1}(p)$ (resp. $r^{-1}(q)$) avec les disques fermés $(E_i)_{1\leq i\leq m_p}$ (resp. $(F_j)_{1\leq j\leq m_q}$) àl'aide des isomorphismes $(\tau_{ij} \circ \varphi_i)_{1\leq i\leq m_p}$ (resp. $(\psi_j)_{1\leq j\leq m_q}$) (proposition 1.2.). Comme le morphisme $\theta_{ij} \circ \tau_{ij}^{-1} : C_i \to D_j$ est donné par $\xi \to \zeta^{e_{ij}}$, il se prolonge de manière évidente en un morphisme fini $\Delta_{ij} : E_i \to F_j$. Par conséquent, il existe un morphisme analytique fini $\tilde{f}_p : C^p \to C^q$ qui recolle les morphismes Δ_{ij} avec le morphisme f_p ([B-G-R] 9.3.3.). Il suit alors, du principe de GAGA ([Kö]) que $\tilde{f}_p$ est un morphisme algébrique fini de C^p sur C^q.

Corollaire 4.2. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a:*

$$(*) \qquad (g(r^{-1}(p)) - 1) \geq n(g(r^{-1}(q)) - 1)$$

$$(**) \qquad \mu_p - 1 = n(\mu_q - 1) + R_{|r^{-1}(p)}$$

où n est le degré du morphisme fini $\tilde{f}_p : C^p \to C^q$ et $R_{|r^{-1}(p)}$ désigne le degré du diviseur de ramification du morphisme $f_{|r^{-1}(p)}$.

Démonstration. La formule $(*)$ est une conséquence de la formule d'Hurwitz appliquée au morphisme $\tilde{f}_p : C^p \to C^q$.

L'égalité $(**)$ vient de l'explicitation des termes manquant dans l'inégalité $(*)$. En effet $n = \deg \tilde{f}_p = \deg f_p = \sum_i e_{ij}$ est indépendant de j et $\sum_{i,j} e_{ij} = \sum_i n = nm_q$ par construction de $\tilde{f}_p$ à partir des morphismes Δ_{ij} et enfin le morphisme $\tilde{f}_p : C^p \to C^q$ est ramifié comme f sur $r^{-1}(p)$ et comme Δ_{ij} en dehors de $r^{-1}(p)$

4.3.1. L'inégalité $(*)$ améliore l'inégalite locale des singularités du théorème 3.6.

4.3.2. Exemple. La proposition 4.1. est fausse dans le cas de ramification sauvage comme le montre l' exemple suivant où l'on contredit l'inégalité (*) du corollaire 4.2.

Soit K un corps valué complet et algébriquement clos, car$K = 0$, car$\overline{K} = p > 0$. Soit $V = \operatorname{Spm} K\langle T\rangle$ et $U = \operatorname{Spm} K\langle T\rangle[X]/(X^p + T^2X + T)$; $f : U \to V$ le morphisme fini défini par l'injection $K\langle T\rangle \subset K\langle T\rangle[X]/(X^p + T^2X + T)$ et $\overline{f} : \overline{U}^c \to \overline{V}^c$ le morphisme en réducton. Notez que $\overline{U}^c$ est lisse et que le morphisme $\overline{f}$ est sauvagement ramifié au point p, le zéro de $\overline{T}$ avec l'indice de ramification p.

La fibre formelle $r^{-1}(p)$ contient

$p+1$ points où f est ramifié d'ordre 2 ainsi qu'en P, le zéro de T, où f est ramifié d'ordre p.

Supposons que l'on puisse prolonger f_p en un morphisme $\tilde{f}_p :\ C^p \to C^q$ comme dans la proposition 4.1. Alors la formule d'Hurwitz donne l'inégalité

$$2(0-1) \geq 2p(0-1) + (p+1) + (p-1) = 0$$

d'où une contradiction.

5. Prolongement de morphismes de fibres formelles et ramification sauvage

Considérons comme dans 3.1. un morphisme fini de fibres formelles $f_p :\ r^{-1}(p) \subset X \to r^{-1}(q) \subset Y$, et soit $C^q \supset r^{-1}(q)$ une courbe non singulière construite comme dans la proposition 1.2. Nous avons vu en 4.2. qu'il n'est pas toujours possible de prolonger f_p en un morphisme $\tilde{f}_p :\ C^p \to C^q$. La raison étant que l'on complète $r^{-1}(p)$ par des disques fermés de $\mathbb{P}^1_K$, qui sont donc des affinoïdes de genre 0. Dans ce paragraphe nous allons étudier le problème analogue en se permettant d'utiliser pour compléter $r^{-1}(p)$ des affinoïdes connexes, de genre quelconque ayant bonne réduction.

5.1. Nous faisons une hypothèse (H) que nous supposerons désormais. *Soient K un corps valué complet algébriquementclos, $f : X \to Y$ un morphisme fini de K-espaces affinoïdesintègres réguliers, de dimension 1 et $\overline{f} : \overline{X}^c \to \overline{Y}^c$ le morphisme en réduction induit par f. Soit p un point de$\overline{X}^c$ et soit $q = \overline{f}(p)$. On a le diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \overline{X} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{Y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \overline{X}' & \xrightarrow{\overline{f}'} & \overline{Y}' \end{array}$$

où r désigne les réductions canoniques, $\overline{X}'$ (resp.$\overline{Y}'$) désignent les normalisations de $\overline{X}$ (resp. $\overline{Y}$) et $\overline{f}$, $\overline{f}'$ sont les morphismes finis induits par f. Soient $p \in \overline{X}$,

$q=\overline{f}(p)\in\overline{Y}$, $(q_j)_{1\leq j\leq m_q}$ les points de $\overline{Y}'$ au dessus de q, $p_{i,j}\in\overline{X}'$ les points de $\overline{X}'$ au dessus de q_j. **On suppose que le morphisme $\overline{f}'$ est séparable.**

5.2. Notations. Soit $(K,|\ |)$ un corps valué complet. On note $K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle$ (resp. $K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle$) l'algébre des fonctions holomorphes sur la boule unité ouverte de K (resp. couronne semi-ouverte $C_{\pi,1^-}=\{z\in K \mid |\pi|\leq|z|<1)$. On a $K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle=\varprojlim_{\epsilon\in K^*,|\epsilon|<1,|\epsilon|\to 1}K\langle\frac{T}{\epsilon}\rangle=\{\sum_{n\geq 0}a_nT^n \mid a_n\in K,\ \forall\epsilon\in K, 0<|\epsilon|<1, \lim_n|a_n||\epsilon|^n=0\}$ et $K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle=\varprojlim_{\epsilon\in K^*,|\epsilon|<1,|\epsilon|\to 1}K\langle\frac{T}{\epsilon}\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle=\{\sum_{n\geq 0}a_nT^n+\sum_{m>0}b_m(\frac{\pi}{T})^m \mid a_n\in K, \forall\epsilon\in K, 0<|\epsilon|<1, \lim_n|a_n||\epsilon|^n=0, \lim_m|b_m|=0\}$. On note $K^\circ\langle\!\langle T\rangle\!\rangle=\varprojlim_{\epsilon\in K^*,\ |\epsilon|<1,\ |\epsilon|\to 1}K^\circ\langle\frac{T}{\epsilon}\rangle=\{\sum_{n\geq 0}a_nT^n \mid a_n\in K^\circ\}$, (resp. $K^\circ\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle=\varprojlim_{\epsilon\in K^*,\ |\epsilon|<1,\ |\epsilon|\to 1}K^\circ\langle\frac{T}{\epsilon}\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle=\{\sum_{n\geq 0}a_nT^n+\sum_{m>0}b_m(\frac{\pi}{T})^m \mid a_n\in K^\circ, b_m\in K^\circ, \lim_m|b_m|=0\}$) la sous-$K^\circ$-algèbre de $K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle$ (resp. $K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle$) des fonctions holomorphes bornées par 1 sur la boule unité ouverte de K (resp. sur $C_{\pi,1^-}$). Si $f=\sum_{n\geq 0}a_nT^n+\sum_{m>0}b_m(\frac{\pi}{T})^m\in K^\circ\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle$, *on note $\overline{f}=\sum_{n\geq 0}\overline{a}_n\overline{T}^n$ l'image de f dans l'anneau des séries formelles $k[\![\overline{T}]\!]$ sur le corps résiduel k de K.*

Lemme 5.3. *Soit $(K,|\ |)$ un corps valué complet, et soient $P(X)=X^n+A_{n-1}(T)X^{n-1}+\cdots+A_0(T)\in K^\circ\langle\!\langle T\rangle\!\rangle[X]$, $Q(X)=X^n+A'_{n-1}(T,\frac{\pi}{T})X^{n-1}+\cdots+A'_0(T,\frac{\pi}{T})\in K^\circ\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle[X]$ tels que $\overline{P}(X)=\overline{Q}(X)\in k[\![\overline{T}]\!][X]$ soit un polynôme d'Eisenstein séparable en $\overline{T}$, et soient $Z,Z'\in\Omega$, un corps algébriquement clos contenant $K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle$, avec $P(Z)=Q(Z')=0$. Alors il existe un $K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle$-isomorphisme $\varphi\colon K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle[Z]\to K\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle[Z']$ tel que $\varphi(Z)=Z'$.*

Démonstration. On vérifie que $K^\circ\langle\!\langle T\rangle\!\rangle[Z]=K^\circ\langle\!\langle Z\rangle\!\rangle:=A$ et donc $K^\circ\langle\!\langle T\rangle\!\rangle\langle\frac{\pi}{T}\rangle[Z]=A\langle\frac{\omega}{Z}\rangle$ où $\omega\in K, |\omega|^n=|\pi|$. on note $T(Z)$ l'élément T de A. Soit $Q(X)=Q(X,T)$, le développement de Taylor s'écrit $Q(X+Z,T(Z))=X^n+Q^{[n-1]}(Z,T(Z))X^{n-1}+\cdots+Q^{[1]}(Z,T(Z))X+Q(Z,T(Z))\in A\langle\frac{\omega}{Z}\rangle[X]$. Mais $Q(Z,T(Z))=\sum_{0\leq i<n}(A'_i(Z,T(Z))-A_i(Z))Z^i\in A$ et son image dans $k[\![\overline{Z}]\!]$ est nulle alors que celle de $Q^{[1]}(Z,T(Z))$, ainsi il existe $\rho_0\in K^*, |\rho_0|<1$ tel que pour tout $\rho\in K^*, |\rho|\geq|\rho_0|$ on ait $\|Q(Z,T(Z))\|^{sp}_{K\langle\frac{Z}{\rho}\rangle\langle\frac{\omega}{Z}\rangle}<\left\|Q^{[1]}(Z,T(Z))^2\right\|^{sp}_{K\langle\frac{Z}{\rho}\rangle\langle\frac{\omega}{Z}\rangle}$. La méthode de Newton permet alors de construire une racine de Q dans $A\langle\frac{\omega}{Z}\rangle$.

Proposition 5.4. *On reprend l' hypothèse (H). On suppose donnés un corps de fonctions d'une variable valué, $(F/K,v)$, ayant une bonne réduction $s\ :\ C_F\to C_{Fv}$, $h\in F$ une fonction régulière de degré $n=\deg f_p$ (i.e. $\deg h=\deg hv$ telle que le diviseur des zéros $(hv)_0$ de $hv=:s(h)$, soit concentré en une place p de F_v ainsi qu' un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} k[\![hv]\!] & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_{Fv,p} \\ \Big\downarrow\wr & & \overline{\psi}\Big\downarrow\wr \\ \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{Y}',q_j} & \xrightarrow{\overline{f}^\#} & \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{X}',p_{ij}} \end{array}$$

où $\overline{\psi}$ est un isomorphisme d'anneaux locaux et $\overline{f}^{\#}$ est supposé séparable .

Alors pour $|\pi|$ proche de 1 et $|\omega|^n = |\pi|$, on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} s^{-1}(p) \cap |z_{i,j}| \geq |\omega| & \xrightarrow{h_p} & s^{-1}(q) \cap |t_j| \geq |\pi| \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ r^{-1}(p) \cap |z_{ij}| \geq |\omega| & \xrightarrow{f_p} & r^{-1}(q) \cap |t_j| \geq |\pi| \end{array}$$

où $q = hv(p)$, $z_{i,j}$ (resp. t_i) sont des paramètres du bord de la fibre $s^{-1}(p)$ (resp. $r^{-1}(p)$) (cf. prop. 1.2.)

Démonstration. On identifie $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{Y'},q_j}$ et $k[\![hv]\!]$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K^\circ\langle\langle h\rangle\rangle\langle\frac{\pi}{h}\rangle = \mathcal{O}(s^{-1}(q) \cap |t| \geq |\pi|)^\circ & \xrightarrow{\varphi'} & \mathcal{O}(s^{-1}(p) \cap |z| \geq |\omega|)^\circ = K^\circ\langle\langle Z'\rangle\rangle\langle\frac{\omega}{Z'}\rangle \\ \downarrow \wr & & \\ K^\circ\langle\langle T\rangle\rangle = \mathcal{O}(r^{-1}(q) \cap |t_j| \geq |\pi|)^\circ & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}(r^{-1}(p) \cap |z_{i,j}| \geq |\omega|)^\circ = K^\circ\langle\langle Z\rangle\rangle\langle\frac{\omega}{Z}\rangle \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} k[\![hv]\!] & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{O}}_{Fv,p} = k[\![\overline{Z'}]\!] \\ \downarrow \wr & & \overline{\psi} \downarrow \wr \\ k[\![\overline{T}]\!] = \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{Y'},q_j} & \xrightarrow{\overline{f}^{\#}} & \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{X'},p_{ij}} = k[\![\overline{Z}]\!] \end{array}$$

Soit $P(X)$ le polynôme irréductible de Z sur $K\langle\langle T\rangle\rangle$, et soit $\overline{P}(X)$ son image dans $k[\![T]\!][X]$ sa réduction, $\overline{P}(X)$ est un polynôme d'Einsenstein en $\overline{T}$, séparable, et $\overline{P}(\overline{Z}) = 0$. Soit $\overline{Z}'' = \overline{\psi}(\overline{Z})$, $\overline{Z}''$ est une uniformisante de $k[\![\overline{Z}']\!]$ et $\overline{P}(X)$ est le polynôme irreductible de $\overline{Z}''$. Puisque $\overline{Z}'' = \overline{Z'}\overline{u}(\overline{Z'})$ où $\overline{u}(\overline{Z'})$ est une unité de $k[\![\overline{Z'}]\!]$, il suit que si $Z'' := Z'u(Z')$, où $u(Z')$ est une unité de $K^\circ\langle\langle Z'\rangle\rangle$ telle que $\overline{u(Z')} = \overline{u}(\overline{Z'})$, on a $K\langle\langle Z''\rangle\rangle\rangle\langle\frac{\omega}{Z''}\rangle = K\langle\langle Z'\rangle\rangle\rangle\langle\frac{\omega}{Z'}\rangle$. Par conséquent on se ramène à la situation du lemme précédent, ce qui permet de conclure.

Corollaire 5.5. *On suppose que les points p et q sont réguliers et que le morphisme $\overline{f}_p$ est séparable (c'est l'hypothèse (H)). Alors le morphisme f_p se prolonge en un morphisme $\tilde{f}_p : C^p \to C^q$ si et seulement si la valuation de la différente $\mathcal{D}_p$ de l'homomorphisme $\overline{f}^{\#} := \overline{\varphi}$: $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{Y},q} := k[\![t]\!] \to \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{X},p} := k[\![z]\!]$ est inférieure à $2n-2$ où $n = \deg \overline{f}_p$.*

Démonstration. Notons d'abord que les courbes C^p et C^q sont isomorphes à $\mathbb{P}^1_K$ puisque les points p et q sont réguliers.

Condition nécessaire. Appliquons la formule d'Hurwitz au morphisme $\overline{\tilde{f}}_p : \overline{C^p} \simeq \mathbb{P}^1_k \to \overline{C^q} \simeq \mathbb{P}^1_k$, donc $2(0-1) \geq 2n(0-1) + v_p(\mathcal{D}_p)$ c'est à dire $v_z(\mathcal{D}_p) \leq 2n-2$.

Condition suffisante. On a $\overline{\varphi}(t) = t = z^n u(z)$ où $u(z) = \sum_k \alpha_k z^k$ est une unité de $k[\![z]\!]$ ($\alpha_0 \neq 0$). On suppose que $\alpha_0 = 1$, et puisque $v_z(\mathcal{D}_p) \leq 2n-2$, il existe un entier $k_0, 0 < k_0 < p-1$ tel que $u(z) = 1 + \alpha_{k_0} z^{k_0} + \cdots + \alpha_k z^k + \ldots$,où

$\alpha_{k_0} \neq 0$. Soit l'homomorphisme $\overline{\psi} \ : \ k[\![t]\!] \to k[\![z]\!]$ défini par $\overline{\psi}(t) = z^n w(z)$ où $w(z) = 1 - \alpha_{k_o} z^{k_o}$, montrons qu'il existe un automorphisme $\overline{\rho}$ de $k[\![z]\!]$ défini par $\overline{\rho}(z) = zv(z)$ où $v(z) = 1+s$ est une unité de $k[\![z]\!]$ et $v_z(s) = 1$, tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} k[\![t]\!] & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & k[\![z]\!] \\ & & \uparrow \overline{\rho} \\ & & k[\![z]\!] \end{array}$$

L'automorphisme $\overline{\rho}$ existe si et seulement s'il existe $v(z)$ unité de $k[\![z]\!]$ telle que $u(z)w^{-1}(zv(z)) = (v(z))^n$ ce qui revient à l'existence de $s \in zk[\![z]\!]$ tel que

$$(1 + \alpha_{k_0} z^{k_0} + \alpha_{k_0+1} + \cdots + \alpha_k z^k + \dots)(1 - \alpha_{k_0} z^{k_0}(1+s)^{k_0}) = 1 + s^n$$

Soit le polynôme $P(X) = (1 + \alpha_{k_0} z^{k_0} + \dots)(1 - \alpha_{k_0} z^{k_0}(1+zX)^{k_0}) - (1 + z^n X^n) = z^{k_0+1}(\alpha_{k_0+1} - k_0 \alpha_{k_0} X + zl(X) - z^{n-k_0-1} X^n)$ où $l(X) \in k(\!(z)\!)[X]$ est de degré k_0. Puisque $\alpha \neq 0$ et $n > k_0$, l'image résiduelle du polynôme $\frac{1}{z^{k_0+1}} P(X)$ pour la valuation z-adique v_z de $k(\!(z)\!)$, est un polynôme séparable de $k[X]$. Donc par le lemme de Hensel $P(X)$ possède une racine dans $k[\![z]\!]$, et ainsi l'automorphisme ρ existe.

Considérons l'extension $K(T) \subset F := K(X)$ telle que $\mathrm{Irr}(X, K(T), Y) = Y^n - a_{k_0} Y^{n-k_0} - \frac{1}{T}$ où $a_{k_0} \in K^\circ$ et $\overline{a_{k_0}} = \alpha_{k_0}$ et soit v la valeur absolue de Gauss sur $F = K(X)$ associée à X. Alors (F, v) a bonne réduction, T est une fonction régulière de degré n telle que $(T)_0$ est concentré en une place p de $\overline{F}$ et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} k[\![t]\!] \simeq k[\![\overline{T}]\!] & \xrightarrow{\overline{\varphi}} & k[\![z]\!] \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{X},p} \\ & & \wr \uparrow \overline{\rho} \\ & & k[\![z]\!] \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{F},p} \end{array}$$

Il suit, d'après la proposition 5.4. que le morphisme $C_F \simeq \mathbb{P}^1_K \to C_{K(T)} \simeq \mathbb{P}^1_K$ défini par l'extension $F/K(T)$ est un prolongement du morphisme f_p. D'où le corollaire.

Remarque. Dans l' exemple 4.2. ii), la valuation de la différente $\mathcal{D}_p$ en p est égale à $2n$.

Afin de pouvoir appliquer comme précédement la proposition 5.4. dans le cas général nous devons avoir à notre disposition suffisamment de couples $((F/K, v), h)$, où F/K est un corps de fonctions d'une variable qui a bonne réduction en v et h est une fonction régulière (cf. 5.4.); c'est l'objet du théorème qui suit.

Théorème 5.6. *Soit k, un corps algébriquement clos, $R = W(k)$, l'anneau des vecteurs de Witt sur k. Soit $\varphi : C \to \mathbb{P}^1_k$ un morphisme fini où C est une courbe propre lisse connexe, alors il existe $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^1_R$, un morphisme fini de schémas lisses qui relève φ.*

Preuve. Puisque k est algébriquement clos on peut factoriser φ en $C \xrightarrow{\varphi_s} \mathbb{P}^1_k \xrightarrow{i} \mathbb{P}^1_k$, où φ_s (resp. i) est un morphisme séparable (resp. inséparable). Clairement i se relève en un morphisme fini $I : \mathbb{P}^1_R \to \mathbb{P}^1_R$; ainsi on peut supposer le morphisme φ séparable.

Décrivons la méthode: soit K le corps des fractions de R, on munit la fibre générique $\mathbb{P}^1_K$ de $\mathbb{P}^1_R = Proj R[x_0, x_1]$ de la structure analytique formelle relative au recouvrement pur $|T(z)| \leq 1, |T(z)| \geq 1$ où $T = x_1/x_0$ et soit $r : (\mathbb{P}^1_K)^{an} \to \mathbb{P}^1_k$ l'application de réduction correspondante. On montre que le morphisme φ est localement monogène; soit alors $x \in \mathbb{P}^1_k$, il existe U_x un ouvert affine contenant x et un morphisme fini Φ^{an}, d'un espace affinoïde sur $r^{-1}(U_x)$ qui relève le morphisme $\varphi_{|\varphi^{-1}(U_x)}$. Lorsque $\varphi_{|\varphi^{-1}(U_x)}$ est étale il y a unicité du relèvement, ce qui permet de recoller les relèvements locaux; enfin on conclut avec GAGA rigide.

α) *Étude locale.* Nous montrons que le morphisme φ est localement monogène. Soient $\mathcal{O}$ l'anneau local en un point fermé de $\mathbb{P}^1_k$ et $\mathcal{O}'$ sa clôture intégrale dans le corps de fonctions rationnelles de C. Alors si x (resp. x_i) désignent les idéaux maximaux de $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}'$), il suit du théorème d'approximation ([Bou] Prop. 2 p.26) qu'il existe $z \in \mathcal{O}'$ qui est une uniformisante locale en tous les x_i. Alors $\mathcal{O}[z] \subset \mathcal{O}'$ sont deux $\mathcal{O}$-modules; pour voir qu'ils sont égaux on peut montrer que l'idéal de $\mathcal{O}'$ engendré par $f'(z)$, où $f(X)$ est le polynôme irréductible de z sur $\mathcal{O}$, est l'idéal différente $\mathcal{D}_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}$ et pour celà il suffit de comparer leur valuation aux x_i. Ce calcul peut se faire dans le complété $\hat{\mathcal{O}'_{x_i}}$ ([Se] prop. 10 p. 61); puisque k est algébriquement clos l'extension $\hat{\mathcal{O}'_{x_i}}/\hat{\mathcal{O}}$ est totalement ramifiée alors $v_{x_i}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}}) = v_{x_i}(f_i'(z))$, où $f_i(X)$ est le polynôme irréductible de z sur $\hat{\mathcal{O}}$; mais par construction $f'(z)$ et $f_i'(z)$ sont égaux à unité près, ce qui montre le résultat.

β) *Relèvement analytique des morphismes locaux.* Soient $x \in \mathbb{P}^1_k$ et U_x un ouvert contenant x, soit A (resp. B), l'anneau des fonctions régulières sur U_x (resp. $\varphi^{-1}(U_x)$). Quitte à localiser on peut supposer que $B = A[z]$ (cf. α); soit alors $p(X) \in A[X]$, le polynôme irréductible de z. On peut supposer, quitte à changer T en T^{-1}, que $\infty \notin U_x$; soient $\mathcal{A} = K < T, 1/Q(T) >= \mathcal{O}^{an}(r^{-1}(U_x))$ et $P(X) \in \mathcal{A}[X]$ un polynôme unitaire qui relève $p(X)$. Soit $\mathbb{C} \supset K(T)$, un corps algébriquement clos, complet pour une valeur absolue qui induit sur $K(T)$ la valeur absolue de Gauss associée à T et soit $Z \in \mathbb{C}$ une racine de $P(X)$. On note $\mathcal{B}$ l'algèbre affinoïde $\mathcal{A}[Z]$; par construction le morphisme analytique induit par l'inclusion des algèbres affinoïdes $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ est un relèvement de $\varphi_{|\varphi^{-1}(U_x)}$.

γ) *Unicité du relèvement dans le cas étale.* On reprend les notations précédentes en supposant de plus que $\varphi_{|\varphi^{-1}(U_x)}$ est étale. Soit donc $\mathcal{B}'$ une algèbre affinoïde avec $\mathcal{A}[Z] \subset \mathcal{B}' \subset \mathbb{C}$ et $\mathrm{rk}\,\mathcal{B}'/\mathcal{A} = \deg \varphi$ et qui induit en réduction $\varphi_{|\varphi^{-1}(U_x)}$. Montrons que $Z \in \mathcal{B}'$: soit $Z' \in \mathcal{B}'$ qui donne z en réduction; puisque $p'(z)$ est une unité de $A[z] = \overline{\mathcal{B}'}$, il suit que $P'(Z') \in \mathcal{B}'^*$, alors la méthode de Newton permet de construire une racine $Z"$ de $P(X)$ dans $\mathcal{B}'$ proche de Z' et donc qui donne z en réduction. Mais dans $\mathbb{C}$ on a $P(Z") = P(Z) + (Z" - Z)P'(Z) + (Z - Z")^2 Q(Z, Z")$ où $|Q(Z, Z")| \leq 1$, et puisque $P(Z") = P(Z) = 0$ et que $p'(z) \neq 0$ il suit que $Z = Z'' \in \mathcal{B}'$. D'autre part l'algèbre $\mathcal{B}'$ est distinguée ([B-G-R]), on a donc $\mathcal{B}' = \mathcal{A}[Z]$.

δ) *Conclusion.* Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement de $\mathbb{P}^1_k$ par des ouverts affines U_x sur lesquels φ est monogène (α), on peut supposer de plus que $\varphi_{|\varphi^{-1}(U_x)}$ est ramifié en au plus une fibre. On construit en utilisant (β) un préfaisceau de $\mathcal{O}^{an}_{\mathbb{P}^1_k}$- algèbres qui compte tenu de (γ) est une $\mathcal{O}^{an}_{\mathbb{P}^1_k}$- algèbre cohérente $\mathcal{B}$ et qui définit donc un morphisme fini analytique $\Phi_{(K)} : Spec\,\mathcal{B} \to (\mathbb{P}^1_K)^{an}$ relevant φ ie. la structure formelle définie par le recouvrement pur $|T(z)| \leq 1, |T(z)| \geq 1$ de $\mathbb{P}^1_K$ induit φ en réduction. D'autre part il suit de GAGA rigide ([Kö]), que $\Phi_{(K)}$ est un morphisme algébrique $\Phi_{(K)} : \mathcal{C}_{(K)} \to \mathbb{P}^1_K$ et $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^1_R$ est la clôture intégrale de $\mathbb{P}^1_R$ dans $\mathcal{C}_{(K)}$.

5.6.1. Remarque. À notre connaissance ce résultat n'apparaît dans la littérature que sous des hypothèses plus faibles. En effet Grothendieck [SGA 1], et Fulton [Fu], montrent que si le morphisme φ est modérément ramifié et galoisien de groupe G on peut imposer à Φ d'être galoisien de groupe G; ceci vient de ce que (γ) est encore vrai si $\varphi_{|\varphi^{-1}(U_x)}$ est seulement modérément ramifié. Par contre si le morphisme φ est sauvagement ramifié il n'est pas toujours possible d'imposer à Φ d'être galoisien; ceci même en admettant une extension des scalaires. Notez cependant que si $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où $p > 0$ désigne la caractéristique de k, alors le relèvement Galoisien est impossible sur $W(k)$, alors qu'il est possible sur $W(k)[\xi]$, où ξ est une racine primitive p-ième de l'unité ([S-O-S]).

5.6.2. Remarque. Soit K un corps valué complet algebriquement clos et soient $\overline{F}/\overline{K}$ un corps de fonctions d'une variable sur $\overline{K}$ et $\overline{h} \in \overline{F}$ telle que $\overline{F}/\overline{K}(\overline{h})$ est séparable et $(\overline{h})_0$ est concentré en une place p de $\overline{F}/\overline{K}$, alors le théorème 5.6. montre en particulier qu'il existe (F, v) un corps de fonctions d'une variable sur K, valué, et h une fonction régulière pour v avec

i) $g(F) = g(\overline{F})$
ii) $Fv = \overline{F}$
iii) $hv = \overline{h}$.

5.6.3. Un exemple non galoisien de degré p avec forte ramification sauvage: Soit $\overline{F} = k(\overline{h})[\overline{x}]$ avec $\overline{x}^p + (\overline{h}^2 + \overline{h}^3)\overline{x} + \overline{h} = 0$, avec $p > 3$, car$K = 0$ et car$k = p > 0$. On considère $(K(h), v)$ une extension transcendante pure valuée avec $hv = \overline{h}$ et soit F une extension algébrique $F = K(h)[x]$ avec $x^p + (h^2 + h^3)x + h = 0$. On calcule le genre des corps de fonctions F et $\overline{F}$ en utilisant la formule d'Hurwitz appliquée aux extensions $F/K(h)$ et $\overline{F}/k(\overline{h})$:

Places de $K(h)$	Places de F	Différente locale
∞	si $3 \mid p-1$, 3 places ramifiées ramification $\frac{p-1}{3}$	$d_\infty = p - 4$
	si $3 \nmid p-1$, 1 place ramifiée ramification $p-1$	$d_\infty = p - 2$
0	1 place tot. ramifiée	$d_0 = p - 1$
$2p + 1$ places P_i	une place ramifiée d'indice 2	$\sum d_{P_i} = 2p + 1$

Alors il suit que $g(F) = p - 3$ si $3 \mid p - 1$ et $g(F) = p$ si $3 \nmid p - 1$
Et pour $\overline{F}$ on a

Places de $k(\overline{h})$	Places de $\overline{F}$	Différente locale
∞	si $3 \mid p-1$, 3 places ramifiées ramification $\frac{p-1}{3}$	$d_\infty = p - 4$
	si $3 \nmid p-1$, 1 place ramifiée ramification $p-1$	$d_\infty = p - 2$
0	1place tot. ramifiée	$d_0 = 2p$
$P = -1$	une place tot. ramifiée	$d_P = p$

Il suit que $g(\overline{F}) = g(F)$. Ainsi si v désigne l'unique prolongement à F de la valeur absolue de Gauss sur $K(h)$ associée à h; le triplet (F, v, h) est un relèvement du morphisme $C_{\overline{F}} \to \mathbb{P}^1_k$.

On déduit immédiatement du théorème le corollaire suivant (comparer avec [Fu], op. cit.):

Corollaire 5.7. *Soit k un corps algébriquement clos, $R{=}W(k)$, l'anneau desvecteurs de Witt sur k. Soit C une courbe projective lisse connexe sur k, alors il existe $\mathcal{C}$, un R-schéma propre et lisse qui relève C.*

Théorème 5.8.*Soient K un corps valué complet algébriquementclos, $f : X \to Y$ un morphisme fini de K-espaces affinoïdesintègres réguliers, de dimension 1 et $\overline{f}$: $\overline{X}^c \to \overline{Y}^c$ le morphisme en réduction induit par f. Soit p un point de$\overline{X}^c$ et soit $q = \overline{f}(p)$. On a le diagramme commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \overline{X} & \xrightarrow{\overline{f}} & \overline{Y} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \overline{X}' & \xrightarrow{\overline{f}'} & \overline{Y}' \end{array}$$

où r désigne les réductions canoniques, $\overline{X}'$ (resp.$\overline{Y}'$) désignent les normalisations de $\overline{X}$ (resp. $\overline{Y}$) et $\overline{f}$, $\overline{f}'$ sont les morphismes finis induits par f. Soient $p \in \overline{X}$, $q = \overline{f}(p) \in \overline{Y}$, $(q_j)_{1 \leq j \leq m_q}$ les points de $\overline{Y}'$ au dessus de q, $p_{i,j}$ les points de $\overline{X}'$ au dessus de q_j. On suppose que le morphisme $\overline{f}'$ est séparable, alors si C^q est une courbe projective définie par la proposition 1.2. il existe un recouvrement pur $\mathcal{V}$ de C^q, une courbe projective E^p tels que le morphisme fini des fibres formelles déduit de f, $f_p :\ r^{-1}(p) \to r^{-1}(q)$ se prolonge en un morphisme fini formel $\tilde{f}_p :\ (E^p, \mathcal{V}) \to (C^q, \mathcal{V})$.

Démonstration. La donnée de $\overline{f}'$ induit des homomorphismes séparables $\overline{f}'^{\#}$: $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{Y}',q_j} \simeq k[\![t]\!] \to \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{X}',p_{ij}} \simeq k[\![z]\!]$. Soit $\varphi_{i,j} : C_{i,j} \to \mathbb{P}^1_k$, un morphisme de degré n, ramifié selon $\overline{f}'^{\#}$ en 0 (il suffit pour cela d'approximer suffisamment bien le polynôme irréductible de z sur $k[\![t]\!]$ par un polynôme à coéfficients dans $k[t]$); alors $\varphi_{i,j}$ se relève en $\Phi_{i,j} : \mathcal{C}_{i,j} \to \mathbb{P}^1_{K^\circ}$ (Th. 5.6.); on conclut avec la proposition 5.4.

Corollaire 5.9. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a:*

$$(*) \qquad \mu_p - 1 = n(\mu_q - 1) + R_{|r^{-1}(p)} - \sum_{i,j} d^w_{p_{i,j},q_j}$$

où n est le degré du morphisme fini f_p : $r^{-1}(p) \to r^{-1}(q)$ et $R_{|r^{-1}(p)}$ désigne le degré du diviseur de ramification du morphisme $f_{|r^{-1}(p)}$ et $d^w_{p_{i,j},q_j}$ est la valuation en q_j de la partie sauvage de la différente de l'extension $\widehat{\mathcal{O}}_{\overline{Y}',q_j} \to \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{X}',p_{ij}}$.

Démonstration. On considère le morphisme $\tilde{f}_p$ construit précédement; il suit de la proposition 1.5. que

$$g(E^p) = \delta_p - m_p + 1 + \sum_{i,j} g(C_{i,j}). \tag{1}$$

D'autre part par construction on a $C^q - r^{-1}(q) = \coprod_j B_j$, $(B_j \simeq K^\circ)$ et $E^p - r^{-1}(p) = \coprod_{i,j} \tilde{B}_{i,j}$ où $\tilde{B}_{i,j}$ est un affinoïde ayant bonne réduction et $\tilde{f}_p$ définit un morphisme fini séparable de courbes lisses qui localement en réduction est monogène (cf. th. 5.6 α) ainsi donc l'idéal différente $\mathcal{D}_{\tilde{B}_{i,j}/B_j}$ donne en réduction l'idéal différente $\mathcal{D}_{\overline{\tilde{B}}_{i,j}/\overline{B}_j}$; ainsi

$$D_{i,j} = \deg \mathcal{D}_{\tilde{B}_{i,j}/B_j} = \deg \mathcal{D}_{\overline{\tilde{B}}_{i,j}/\overline{B}_j}. \tag{2}$$

La formule d'Hurwitz appliquée aux morphismes finis $\varphi_{i,j} : C_{i,j} \to \mathbb{P}^1_k$ (resp. $\tilde{f}_p$) donne compte tenu de (2),

$$2(g(E_p) - 1) = 2n(g(C_q) - 1) + R_{|r^{-1}(p)} + \sum_{i,j} D_{i,j}, \tag{3}$$

resp.

$$2(g(C_{i,j} - 1) = 2e_{i,j}(0 - 1) + d_{p_{i,j},q_j} + D_{i,j}, \tag{4}$$

où $d_{p_{i,j},q_j}$ est la valuation en q_j de la différente de $\overline{f}'^{\#} : \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{Y}',q_j} \simeq\rightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{\overline{X}',p_{ij}}$. Alors en éliminant $D_{i,j}$ dans les formules (3) et (4) et tenant compte de ce que $\forall j,\ n = \sum_i e_{i,j}$ et $\sum_{i,j} 1 = m_p$, on obtient la formule annoncée.

Remarque. Nous ne savons pas déduire de (*) l' inégalité de [Yo 2], cf. th. 3.5. 2).

Corollaire 5.10.*On reprend les hypothèses de 2. Soit $f : X \to Y$, un morphisme fini entre deux S-courbes normales. Soit $x \in X$ et $y = f(x)$, on suppose que $Y - \{y\}$ est lisse sur S. Alors*

$$r_x^1 = n_x(r_y^1 - 1) + R - \sum_{i,j} d^w_{p_{i,j},q_j} \tag{$*$}$$

où n_x (resp.R) est le degré "général" (resp. le degré du diviseur de ramification) du morphisme f pris sur les points de X_η qui se spécialisent en x, enfin $d^w_{p_{i,j},q_j}$ est défini comme dans 5.8.

Démonstration. C'est 5.9. compte tenu de la remarque 2.2.

Question. Montrer (*) en utilisant le formalisme des cycles evanescents.

6. Compactification minimale d'un morphisme de fibres formelles.

On se propose ici de minimaliser le genre de la courbe E^p construite dans le théorème 5.8. Vue la formule (1) de la preuve du cor. 5.9., il revient au même de minimaliser $g(C_{i,j})$. On cherche donc un revêtement connexe de la droite affine $\mathbb{A}_k^1 = \mathrm{Sp}\, k[t^{-1}]$, avec ramification imposée à l'infini et faiblement ramifiée en dehors de l'infini. Autrement dit on veut trouver $F/k(T)$, une extension algébrique finie où l'extension $k((t)) \hookrightarrow F \otimes_{k(t)} k((t)) = k((z))$ est imposée.

6.1. Si l'extension $k((z))/k((t))$ est modérément ramifiée de degré e; alors $k((z)) = k((t^{1/e}))$; ainsi $F = k(t^{1/e})$ convient. C'est le choix qui est fait dans la prop. 4.1.

6.2. Si l'extension $k((z))/k((t))$ est galoisienne de groupe de Galois $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ où $p = \mathrm{car}\, k$, on peut prendre pour F un revêtement étale de la droite affine. On pense (discussion avec Serre) que ceci vaut dès que G est un p-groupe!

6.3. Exemple.$\mathrm{car}\, k = p > 2$, $z^p - t^{(p+1)/2} z^{(p-1)/2} - t = 0$, alors l'extension $\varphi : k((t)) \hookrightarrow k((z))$ n'est pas cyclique et l'extension $F = k(t)[z]$ avec $z^p - t^{(p+1)/2} z^{(p-1)/2} - t = 0$ définit un revêtement non ramifié de la droite affine de genre $(\frac{p-1}{2})^2$.

6.4. Exemple.$\mathrm{car}\, k = p > 2$, $z^p - (t^2 + t^3)z + t = 0$. Si $F = k(t)[z]$ avec $z^p - (t^2 + t^3)z + t = 0$ on a vu (c'est l'exemple 5.6.3.) que $g(F) = p - 3$ si $3|p-1$ et $g(F) = p$ si $3 \nmid p - 1$.

D'autre part, en utilisant, le lemme de Hensel on montre que le polynôme $X^p - t^2 X + t$ admet une racine z' dans $k[[z]]$. Ainsi le corps de fonctions $F' = k(t)(z')$ où $z'^p - t^2 z' + t = 0$ définit un revêtement de la droite affine satisfaisant la même condition que $F/k(t)$ en 0 et $g(F') = \frac{1}{2}(p-1) < g(F)$.

On vérifie facilement que le genre minimal d'un corps de fonctions $F/k(t)$ satisfaisant la donnée $\varphi : k[[t]] \hookrightarrow k[[z]]$ avec $z^p - (t^2 + t^3)z + t = 0$ est égal à 1. On peut se demander s'il existe un corps de fonctions elliptiques sur k qui soit un revêtement de degré p non ramifié de la droite affine et qui à l'infini soit ramifié "selon" φ.

Bibliographie

[Bo] S. Bosch, *Eine bemerkenswerte Eigenschaft der formellen Fasern affinoider Räume.* Math. Ann. 229, 25-45 (1977)

[B-G-R] S. Bosch, U. Güntzer and R. Remmert, *Non archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren, 261, Berlin-Heidelberg-New York: Springer (1984)

[Bo-Lu] S. Bosch, W. Lütkebohmert, *Stable reduction and uniformization of abelian varieties I*, Math. Ann. 270 (1985), 349-379.

[Bou] N. Bourbaki *Algèbre commutative*, chap. 7, Hermann, (1965).

[Co] R. Coleman, *Reciprocity laws on curves*, Compositio Mat. 72 (1989), 205-235 .

[Fr-vdP] J. Fresnel, M. van der Put, *Localisation formelle et groupe de Picard*, Ann. Inst. Fourier, 33, 4, 19-82 (1983)

[Fu] W. Fulton, *Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves*, Ann. of Math. Vol. 90, 542-575 (1969)

[Gr] A. Grothendieck, SGA 1: *Revêtements Etales et Groupe Fondamental,* Lecture Notes 224 (1971), Springer Verlag.

[Ka] N. Katz, *Local-to-global extensions of représentations of fundamental groups*, Ann. Inst. Fourier, 36, 4 (1992), 69-106.

[Kato] K. Kato, *Vanishing cycles, ramification of valuations, and class field theory,* Duke Math. J. Vol. 55, No. 3

[Kö] U. Köpf, *Uber eigentliche Familien algebraischer Varietäten über affinoiden Räume*, Schriftenreihe Math. inst. Univ. Münster, 2 serie, Heft 7 (1974)

[La] H. Lange, *Kurven mit rationeler Abbildung*, J. reine angew.Math. 295 pp. 80-115 (1977)

[Li] Q. Liu, *Ouverts analytiques d'une courbe projective sur un corps valué complet ultramétrique algébriquement clos*, Ann. Inst. Fourier, 37, 39-64, (1987)

[vdP] M. van der Put, *Stable reductions of algebraic curves*, Indag. Math. 46 (1984), 461-478.

[Ra] M. Raynaud, *p-groupes et réduction semi-stable des courbes*, The Grothendieck Festschrift, Vol. III, Birkhäuser, 1991.

[Sa] T. Saito, *Vanishing cycles and geometry of curves over a discrete valuation ring*, Amer. J. of Math. 109 (1987), 1043-1085.

[S-O-S] T. Sekiguchi, F. Oort, N. Suwa, *On the deformation of Artin-Schreier to Kummer*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 22 (1989), 345-375.

[Re] M. Reversat, *Cours de* 3$^{\text{ème}}$ *cycle à l'université de Bordeaux* (84-85)

[Se] J.P. Serre, *Corps locaux*, Hermann (1962).

[Yo 1] T. Youssefi, *Inégalité relative des genres*, à paraître.

[Yo 2] T. Youssefi, *Revêtements des courbes algébriques et réductions*, Thèse, Univ. Bordeaux, (1990).

M. Matignon
U.R.A. 226, Université Bordeaux I,
CEREMAB,
351, cours de la Libération
33405 Talence Cédex, France
email MATI@ FRBDX11.bitnet

T. Youssefi
Université Ibn Tofail
Faculté des sciences
Département de Mathématiques
Kénitra, MAROC