Table des matières

Présentation

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique p strictement positive, R un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel k, et de corps des fractions K de caractéristique nulle contenant une racine primitive p-ième de l'unité ζ ; on désigne par π une uniformisante de R, et par v_K la valuation de K normalisée par $v_K(\pi) = 1$. Soit K^a une clôture algébrique de K, on notera encore v_K l'unique extension de v_K à K^a. On désigne par $G_K :=$Gal(K^a/K) le groupe de Galois absolu de K.

Une courbe algébrique sur k est dite semi-stable si elle est connexe, réduite, avec comme uniques singularités éventuelles des points doubles ordinaires. De telles courbes apparaissent naturellement au bord de la compactification de Deligne-Mumford $\bar{M}_g$ de l'espace des modules grossier des courbes projectives lisses sur k de genre g (voir [**2**]).

On appelle disque formel (resp. couronne formelle d'épaisseur $e \in \mathbb{N}_{>0}$) sur R le R-schéma $\mathcal{D} :=$ Spec $R[[T]]$ (resp. $\mathcal{C}_e :=$ Spec $\dfrac{R[[T_1, T_2]]}{(T_1T_2 - \pi^e)}$). Les points fermés de la fibre générique de $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{C}_e$) s'identifient aux points du disque ouvert $\{T_0 \in K^a | v_K(T_0) > 0\}$ (resp. de la couronne ouverte $\{T_0 \in K^a | 0 < v_K(T_0) < e\}$), modulo l'action de G_K.

Soit X une courbe sur R, de fibre générique X_K lisse et géométriquement connexe, et de fibre spéciale X_k semi-stable. Si x est un point fermé de X_k, le R-schéma Spec $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ (où $\hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ désigne le complété de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$) est un disque formel si x est un point lisse et une couronne formelle si x est un point double. Dans ce dernier cas, l'épaisseur e de la couronne formelle est appelée épaisseur du point double dans X. On associe naturellement à la courbe X un graphe métrique Γ_X : Les sommets de Γ_X sont les composantes irréductibles de la fibre spéciale X_k, et les arêtes de Γ_X correspondent aux points doubles. La longueur d'une arête est alors l'épaisseur du point double correspondant dans X.

Dans [**6**], B.Green et M. Matignon ont étudié les automorphismes d'ordre p du disque formel. Un tel automorphisme σ possède un nombre fini de points fixes dans la fibre générique géométrique de $\mathcal{D}$, qu'on supposera rationnels sur K et en nombre supérieur ou égal à 2. Il existe alors un unique modèle semi-stable minimal $\mathcal{M}(\mathcal{D}_K, \sigma)$ de $\mathcal{D}_K := \mathcal{D} \times_{\text{Spec } R}$ Spec K qui déploie les spécialisations des points fixes en des points lisses et distincts. La fibre spéciale de ce modèle est un arbre de droites projectives, se croisant en des points doubles ordinaires sur k, relié à la transformée stricte E_∞ du point générique de la fibre spéciale de $\mathcal{D}$. On lui associe comme ci-dessus un arbre métrique Γ_σ^*, orienté à partir du sommet correspondant à E_∞, qu'on appellera racine de l'arbre. On montre alors que les points fixes se spécialisent dans les bouts. Par ailleurs, étant donné un point fixe Z_0 de σ, l'action de σ sur l'espace tangent est donnée par la multiplication par une racine primitive p-ième de l'unité $\zeta^{h_0^{-1}}$, où h_0 est un élément non nul de $\mathbb{F}_p$ qu'on appelle donnée de Hurwitz en Z_0. Le résultat principal de [**6**] peut alors s'énoncer ainsi :

Théorème 0.1. *(B. Green, M. Matignon)*

Notons, pour toute arête positive a de Γ_σ^*, $m(a)+1$ le nombre de points fixes de σ qui se spécialisent après a.

Si s est un bout de Γ_σ^*, correspondant à la droite projective E_s, soit F_s l'ensemble des points fixes de σ qui se spécialisent sur E_s, a_∞ l'unique arête positive de sommet terminal s. Il existe alors une fraction rationnelle non nulle $\bar{u}_s \in k(E_s)$, unique à la multiplication d'une puissance p-ième près, tel que le diviseur de la forme différentielle $\omega_s := \dfrac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}$, qui est uniquement déterminée, soit égal à

$$(m(a_\infty)-1)[\infty] - \sum_{x\in F_s}[sp(x)],$$

où ∞ est le point de E_s correspondant à l'arête a_∞ et $sp(x)$ est la spécialisation du point fixe $x \in F_s$ sur E_s. De plus, le résidu de ω_s en $sp(x)$ est égal à la donnée de Hurwitz de σ en x.

Si s est un sommet de Γ_σ^*, correspondant à une droite projective E_s, qui n'est pas un bout de Γ_σ^*, il existe une fraction rationnelle non nulle $\bar{u}_s \in k(E_s)$, unique à l'addition d'une puissance p-ième près, tel que le diviseur de la forme différentielle $\omega_s := d\bar{u}_s$, qui est uniquement déterminée, soit égal à

$$(m(a_\infty)-1)[\infty] - \sum_{a\in ar^+(s)}(m(a)+1)[t_a],$$

où ∞ est le point de E_s correspondant à l'arête a_∞ et t_a est le point de E_s correspondant à l'arête a pour toute arête positive a d'origine s.

Le résultat principal de ce travail est la réciproque à ce théorème. Pour l'énoncer de façon concise, on est conduit à dégager une notion combinatoire appelée arbre de Hurwitz. Cette notion est adaptée aussi bien à l'étude des automorphismes d'ordre p des disques formels que ceux des couronnes formelles. Elle sera présentée au chapitre 5.

Nous abordons également dans ce travail certaines questions de relèvement galoisien sur les courbes. Plus précisément, soit C une courbe algébrique projective et semi-stable sur k ; on se donne également un sous-groupe fini G de $\mathrm{Aut}_k(C)$, agissant librement sur un ouvert dense. Nous considérons le problème de l'existence d'un relèvement de (C, G) en un couple $(\mathcal{C}, G)$, où $\mathcal{C}$ est un R-schéma propre et plat, normal, de fibre générique lisse sur K, de fibre spéciale C, muni d'une action de G prolongeant celle sur C. Lorsque C est lisse, B. Green et M. Matignon ont démontré que le problème admet une solution sur $R = W(k)[\sqrt[p^2]{1}]$ dans le cas où les groupes d'inertie de (C, G) sont cycliques, de p-exposant inférieur ou égal à 2 (voir [**5**] théorème III 1.3) ; toujours dans le cas lisse, une conjecture de Oort dit qu'un tel relèvement existe pour un R convenable si G est cyclique (voir [**12**] et [**13**]). Dans [**16**], M. Saïdi montre que si le revêtement de courbes semi-stables $C \to C/G$ est modérément ramifié, un relèvement existe si et seulement si le revêtement est kummérien ; dans ce cas, on peut prendre $R = W(k)$. Dans cette direction, nous montrons dans le chapitre 4 le **théorème de relèvement :**

THÉORÈME 0.2.

On suppose que les groupes d'inertie de (C, G) sont cycliques, de p-exposant inférieur ou égal à 2, et que l'action de G sur C est kummérienne. Quitte à faire une extension finie de K, il existe un R-schéma $\mathcal{C}$ normal, propre, plat, de fibre spéciale C, de fibre générique lisse et géométriquement connexe sur K, muni d'une action de G relevant celle sur C.

Le premier chapitre est consacré à des rappels succints sur les courbes semistables : Nous rappelons la définition d'une courbe stable, son application à la compactification de l'espace des modules grossier des courbes lisses de genre g (que nous n'utiliserons pas dans la suite) ; nous introduisons les déformations verselles des points d'une courbe semi-stable et enfin nous donnons un énoncé relatif au quotient d'une telle courbe par un groupe fini d'automorphismes.

Le deuxième chapitre introduit la couronne formelle sur R et ses propriétés géométriques. On y donne un certain nombre de définitions utiles pour son étude, ainsi que quelques résultats élémentaires concernant ses automorphismes.

Le troisième chapitre expose quelques techniques de recollement formel, inspirées des travaux de D. Harbater et de K. Stevenson ([**8**] et [**9**]). Dans ce travail, ces techniques sont appliquées à des questions de relèvement galoisien dans le chapitre 4 et également lors de la construction d'automorphismes d'ordre p d'un disque ou d'une couronne formelle aux chapitres 5 et 6. Pour ce qui concerne le problème du relèvement galoisien, le résultat essentiel de ce chapitre est le principe local-global (Théorème 4.1), qui montre comment un tel problème (sur des courbes) peut se traiter par voie locale. Plus précisément, si un relèvement $(\mathcal{C}, G)$ existe, et si x est un point de ramification du morphisme quotient $C \to C/G$, on obtient une action du sous-groupe d'inertie G_x de G en x sur la fibre formelle de $\mathcal{C}$ en x, c'est-à-dire sur le spectre de l'anneau local complété de $\mathcal{C}$ en x, qui est un disque formel si x est un point lisse de C et une couronne formelle si x est un point double ordinaire de C. Inversement, le principe local-global montre qu'il suffit de construire, pour tout x point de ramification de $C \to C/G$, une action de G_x sur le disque formel (resp. une couronne formelle) si x est lisse sur C (resp. est un point double de C) relevant l'action de G_x sur Spec $\hat{\mathcal{O}}_{C,x}$ pour construire un relèvement de (C, G).

Dans le quatrième chapitre, nous présentons une première construction simple d'automorphismes d'ordre une puissance de p d'une couronne formelle à partir d'automorphismes de disques formels. Ceci nous permet de relever un automorphisme d'ordre p ou p^2 d'un point double ordinaire sur k en un automorphisme d'une couronne formelle, en se ramenant à l'étude analogue pour les points lisses (voir [**5**]). En application, nous démontrons le théorème de relèvement cité plus haut.

Dans le cinquième chapitre, on commence par rappeler certains résultats concernant la réduction des μ_p-torseurs sur une courbe algébrique sur K. Ces résultats constituent l'ingrédient essentiel de la preuve du théorème 0.1. On définit ensuite la notion d'arbre de Hurwitz. Soit Γ un arbre fini, connexe. Une donnée de Hurwitz $\mathcal{H}$ sur Γ est un système $\mathcal{H} := (K, r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ où :

- K est une extension finie du corps des fractions K_0 de l'anneau de valuation discrète $R_0 := W(k)[\zeta]$, où ζ est une racine primitive p-ième de l'unité.
- r_0 est un sommet de Γ, pris comme origine de l'orientation de Γ.
- d_0 est un entier divisible par $p-1$, vérifiant $0 \leq d_0 \leq v_K(p)$.
- ϵ est une application de l'ensemble des arêtes de Γ dans $\mathbb{N}$ telle que pour toute arête a on ait $\epsilon(a) = \epsilon(\bar{a})$. En particulier, ϵ définit une métrique sur le graphe obtenu en retirant les arêtes a telles que $\epsilon(a) = 0$.
- m est une application de l'ensemble des arêtes de Γ dans $\mathbb{Z}$.
- h est une application de l'ensemble des arêtes de Γ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On demande que ces données satisfassent un certain nombre de conditions, que nous ne précisons pas ici. Un couple $(\Gamma, \mathcal{H})$ constitué d'un arbre Γ et d'une donnée de Hurwitz sur Γ est appelé arbre de Hurwitz. Un automorphisme d'ordre p d'un disque formel sur R définit canoniquement un arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$: L'arbre Γ_σ est obtenu à partir de l'arbre Γ_σ^* défini plus haut en ajoutant une arête positive a_x pour chaque point fixe x de σ, dont le sommet origine est le sommet correspondant à la composante de $\mathcal{M}(\mathcal{D}_K, \sigma)$ sur laquelle se spécialise x. Le corps K est le corps des fractions de R, le sommet r_0 correspond à l'adhérence η de la transformée stricte du point générique de la fibre spéciale du disque formel dans $\mathcal{M}(\mathcal{D}_K, \sigma)$; l'entier d_0 est la valuation de la différente de l'extension de corps valués $(\mathcal{K}, v_\eta)/(\mathcal{K}^\sigma, v_{\eta|\mathcal{K}^\sigma})$, où $\mathcal{K}$ est le corps des fractions de $R[[T]]$, et v_η est la valuation de $\mathcal{K}$ correspondant au diviseur η de $\mathcal{M}(\mathcal{D}_K, \sigma)$; l'application ϵ restreinte à Γ_σ^* est la métrique de cet arbre, et on étend cette application par 0 sur les arêtes correspondant aux points fixes ; les applications m et h sont définies quant à elles par l'intermédiaire des différentielles données par le théorème 0.1. Nous ne préciserons pas plus ici et invitons le lecteur à aller voir ce chapitre pour plus de détails. On montre alors le **théorème de réalisation :**

THÉORÈME 0.3.

Soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ *un arbre de Hurwitz, avec* $\mathcal{H} = (K, r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ *; en notant* R *l'anneau de valuation de* K*,* $(\Gamma, \mathcal{H})$ *provient d'un* R*-automorphisme d'ordre* p *de* $R[[Z]]$ *si et seulement si il vérifie les conditions* $D[i]$ *ci-dessous* ($1 \leq i \leq 3$) *:*
$D[1]$ *La racine* r_0 *est de valence* 1.

$D[2]$ *Toute arête* a *aboutissant à un sommet maximal vérifie* $\epsilon(a) = 0$ *et* $m(a) = 0$.

$D[3]$ *Soit* s *un sommet de valence supérieure ou égale à* 3.
Si s *est multiplicatif, il existe une fraction rationnelle* $\bar{u}_s$ *dans* $k(\mathbb{P}^1)$ *et une injection* j_s *de* $ar(s)$ *dans* $\mathbb{P}^1(k)$ *telles que le résidu de* $\omega_s := \dfrac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}$ *en* $j_s(a)$ *soit égal à* $h(a)$ *et que*

$$div(\omega_s) = -\sum_{a \in ar(s)} (m(a)+1)[j_s(a)].$$

Si s est additif, il existe une fraction rationnelle $\bar{u}_s$ dans $k(\mathbb{P}^1)$ et une injection j_s de $ar(s)$ dans $\mathbb{P}^1(k)$ telles que, pour $\omega_s := d\bar{u}_s$, on ait

$$div(\omega_s) = -\sum_{a \in ar(s)} (m(a)+1)[j_s(a)].$$

Nous donnons par ailleurs un critère suffisant, mais non nécessaire, pour assurer l'existence de formes différentielles ω_s vérifiant $D[3]$.

Le sixième chapitre traite des automorphismes d'ordre p des couronnes formelles, ne permutant pas les bords de la couronne. On définit également l'arbre de Hurwitz associé à un tel automorphisme, et on montre un théorème de réalisation également dans ce cadre. Enfin, on donne un résultat concernant l'arbre de Hurwitz d'un automorphisme d'ordre p d'une couronne formelle avec conducteurs aux bords plus petits que p.

Remerciements

En tout premier lieu, j'aimerais remercier chaleureusement Michel Matignon, qui a dirigé cette étude pendant trois années. Sa présence constante pour tout ce qui touchait cette thèse, que ce soit au point de vue scientifique, administratif ou humain, m'a permis de la mener à bien dans des conditions idéales. Par ailleurs, le sujet qu'il m'a confié s'est révélé passionnant et riche d'enseignements. J'y ai trouvé une source constante d'émerveillement, ce qui m'a permis de surmonter les passages difficiles inhérents à tout travail de recherche. Je l'en remercie encore une fois de tout mon coeur.

J'aimerais remercier ensuite toute l'équipe du Laboratoire de Mathématique Pures de Bordeaux, pour m'avoir accueilli en son sein. Plus particulièrement, j'aimerais remercier ici les membres de l'équipe de géométrie arithmétique, notamment Qing Liu, pour de multiples discussions mathématiques, Boas Erez, Philippe Cassou-Noguès, Lorenzo Ramero. Leur gentillesse et leur qualité d'écoute à tous a également été un soutien inestimable.

Je remercie Michel Raynaud pour avoir présenté la note aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences qui contient certains des résultats de cette thèse, pour avoir attentivement lu tout ce que j'ai pu lui présenter de mon travail cette dernière année et toujours répondu avec diligence, pour m'avoir éclairé sur certains points délicats avant que je commence la rédaction finale. Ses conseils et remarques ont été très utiles. Enfin, je le remercie pour m'avoir fait le plaisir d'être en plus rapporteur de cette thèse.

Je remercie David Harbater de m'avoir fait lui aussi le plaisir d'être rapporteur de cette thèse, et pour m'avoir accordé du temps pour lui en raconter oralement les résultats.

Je remercie messieurs les membres du jury pour leurs conseils et remarques, ainsi que pour leur attention constante lors de la soutenance.

Je remercie le MSRI de m'avoir invité à participer au semestre sur la théorie de Galois et le groupe fondamental, c'est là-bas que j'ai travaillé sur la rédaction finale, dans un environnement scientifique très stimulant, sans parler de la beauté de la région. J'en profite pour remercier chaleureusement Florian Pop, sans l'aide de qui je n'aurais probablement pas pu venir, ainsi que Leila Schnepps.

Je remercie mes parents pour leur amour, et ma famille en général qui me rappelle à l'occasion qu'il n'y a pas que les mathématiques dans l'existence.

Je dois encore dire un grand merci à tous mes amis, sans qui la vie serait bien moins belle. Que ceux que j'oublie dans la liste qui suit me pardonnent, et que ceux que je n'oublie pas ne me tiennent pas rigueur de leur ordre d'apparition : Niels Borne, Régis et Isado Blache, Jean-Nicolas Dénarié, Lenda Ait-Kaddour, Fabrice Douchin, David et Eva Remay, Laurent Derome, Cécile Boscheron, Joëlle Thollot, Matthieu Brillman, Samuel et Cécile de Toro Arias, Anthony Phan, Carine Reydy, Hugo Akrout, Eric Belleville, Etienne Matheron et Armelle, Emmanuel Fricain, Akim Bachir, Stéphane Vinatier, Gilles et Virginie Bailly-Maître, David Aubert, Renaud Toussaint, Marco et Alexandra Parenthoen, Rachid Alik, Yves Guilloux, Romain Fortunato, Jean-François Boudet, François Péry, Peter Haissinsky, Florence Gontard, Pierre Gradit, Leonardo Zapponi, Marina Monsurro, Ariane Mézard...
Certaines de ces personnes sont également des mathématiciens, et ont dû subir mes moments d'immersion totale dans le monde mathématique, écouter plus ou moins patiemment mes histoires. A ceux-là, j'aimerai dire que malheureusement pour eux, ce n'est sans doute pas fini. Alors, courage.

Enfin, merci à Georges Brassens, dont les chansons m'aident à me lever tous les matins de bonne humeur. (Enfin, il essaye).

Notations

Dans toute la suite, R désignera un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K (le plus souvent de caractéristique nulle), de corps résiduel k, supposé algébriquement clos et de caractéristique $p > 0$; π désignera une uniformisante de R, et K^a sera une clôture algébrique fixée de K.

Si M est un R-module, on notera $\overline{M}$ le k-espace vectoriel $M \otimes_R k$.

Si A est une R-algèbre, A_K (resp. $\bar{A}$) désignera $A \otimes_R K$ (resp. $A \otimes_R k$), et pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on notera $\hat{A}_{\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}^{\wedge}$ le complété de $A_{\mathfrak{p}}$ pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique.

Si X est un R-schéma, on notera $X_k := X \times_{\mathrm{Spec}\ R} \mathrm{Spec}\ k$ sa fibre spéciale et $X_K := X \times_{\mathrm{Spec}\ R} \mathrm{Spec}\ K$ sa fibre générique.

Si $T_1, \ldots, T_n$ sont des indéterminées, on notera $R\{T_1, \ldots, T_n\}$ la R-algèbre des séries restreintes, c'est à dire la sous-R-algèbre de $R[[T_1, \ldots, T_n]]$ formée des séries

$$\sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{N}^n} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} T_1^{\nu_1} \ldots T_n^{\nu_n} \text{ telles que } \lim_{\nu_1+\cdots+\nu_n\to+\infty} a_{\nu_1,\ldots,\nu_n} = 0$$

On désignera par $R[[T]]\{T^{-1}\}$ la R-algèbre des séries de Laurent $f := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} a_\nu T^\nu$, à coefficients dans R, avec $\lim_{\nu\to-\infty} a_\nu = 0$. C'est un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π et de corps résiduel $k((t))$.

Si $(A, \mathfrak{M})$ est une R-algèbre locale complète, x appartient à $\mathfrak{M}$, et m est un entier premier à p, on désignera par $(1+x)^{\frac{1}{m}} := 1 + \dfrac{1}{m}x + \ldots$ la valeur de la série du binôme en x.

CHAPITRE 1

Généralités sur les courbes semi-stables

1. Définitions

Soit S un schéma, une S-courbe semi-stable est un S-schéma X plat, dont les fibres géométriques sont connexes, réduites, de dimension 1, avec pour uniques singularités éventuelles des points doubles ordinaires.

De plus, on dit que X est une courbe stable sur S si elle est propre et de présentation finie, semi-stable, et si toute composante irréductible rationnelle d'une fibre géométrique de $X \to S$ rencontre les autres composantes en au moins trois points. Une courbe stable $X \to S$ est en particulier localement d'intersection complète, donc admet un faisceau dualisant $\omega_{X/S}$, qui est relativement ample. En fait, $\omega_{X/S}^{\otimes 3}$ est relativement très ample.

2. Espace des modules grossiers des courbes stables

L'intérêt de la notion de courbe stable est qu'elle conduit à une compactification naturelle $\overline{\mathbf{M}}_g$ de l'espace des modules grossier $\mathbf{M}_g$ des courbes lisses de genre $g \geq 2$ sur $\mathbb{Z}$. On construit tout d'abord un sous-schéma fermé $\mathbf{H}_g$ de $\mathbf{Hilb}_{\mathbb{P}^{5g-6}}^{P_g(n)}$, où $P_g(n) := (6n-1)(g-1)$, qui représente le foncteur qui à un schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes stables $f : X \to S$ munies d'un isomorphisme $\mathbb{P}(f_*\omega_{X/S}^{\otimes 3}) \to \mathbb{P}_S^{5g-6}$. Le schéma $\overline{\mathbf{M}}_g$ sera alors obtenu en prenant le quotient géométrique de $\mathbf{H}_g$ par $PGL(5g-6)$. On montre que c'est un schéma projectif sur Spec $\mathbb{Z}$.

3. Théorème de réduction semi-stable

Le théorème ci-dessous est plus ou moins équivalent à la propreté de $\overline{\mathbf{M}}_g$. Plus exactement, il énonce le critère valuatif de propreté pour le champ algébrique des courbes stables de genre g.

THÉORÈME 3.1.

Soit X_K une courbe algébrique sur K propre, lisse et géométriquement connexe, de genre supérieur ou égal à 2. Il existe une extension finie K' de K et une courbe algébrique stable sur le normalisé R' de R dans K' dont la fibre générique s'identifie à $X_K \times_{Spec\ K} Spec\ K'$.

4. Déformation des points lisses et doubles

Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les $W(k)$-algèbres locales noethériennes complètes de corps résiduel k, et les morphismes les homomorphismes de $W(k)$-algèbres. Si H une k-algèbre locale noethérienne complète et A un objet de $\mathcal{C}$, une déformation de H à A est la donnée d'un couple $(\mathcal{H}, \varphi)$ où $\mathcal{H}$ est une A-algèbre locale, complète, plate sur A et φ un k-isomorphisme de $\mathcal{H} \otimes_A k$ sur H. Si $(\mathcal{H}_1, \varphi_1)$ et $(\mathcal{H}_2, \varphi_2)$ sont deux déformations de H à A, un isomorphisme de $(\mathcal{H}_1, \varphi_1)$ sur $(\mathcal{H}_2, \varphi_2)$ est la donnée d'un A-isomorphisme Φ de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$ tel que $\varphi_2 \circ (\Phi \otimes_A k) = \varphi_1$. On note $\mathrm{Déf}_H : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}$ le foncteur qui à un objet A de $\mathcal{C}$ associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de déformations de H à A.

4.1. Déformation des points lisses.

PROPOSITION 4.1. *La déformation triviale à $W(k)$ du foncteur $\mathrm{Déf}_{k[[z]]}$ est verselle. Autrement dit, si A est un objet de $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{H}, \varphi)$ une déformation de $k[[z]]$ à A, il existe un isomorphisme de déformations*

$$(A[[Z]], A[[Z]] \otimes_A k \to k[[z]]) \to (\mathcal{H}, \varphi).$$

PREUVE. Si $(\mathcal{H}, \varphi)$ est une déformation de $k[[z]]$ à A, il existe Z_0 dans $\mathcal{H}$ relevant z. Soit Φ l'homomorphisme de $A[[Z]]$ sur $\mathcal{H}$ qui envoie Z sur Z_0 ; comme $\Phi \otimes_A k$ est un isomorphisme et $\mathcal{H}$ et $A[[Z]]$ sont complets, Φ est surjectif. De plus, si N est le noyau de Φ, la platitude de $\mathcal{H}$ sur A entraîne que $N = \mathfrak{M}_A N$, où $\mathfrak{M}_A$ est l'idéal maximal de A. Le lemme de Nakayama montre alors que $N = 0$ et Φ est donc un isomorphisme. ☐

4.2. Déformation des points doubles.

PROPOSITION 4.2. *La déformation $\dfrac{W(k)[[X,Y,T]]}{(XY-T)}$ de $\dfrac{k[[x,y]]}{(xy)}$ à $W(k)[[T]]$ du foncteur $\mathrm{Déf}_{\frac{k[[x,y]]}{(xy)}}$ est verselle. Autrement dit, si A est un objet de $\mathcal{C}$ et $(\mathcal{H}, \varphi)$ une déformation de $\dfrac{k[[x,y]]}{(xy)}$ à A, il existe un homomorphisme $u : W(k)[[T]] \to A$ tel que $\mathcal{H}$ soit isomorphe à $\dfrac{A[[X,Y]]}{(XY-u(T))}$.*

PREUVE. Soit $(\mathcal{H}, \varphi)$ une déformation de $\dfrac{k[[x,y]]}{(xy)}$ à A ; si X (resp. Y) est un relèvement de x (resp. y) dans $\mathcal{H}$ et si f appartient à $\mathfrak{M}_A^r\mathcal{H}$, on voit aisément par récurrence sur r qu'on peut écrire $f = a_0 + \sum_{\nu>0}(a_\nu X^\nu + a_{-\nu}Y^\nu) \mod \mathfrak{M}_A^{r+1}\mathcal{H}$ avec, pour tout entier ν, a_ν dans $\mathfrak{M}_A^r$.

Soit X_0 (resp. Y_0) un relèvement de x (resp. y) dans $\mathcal{H}$. Comme X_0Y_0 appartient à $\mathfrak{M}_A\mathcal{H}$, on peut écrire $X_0Y_0 = a_0(0) + \sum_{\nu>0}(a_\nu(0)X_0^\nu + a_{-\nu}(0)Y_0^\nu) \mod \mathfrak{M}_A^2\mathcal{H}$ avec, pour tout entier ν, a_ν dans $\mathfrak{M}_A$. En posant $X_1 := X_0 - \sum_{\nu>0}(a_{-\nu}(0)Y_0^{\nu-1}$ et $Y_1 := Y_0 - \sum_{\nu>0}(a_\nu(0)X_0^{\nu-1}$, on obtient que $X_1Y_1 - a_0(0)$ appartient à $\mathfrak{M}_A^2\mathcal{H}$. Par récurrence, on construit ainsi une suite $(a_0(n), X_n, Y_n)$ avec $a_0(n) \in \mathfrak{M}_A^{n+1}$, X_n relève x, Y_n relève y, et telle que pour tout entier n, $X_{n+1} \equiv X_n \mod \mathfrak{M}_A^{n+1}\mathcal{H}$, $Y_{n+1} \equiv Y_n \mod \mathfrak{M}_A^{n+1}\mathcal{H}$ et $X_nY_n - \sum_{\ell<n} a_0(\ell)$ appartienne à $\mathfrak{M}_A^{n+1}\mathcal{H}$. En posant $X := \lim_{n\to+\infty} X_n$, $Y := \lim_{n\to+\infty} Y_n$ et $a := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_0(n)$, on trouve $XY = a$. On obtient ainsi un homomorphisme Φ de $\dfrac{A[[X,Y]]}{(XY-a)}$ sur $\mathcal{H}$ qui se réduit modulo $\mathfrak{M}_A$ en un isomorphisme. On conclut comme pour le cas des points lisses que Φ est un isomorphisme. L'homomorphisme cherché u envoie T sur a. $\square$

5. Action d'un groupe fini sur une courbe semi-stable

Rappelons sans démonstration la proposition 4.2 de [**11**] :

PROPOSITION 5.1. *Soit $X \to S$ une courbe semi-stable projective sur un schéma S normal, intègre, excellent. On suppose que G est un sous-groupe fini de $\mathrm{Aut}_S X$, alors le quotient X/G existe et c'est une courbe semi-stable sur S. Le morphisme $X \to X/G$ est fini et envoie le lieu lisse de $X \to S$ dans celui de $X/G \to S$.*

CHAPITRE 2

La couronne formelle d'épaisseur e

Soient K un corps discrètement valué complet, d'anneau de valuation R, et K^a une clôture algébrique de K. On notera π une uniformisante de R, et k son corps résiduel, qu'on supposera algébriquement clos et de caractéristique $p > 0$. Le but de ce chapitre est de rassembler quelques notions et résultats utiles dans l'étude des automorphismes de la couronne formelle d'épaisseur e sur R, où e est un entier strictement positif. Commençons par rappeler la

DÉFINITION 0.2. On appelle couronne formelle d'épaisseur e le R-schéma

$$\mathcal{C}_e := \mathrm{Spec}\ \frac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1Z_2 - \pi^e)}.$$

1. Premières propriétés et définitions

L'anneau $\mathcal{A}_e := \dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1Z_2 - \pi^e)}$ est local complet, d'idéal maximal (π, Z_1, Z_2), intègre, noethérien et de dimension 2. Un élément f de $\mathcal{A}_e$ s'écrit de manière unique comme une série de Laurent à coefficients dans R

$$(*) \qquad f := \sum_{\nu \geq 0} a_\nu Z_1^\nu + \sum_{\nu > 0} a_{-\nu} Z_2^\nu.$$

Cette remarque conduit à la

DÉFINITION 1.1. On appelle coordonnée de Laurent sur la couronne formelle d'épaisseur e un élément de $\mathcal{A}_e$ tel que $\dfrac{\pi^e}{Z}$ appartienne à $\mathcal{A}_e$ et, pour tout f dans $\mathcal{A}_e$, il existe une unique famille $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$f := a_0 + \sum_{\nu > 0} (a_\nu Z^\nu + a_{-\nu} (\frac{\pi^e}{Z})^\nu).$$

Autrement dit, si $Z' := \dfrac{\pi^e}{Z}$, on a $\mathcal{A}_e = \dfrac{R[[Z, Z']]}{(ZZ' - \pi^e)}$.

DÉFINITION 1.2. On appellera **bord** de la couronne formelle le point générique d'une composante irréductible de la fibre spéciale de $\mathcal{C}_e$. Une couronne formelle possède donc deux bords. Si Z est une coordonnée de Laurent sur $\mathcal{C}_e$, alors l'idéal premier $\mathfrak{p}_Z := (\pi, \dfrac{\pi^e}{Z})$ de $\mathcal{A}_e$ est un bord de $\mathcal{C}_e$. On dira que $\mathfrak{p}_Z$ est le bord correspondant à Z.

Si η est un bord, l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_e,\eta}$ est un anneau de valuation discrète, d'uniformisante π. On notera v_η la valuation correspondante du corps des fractions $\mathcal{K}_e$ de $\mathcal{A}_e$ qui prolonge v_K. Le corps résiduel de $(\mathcal{K}_e, v_\eta)$ est un corps de séries de Laurent en une variable sur k, qu'on notera $k((\eta))$. Si Z est une coordonnée de Laurent avec $\eta = \mathfrak{p}_Z$, on notera également $v_Z = v_\eta$; on a alors $k((\eta)) = k((z))$, où $z = Z \mod \pi$. On vérifie que si f appartient à $\mathcal{A}_e$, $f = a_0 + \sum_{\nu>0}(a_\nu Z^\nu + a_{-\nu}(\frac{\pi^e}{Z})^\nu)$, alors

$$v_Z(f) = \min_{\nu\in\mathbb{Z}}(v_K(a_\nu) + e\max(0; -\nu)).$$

On remarquera que le complété de $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_e,\eta}$ s'identifie à $R[[Z]]\{Z^{-1}\}$.

Le corps résiduel $k((\eta))$ de $(\mathcal{K}_e, v_\eta)$ est muni d'une valuation discrète ord_η, normalisée de façon à ce qu'une uniformisante de $k((\eta))$ ait pour valuation 1. Si f est non nul dans $\mathcal{K}_e$, f s'écrit de manière unique $f = \pi^{v_\eta(f)}f_0$, avec f_0 dans $\mathcal{O}_{\mathcal{C}_e,\eta}$. On note alors $\mathrm{ord}_\eta(f) := \mathrm{ord}_\eta(\bar{f}_0)$, où $\bar{f}_0$ est l'image résiduelle de f_0 dans $k((\eta))$. Si Z est une coordonnée de Laurent correspondant au bord η, on vérifie que pour $f = a_0 + \sum_{\nu>0}(a_\nu Z^\nu + a_{-\nu}(\frac{\pi^e}{Z})^\nu)$,

$$\mathrm{ord}_Z(f) := \mathrm{ord}_\eta(f) = \min\{\nu \in \mathbb{Z} | v_K(a_\nu) + e\max(0; -\nu) = v_Z(f)\}$$

L'application $w_Z : \mathcal{K}_e \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\cup\{\infty\}$, qui à f non nul associe $(v_\eta(f), ord_\eta(f))$ est une valuation de rang 2, de corps résiduel k, en munissant $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'ordre lexicographique.

2. Théorème de préparation de Weierstrass et conséquences

Soit d un entier strictement positif. Rappelons qu'un polynôme de degré d $\displaystyle\sum_{i=0}^{d} c_i T^i$ à coefficients dans R est dit distingué s'il est unitaire et si π divise c_i pour $0 \le i < d$. On dispose alors d'un énoncé de type préparation de Weierstrass :

Lemme 2.1.
Soient Z une coordonnée de Laurent de $\mathcal{C}_e$, $Z' = \frac{\pi^e}{Z}$, et $f \in \mathcal{A}_e$, non inversible, avec $v_{Z'}(f) = 0$, (en particulier, $ord_{Z'}(f) > 0$) ; il existe alors un polynôme distingué P à coefficients dans R et un inversible U de $\mathcal{A}_e$, tels que :

$$Z^{ord_{Z'}(f)}f = \pi^{v_Z(f)}P(Z)U.$$

De plus, le degré de P est alors $ord_Z(f) + ord_{Z'}(f)$.

Par manque de référence adéquate dans la littérature, nous en donnons ci-dessous une preuve, très technique, qui consiste à se ramener au théorème de préparation de Weierstrass pour le disque formel. Le lecteur pourra sans inconvénient la laisser de côté dans un premier temps (ou définitivement s'il est très confiant).

PREUVE. Posons $\nu_0 := \mathrm{ord}_{Z'}(f)$, on définit les endomorphismes de $\mathcal{A}_e$ R-linéaires ω, φ, $pr^{>0}$, $pr^{\leq 0}$ par :

$$\omega(\sum_{\nu\geq 0} b_\nu Z^\nu + \sum_{\nu>0} b_{-\nu} Z'^\nu) := \sum_{\nu\geq 0} b_{-(\nu+\nu_0)} Z'^\nu$$

$$\varphi(\sum_{\nu\geq 0} b_\nu Z^\nu + \sum_{\nu>0} b_{-\nu} Z'^\nu) := \sum_{\nu\geq 0} b_\nu Z^\nu + \sum_{0<\nu<\nu_0} b_{-\nu} Z'^\nu$$

$$pr^{>0}(\sum_{\nu\geq 0} b_\nu Z^\nu + \sum_{\nu>0} b_{-\nu} Z'^\nu) := \sum_{\nu>0} b_\nu Z^\nu$$

$$pr^{\leq 0} := id_{\mathcal{A}_e} - pr^{>0}$$

Remarquons que, pour tout $g \in \mathcal{A}_e$, $g = \varphi(g) + Z'^{\nu_0}\omega(g)$. Montrons qu'il existe $q \in \mathcal{A}_e$ tel que $\omega(qf) = 1$. Pour f dans $\mathcal{A}_e$, $\omega(qf) = \omega(q\varphi(f)) + \omega(Z'^{\nu_0} q\omega(f))$. Or, si $h \in \mathcal{A}_e$, $\omega(Z'^{\nu_0}h) = pr^{\leq 0}(h)$. Il suit :

$$\forall q \in \mathcal{A}_e \quad \omega(qf) = q\omega(f) + \omega(q\varphi(f)) - pr^{>0}(q\omega(f)).$$

Soit $\theta : \mathcal{A}_e \to \mathcal{A}_e$ l'opérateur $\omega \circ \frac{\varphi(f)}{\omega(f)} - pr^{>0}$, l'élément $\omega(f)$ étant inversible dans $\mathcal{A}_e$, trouver q tel que $\omega(qf) = 1$ revient à trouver $W := q\omega(f)$ tel que $(id_{\mathcal{A}_e} + \theta)(W) = 1$. Par définition de ν_0, $\varphi(f) \in (\pi, Z)$, donc $\frac{\varphi(f)}{\omega(f)}\mathcal{A}_e \subset (\pi, Z)$. Posons $\delta := \omega \circ \frac{\varphi(f)}{\omega(f)}$. On a $\theta(1) = \delta(1)$. Comme $pr^{>0} \circ \omega = 0$, il suit par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\theta^n(1) = \delta^n(1)$. Ecrivons $\frac{\varphi(f)}{\omega(f)} := \pi f_1 + Z f_2$, $\omega(Zf_2)$ est divisible par π^e dans $\mathcal{A}_e$. Donc $\delta(1) \in \pi\mathcal{A}_e$. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\theta^n(1) = \delta^n(1) \in \pi^n\mathcal{A}_e$. Posons alors $W := \sum_{h\geq 0}(-1)^h \theta^{\circ h}(1)$. On a $(id_{\mathcal{A}_e} + \theta)(W) = 1$. Soit $q := W\omega(f)^{-1}$. On a alors $\omega(qf) = 1$. En regardant le coefficient de Z'^{ν_0} dans qf, on en déduit aisément que q est inversible. Donc, $f = q^{-1}h$, où les coefficients de Z'^ν pour $\nu > \nu_0$ dans h sont tous nuls, i.e. $Z^{\nu_0}h \in R[[Z]]$. Le théorème de préparation de Weierstrass dans $R[[Z]]$ permet donc d'écrire $Z^{\nu_0}h = \pi^r P u_1$, avec $r \in \mathbb{N}$, u_1 inversible et P un polynôme distingué. Si $U := q^{-1}u_1$, on a $Z^{\nu_0}f = \pi^r PU$. Comme

P est unitaire en Z, on a $v_Z(P) = 0$. Donc $v_Z(f) = r$. De plus, le degré de P vaut :

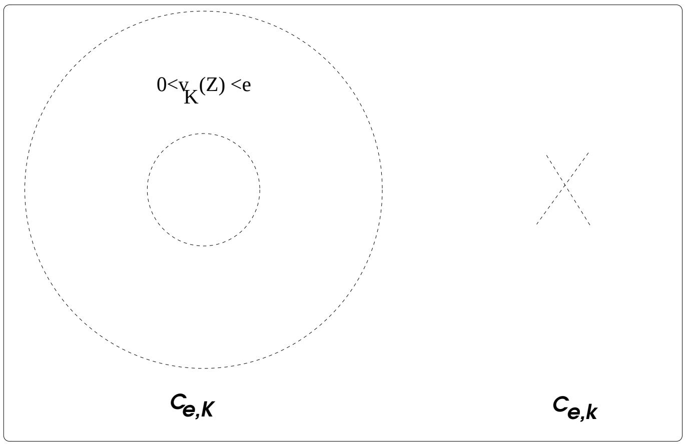
$$\deg(P) = \mathrm{ord}_Z(P) = \mathrm{ord}_Z(f) + \nu_0 = \mathrm{ord}_Z(f) + \mathrm{ord}_{Z'}(f).$$

□

COROLLAIRE 2.2. *L'anneau $\mathcal{A}_e \otimes_R K$ est principal. De plus, en choisissant une coordonnée de Laurent Z sur la couronne formelle $\mathcal{C}_e$ d'épaisseur e sur R, les points fermés de la fibre générique de la couronne formelle $\mathcal{C}_e$ d'épaisseur e s'identifient aux points de la couronne ouverte sur K^a*

$$C_e := \{\alpha \in K^a | 0 < v_K(\alpha) < e\},$$

modulo l'action de $Gal(K^a/K)$.



LEMME 2.3.
Soit (z'_1, z'_2) un couple d'éléments de $\overline{\mathcal{A}_e} := \dfrac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1 z_2)}$, tel que z'_1 (resp. z'_2) soit une uniformisante de la branche $z_2 = 0$ (resp. $z_1 = 0$). Il existe alors des coordonnées de Laurent Z'_1 et Z'_2 sur $\mathcal{C}_e$ telles que $Z'_1 \mod \pi = z'_1$, $Z'_2 \mod \pi = z'_2$ et $Z'_1 Z'_2 = \omega$, où $\omega \in R$, $v_K(\omega) = e$.

PREUVE. Comme z'_1 est une uniformisante de la branche $z_2 = 0$, on peut écrire $z'_1 = \alpha_0 z_1 (1 + \sum_{\nu>0} \alpha_\nu z_1^\nu)$. De même, $z'_2 = \beta_0 z_2 (1 + \sum_{\nu>0} \beta_\nu z_2^\nu)$. Relevons α_ν et β_ν en a_ν, b_ν dans R. Posons $\omega = a_0 b_0 \pi^e$ et

$$Z'_1 := a_0 Z_1 (1 + \sum_{\nu>0} a_\nu Z_1^\nu)(1 + \sum_{\nu>0} b_\nu Z_2^\nu)^{-1}$$

Alors, Z_1' est une coordonnée de Laurent, et si $Z_2' := \frac{\omega}{Z_1'}$, alors

$$Z_2' := b_0 Z_2 (1 + \sum_{\nu>0} a_\nu Z_1^\nu)^{-1} (1 + \sum_{\nu>0} b_\nu Z_2^\nu)$$

Enfin, il est clair que $Z_i' \mod \pi = z_i'$ pour $i = 1, 2$. □

3. Automorphismes de $\mathcal{A}_e$ sur R

Soient Z une coordonnée de Laurent sur $\mathcal{C}_e$, correspondant au bord η, et η' l'autre bord de $\mathcal{C}_e$, un R-automorphisme σ de $\mathcal{C}_e$ est déterminé par la série σZ. De plus, soit σ permute les bords, auquel cas σZ est une coordonnée de Laurent relative au bord η', soit σ laisse fixe η et η', auquel cas σZ est une coordonnée de Laurent relative au bord η. Dans la suite, on va s'intéresser à des R-automorphismes d'ordre fini de $\mathcal{C}_e$. Dans le cas d'une action modérée, on a le résultat élémentaire :

Proposition 3.1.
Soit σ un automorphisme d'ordre n premier à p de $\mathcal{C}_e$, ne permutant pas les bords, tel que σ induit un automorphisme d'ordre n des deux composantes irréductibles de $\mathcal{C}_{e,k}$. Alors, il existe une coordonnée de Laurent Z et une racine primitive n-ième θ de l'unité dans R tels que $\sigma(Z) = \theta Z$, et donc $\sigma(Z') = \theta^{-1} Z'$ pour $Z' := \dfrac{\pi^e}{Z}$.

Remarque 3.2. Lorsqu'il existe des paramètres z et z' sur les deux branches de la fibre spéciale de la couronne formelle $\mathcal{C}_e$ tels que l'action induite sur $\overline{\mathcal{A}_e}$ soit donnée par $\bar{\sigma}(z) = \bar{\theta} z$, et $\bar{\sigma}(z') = \bar{\theta}^{-1} z'$, où $\bar{\theta}$ est une racine primitive n-ième de l'unité dans k, $(n, p) = 1$, on dit que l'action est **kummérienne**.

preuve.
On peut écrire $\sigma(Z_1) = s Z_1 (1 + \sum_{\nu>0} (a_\nu Z_1^\nu + a_{-\nu} Z_2^\nu))$. Alors, il existe une unique racine primitive n-ième θ de l'unité dans R tel que $s = \theta \mod \pi$. Posons $Z := Z_1 + \theta^{-1}\sigma(Z_1) + \cdots + \theta^{-(n-1)}\sigma^{n-1}(Z_1)$. Il suit que $\sigma(Z) = \theta Z$. Il reste à voir que Z est une coordonnée de Laurent. Or, $\dfrac{Z}{Z_1} = n \mod (\pi, Z_1, Z_2)$, donc $\dfrac{Z}{Z_1}$ est un inversible de $\mathcal{A}_e$. □

La R-algèbre $\mathcal{A}_e$ possède des involutions naturelles permutant les bords, à savoir les involutions σ_a (a inversible de R) définies par $\sigma_a(Z_1) = a Z_2$. Le résultat suivant nous dit que réciproquement, toute involution permutant les bords est conjuguée dans $\mathrm{Aut}_R\mathcal{A}_e$ à un σ_a pour a convenable :

PROPOSITION 3.3.
Pour toute involution σ de la couronne formelle $\mathcal{C}_e$ permutant les bords, il existe une coordonnée de Laurent Z sur $\mathcal{C}_e$ et un élément ω de R de valuation e, tels que

$$\sigma(Z) = \frac{\omega}{Z}.$$

PREUVE.

Soit σ une telle involution. On peut écrire, modulo π, $\sigma(z_1) = z_2 u$, où u est un inversible de $\overline{\mathcal{A}_e}$. Donc, quitte à changer d'uniformisante z_2, on peut supposer que $\sigma(z_1) = z_2$ (et donc que $\sigma(z_2) = z_1$).

On écrit à présent $\sigma(Z_1) := Z_2(\sum_{\nu\geq 0} a_\nu Z_1^\nu + \sum_{\nu>0} a_{-\nu} Z_2^\nu)$. On a alors $v_K(a_\nu) \geq 1$ pour tout ν non nul. On peut donc écrire $\sigma(Z_1) = Z_2(1+\pi V)^{-1}$. En appliquant σ à cette égalité, on trouve $\sigma(Z_2) = Z_1(1+\pi\sigma(V))$. Or, comme $\sigma(Z_1)\sigma(Z_2) = \pi^e$, on en déduit que V est invariant par σ.

Soit W un inversible de $\mathcal{A}_e$. Posons $Z := Z_1 W$. On cherche W et ω tels que $\sigma(Z) = \frac{\omega}{Z}$. On doit donc résoudre l'équation $\pi^e W\sigma(W) = \omega(1+\pi V)$. On va trouver W et ω par approximations successives :

Posons $W_0 := 1$ et $\alpha_0 = 1$. On construit par récurrence des suites $(W_n) \in \mathcal{A}_e^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in R^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout entier n :

$$W_{n+1} = W_n \mod \pi^{n+1}, \alpha_{n+1} = \alpha_n \mod \pi^{n+1} \text{ et}$$

$$(W_n\sigma(W_n) - \alpha_n(1+\pi V)) \in \pi^{n+1}\mathcal{A}_e^\sigma.$$

On suppose donc construits $W_0, \ldots, W_n$ et $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$. Remarquons déjà que $W_n = 1 \mod \pi$. Notons $W_n\sigma(W_n) := \alpha_n(1+\pi V) + \pi^{n+1}g$, où g est invariant par σ dans $\mathcal{A}_e$. Il existe alors f dans $\mathcal{A}_e$ et $b \in R$ tels que $g = b + f + \sigma f \mod \pi$. (En effet, modulo π, $\overline{g} = \alpha_0 + \sum_{\nu>0} \alpha_\nu z_1^\nu + \sum_{\nu<0} \alpha_\nu z_2^\nu$; l'invariance de g par σ entraine que $\alpha_\nu = \alpha_{-\nu}$ pour tout ν entier. Relevons α_ν en a_ν dans R et posons $f := \sum_{\nu>0} a_\nu Z_1^\nu$, $b := a_0$, on a alors la relation attendue). Si on pose

$W_{n+1} = W_n - \pi^{n+1} f$ et $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \pi^{n+1} b$, on trouve :

$$\begin{aligned}
W_{n+1}\sigma(W_{n+1}) = &\quad (W_n - \pi^{n+1} f)(\sigma(W_n) - \pi^{n+1}\sigma f) \\
= &\quad W_n\sigma(W_n) - \pi^{n+1} W_n \sigma f - \pi^{n+1}\sigma(W_n) f + \pi^{2n+2} f\sigma f \\
= &\quad W_n\sigma(W_n) - \pi^{n+1}\sigma f - \pi^{n+1} f \mod \pi^{n+2} \\
= &\quad \alpha_n(1+\pi V) + \pi^{n+1}(g - f - \sigma f) \mod \pi^{n+2} \\
= &\quad \alpha_n(1+\pi V) + \pi^{n+1} b \mod \pi^{n+2} \\
= &\quad \alpha_{n+1}(1+\pi V) \mod \pi^{n+2}
\end{aligned}$$

Si on pose maintenant $W := \lim_{n\to+\infty} W_n$ et $\omega := \pi^e \lim_{n\to+\infty} \alpha_n$, alors

$$\pi^e W\sigma(W) = \omega(1+\pi V) \text{ et donc } \sigma(Z) = \frac{\omega}{Z}.$$

□

CHAPITRE 3

Techniques de recollement formel

Soit K un corps discrètement valué complet, de corps résiduel k algébriquement clos, et R son anneau de valuation ; considérons une R-courbe formelle semi-stable $\mathcal{X}$, si x est un point fermé de la fibre spéciale $\mathcal{X}_k := \mathcal{X} \times_R k$, $\mathcal{X}$ peut alors être vue comme recollement de la fibre formelle de x et de l'ouvert $\mathcal{X} \setminus \{x\}$. Les données du recollement sont inscrites dans une suite exacte de R-modules (2.1). Cette remarque est le point de départ d'une technique de construction de relèvements sur R de revêtements de courbes semi-stables sur k (4.1).

1. Un lemme d'algèbre topologique

Le lemme suivant sera utilisé constamment dans la suite. On fixe une uniformisante π de R. Par un R-module M complet pour la topologie π-adique, nous sous-entendrons ici un module séparé et complet. On rappelle que pour tout R-module M, on désigne par $\overline{M}$ le k-espace vectoriel $M \otimes_R k$.

LEMME 1.1.
(i) Soit $M_1 \xrightarrow{\phi} M_2$ un homomorphisme de R-modules, on suppose M_1 complet et M_2 séparé pour la topologie π-adique.

Si l'homomorphisme de k-espaces vectoriels $\overline{M_1} \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{M_2}$ est surjectif, alors ϕ est surjectif.
(ii) Sous les mêmes hypothèses, si de plus M_2 est plat sur R et $\overline{\phi}$ est un isomorphisme de k-espaces vectoriels, alors ϕ est un isomorphisme de R-modules.
(iii) Soient $u : M_1 \longrightarrow M_2$ et $v : M_2 \longrightarrow M_3$ des homomorphismes de R-modules tels que $v \circ u = 0$, on suppose M_1 et M_2 complets, et M_3 séparé pour la topologie π-adique. On demande également que les modules M_2 et M_3 soient plats sur R, c'est-à-dire sans torsion.

Si la suite de k-espaces vectoriels $0 \longrightarrow \overline{M_1} \xrightarrow{\overline{u}} \overline{M_2} \xrightarrow{\overline{v}} \overline{M_3} \longrightarrow 0$ est exacte, il en est de même de la suite de R-modules $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{u} M_2 \xrightarrow{v} M_3 \longrightarrow 0$.

PREUVE.
(i) Soit $\beta \in M_2$. Comme $\overline{\phi}$ est surjectif, il existe α_0 dans M_1 tel que $\phi(\alpha_0) = \beta - \pi\beta_1$, où $\beta_1 \in M_2$. On construit alors par récurrence deux suites α_n et β_n telles que $\phi(\alpha_n) = \beta_n - \pi\beta_{n+1}$. Si $\alpha := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n \pi^n$, $\phi(\alpha) = \beta$.
(ii) Soit N le noyau de ϕ. Comme N est fermé dans M_1, il est complet, et en

particulier séparé. De la suite exacte $0 \longrightarrow N \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \longrightarrow 0$ et de la platitude de M_2 sur R, on déduit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow \overline{M_1} \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{M_2} \longrightarrow 0$$

Il suit de l'hypothèse que $N = \pi N$, et donc $N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi^n N = 0$.
(iii) L'exactitude à droite résulte de (i). Pour finir, on applique (ii) à l'homomorphisme $\phi : \ M_1 \longrightarrow \ker(v)$. (Remarquons que $\ker(v)$ est plat sur R car sans torsion). $\square$

2. Une suite exacte de recollement

Soit $\mathcal{X}$ un R-schéma formel affine, de dimension 1, topologiquement de type fini, normal, plat sur R. On suppose que la fibre spéciale X de $\mathcal{X}$ est semi-stable. Soient x un point fermé de $\mathcal{X}$, et $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \{x\}$. On distinguera les trois cas suivants :
cas (a) : x est un point lisse de X et X est irréductible. Le diagramme $[D_a]$ ci-dessous est commutatif : (Les morphismes h, h' et ϕ sont les homomorphismes de localisation-complétion.)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(\mathcal{X}') & \xleftarrow{\rho_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}} & \mathcal{O}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\hat{\rho}_{\mathcal{X},x}} & \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \\
{\scriptstyle h'}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\
\mathcal{O}(\mathcal{X}')^{\wedge}_{(\pi)} & \underset{\rho}{\xleftarrow{\simeq}} & \mathcal{O}(\mathcal{X})^{\wedge}_{(\pi)} & \underset{\psi}{\longrightarrow} & (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}
\end{array}$$

cas (b1) : x est un point double ordinaire de X, et X est irréductible. Le diagramme $[D_b^1]$ ci-dessous est commutatif : (Les morphismes h, h' et ϕ sont les homomorphismes de localisation-complétion.)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}(\mathcal{X}') & \xleftarrow{\rho_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}} & \mathcal{O}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\hat{\rho}_{\mathcal{X},x}} & \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \\
{\scriptstyle h'}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\
\mathcal{O}(\mathcal{X}')^{\wedge}_{(\pi)} & \underset{\rho}{\xleftarrow{\simeq}} & \mathcal{O}(\mathcal{X})^{\wedge}_{(\pi)} & \xrightarrow{\psi} & (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_1} \times (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_2}
\end{array}$$

cas (b2) : x est un point double ordinaire de X, et X est formé de deux composantes irréductibles passant par x, correspondant aux deux idéaux premiers ouverts minimaux $\mathfrak{p}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ de $\mathcal{O}(\mathcal{X})$. Le diagramme $[D_b^2]$ ci-dessous est commutatif :

(Les morphismes h, h' et ϕ sont les homomorphismes de localisation-complétion.)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(\mathcal{X}') \arrow[d, "h'"'] & \mathcal{O}(\mathcal{X}) \arrow[l, "\rho_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}"'] \arrow[r, "\hat{\rho}_{\mathcal{X},x}"] \arrow[d, "h"'] & \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \arrow[d, "\phi"] \\ \mathcal{O}(\mathcal{X}')^{\wedge}_{\mathfrak{p}_1} \times \mathcal{O}(\mathcal{X}')^{\wedge}_{\mathfrak{p}_2} & \mathcal{O}(\mathcal{X})^{\wedge}_{\mathfrak{p}_1} \times \mathcal{O}(\mathcal{X})^{\wedge}_{\mathfrak{p}_2} \arrow[l, "\simeq"', "\rho"] \arrow[r, "\psi"] & (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_1} \times (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_2} \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 2.1. *Soient $\mathcal{X}$ une courbe formelle affine, plate et topologiquement de type fini sur R, x un point fermé de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}' := \mathcal{X} \setminus \{x\}$.*
(a) Si x est un point lisse de la fibre spéciale de $\mathcal{X}$, quitte à restreindre $\mathcal{X}$, la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}(\mathcal{X}') \times \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \xrightarrow{\theta} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)} \longrightarrow 0$$

où les homomorphismes Δ et θ sont définis par $\Delta(f) = (\rho_{\mathcal{X},\mathcal{X}'}(f), \hat{\rho}_{\mathcal{X},x}(f))$ et $\theta(f', g) = \psi \circ \rho^{-1} \circ h'(f') - \phi(g)$.
(b) Si x est un point double ordinaire de la fibre spéciale de $\mathcal{X}$, quitte à restreindre $\mathcal{X}$, la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{O}(\mathcal{X}') \times \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \xrightarrow{\theta} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_1} \times (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_2} \longrightarrow 0$$

où les homomorphismes Δ et θ sont encore définis comme ci-dessus.

REMARQUE 2.2. Cette suite exacte apparait dans les travaux d'Harbater et Stevenson ([**9**] section 1) dans le contexte d'égale caractéristique, pour des courbes à singularités quelconques.

PREUVE.
Il résulte de la commutativité des diagrammes $[D_a]$ dans le cas (a), $[D_b^2]$ ou $[D_b^1]$ dans le cas (b), que $\theta \circ \Delta = 0$. On va donc pouvoir appliquer le lemme 1.1(iii). Regardons maintenant comment se présente la situation modulo π.
(a) On commence par traiter le cas où la fibre spéciale X de $\mathcal{X}$ est la droite affine sur k. La suite ci-dessous est exacte

$$0 \longrightarrow k[t] \xrightarrow{\Delta} k[t, t^{-1}] \times k[[t]] \xrightarrow{-} k((t)) \longrightarrow 0$$

Dans le cas général, quitte à restreindre X, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $f : X \to \text{Spec } k[t]$ tel que $f^{-1}(\mathfrak{p}) = \{x\}$, où $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier (t) de $k[t]$. Or, $X \times_{\text{Spec } k[t]} \text{Spec } k[t, t^{-1}] = f^{-1}(\text{Spec } k[t, t^{-1}]) = X \setminus \{x\} = X'$, d'où $\mathcal{O}(X) \otimes_{k[t]} k[t, t^{-1}] = \mathcal{O}(X')$. De plus, $\mathcal{O}(X) \otimes_{k[t]} k[[t]] \simeq \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$, et

$\mathcal{O}(X) \otimes_{k[t]} k((t)) \simeq \overline{(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}}$. Un morphisme étale étant plat, la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{O}(\mathcal{X})} \xrightarrow{\overline{\Delta}} \overline{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} \times \overline{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} \xrightarrow{\overline{\theta}} \overline{(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{(\pi)}} \longrightarrow 0$$

On applique alors le lemme 1.1(iii) pour obtenir la suite exacte annoncée.
(b) On part de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{k[t_1,t_2]}{(t_1t_2)} \xrightarrow{\Delta} k[t_1,t_1^{-1}] \times k[t_2,t_2^{-1}] \times \frac{k[[t_1,t_2]]}{(t_1t_2)} \xrightarrow{-} k((t_1)) \times k((t_2)) \longrightarrow 0$$

On en déduit le résultat comme précédemment si X est étale au-dessus de Spec $\frac{k[t_1,t_2]}{(t_1t_2)}$, avec un unique point double au-dessus de $\mathfrak{p} := (t_1,t_2)$. Dans le cas général, quitte à restreindre X, on peut supposer qu'il existe des morphismes étales $Z \xrightarrow{g} X$ et $Z \xrightarrow{f}$ Spec $\frac{k[t_1,t_2]}{(t_1t_2)}$, avec g surjectif et $g^{-1}(x) = f^{-1}(\mathfrak{p}) = \{z\}$, où z est l'unique point double de Z. Or, la suite ci dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(Z) \longrightarrow \mathcal{O}(Z\setminus\{z\}) \times \hat{\mathcal{O}}_{Z,z} \longrightarrow (\hat{\mathcal{O}}_{Z,z})^\wedge_{\eta_1'} \times (\hat{\mathcal{O}}_{Z,z})^\wedge_{\eta_2'} \longrightarrow 0$$

De plus, $\mathcal{O}(Z\setminus\{z\}) = \mathcal{O}(X\setminus\{x\}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(Z)$, $\hat{\mathcal{O}}_{Z,z} = \hat{\mathcal{O}}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(Z)$ et $(\hat{\mathcal{O}}_{Z,z})^\wedge_{\eta_1'} \times (\hat{\mathcal{O}}_{Z,z})^\wedge_{\eta_2'} = ((\hat{\mathcal{O}}_{X,x})^\wedge_{\eta_1} \times (\hat{\mathcal{O}}_{X,x})^\wedge_{\eta_2}) \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(Z)$. On déduit de la fidèle platitude de g que la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{O}(\mathcal{X})} \xrightarrow{\Delta} \overline{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} \times \overline{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} \xrightarrow{-} \overline{(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{\eta_1}} \times \overline{(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^\wedge_{\eta_2}} \longrightarrow 0.$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le lemme 1.1(iii). $\square$

Exemple 2.3.
Si $\mathcal{X}$ est le disque unité fermé standard, c'est-à-dire $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}\ R\{T\}$, et $x := (\pi, T)$, la suite exacte (a) donne

$$0 \longrightarrow R\{T\} \xrightarrow{\Delta} R\{T,T^{-1}\} \times R[[T]] \xrightarrow{-} R[[T]]\{T^{-1}\} \longrightarrow 0.$$

Exemple 2.4.
Si $\mathcal{X}$ est la couronne fermée standard d'épaisseur e, c'est-à-dire $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}\ \dfrac{R\{T_1,T_2\}}{(T_1T_2-\pi^e)}$, et $x := (\pi, T_1, T_2)$, la suite exacte (b) donne

$$0 \to \frac{R\{T_1,T_2\}}{(T_1T_2-\pi^e)} \xrightarrow{\Delta} R\{T_1,T_1^{-1}\} \times R\{T_2,T_2^{-1}\} \times \frac{R[[T_1,T_2]]}{(T_1T_2-\pi^e)} \xrightarrow{\theta} R[[T_1]]\{T_1^{-1}\} \times R[[T_2]]\{T_2^{-1}\} \to 0$$

où $\theta(f,g,h) = (f-h, g-h)$ (avec les identifications évidentes en termes de série de Laurent).

3. Lemmes de recollement

Les lemmes qui suivent seront fondamentaux dans la construction donnée au chapitre 5 d'automorphismes du disque formel à partir d'un arbre de Hurwitz. L'idée est de construire un homomorphisme surjectif semblable à l'homomorphisme θ de la suite exacte de recollement 2.1. Alors, dans certains cas particuliers, comme par exemple dans les lemmes qui suivent, il est aisé de reconnaître le noyau de θ, en regardant ce qui se passe en réduction. Nous donnons une preuve complète dans le premier cas, pour illustrer la simplicité de la méthode. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier le deuxième lemme.

LEMME 3.1. *On se donne des éléments $a_1, \dots, a_r$ de R distincts deux à deux modulo π. On note, pour i de 1 à r, α_i (resp. β_i) l'injection canonique de la R-algèbre $R\{Z, (Z-a_j)^{-1}\}_{1\le j\le r}$ (resp. $R[[X_i]]$) dans $R[[Z-a_i]]\{(Z-a_i)^{-1}\}$ (resp. $R[[X_i]]\{X_i^{-1}\}$). On se donne également des isomorphismes de R-algèbres $\psi_i : R[[X_i]]\{X_i^{-1}\} \to R[[Z-a_i]]\{(Z-a_i)^{-1}\}$.*

Si θ est l'homomorphisme de R-module de $R\{Z,(Z-a_j)^{-1}\}_{1\le j\le r}\times\prod_{1\le i\le r} R[[X_i]]$ dans $\prod_{1\le i\le r} R[[Z-a_i]]\{(Z-a_i)^{-1}\}$ défini par

$$\theta(f_0, f_1, \dots, f_r) = (\alpha_1(f_0) - \psi_1\circ\beta_1(f_1), \dots, \alpha_r(f_0) - \psi_r\circ\beta_r(f_r)),$$

pour f_0 dans $R\{Z,(Z-a_j)^{-1}\}_{1\le j\le r}$ et f_i dans $R[[X_i]]$ pour $1\le i\le r$, alors θ est surjective et son noyau N est une R-algèbre de séries entières restreintes en une variable (autrement dit de la forme $R\{Z_0\}$).

PREUVE. On voit immédiatement que N est une sous-R-algèbre de $R\{Z,(Z-a_j)^{-1}\}_{1\le j\le r}\times\prod_{1\le i\le r} R[[X_i]]$. On posera $z := Z \mod \pi$ et, pour i de 1 à r, $x_i := X_i \mod \pi$. De l'homomorphisme de R-modules θ, on obtient un homomorphisme de k-espace vectoriel

$$\bar\theta := \theta\otimes_R k : k[z,(z-\bar a_j)^{-1}]_{1\le j\le r}\times\prod_{1\le i\le r} k[[x_i]] \to \prod_{1\le i\le r} k((x_i)).$$

Comme $\bar\psi_i(\bar\alpha_i(x_i))$ est une uniformisante de $k((z-\bar a_i))$, quitte à changer le paramètre X_i, on peut supposer que $\bar\psi_i(\bar\alpha_i(x_i)) = z-\bar a_i$. On voit alors immédiatement que $\bar\theta$ est surjectif et son noyau est égal à $k[z]$. Il suit alors que θ est surjectif, et on obtient donc la suite exacte :

$$0\to N\to R\{Z,(Z-a_j)^{-1}\}_{1\le j\le r}\times\prod_{1\le i\le r} R[[X_i]] \to \prod_{1\le i\le r} R[[Z-a_i]]\{(Z-a_i)^{-1}\}\to 0$$

Alors, $N \otimes_R k$ s'identifie au noyau $k[z]$ de $\bar{\theta}$ car $\prod_{1 \leq i \leq r} R[[Z - a_i]]\{(Z - a_i)^{-1}\}$ est plat sur R. Relevons z en un élément Z_0 de N, on a alors $N = R\{Z_0\}$. $\square$

On démontre de manière identique le lemme :

Lemme 3.2. *Soient e une entier strictement positif, β l'injection canonique de $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^e)}$ dans $R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$, α l'injection canonique de $R\{Z\}$ dans $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$ et ψ un isomorphisme de R-algèbres de $R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$ sur $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$. Si θ désigne l'homomorphisme de R-modules*

$$\theta : R\{Z\} \times \frac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^e)} \to R[[Z^{-1}]]\{Z\}$$

défini par $\theta(f, g) := \alpha(f) - \psi \circ \beta(g)$, alors θ est surjectif, et son noyau N est une algèbre de séries entières en une variable, à coefficients dans R (autrement dit de la forme $R[[Z_0]]$).

4. Principe local-global pour les revêtements de courbes formelles

Soit $\overline{f} : Y \longrightarrow X$ un morphisme séparable fini entres courbes algébriques sur k, connexes, affines, réduites. Soient x un point fermé de X et X' l'ouvert complémentaire du point x. On suppose X' lisse sur k, $\overline{f}$ étale au-dessus de X' et l'image réciproque de x réduite à un point fermé y. On se placera dans l'une des deux situations suivantes :

(A) x (resp. y) est un point lisse de X (resp. Y).

Soient t (resp. z) une uniformisante de X (resp. Y) en x (resp. y). On suppose

$$\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} = k[[z]] = k[[t]][z]/(\overline{P}(z))$$

où $\overline{P}$ est un polynôme d'Eisenstein séparable de $k[[t]]$.

(B) x (resp. y) est un point double ordinaire de X (resp. Y),

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,x} = \frac{k[[t_1, t_2]]}{(t_1 t_2)} \text{ et } \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} = \frac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1 z_2)} = \frac{\hat{\mathcal{O}}_{X,x}[z_1, z_2]}{(\overline{P}(z_1), \overline{Q}(z_2), z_1 z_2)},$$

où $\overline{P}$ (resp. $\overline{Q}$) est un polynôme d'Eisenstein séparable de $k[[t_1]]$ (resp. $k[[t_2]]$).

THÉORÈME 4.1. (**Principe local-global.**)
On conserve les hypothèse et notations du paragraphe précédent. Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel affine normal, plat et topologiquement de type fini sur R, de fibre spéciale X. On note $\mathcal{X}'$ l'ouvert de $\mathcal{X}$ correspondant à X'. La restriction de $\overline{f}$ au-dessus de X' s'étend de manière unique (à isomorphisme près) en un revêtement étale $f' : \mathcal{Y}' \longrightarrow \mathcal{X}'$.

On se donne une $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}$-algèbre A finie, normale, R-plate et un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \pi A & \longrightarrow & A & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \pi\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} & \longrightarrow & \hat{\mathcal{O}}_{X,x} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(i) Il existe alors un revêtement fini $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ relevant $\overline{f}$ tel que $\mathcal{Y}$ est normal, $f_{|\mathcal{X}'} = f'$ et f induit l'extension $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \longrightarrow A$.
(ii) Si de plus $\overline{f}$ est galoisien de groupe de Galois G, et si A est munie d'une action de G de sorte que $A^G = \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}$ et que l'homomorphisme de R-algèbres $A \longrightarrow \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ soit G-équivariant, le revêtement $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ est galoisien, de groupe de Galois G, relevant l'action sur Y.

PREUVE. On commence par traiter le cas (A) :
(i) La R-algèbre $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ est isomorphe à $R[[T]]\{T^{-1}\}$. C'est donc un anneau de valuation discrète complet. Comme $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ est fini sur $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$, il est semi-local complet. On a de plus le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)} & \xrightarrow{\text{mod } \pi} & Fr(\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}) = k((z)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)} & \xrightarrow{\text{mod } \pi} & Fr(\hat{\mathcal{O}}_{X,x}) = k((t)) \end{array}$$

Il suit que $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ est local complet, noethérien, d'idéal maximal engendré par π. C'est donc un anneau de valuation discrète complet. Soit P un polynôme unitaire de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}[X]$ relevant $\overline{P} \in k((t))[X]$. L'anneau local $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ étant hensélien, la racine z de $\overline{P}$ dans $k((z))$ se relève en une racine Z de P dans $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$. L'homomorphisme de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$-algèbres

$$\frac{(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}[X]}{(P(X))} \xrightarrow{u} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$$

qui envoie X sur Z est un isomorphisme : Il nous suffit d'appliquer le lemme 1.1(ii), car c'est vrai au niveau résiduel par hypothèse.

L'anneau $\mathcal{O}(\mathcal{Y}')\otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ est fini sur $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$, donc semi-local complet.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}}{(\pi)} &\simeq \overline{\mathcal{O}(\mathcal{Y}')} \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)} \\
&= \overline{\mathcal{O}(\mathcal{Y}')} \otimes_{\overline{\mathcal{O}(\mathcal{X}')}} \overline{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)} \\
&= \mathcal{O}(Y') \otimes_{\mathcal{O}(X')} k((t)) \\
&= k((z))
\end{aligned}$$

L'anneau $\mathcal{O}(\mathcal{Y}')\otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ est donc en fait local complet, noethérien, d'idéal maximal engendré par π. C'est donc un anneau de valuation discrète complet. Comme ci-dessus, on en déduit l'isomorphisme de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$-algèbres

$$\frac{(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}[X]}{(P(X))} \xrightarrow{w} \mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$$

qui envoie X sur Z', où Z' est une racine de P dans $\mathcal{O}(\mathcal{Y}')\otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')}(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ relevant z.

Soit $\mu := u \circ w^{-1}$. C'est un isomorphisme de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$-algèbres :

$$\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)} \overset{\mu}{\simeq} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}.$$

Notons θ l'homomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{X})$-modules défini ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \times A &\xrightarrow{\theta} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)} \\
(h', g) &\mapsto \mu(h' \otimes 1) - g \otimes 1
\end{aligned}$$

Remarquons que θ est surjectif d'après le lemme 1.1(i). On voit aisément que son noyau $\mathcal{A}$ est une sous-$\mathcal{O}(\mathcal{X})$-algèbre de $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \times A$. Comme $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{O}(Y)$ est fini sur $\overline{\mathcal{O}(\mathcal{X})} = \mathcal{O}(X)$, le lemme (i) dit que $\mathcal{A}$ est fini sur $\mathcal{O}(\mathcal{X})$. En particulier, $\mathcal{A}$ est topologiquement de type fini sur R. En vertu du lemme 1.1(iii), les homomorphismes canoniques ci-dessous sont des isomorphismes.

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X})} \mathcal{O}(\mathcal{X}') \simeq \mathcal{O}(\mathcal{Y}') \text{ et } \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X})} \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x} \simeq A$$

Le revêtement $f : \mathcal{Y} := \mathrm{Spf}\, \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ convient.
(ii) Pour le cas galoisien, remarquons tout d'abord que $\mathcal{X}'$ est muni canoniquement d'une action de G relevant l'action sur X'. On en déduit une action de G sur $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$. Il suffit de voir que l'isomorphisme μ donné ci-dessus est équivariant. Comme $\overline{\mu}$ est égal à l'identité de $k((z))$, il est G-équivariant. Ainsi, si $\sigma \in G$, $\mu(\sigma(Z')) = \sigma(\mu(Z')) \mod \pi$. Comme tous deux sont des racines de P, ils sont égaux, ce qui achève la preuve de (ii).

Plaçons nous à présent dans le cas (B) : On remarque que, pour $i = 1, 2$, $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$ est isomorphe à l'algèbre $R[[T_i]]\{T_i^{-1}\}$. C'est donc un anneau de valuation discrète complet. L'anneau $A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$ est fini sur $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$, donc semi-local complet. On a de plus les diagrammes commutatifs pour $i = 1, 2$:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i} & \xrightarrow{\mod \pi} & k((z_i)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i} & \xrightarrow{\mod \pi} & k((t_i)) \end{array}$$

On en déduit comme dans le cas A un isomorphisme de $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$-algèbres pour $i = 1, 2$:

$$\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(X')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i} \overset{\mu_i}{\simeq} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_i}$$

Notons θ l'homomorphisme $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \times A \xrightarrow{\theta} A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_1} \times A \otimes_{\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x}} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{\eta_2}$ de A-modules défini par :

$$\theta((h', g)) = (\mu_1(f' \otimes 1) - g \otimes 1, \mu_2(h' \otimes 1) - g \otimes 1)$$

On finit comme pour le cas A en considérant $\mathcal{A} := \ker \theta$. Le revêtement $f : \mathcal{Y} := \mathrm{Spf}\, \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{X}$ convient. Le cas galoisien se traite comme dans le cas (A), en montrant que μ_1 et μ_2 sont automatiquement équivariants. $\square$

Remarque 4.2. Le cas (A) est traité par des méthodes rigides par B.Green et M. Matignon dans [**5**] (III 1.1). Toujours dans ce cas, une preuve cohomologique a été donnée par J. Bertin et A. Mézard ([**1**]).

PROPOSITION 4.3.
Soient σ une involution de Y, $X = Y/\langle\sigma\rangle$, y un point double de Y fixe par σ, au-dessus du point x. On suppose que σ permute les deux points génériques de Spec $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$, x est alors régulier. De plus, on peut trouver z_1, z_2, $t = z_1 + z_2$ tels que $\hat{\mathcal{O}}_{X,x} = k[[t]]$, $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} = \dfrac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1 z_2)}$ et $\sigma(z_1) = z_2$.
Soit $\mathcal{X}$ un schéma formel affine normal, plat et topologiquement de type fini sur R, de fibre spéciale X. Il existe alors un revêtement 2-cyclique $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{X}$ prolongeant $Y \to X$.

PREUVE. Remarquons tout d'abord que l'on dispose d'un relèvement local équivariant évident (avec e un entier strictement positif)

$$\begin{tikzcd} \frac{R[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2-\pi^e)} \arrow[r, "\bmod \pi"] & \frac{k[[z_1,z_2]]}{(z_1z_2)} \\ R[[T]] \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\bmod \pi"] & k[[t]] \arrow[u, "\overline{\psi}"'] \end{tikzcd}$$

avec $\psi(T) = Z_1 + Z_2$, et $\sigma(Z_1) = Z_2$, $\sigma(Z_2) = Z_1$.

On note $\mathcal{X}'$ l'ouvert de $\mathcal{X}$ correspondant à X'. Comme ci-dessus, la restriction de $\overline{f}$ au-dessus de X' s'étend de manière unique (à isomorphisme près) en un revêtement étale $f' : \mathcal{Y}' \longrightarrow \mathcal{X}'$, galoisien de groupe $\langle\sigma\rangle$.

L'anneau $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ est fini sur $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$, donc semi-local complet. Comme de plus $\overline{\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}} = \mathcal{O}(Y') \otimes_{\mathcal{O}(X')} k((t)) = k((z_1)) \times k((z_2))$, $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ est le produit $A_1 \times A_2$ de deux anneaux locaux. En fait, A_i est une R-algèbre qui est un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π, de corps résiduel $k((z_i))$, pour $i = 1, 2$. Il suit que A_i est isomorphe à $R[[Z_i]]\{Z_i^{-1}\}$. On notera μ l'isomorphisme équivariant de $\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \otimes_{\mathcal{O}(\mathcal{X}')} (\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},x})^{\wedge}_{(\pi)}$ sur $R[[Z_1]]\{Z_1^{-1}\} \times R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$ qui envoie un relèvement Z_1' de z_1 sur Z_1 et $\sigma(Z_1')$ (qui est un relèvement de z_2) sur Z_2 . Notons θ l'homomorphisme

$$\mathcal{O}(\mathcal{Y}') \times \frac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^e)} \xrightarrow{\theta} R[[Z_1]]\{Z_1^{-1}\} \times R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$$

défini par $\theta(g, h) = \mu(g \otimes 1) - (\phi_1(h), \phi_2(h))$, où ϕ_i désigne l'injection canonique $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^e)} \to R[[Z_i]]\{Z_i^{-1}\}$. Comme précédemment, on conclut en considérant la R-algèbre $\ker\theta$. $\square$

CHAPITRE 4

Construction d'automorphismes de couronnes formelles

Soit K un corps discrètement valué complet de caractéristique nulle, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$; on note R son anneau de valuation, qu'on suppose fini sur l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$. Le chapitre précédent montre que pour construire un relèvement formel sur R d'une courbe semi-stable sur k avec action d'un groupe fini, on doit construire un relèvement local pour la fibre formelle d'un point fermé y fixe sous l'action du groupe. Une telle fibre formelle est un disque formel si y est un point lisse et une couronne formelle si y est un point double. Le cas des disques formels a été traité dans [**5**]. Ici, on montre que le cas des couronnes formelles s'en déduit, au moyen d'une construction géométrique très simple.

1. Existence d'automorphismes d'ordre p^r de couronnes formelles

LEMME 1.1. *Notons K_0 le corps des fractions de $W(k)$. On suppose l'extension K/K_0 galoisienne. Soient r un entier supérieur à* 1 *et $\bar{\sigma}$ un automorphisme d'ordre p^r de $k[[z]]$. S'il existe un automorphisme d'ordre p^r de $R[[Z]]$ fixant* 0 *et relevant $\bar{\sigma}$, alors pour toute racine primitive p^r-ième de l'unité $\zeta_{(r)}^l$ dans K^{alg}, il existe un automorphisme σ d'ordre p^r de $R[[Z]]$, fixant* 0 *et relevant $\bar{\sigma}$, tel que* $\dfrac{d\sigma}{dZ}(0) = \zeta_{(r)}^l$.

PREUVE. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{alg}/K_0)$ agit sur l'ensemble des automorphismes σ d'ordre p^r de $R[[Z]]$ fixant 0 par l'action sur les coefficients de la série $\sigma(Z)$. De plus, si $\tau \in \mathrm{Gal}(K^{alg}/K_0)$, on a $\bar{\sigma^\tau} = \bar{\sigma}$. Comme $\mathrm{Gal}(K^{alg}/K_0)$ permute transitivement les racines primitives p^r-ièmes de l'unité, on en déduit le résultat annoncé. ☐

LEMME 1.2. *Soit σ un R-automorphisme d'ordre p^r de $R[[Z]]$, fixant* 0. *Il existe ρ dans K, avec $v_K(\rho) > 0$, une racine primitive p^r-ième de l'unité $\zeta_{(r)}^l$ et un paramètre Z' du disque fermé $v_K(\omega) \geq v_K(\rho)$ tels que $\sigma(Z') = \zeta_{(r)}^l Z'$.*

PREUVE. Notons $B := R[[Z]]$, $A := R[[Z]]^\sigma = R[[T]]$. L'extension de corps FrB/FrA est donnée, d'après la théorie de Kummer, par une équation $Y^{p^r} = u$, où $u \in A$, $\bar{u} \neq 0$. Si on restreint le disque à un sous-disque fermé (de paramètre $Z_0 = \dfrac{Z}{\rho}$) centré en 0, on aura $R\{Z_0\}^\sigma = R\{T_0\}$ pour un T_0 convenable (par exemple la norme de Z_0). Si la valuation de ρ est suffisamment grande, 0 est le seul point de ramification, on peut alors supposer que u s'écrit $u = T_0^h(1+\sum_{\nu>0} a_\nu T_0^\nu)$, avec $v_K(a_\nu) > 0$ pour tout $\nu > 0$ et $(h,p) = 1$. En utilisant Bezout, on peut supposer $h = 1$, et finalement, quitte à changer le paramètre T_0, que $u = T_0$. Mais $\frac{R\{T_0\}[Y]}{(Y^{p^r}-T_0)}$ est intégralement clos et contenu dans $R\{Z_0\}$, donc finalement, $R\{Z_0\} = \frac{R\{T_0\}[Y]}{(Y^{p^r}-T_0)}$ et $Z' := Y$ est un paramètre de $R\{Z_0\}$ qui convient. □

REMARQUE 1.3. La preuve ci-dessus montre que si $r = 1$ et si σ possède un unique point fixe, l'automorphisme σ est linéarisable sur $R[[Z]]$, on retrouve ainsi la proposition 6.2.1 de [**6**]. C'est une question ouverte de savoir si, pour $r > 1$, le résultat est encore vrai: La remarque 6.2.2 de [**6**] semble erronée. Toutefois, si $\sigma^{p^{r-1}}$ possède un unique point fixe, alors σ est encore linéarisable sur $R[[Z]]$.

PROPOSITION 1.4.
(i) Pour tout entier $r \geq 1$, quitte à faire une extension finie de K, il existe un entier $e \geq 1$ et un automorphisme d'ordre p^r de $\mathcal{C}_e$ qui induit un automorphisme d'ordre p^r de chaque branche de $\mathcal{C}_{e,k}$.
(ii) Si $\bar\sigma$ est un automorphisme de Spec $\dfrac{k[[z_1,z_2]]}{(z_1z_2)}$, ne permutant pas les branches du point double, qui induit un automorphisme d'ordre p^r $(1 \leq r \leq 2)$ de chaque branche, alors, quitte à faire une extension finie de K, il existe un entier $e \geq 1$ et un R-automorphisme σ d'ordre p^r de $\mathcal{C}_e$ qui induit $\bar\sigma$ sur $\mathcal{C}_{e,k} =$ Spec $\dfrac{k[[z_1,z_2]]}{(z_1z_2)}$.

PREUVE.

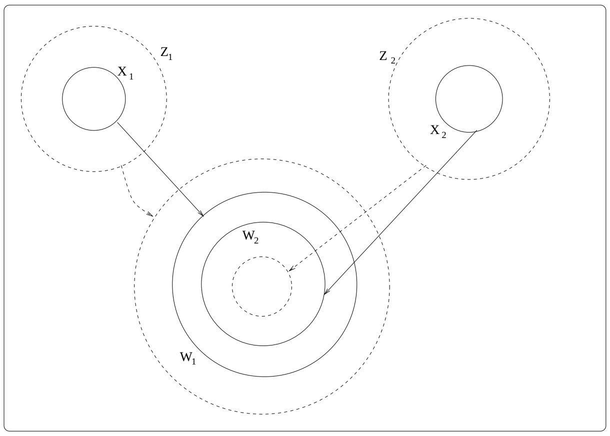
Soit $r \geq 1$, on fixe une racine primitive p^r-ième de l'unité $\zeta_{(r)}$ dans K^{alg}. On considère deux R-automorphismes σ_1 et σ_2 d'ordre p^r de $\mathcal{D}$ fixant 0, on supposera les points de F_{σ_1} (resp. F_{σ_2}) rationnels sur K. Pour $i = 1, 2$, il existe un unique h_i inversible dans $(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ tel que $\dfrac{d\sigma_i}{dZ}(0) = \zeta_{(r)}^{h_i^{-1}}$. D'après le lemme qui précède, il existe un paramètre W_i d'un sous-disque fermé $D'_i := \{\omega \in D | v_K(\omega) \geq e_i\}$ de $D := \mathcal{D}_K$ centré en 0 tel que $\sigma_i(W_i) = \zeta_{(r)}^{h_i^{-1}} W_i$. En utilisant le lemme 1.1, on peut supposer que $h_1 = -h_2$ (noter que $\bar\sigma_2$ ne change pas). On construit alors un automorphisme d'une couronne formelle de la façon suivante:

Soit e_0 un entier positif ou nul, notons σ_0 l'automorphisme de $\dfrac{R\{W_1,W_2\}}{(W_1W_2 - \pi^{e_0})}$ défini par $\sigma_0(W_1) = \zeta_{(r)}^{h_1^{-1}} W_1$, $\sigma_0(W_2) = \zeta_{(r)}^{h_2^{-1}} W_2$. Notons, pour $i = 1, 2$, j_i

l'inclusion $\dfrac{R[[Z_i]]\{X_i\}}{(Z_iX_i - \pi^{e_i})} \to R\{X_i, X_i^{-1}\} = R\{W_i, W_i^{-1}\}$ (où X_i s'écrit $X_i = W_i^{-1}(1+\pi g_i)$ dans $R\{X_i, X_i^{-1}\}$). On munit, pour $i = 1, 2$, $\dfrac{R[[Z_i]]\{X_i\}}{(Z_iX_i - \pi^{e_i})}$ (resp. $\dfrac{R\{W_1, W_2\}}{(W_1W_2 - \pi^{e_0})}$), d'une structure de $R[\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}]$-module par $l.f_i := \sigma_i^l f_i$ (resp. $l.f_0 := \sigma_i^l f_0$) pour $l \in \mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}$. On définit alors un morphisme

$$\theta : \frac{R[[Z_1]]\{X_1\}}{(Z_1X_1 - \pi^{e_1})} \times \frac{R[[Z_2]]\{X_2\}}{(Z_2X_2 - \pi^{e_2})} \times \frac{R\{W_1, W_2\}}{(W_1W_2 - \pi^{e_0})} \to R\{W_1, W_1^{-1}\} \times R\{W_2, W_2^{-1}\}$$

de $R[\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}]$-modules par $\theta(f_1, f_2, f_0) = (j_1(f_1) - f_0, j_2(f_2) - f_0)$. On obtient ainsi une structure de $R[\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z}]$-module sur le noyau de θ, qui s'identifie au R-module $\dfrac{R[[Z_1', Z_2']]}{(Z_1'Z_2' - \pi^{e_0+e_1+e_2})}$. (En effet, on vérifie aisément que $\ker\bar{\theta}$ est égal à $\dfrac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1z_2)}$, et donc par le lemme 1.1 (ii) du chapitre 3, on montre que $\ker\theta$ est isomorphe à $\mathcal{A}_e$, avec $e = e_0 + e_1 + e_2$). On en déduit un automorphisme d'ordre p^r d'une couronne formelle d'épaisseur e qui induit $\bar{\sigma}$.



L'assertion (ii) résulte alors de [**5**], théorèmes II 4.1 et 5.5. L'assertion (i) résulte quant à elle de [**6**] II, paragraphe 3.3.3. $\square$

COROLLAIRE 1.5.
On considère des entiers a et n, avec $1 \leq a \leq 2$ et $(n, p) = 1$. Soit $\bar{\sigma}$ un automorphisme d'ordre $p^a n$ de $\dfrac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1z_2)}$, ne permutant pas les branches, induisant un automorphisme d'ordre $p^a n$ de chaque branche. On suppose de plus que $\bar{\sigma}^{p^a}$

agit de manière kummérienne (voir chapitre 2, 3.2). Alors, quitte à faire une extension finie de K, $\bar{\sigma}$ se relève en un automorphisme d'ordre $p^a n$ de $\mathcal{C}_e$, pour un entier $e \geq 1$ convenable.

PREUVE.

Comme $\bar{\sigma}^{p^a}$ agit de manière kummérienne, quitte à changer de paramètres, on peut supposer $\bar{\sigma}^{p^a}(z_1) = \bar{\theta} z_1$ et $\bar{\sigma}^{p^a}(z_2) = \bar{\theta}^{-1} z_2$, où θ est une racine primitive n-ième de l'unité dans R. Le sous-anneau de $\dfrac{k[[z_1, z_2]]}{(z_1 z_2)}$ formé des éléments fixes sous $\bar{\sigma}^{p^a}$ est alors $\dfrac{k[[x_1, x_2]]}{(x_1 x_2)}$, où $x_i = z_i^n$. L'automorphisme $\bar{\sigma}^n$ induit un automorphisme $\bar{\tau}$ d'ordre p^a de $\dfrac{k[[x_1, x_2]]}{(x_1 x_2)}$. Cet automorphisme se relève alors en un automorphisme τ d'ordre p^a de $\dfrac{R[[X_1, X_2]]}{(X_1 X_2 - \pi^{en})}$, pour un entier e convenable (quitte à faire une extension finie de K). Ecrivons

$$\tau(X_1) = X_1(1 + \pi b + \sum_{\nu>0} (a_\nu X_1^\nu + a_{-\nu} X_2^{-\nu})).$$

Considérons la R-algèbre $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^e)}$, où Z_i relève z_i pour $i = 1, 2$. En identifiant $X_i = Z_i^n$, $\dfrac{R[[X_1, X_2]]}{(X_1 X_2 - \pi^{en})}$ est un sous-anneau de $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^e)}$. Posons

$$\tilde{\tau}(Z_1) = Z_1(1 + \pi b + \sum_{\nu>0} (a_\nu Z_1^{n\nu} + a_{-\nu} Z_2^{-n\nu}))^{\frac{1}{n}},$$

$\tilde{\tau}$ prolonge alors τ et est d'ordre p^a. De plus $\tilde{\tau}$ commute avec l'automorphisme μ d'ordre n défini par $\mu(Z_1) = \theta Z_1$. Par suite, le groupe engendré par $\tilde{\tau}$ et μ est cyclique d'ordre $p^a n$, et un générateur convenable relève $\bar{\sigma}$. $\square$

2. Application au relèvement galoisien

On considère une courbe algébrique Y sur k, propre, connexe, semi-stable, muni d'un sous-groupe fini G de $\mathrm{Aut}_k Y$, opérant librement sur un ouvert dense. Soit y un point double de Y, de stabilisateur G_y cyclique. Le sous-groupe H_y de

G_y formé des automorphismes ne permutant pas les branches analytiques du point double y et d'ordre premier à p est muni de deux caractères $\chi_{y,1}, \chi_{y,2} : H_y \to k^*$ correspondant à l'action de H_y sur l'espace tangent en y. Suivant [**16**], on dira que l'action de G sur Y est kummérienne si, pour tout point double y de Y, de stabilisateur cyclique, on a $\chi_{y,1}\chi_{y,2} = 1$. Cette définition coïncide avec la précédente (chapitre 2, 3.2) lorsque G est cyclique d'ordre premier à p.

THÉORÈME 2.1. *On suppose que les groupes d'inertie de (Y, G) sont cycliques, de p-exposant inférieur ou égal à 2, et que l'action de G sur Y est kummérienne. Quitte à faire une extension finie de K, il existe un R-schéma $\mathcal{Y}$ normal, propre, plat, de fibre spéciale Y, de fibre générique lisse et géométriquement connexe sur K, muni d'une action de G relevant celle sur Y.*

PREUVE. Soit $X := Y/G$ le quotient de Y par G. C'est encore une courbe semi-stable (voir [**11**] prop. 4.2). Soient $x_1, \ldots, x_s \in X$ les points de branchement de $\overline{f} : Y \longrightarrow X$. On choisit un point y_i au-dessus de x_i, $1 \leq i \leq s$, et on note I_i son sous-groupe d'inertie, qui est par hypothèse cyclique d'ordre $p^{\epsilon_i} n_i$, où $\epsilon_i \in \{0, 1, 2\}$ et n_i est premier à p. Pour $1 \leq i \leq s$, on note U_i un voisinage affine de x_i inclus dans la réunion des composantes irréductibles passant par x_i, et $V_i := \overline{f}^{-1}(U_i)$. On notera également U_0 l'ouvert dense $X \setminus \{x_1, \ldots, x_s\}$ et $V_0 := \overline{f}^{-1}(U_0)$. On suppose que y_i est un point lisse (resp. double) pour $1 \leq i \leq r$ (resp. $i > r$) (cette hypothèse ne dépend pas du choix de y_i).

On fixe un générateur σ_i de I_i, pour $i \leq s$. Si $i > r$, le sous-groupe I_i° des automorphismes de $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y_i}$ ne permutant pas les branches du point double est d'indice au plus 2 dans I_i. On suppose que $I_i^\circ = I_i$ pour $r < i \leq q$ et que I_i° est d'indice 2 dans I_i si $i > q$. Dans ce dernier cas, on peut supposer que σ_i^2 engendre I_i°.

Si $i \leq r$, il existe un morphisme surjectif $R[[Z]] \to \hat{\mathcal{O}}_{Y,y_i}$ (de noyau engendré par π) tel que σ_i se relève en un automorphisme d'ordre $p^{\epsilon_i} n_i$ de $R[[Z]]$(voir [**5**]).

Si $r < i \leq q$, d'après le corollaire 1.5, quitte à faire une extension finie de K, il existe un entier e_i et un morphisme surjectif $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^{e_i})} \to \hat{\mathcal{O}}_{Y,y_i}$ (de noyau engendré par π) tel que σ_i se relève en un automorphisme d'ordre $p^{\epsilon_i} n_i$ de $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^{e_i})}$.

Comme ci-dessus, quitte à faire une extension finie de K, σ_i^2 se relève en un automorphisme de $\dfrac{R[[Z_1,Z_2]]}{(Z_1Z_2-\pi^{e_i})} \to \hat{\mathcal{O}}_{Y,y_i}$, d'ordre $\dfrac{p^{e_i}n_i}{2}$.

On suppose désormais tous ces choix effectués, (en particulier, R assez gros pour obtenir les relèvements locaux ci-dessus). Il existe un R-schéma $\mathcal{X}$ propre et plat, normal, de fibre générique lisse sur K, de fibre spéciale X, dont l'épaisseur au point x_i est pe_i si $r < i \leq q$. On notera $\hat{\mathcal{X}}$ le R-schéma formel complété de $\mathcal{X}$ le long de sa fibre spéciale, et $\mathcal{U}_i$ l'ouvert de $\hat{\mathcal{X}}$ correspondant à U_i.

Il existe un morphisme étale $U_i' \to U_i$ (qu'on peut supposer surjectif, quitte à restreindre U_i) tel que le morphisme $V_i' \to U_i'$ obtenu par changement de base à partir de $V_i \to U_i$ soit décomposé, ie $V_i' = \mathrm{Ind}_{I_i}^G W_i'$, où W_i' est la composante connexe de V_i' contenant l'unique point au-dessus de y_i. Si $i \leq q$, en utilisant les relèvements locaux choisis et le théorème 4.1 du chapitre 3, on construit un relèvement $\mathcal{W}_i' \to \mathcal{U}_i'$ de $\overline{f}_{|W_i'}$ compatible avec l'action de I_i. Pour $i > q$, la proposition 4.3 du chapitre 3 nous permet d'effectuer un dévissage pour se ramener au cas où $I_i^\circ = I_i$. On utilise alors à nouveau la proposition 4.1 pour construire un relèvement $\mathcal{W}_i' \to \mathcal{U}_i'$ pour $i > q$.

Posons alors $\mathcal{V}_i' := \mathrm{Ind}_{I_i}^G \mathcal{W}_i'$. C'est un relèvement de $\overline{f}_{|V_i'}$ compatible avec l'action de G. Un argument de descente étale (voir [**4**] lemme 3.6) permet alors de construire un relèvement $\mathcal{V}_i \to \mathcal{U}_i$, galoisien de groupe G, de $V_i \to U_i$. L'unicité du relèvement du lieu étale nous permet de recoller ces relèvements en un relèvement $\hat{\mathcal{Y}} \xrightarrow{\hat{f}} \hat{\mathcal{X}}$ de $\overline{f}$, galoisien de groupe G. Comme $\hat{f}$ est propre, le théorème d'algébrisation des faisceaux cohérents ([**7**] corollaire 5.1.6) permet de construire une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre cohérente $\mathcal{A}$ dont le complété s'identifie à la $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{X}}}$-algèbre cohérente $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{Y}}}$. Posons alors $\mathcal{Y} := \mathrm{Spec}\ \mathcal{A}$. L'action du groupe G sur $\hat{\mathcal{Y}}$ se relève de manière unique en une action de G sur $\mathcal{Y}$. Le couple $(\mathcal{Y}, G)$ convient. $\square$

CHAPITRE 5

Arbres de Hurwitz et disques formels

Dans tout ce chapitre, R sera un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K de caractéristique nulle, de corps résiduel k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$; on notera v_K la valuation de K, normalisée par $v_K(\pi) = 1$, où π est une uniformisante fixée de R. On supposera que R contient une racine primitive p-ième ζ de l'unité, et on posera $\lambda = \zeta - 1$; on a alors $v_K(p) = (p-1)v_K(\lambda)$.

1. Réduction des μ_p-torseurs

1.1. Les schémas en groupes $\mathcal{G}^{(n)}$ et $\mathcal{H}_n$.

On rappelle ici la définition de certains schémas en groupes qui interviennent dans la réduction des μ_p-torseurs. Pour plus d'informations concernant ces schémas en groupes et leurs applications à la déformation d'Artin-Schreier à Kummer, on renvoie à [**14**]. Pour tout entier n strictement positif, on note $\mathcal{G}^{(n)} := \operatorname{Spec} R[x, \frac{1}{\pi^n x + 1}]$ le schéma en groupes affine sur R dont la structure est donnée ci-dessous :

– comultiplication :

$$\begin{aligned} R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] &\to R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] \otimes_R R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] \\ x &\mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x + \pi^n x \otimes x \end{aligned}$$

– coinverse :

$$\begin{aligned} R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] &\to R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] \\ x &\mapsto -\frac{x}{\pi^n x+1} \end{aligned}$$

– coidentité

$$\begin{aligned} R[x, \frac{1}{\pi^n x+1}] &\to R \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

La fibre spéciale de $\mathcal{G}^{(n)}$ s'identifie canoniquement au groupe additif $\mathbb{G}_a$ sur k ; par aillleurs, la fibre générique est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ sur

K : Plus précisément, on définit un homomorphisme de schémas en groupes α_n de $\mathcal{G}^{(n)}$ dans $\mathbb{G}_{m,R}$ par l'homomorphisme de R-algèbres de Hopf :

$$\begin{array}{ll} R[u, u^{-1}] & \to R[x, \dfrac{1}{\pi^n x + 1}] \\ u & \mapsto \pi^n x + 1 \end{array}$$

On a alors la suite exacte pour la topologie $fppf$:

$$(1) \quad 0 \to \mathcal{G}^{(n)} \xrightarrow{\alpha_n} \mathbb{G}_{m,R} \to j_{n*}\mathbb{G}_{m,R_n} \to 0$$

où $R_n := R/(\pi^n)$ et j_n est l'immersion fermée de Spec R_n dans Spec R. (voir [**14**]). On voit alors que $\alpha_n \otimes_R K$ est un isomorphisme.

Pour $0 < n \leq v_K(\lambda)$, le polynôme $\dfrac{(\pi^n x + 1)^p - 1}{\pi^{pn}}$ est à coefficients dans R ; on définit alors un homomorphisme de R-schémas en groupes ϕ_n de $\mathcal{G}^{(n)}$ dans $\mathcal{G}^{(pn)}$ par :

$$\begin{array}{ll} R[y, \dfrac{1}{\pi^{pn} y + 1}] & \to R[x, \dfrac{1}{\pi^n x + 1}] \\ y & \mapsto \dfrac{(\pi^n x + 1)^p - 1}{\pi^{pn}} \end{array}$$

L'homomorphisme ϕ_n est une isogénie de degré p, on note $\mathcal{H}_n$ le noyau de ϕ_n, et on obtient la suite exacte pour la topologie $fppf$:

$$(2) \quad 0 \to \mathcal{H}_n \to \mathcal{G}^{(n)} \xrightarrow{\phi_n} \mathcal{G}^{(pn)} \to 0$$

Le schéma en groupes $\mathcal{H}_n$ est fini et plat sur R, de degré p. Sa fibre générique est isomorphe au groupe $\mu_{p,K}$. Si $0 < n < v_K(\lambda)$, sa fibre spéciale est le groupe radiciel α_p ; si $n = v_K(\lambda)$, sa fibre spéciale est un groupe étale isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

1.2. Torseurs $fppf$ sous $\mathcal{H}_n$.

Soit n un entier strictement positif, X un R-schéma, on déduit de la suite exacte (1) la suite exacte

$$H^0(X, \mathbb{G}_m) \to H^0(X_n, \mathbb{G}_m) \to H^1(X, \mathcal{G}^{(n)}) \to H^1(X, \mathbb{G}_m) = PicX$$

où $X_n := X \times_{\text{Spec } R} \text{Spec } R_n$. En particulier, on a le

LEMME 1.1. *Si $PicX = 0$ et si $H^0(X, \mathbb{G}_m) \to H^0(X_n, \mathbb{G}_m)$ est surjective, $H^1(X, \mathcal{G}^{(n)}) = 0$. En particulier, si $X = Spec\ A$, avec A une R-algèbre factorielle et complète pour la topologie π-adique, $H^1(X, \mathcal{G}^{(n)}) = 0$.*

Soit X un R-schéma, si $0 < n \leq v_K(\lambda)$, on déduit de la suite exacte (2) la suite exacte

$$H^0(X, \mathcal{G}^{(n)}) \to H^0(X, \mathcal{G}^{(pn)}) \to H^1(X, \mathcal{H}_n) \to H^1(X, \mathcal{G}^{(n)})$$

Corollaire 1.2. *Si $0 < n \leq v_K(\lambda)$, $PicX = 0$ et si $H^0(X, \mathbb{G}_m) \to H^0(X_n, \mathbb{G}_m)$ est surjective, $H^1(X, \mathcal{H}_n) = H^0(X, \mathcal{G}^{(pn)})/H^0(X, \mathcal{G}^{(n)})$. En particulier, si $X =$ Spec A, avec A une R-algèbre factorielle et complète pour la topologie π-adique,*

$$H^1(X, \mathcal{H}_n) = \mathcal{G}^{(pn)}(A)/\mathcal{G}^{(n)}(A).$$

Remarque 1.3. On peut concrètement reécrire le corollaire de la manière suivante : On considère une R-algèbre A factorielle et complète pour la topologie π-adique, un torseur sous $\mathcal{H}_n$ au-dessus de Spec A est alors de la forme Spec B, avec

$$B := \frac{A[w]}{\frac{(\pi^n w+1)^p - 1}{\pi^{pn}} - u},$$

où u appartient à A. Deux éléments u_1 et u_2 de A définissent le même torseur s'il existe v dans A tel que

$$u_2 = u_1(\pi^n v + 1)^p + \frac{(\pi^n v + 1)^p - 1}{\pi^{pn}}.$$

1.3. Torseurs $fppf$ sous μ_p.

On a la suite exacte de schémas en groupes commutatifs, pour la topologie $fppf$:

$$1 \to \mu_p \to \mathbb{G}_m \xrightarrow{x \mapsto x^p} \mathbb{G}_m \to 1.$$

On en déduit le

Lemme 1.4.
Soit X un R-schéma, si $PicX = 0$, $H^1(X, \mu_p) = H^0(X, \mathbb{G}_m)/H^0(X, \mathbb{G}_m)^p$. En particulier, si $X =$ Spec A, avec A une R-algèbre factorielle,

$$H^1(X, \mu_p) = \mathbb{G}_m(A)/\mathbb{G}_m(A)^p.$$

Remarque 1.5. Comme ci-dessus, on peut reformuler concrètement le lemme de la manière suivante : On considère une R-algèbre A factorielle, un torseur sous μ_p au-dessus de Spec A est alors de la forme Spec B, avec

$$B = \frac{A[y]}{(y^p - u)}.$$

où u est une unité de A, unique à la multiplication près d'une puissance p-ième d'une unité de A.

1.4. Réduction des torseurs de Kummer de degré p.

PROPOSITION 1.6.

Soit $X := \text{Spec } A$ un schéma affine plat sur R, dont les fibres sont intègres et de dimension 1 ; on suppose que A est une R-algèbre factorielle et complète pour la topologie p-adique. Soit $Y_K \to X_K$ un μ_p-torseur étale non trivial, donné par une équation $y^p = f$, où f est inversible dans A_K, et Y le normalisé de X dans Y_K ; on suppose que la fibre spéciale de Y est intègre. Soit η (resp. η') le point générique de la fibre spéciale de X (resp. Y). Les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,\eta}$ et $\mathcal{O}_{Y,\eta'}$ sont alors des anneaux de valuation discrète d'uniformisante π. Notons δ la valuation de la différente de $\mathcal{O}_{Y,\eta'}/\mathcal{O}_{X,\eta}$. On distingue alors trois cas suivant la valeur de δ.

Réduction multiplicative: $\delta = v_K(p)$

Si $\delta = v_K(p)$, Y est un $\mu_{p,R}$-torseur pour la topologie $fppf$, donc $\mathcal{Y} = \text{Spec } B$, avec $B := \dfrac{A[y]}{(y^p - u)}$, où u est une unité de A, unique à la multiplication d'une puissance p-ième d'une unité de A près.

Réduction additive (resp. étale): $0 < \delta < v_K(p)$ **(resp.** $\delta = 0$**)**

Si $0 \leq \delta < v_K(p)$, on a $\delta = v_K(p) - n(p-1)$, où n est un entier tel que $0 < n \leq v_K(\lambda)$, et Y est un torseur sous $\mathcal{H}_n$ pour la topologie $fppf$, donc est donné par $Y = \text{Spec } B$,

$$B := \frac{A[w]}{\left(\frac{(\pi^n w+1)^p - 1}{\pi^{pn}} - u\right)},$$

où u est un élément de A. De plus, si B est isomorphe à $\dfrac{A[w]}{\frac{(\pi^n w+1)^p-1}{\pi^{pn}} - u'}$, alors il existe v dans A tel que $u' = u(\pi^n v + 1)^p + \dfrac{(\pi^n v+1)^p - 1}{\pi^{pn}}$.

PREUVE.

Notons $Y := \text{Spec } B$, où B est une A-algèbre finie, normale. On peut écrire $f = \pi^r f_0$, où r est un entier, f_0 appartient à A et n'est pas divisible par π ; on peut en outre supposer $0 \leq r < p$. Supposons $r > 0$, alors comme y appartient à

B, et $\bar{B}$ est réduit, $y = \pi^s y'$, avec y' dans B et $s > 0$. Mais alors, $f_0 = \pi^{sp-r} y'^p$, donc f_0 appartient à πB. Comme $\frac{f_0}{\pi}$ est entier sur A, en considérant un polynôme unitaire de degré d qui l'annulle, on voit que $\bar{f}_0^d$ est nul. Comme $\bar{A}$ est intègre, $\bar{f}_0$ est nul, i.e. f_0 appartient à πA, ce qui contredit sa définition. Ainsi, $r = 0$ et donc f appartient à A, $\bar{f} \neq 0$. En fait, comme π est irréductible dans A et f est inversible dans A_K, f est inversible dans A.

On suppose tout d'abord que $\bar{f}$ n'est pas une puissance p-ième, alors $\frac{A[y]}{(y^p - f)}$ est intégralement clos, contenu dans B et de même corps des fractions, ainsi il est égal à B. On a alors $\delta = v_K(p)$ et Spec B est un torseur sous μ_p.

On suppose à présent que f est une puissance p-ième modulo π. Il existe donc un g dans A, nécessairement inversible, tel que $f = g^p \mod \pi$. Remplaçant f par $g^{-p} f$, on peut alors supposer que $f = 1 + \pi^{r_0} h_0$, où h_0 appartient à A et $\bar{h}_0 \neq 0$. Si on avait $r_0 > p v_K(\lambda)$, alors $1 + \pi^{r_0} h_0$ serait une puissance p-ième dans A et le torseur $Y_K \to X_K$ serait trivial. Ainsi $r_0 \leq p v_K(\lambda)$. Si $r_0 = p v_K(\lambda)$, Y est un torseur (étale) sous $\mathcal{H}_{v_K(\lambda)}$. Sinon, on écrit la division euclidienne $r_o = p q_0 + s_0$, $0 \leq s_0 < p$. En posant $y := \pi^{q_0} y_0 + 1$, on obtient

$$\frac{(\pi^{q_0} y_0 + 1)^p - 1}{\pi^{p q_0}} = \pi^{s_0} h_0.$$

Supposons $s_0 > 0$, on a alors $y_0 = \pi y_0'$, avec y_0' dans B. De la relation $1 + \pi^{s_0} h_0 = (1 + \pi^{q_0 + 1} y_0')^p$, on tire alors la contradiction $\bar{h}_0 = 0$. Ainsi, $r_0 = p q_0$, avec $q_0 < v_K(\lambda)$. Si $\bar{h}_0$ n'est pas une puissance p-ième, on a fini. Sinon, on peut réappliquer le même processus et on tombe après un nombre fini d'étapes sur une équation $y^p = 1 + \pi^{pn} h$, avec ou bien $n = v_K(\lambda)$ et on a une réduction étale, ou bien $n < v_K(\lambda)$, $\bar{h}$ n'est pas une puissance p-ième et on a un torseur sous $\mathcal{H}_n$, donc radiciel en réduction. □

EXEMPLE 1.7. Soit $A := R\{T, (T - T_i)^{-1}\}_{1 \leq i \leq r}$, $X :=$ Spec A vérifie les conditions de la proposition précédente. Un μ_p-torseur au-dessus de sa fibre générique se prolonge donc en un torseur sous μ_p (on dira qu'on a réduction multiplicative) ou sous $\mathcal{H}_n$ (on dira qu'on a réduction additive si $n < v_K(\lambda)$ et étale si $n = v_K(\lambda)$).

Le corollaire suivant est essentiel pour la construction d'automorphismes d'ordre p du disque formel à partir d'un arbre de Hurwitz. Il permet en effet d'écrire explicitement, sur un paramètre convenable, l'action d'un tel automorphisme au bord du disque.

COROLLAIRE 1.8. *Soit $A := R[[T]]\{T^{-1}\}$, B une A-algèbre finie de degré p, plate sur R et G un groupe p-cyclique d'automorphismes de B ; on suppose que A s'identifie à B^G, et que $\bar{B}$ est un corps, extension purement inséparable de degré p de $\bar{A} = k((t))$. L'anneau B est alors un anneau de valuation discrète complet d'uniformisante π, de corps résiduel de la forme $k((z))$; si Z relève z dans B, $B = R[[Z]]\{Z^{-1}\}$. Soit δ la valuation de la différente de B sur A.*

(A) Si $\delta = v_K(p)$, Spec $B \to$ Spec A est un $fppf$-torseur sous μ_p, et ainsi il existe une unité u dans A tel que $B = \dfrac{A[y]}{(y^p - u)}$. De plus, u est unique à la multiplication d'une puissance p-ième près d'une unité de A. En particulier, la forme différentielle $\omega := \dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$ est uniquement déterminée. De plus, le résidu h de ω appartient à $\mathbb{F}_p$.

Notons ϕ l'unique isomorphisme de G sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que pour $\sigma \in G$, on ait $\sigma y = \zeta^{\phi(\sigma)} y$, on a alors deux cas :
a) Si le résidu h de ω est non nul, alors $y = Z^h$, où Z est un paramètre de B, et, pour $\sigma \in G$, $\sigma Z = \zeta^{\frac{1}{h}\phi(\sigma)} Z$. Dans cette situation, on dira que le torseur a une réduction multiplicative stable.
b) Si le résidu h de ω est nul, alors l'entier $m := 1 + ord_t\omega$ est positif et premier à p. De plus, (pour un choix convenable de u) il existe un paramètre Z de B tel que $y = 1 + Z^m$ et, pour $\sigma \in G$,

$$\sigma Z = \zeta^{\frac{1}{m}\phi(\sigma)} Z(1 + \zeta^{-\phi(\sigma)}(\zeta^{\phi(\sigma)} - 1)Z^{-m})^{\frac{1}{m}}$$

Dans cette situation, on dira que le torseur a une réduction multiplicative instable.

(B) Si $0 < \delta < v_K(p)$, Spec $B \to$ Spec A est un $fppf$-torseur sous $\mathcal{H}_n$, où n est un entier donné par $v_K(p) = \delta + n(p-1)$. Ainsi, il existe u dans A tel que $B = \dfrac{A[w]}{(\frac{(\pi^n w+1)^p - 1}{\pi^{pn}} - u)}$, $\bar{u} \notin k((t^p))$. De plus, $\bar{u}$ est unique à l'addition d'une puissance p-ième près. En particulier, la forme différentielle $\omega := d\bar{u}$ est uniquement déterminée. L'entier $m := 1 + ord_t(\omega)$ est premier à p.

Notons ϕ l'unique isomorphisme de G sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tel que pour $\sigma \in G$, on ait $\sigma(\pi^n w+1) = \zeta^{\phi(\sigma)}(\pi^n w+1)$. On a alors $w = Z^m$, où Z est un paramètre de B, et pour $\sigma \in G$, $\sigma Z = \zeta^{\frac{1}{m}\phi(\sigma)} Z(1+\pi^{-n}(\zeta^{\phi(\sigma)}-1)\zeta^{-\phi(\sigma)}Z^{-m})^{\frac{1}{m}}$.

PREUVE. Comme k est algébriquement clos, $\bar{B}$ est un corps $k((z))$ de séries formelles en une variable sur k. Soit Z dans B relevant Z, il suit du lemme 1.1 du chapitre 3 que $B = R[[Z]]\{Z^{-1}\}$. On est donc dans la situation de la proposition 1.6 (Remarquer que A est principal, donc factoriel).

(A) On suppose tout d'abord que $\delta = v_K(p)$. La proposition 1.6 montre alors que Spec $B \to$ Spec A est un $fppf$-torseur sous μ_p, donné par

$$B := \frac{A[y]}{(y^p - u)}.$$

(a) Si $\mathrm{ord}_t \bar{u}$ est premier à p, alors il est égal modulo p au résidu h de $\omega := \dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$. En particulier, ce résidu est un inversible de $\mathbb{F}_p$. De plus, y est modulo π la puissance h-ième d'une uniformisante z de $\bar{B}$. Comme B est hensélien, $y = Z^h$, où Z relève z dans B, ainsi Z est un paramètre de B. Le calcul de σZ est immédiat.
(b) Si maintenant $\mathrm{ord}_t \bar{u}$ est divisible par p, on peut le supposer nul. Alors, si $\omega := \dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$, on a $1 + \mathrm{ord}\omega = 1 + \mathrm{ord}d\bar{u}$ positif et premier à p. En particulier, le résidu de ω est nul. Alors on peut écrire $\bar{u} = 1 + \sum_{1 \le i \le [\frac{m}{p}]} \bar{c}_i^p t^{ip} + \bar{a}t^m \mod t^{m+1}$, où les c_i et a sont dans R. En multipliant Y par $1 - c_1 T$, on se ramène à $\bar{c}_1 = 0$. En appliquant successivement ce processus, on peut supposer que $\bar{u}$ s'écrit $\bar{u} = 1 + \bar{a}t^m \mod t^{m+1}$, avec $\bar{a} \neq 0$. On a $(\bar{y}-1)^p = t'^m$, où t' est une uniformisante de $\bar{A}$. Il en résulte que $\bar{y} - 1$ est la puissance m-ième d'une uniformisante de $\bar{B}$. Comme B est hensélien, $y = 1 + Z^m$, où Z est un paramètre de B. Le calcul de σZ est immédiat.

(B) On suppose à présent que $0 < \delta < v_K(p)$, alors, d'après la proposition 1.6, Spec $B \to$ Spec A est un $fppf$-torseur sous $\mathcal{H}_n$, où $v_K(p) = \delta + (p-1)n$. Il est donc donné par

$$B = \frac{A[w]}{(\frac{(\pi^n w+1)^p - 1}{\pi^{pn}} - u)}.$$

Il résulte de la proposition 1.6 que $\bar{u}$ est unique à l'addition d'une puissance p-ième près, donc la différentielle $d\bar{u}$ est bien déterminée. Les assertions suivantes se démontrent de façon analogue au cas multiplicatif. $\square$

Définition 1.9.

Soit $\phi : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ un torseur comme dans le corollaire précédent, on notera ω_ϕ la 1-forme différentielle égale à $\dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$ si la réduction est multiplicative, donnée par l'équation $y^p = u$, et égale à $d\bar{u}$ si la réduction est additive ou étale, donnée par l'équation $(\pi^n w + 1)^p = 1 + \pi^{pn} u$. On dira que ω_ϕ est la 1-forme différentielle associée au torseur ϕ.

Proposition 1.10.

Soit $\mathcal{C}_e$ la couronne formelle d'épaisseur e, σ un R-automorphisme d'ordre p de $\mathcal{C}_e$ ne permutant pas les bords. Le quotient $\tilde{\mathcal{C}} := (\mathcal{C}_e)/\langle\sigma\rangle$ est alors une couronne formelle d'épaisseur pe ; on notera φ le morphisme quotient $\mathcal{C}_e \to \tilde{\mathcal{C}}$. On suppose que φ_K est étale. Soient η et η' les bords de $\mathcal{C}_e$, leurs images par φ sont les bords de la couronne quotient. Si Z est une coordonnée de Laurent sur $\mathcal{C}_e$, on note $m := ord_\eta\left(\dfrac{\sigma Z}{Z} - 1\right)$ et $m' := ord_{\eta'}\left(\dfrac{\sigma Z}{Z} - 1\right)$. (On remarquera que m et m' ne dépendent pas du choix de Z).

Soit ρ tel que $0 < v_K(\rho) < e$, on définit alors une valuation v_ρ (resp. v_η) du corps des fractions $\mathcal{K}_e$ de $\mathcal{O}(\mathcal{C}_e)$ par : $v_\rho(f) = min\{v_K(f(z)) | v_K(z) = v_K(\rho)\}$ (resp. v_η est la valuation au bord η définie au chapitre 2). Soit d_ρ (resp. d_η) la valuation de la différente de l'extension de corps valués $(\mathcal{K}_e, v_\rho)/(\mathcal{K}_e^\sigma, v_\rho)$ (resp. $(\mathcal{K}_e, v_\eta)/(\mathcal{K}_e^\sigma, v_\eta)$). On a alors :

- $m + m' = 0$.
- *Pour* $0 < v_K(\rho) < e$, $d_\rho = d_\eta + m(p-1)v_K(\rho)$.
- *Si φ_η est radiciel, soit ω_η la différentielle associée au torseur*

$$\varphi_\eta : Spec\ \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C}_e,\eta} \to Spec\ \hat{\mathcal{O}}_{\tilde{\mathcal{C}},\varphi(\eta)}$$

(voir 1.9). On a alors $m = -(1 + ord_\eta \omega_\eta)$.

preuve.

Quitte à échanger les bords, on peut supposer $m \geq 0$. Comme φ_K est étale, la fonction $\dfrac{\sigma Z}{Z} - 1$ ne possède pas de zéro sur la couronne, donc d'après le lemme 2.1 du chapitre 2, on a alors $m + m' = 0$. De plus, on peut écrire $\dfrac{\sigma(Z)}{Z} - 1 = \pi^q Z^m U$, où q est un entier et U est un inversible de $\mathcal{O}(\mathcal{C}_e)$. Alors,

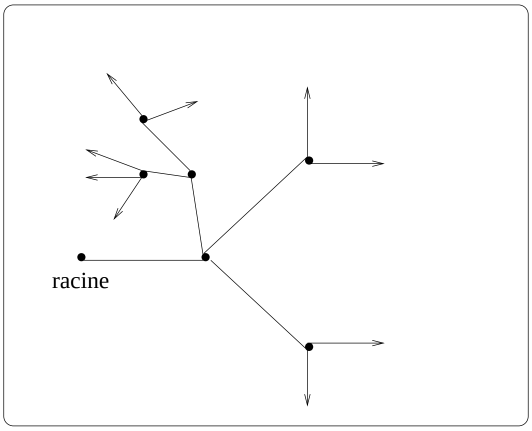
$$d_\rho = (p-1)v_\rho\left(\frac{\sigma(Z)}{Z}-1\right) = q(p-1) + m(p-1)v_K(\rho).$$

On conclut en remarquant que $q(p-1) = (p-1)v_\eta\left(\frac{\sigma(Z)}{Z}-1\right) = d_\eta$. Enfin, la dernière assertion résulte du corollaire 1.8. $\square$

2. Définition d'un arbre de Hurwitz

Soit Γ un arbre fini connexe, orienté à partir d'un sommet fixé r_o appelé racine de l'arbre. On notera somΓ (resp. arΓ) l'ensemble des sommets (resp. arêtes) de Γ. Pour tout sommet s de Γ, ar(s) (resp. ar$^+(s)$) sera l'ensemble des arêtes (resp. arêtes positives) d'origine s ; le nombre d'arêtes d'origine s est la valence du sommet s. Pour toute arête a de Γ, $o_\Gamma(a)$, $t_\Gamma(a)$ et $\bar{a}$ désignent respectivement l'origine, le sommet terminal et l'arête opposée de a. Une n-chaîne dans Γ est un sous-arbre Γ_0 avec som$\Gamma_0 = \{s_i, 0 \leq i \leq n\}$ et ar$\Gamma_0 = \{a_i, \bar{a}_i, 0 \leq i < n\}$, où $o_{\Gamma_0}(a_i) = s_i$ et $t_{\Gamma_0}(a_i) = s_{i+1}$. La chaîne Γ_0 est positive si a_i est positive pour tout i. Pour tout sommet s il existe une unique chaine d'origine r_o et de sommet terminal s, on la notera Γ_s.

L'orientation de l'arbre induit une relation d'ordre sur somΓ, à savoir $s_1 \leq s_2$ si et seulement si il existe une chaîne positive dans Γ d'origine s_1 et d'extrémité s_2. Un sommet maximal sera un sommet maximal pour cette relation d'ordre.



DÉFINITION 2.1. Etant donné un arbre Γ, fini et connexe, on considère les données suivantes :

- Une extension finie K du corps des fractions K_0 de l'anneau de valuation discrète $R_0 := W(k)[\zeta]$, où ζ est une racine primitive p-ième de l'unité.
- Un sommet r_0 de Γ ; on oriente Γ à partir de r_0.
- Un entier d_0 divisible par $p-1$, vérifiant $0 \leq d_0 \leq v_K(p)$.
- Une application ϵ de arΓ dans $\mathbb{N}$ telle que pour toute arête a on ait $\epsilon(a) = \epsilon(\bar{a})$. En particulier, ϵ définit une métrique sur le graphe obtenu en retirant les arêtes a telles que $\epsilon(a) = 0$.
- Une application m de arΓ dans $\mathbb{Z}$.
- Une application h de arΓ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On définit alors, pour tout sommet s, un entier $d(s)$ par :

$$d(s) := d_0 + (p-1)\Big(\sum_{a \in \mathrm{ar}^+\Gamma_s} m(a)\epsilon(a)\Big).$$

On dira que la donnée $\mathcal{H} := (K, r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ est une **donnée de Hurwitz** sur Γ, ou encore que $(\Gamma, \mathcal{H})$ est un arbre de Hurwitz, si les conditions $H[i]$, $1 \leq i \leq 7$, ci-dessous sont réalisées :

$H[1]$ Pour toute arête a, $m(\bar{a}) = -m(a)$ et $h(\bar{a}) = -h(a)$.

$H[2]$ Pour toute arête a, $m(a) = 0$ si et seulement si $h(a) \neq 0 \mod p$. De plus, si $m(a) \neq 0$, $m(a)$ est premier à p.

$H[3]$ Un sommet s de valence strictement supérieur à 1 est l'origine d'au moins trois arêtes distinctes, et on a les relations :

$$\sum_{a \in ar(s)} (m(a)+1) = 2 \qquad \textit{et} \qquad \sum_{a \in ar(s)} h(a) = 0 \mod p.$$

$H[4]$ Si a est une arête positive telle que $\epsilon(a) = 0$, alors son sommet terminal est maximal. Si de plus $m(a) = 0$, on dira que a est une **feuille** .

$H[5]$ Pour tout sommet s de Γ, $0 \leq d(s) \leq v_K(p)$.

On dira alors qu'un sommet s de Γ est :
- **multiplicatif** si $d(s) = v_K(p)$,

- **additif** si $0 < d(s) < v_K(p)$,
- **étale** si $d(s) = 0$,

$H[6]$ Si a est une feuille, l'origine de a est un sommet multiplicatif.

$H[7]$ Si s est additif ou étale, pour toute arête a d'origine s, $h(a) = 0 \mod p$.

Si $(\Gamma_1, \mathcal{H}_1)$ et $(\Gamma_2, \mathcal{H}_2)$ sont des arbres de Hurwitz, on dira qu'ils sont équivalents si il existe un isomorphisme de Γ_1 sur Γ_2 qui transporte $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_2$.

CONVENTION 2.2. *Dans tous les dessins d'arbres de Hurwitz que nous donnerons, les feuilles seront indiquées par des arêtes fléchées à leur extrémité maximale. Par ailleurs, lorsqu'on désirera indiquer une valeur de m sur une arête de l'arbre, on indiquera par une flèche au milieu de l'arête l'orientation de celle-ci pour laquelle on indique cette valeur (pour l'arête inverse, la valeur de m est alors évidemment son opposée.)*

DÉFINITION 2.3. Soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ un arbre de Hurwitz, et a une arête positive de Γ. Considérons le sous-arbre $\Gamma[a]$ dont l'ensemble des sommets est constitué de l'origine de a et des sommets s de Γ tels que $t_\Gamma(a) \leq s$. La donnée de Hurwitz $\mathcal{H}$ induit alors une donnée de Hurwitz $\mathcal{H}[a] := (K, o_\Gamma(a), d(o_\Gamma(a)), \epsilon, m, h)$ sur $\Gamma[a]$.

DÉFINITION 2.4. Soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ un arbre de Hurwitz.

$[M]$ Si s est un sommet de Γ multiplicatif de valence supérieure ou égale à 3, on dira qu'il est réalisable si il existe une fraction rationnelle $\bar{u}_s$ dans $k(t)$ et une injection j_s de $\mathrm{ar}(s)$ dans $\mathbb{P}^1(k)$ telles que :

- Si a est une arête d'origine s, le résidu de $\dfrac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}$ en $j_s(a)$ est égal à $h(a)$.
- $\mathrm{div}(\dfrac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}) = -\displaystyle\sum_{a \in \mathrm{ar}(s)} (m(a)+1)[j_s(a)]$.

$[A]$ Si s est un sommet de Γ additif de valence supérieure ou égale à 3, on dira qu'il est réalisable si il existe une fraction rationnelle $\bar{u}_s$ dans $k(t)$ et une injection j_s de $\mathrm{ar}(s)$ dans $\mathbb{P}^1(k)$ telles que :

$$\mathrm{div}(d\bar{u}_s) = -\sum_{a \in \mathrm{ar}(s)} (m(a)+1)[j_s(a)].$$

REMARQUE 2.5. Très souvent, nous aurons à considérer le cas où un seul des $m(a)$ est positif (par exemple pour l'étude du disque formel). Le problème de l'existence d'une forme différentielle comme ci-dessus se ramène à l'existence d'un point à coordonnées distinctes d'une certaine sous-variété algébrique, en général non irréductible, d'un espace affine sur k (voir la preuve de 7.6). La dimension de l'espace de ces formes différentielles solutions de notre problème est alors $[\frac{m}{p}]$, où m est l'unique $m(a)$ positif (voir la remarque 7.5). En particulier, nous retrouvons la finitude de l'ensemble des solutions dans le cas où $m < p$ ([**6**]).

3. Arbres de Hurwitz provenant d'un automorphisme d'ordre p du disque formel

Les automorphismes des disques formels (ouverts ou fermés) conduisent naturellement à des arbres de Hurwitz. On fixe une extension finie K de K_0, et on note R son anneau d'entiers.

EXEMPLE 3.1. Soit σ un R-automorphisme d'ordre p de $R[[Z]]$ (resp. $R\{Z\}$), on note F_σ l'ensemble des points fixes géométriques de σ dans la fibre générique $\mathcal{D}_K$ (resp. D_K) de $\mathcal{D} :=$ Spec $R[[Z]]$ (resp. $D :=$ Spec $R\{Z\}$); on supposera que le cardinal de F_σ est égal à $m+1$ et que les points de F_σ sont tous rationnels sur K. On considère le modèle minimal $\mathcal{M}(\mathcal{D}_K, F_\sigma)$ (resp. $\mathcal{M}(D_K, F_\sigma)$) déployant les spécialisations des points fixes en des points lisses et distincts, soit Γ_σ^* l'arbre dual de sa fibre spéciale, orienté à partir du sommet r_0 correspondant à la transformée stricte du point générique de $\mathcal{D}_k$ (resp. de la fibre spéciale de D). Pour tout sommet s de Γ_σ^*, notons F_s le sous-ensemble, éventuellement vide, de F_σ formé des points qui se spécialisent sur la composante correspondant à s. On note Γ_σ l'arbre orienté défini par :

- L'ensemble des sommets de Γ_σ est la réunion disjointe de somΓ_σ^* et de F_σ (resp. de somΓ_σ^*, de F_σ et d'un singleton $\{s_\infty\}$). Si x est un point de F_σ, on notera s_x le sommet associé.
- L'ensemble des arêtes positives de Γ_σ est la réunion disjointe de ar$^+\Gamma_\sigma^*$ et de F_σ (resp. de somΓ_σ^*, de F_σ et d'un singleton $\{a_\infty\}$). Si x est un point de F_σ, on notera a_x l'arête positive associée.
- Si a est une arête positive de Γ_σ^*, on a $o_{\Gamma_\sigma}(a) = o_{\Gamma_\sigma^*}(a)$ et $t_{\Gamma_\sigma}(a) = t_{\Gamma_\sigma^*}(a)$; pour tout point x de F_σ, si s est l'unique sommet de Γ_σ^* tel que $x \in F_s$, alors $o_{\Gamma_\sigma}(a_x) = s$ et $t_{\Gamma_\sigma}(a_x) = s_x$; enfin, dans le cas du disque fermé formel, on a $o_{\Gamma_\sigma}(a_\infty) = r_0$ et $t_{\Gamma_\sigma}(a_\infty) = s_\infty$.

On définit une donnée de Hurwitz $\mathcal{H}_\sigma := (K, r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ sur Γ_σ de la façon suivante :

- L'entier d_0 est égal à la valuation de la différente au bord η du disque formel.
- Si a est une arête de Γ_σ^*, $\epsilon(a)$ est égal à l'épaisseur du point double correspondant dans la fibre spéciale de $\mathcal{M}(\mathcal{D}_K, F_\sigma)$; sinon, on pose $\epsilon(a) = 0$.
- Soit a une arête de Γ_σ. Si a est une arête de Γ_σ^* (resp. $a = a_x$ où x est un point de F_σ), elle correspond à un point double orienté z_a de $\mathcal{M}_\sigma := \mathcal{M}(\mathcal{D}_K, \sigma)$ (resp. à la spécialisation $\bar{x}$ de x dans la fibre spéciale de $\mathcal{M}_\sigma$). Soit ξ_a le bord de la couronne formelle Spec $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a}$ (resp. le bord du disque formel Spec $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, \bar{x}}$) Spec $\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a}$ qui correspond à l'origine de a. On notera $\hat{\mathcal{O}}_a$ le localisé-complété $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a})^\wedge_{\xi_a}$, et ω_a la 1-forme différentielle associée au torseur Spec $\hat{\mathcal{O}}_a \to$ Spec $\hat{\mathcal{O}}_a^\sigma$ s'il a réduction radicielle (voir 1.9). On pose alors $m(a) := -(1 + \mathrm{ord}_{\xi_a} \omega_a)$ si ce torseur a réduction radicielle, et sinon $m(a)$ est le conducteur de Hasse de l'extension $\hat{\mathcal{O}}_a \otimes_R k / \hat{\mathcal{O}}_a^\sigma \otimes_R k$. On pose de plus $h(a) = 0$ si la réduction du torseur est additive ou étale et $h(a) = \mathrm{Rés}_{\xi_a} \omega_a$ si la réduction est multiplicative. Par ailleurs, $m(\bar{a}_x) = -m(a_x)$ et $h(\bar{a}_x) = -h(a_x)$. Enfin, dans le cas du disque fermé formel, on note $\hat{\mathcal{O}}_\infty := R[[Z^{-1}]]\{Z\}$, et ω_∞ la 1-forme différentielle associée au torseur Spec $\hat{\mathcal{O}}_\infty \to$ Spec $\hat{\mathcal{O}}_\infty^\sigma$. On pose alors $m(a_\infty) = -(1 + \mathrm{ord}_\infty \omega_\infty)$, $h(a_\infty) = 0$ si la réduction du torseur est additive ou étale et $m(a_\infty) = -(1 + \mathrm{ord}_\infty \omega_\infty)$, $h(a_\infty) = \mathrm{Rés}_\infty \omega_\infty$ si la réduction est multiplicative.

Proposition 3.2. *Avec les définitions ci-dessus,* $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ *est un arbre de Hurwitz. De plus :*

- *Pour toute arête positive* a, $m(a) \geq 0$.
- *Si* a *est une feuille, son sommet origine est un sommet maximal de* Γ_σ^*. *En d'autres termes, les spécialisations des points de* F_σ *sont dans les bouts de la fibre spéciale de* $\mathcal{M}_\sigma$. *Il en résulte que pour toute arête positive* a, *en notant* F_a *l'ensemble des feuilles de* $\Gamma[a]$, $m(a) + 1 = \mathit{card}(F_a)$.
- *Tout sommet de valence supérieure à* 3 *est réalisable.*

Remarque 3.3. Cette proposition est une reformulation, dans le langage des arbres de Hurwitz, des résultats de [**6**]. La preuve ci-dessous est à quelques détails près la même que celle exposée dans l'article cité au-dessus, nous ne la redonnons que pour illustrer la notion d'arbre de Hurwitz. On remarquera que dans le cas des arbres de Hurwitz provenant d'un automorphisme d'ordre p d'un disque formel, la donnée de l'arbre et de la racine permet de retrouver la valeur de $m(a)$ pour toute arête a. Ce ne sera plus le cas pour les arbres de Hurwitz provenant d'un automorphisme d'une couronne formelle.

DÉFINITION 3.4. On dira qu'un arbre de Hurwitz provient d'un automorphisme σ d'ordre p du disque formel (ouvert ou fermé) s'il est équivalent à $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$.

PREUVE.
$H[1]$ Si a est une arête de Γ^*_σ, la relation $m(\bar{a}) = -m(a)$ résulte de 1.10. Sinon, elle découle de la définition. Par ailleurs, la relation $h(\bar{a}) = -h(a)$ découle également de la définition.

$H[2]$ Soit a une arête de Γ_σ, on peut, quitte à changer a en $\bar{a}$, supposer a positive. En particulier, l'origine de a n'est pas un sommet maximal. Supposons tout d'abord l'origine de a multiplicative, la forme différentielle ω_a est alors logarithmique, donc l'ordre de ω_a est supérieur à -1. Alors $m(a) = 0$ est équivalent à $\mathrm{ord}_{\xi_a}\omega_a = -1$, ce qui est équivalent à $h(a) = \mathrm{Rés}_{\xi_a}\omega_a \neq 0 \mod p$. Si maintenant on suppose l'origine de a additive ou étale, on a par hypothèse $h(a) = 0$ et comme ω_a est maintenant une différentielle exacte, on ne peut pas avoir $\mathrm{ord}_{\xi_a}\omega_a = -1$. Ainsi, $m(a) = 0$.

$H[3]$ Le fait qu'un sommet ne peut pas être de valence égale à 2 résulte de la minimalité du modèle $\mathcal{M}_\sigma$. Soit s un sommet de Γ^*_σ, correspondant à une droite projective E_s, et $\tilde{E}_s$ l'ouvert affine de E_s complémentaire des points doubles et des spécialisations des points de F_s. On note E'_s la composante au-dessous de E_s dans le quotient de $\mathcal{M}_\sigma$ par σ et $\tilde{E}'_s$ l'image de $\tilde{E}_s$ dans E'_s.

Soit $\hat{\mathcal{M}}_\sigma$ le complété formel de $\mathcal{M}_\sigma$ le long de sa fibre spéciale, et $\tilde{\mathcal{E}}_s$ le sous-schéma formel affine de $\hat{\mathcal{M}}_\sigma$ de fibre spéciale $\tilde{E}_s$. On définit de manière analogue $\tilde{\mathcal{E}}'_s$. La R-algèbre $A_s := \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{E}}'_s)$ est complète pour la topologie π-adique et factorielle. En notant $B_s := \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{E}}_s)$, on considère alors la réduction du torseur $\mathrm{Spec}\ B_s \to \mathrm{Spec}\ A_s$, qui est radicielle.

Si la réduction est additive, donnée par une équation $(\pi^n w + 1)^p = 1 + \pi^{pn} u_s$, la différentielle $\omega_s := d\bar{u}_s$ est uniquement déterminée. Comme $\tilde{E}_s$ est une courbe lisse, ω_s n'a ni zéro ni pôle sur $\tilde{E}'_s$. On a alors

$$\mathrm{div}\omega_s = -\sum_{a \in \mathrm{ar}(s)} (m(a)+1)[t_a].$$

(En notant t_a l'image dans E'_sdu point de E_s correspondant à l'arête a). La relation $\sum_{a\in\mathrm{ar}(s)}(m(a)+1) = 2$ est alors simplement le fait que le degré de ω_s est égal à -2. De plus, comme s est additif, pour toute arête a d'origine s, on a $h(a) = 0$ par définition. Ainsi, la somme des $h(a)$ est clairement nulle.

Si la réduction est multiplicative, donnée par une équation $y^p = u_s$, la différentielle $\omega_s := \dfrac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}$ est uniquement déterminée. Comme $\tilde{E}_s$ est une courbe lisse, ω_s n'a ni zéro ni pôle sur $\tilde{E}'_s$. On a alors

$$\mathrm{div}\omega_s = -\sum_{a\in\mathrm{ar}(s)}(m(a)+1)[t_a].$$

et pour a dans $\mathrm{ar}(s)$, le résidu de ω_s en t_a est $h(a)$. Les relations $\sum_{a\in\mathrm{ar}(s)}(m(a)+1) = 2$ et $\sum_{a\in\mathrm{ar}(s)} h(a) = 0$ traduisent alors respectivement que le degré de ω_s est -2 et le théorème des résidus.

En particulier, on voit dès à présent que les sommets correspondant à des droites projectives sont réalisables.

$H[4]$ est immédiat. (Les feuilles correspondent aux points de F_σ).

$H[5]$ résulte du

Lemme 3.5. *Soit s un sommet de Γ_σ^*. Le point générique de la composante E_s définit une valuation discrète v_s du corps des fractions $\mathcal{K}$ de $R[[Z]]$ (resp. $R\{Z\}$). L'entier $d(s) := d_0 + (p-1)(\sum_{a\in ar^+\Gamma_s} m(a)\epsilon(a))$ est alors égal à la valuation de la différente de l'extension $(\mathcal{K}, v_s)/(\mathcal{K}^\sigma, v_s)$.*

La preuve est immédiate, en utilisant la proposition 1.10, par récurrence sur le nombre de sommets de Γ_s.

$H[6]$ Une feuille correspond à un point fixe de σ, en particulier, la composante qui le porte a pour différente $v_K(p)$, c'est-à-dire l'origine de la feuille est un sommet multiplicatif.

$H[7]$ est immédiat d'après la définition.

La donnée $\mathcal{H}_\sigma$ est donc bien une donnée de Hurwitz sur Γ_σ. Soit a une arête positive, et s son origine. Considérons le modèle M_a de $\mathcal{D}_K$ obtenu à partir de $\mathcal{M}_\sigma$ en recontractant les droites projectives correspondant aux sommets s' tels que $\Gamma_{s'}$ passe par a. Ces droites se contractent en un point z_a de E_s qui est alors lisse sur M_a, soit Z_a un paramètre du disque formel $\hat{\mathcal{O}}_{M_a,z_a}$, i.e. $\hat{\mathcal{O}}_{M_a,z_a} = R[[Z_a]]$. On a alors, d'après la proposition 1.10, $m(a) = \mathrm{ord}_{Z_a}\left(\dfrac{\sigma Z_a}{Z_a} - 1\right) \geq 0$. Soit a_0 une feuille de Γ_σ. Son origine s est un sommet de Γ_σ^*, multiplicatif. Supposons qu'il existe une arête a positive de Γ_σ^* de sommet origine s, on a alors $m(a) \geq 0$. Comme $d(t_{\Gamma_\sigma}(a)) \leq v_K(p) = d(o_{\Gamma_\sigma}(a))$, on doit avoir $m(a) = 0$. Plus généralement, pour toute chaîne positive d'origine s, le sommet terminal est multiplicatif. Prenons une telle chaîne, maximale. La dernière arête est une feuille. De son sommet origine s' ne partent que des feuilles par maximalité. De la relation $\sum_{a' \in \mathrm{ar}(s')}(m(a') + 1) = 2$ et du fait qu'il existe au moins deux feuilles d'origine s', on déduit la contradiction $m(a) < 0$ pour l'unique arête positive de sommet terminal s'. Ainsi, toute arête d'origine s est une feuille.

Soit a une arête positive de Γ_σ. Si a est une feuille, alors $m(a) = 0$, et $\mathrm{card} F_a = 1$. Si a n'est pas une feuille, le sommet terminal s de a est de valence supérieure à 3. Donc, d'après $H[3]$, $m(a) + 1 = \sum_{a' \in \mathrm{ar}^+(s)}(m(a') + 1)$. Par récurrence sur le nombre maximal de sommets d'une chaîne positive reliant le sommet terminal de a à une feuille, on peut alors supposer $m(a') + 1 = \mathrm{card} F_{a'}$ pour toute arête positive a' d'origine s. Comme F_a est la réunion disjointe des $F_{a'}$, on a alors $m(a) + 1 = \mathrm{card} F_a$. Remarquons qu'on peut aussi déduire cette formule du théorème de préparation de Weierstrass. $\square$

4. Théorème de réalisation pour le disque formel

THÉORÈME 4.1. *Soit* $(\Gamma, \mathcal{H})$ *un arbre de Hurwitz, avec* $\mathcal{H} = (K, r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ *; en notant* R *l'anneau de valuation de* K*,* $(\Gamma, \mathcal{H})$ *provient d'un* R*-automorphisme d'ordre* p *de* $R[[Z]]$ *si et seulement si il vérifie les conditions* $D[i]$ *ci-dessous* $(1 \leq i \leq 3)$ *:*

$D[1]$ *La racine* r_0 *est de valence* 1.

$D[2]$ *Toute arête aboutissant à un sommet maximal est une feuille.*

$D[3]$ *Tout sommet de valence supérieure ou égale à* 3 *est réalisable.*

La partie directe du théorème, due à B. Green et M. Matignon, a déjà été prouvée, à l'exception de $D[1]$, qui résulte de la construction du modèle minimal :

En fait, le sommet terminal de l'unique arête d'origine r_0 correspond au plus petit disque fermé contenant tous les points de F_σ.

Remarque 4.2. Quitte à faire une extension finie de K, on peut toujours se ramener au cas où la valuation d_0 de la différente au bord du disque formel est nulle, au moyen d'un recollement convenable d'une couronne formelle semi-ouverte avec action d'un automorphisme d'ordre p. En effet, soit σ un automorphisme d'ordre p du disque formel, avec $m+1$ points fixes dans la fibre générique. Posons $v_K(p) = d_0 + (p-1)n_0$, d'après le corollaire 1.8 du chapitre 5, il existe un paramètre Z au bord du disque formel tel que

$$\sigma Z = \zeta^{-\frac{1}{m}} Z(1 + \lambda\pi^{-n_0}\zeta^{-1}Z^m)^{-\frac{1}{m}}.$$

Considérons maintenant l'automorphisme σ_0 d'ordre p de la couronne formelle semi-ouverte Spec $\dfrac{R[[V]]\{W\}}{(VW-\rho)}$, donné par :

$$\sigma_0 V := \zeta^{-\frac{1}{m}} V(1+V^m)^{-\frac{1}{m}},$$

avec $\rho^m := \lambda\pi^{-n_0}\zeta^{-1}$. On utilise alors un lemme analogue au lemme 3.2 pour construire un prolongement de σ à un disque formel plus grand, en identifiant $W = Z^{-1}$, et le choix de σ_0 montre que l'automorphisme obtenu agit sans inertie au bord.

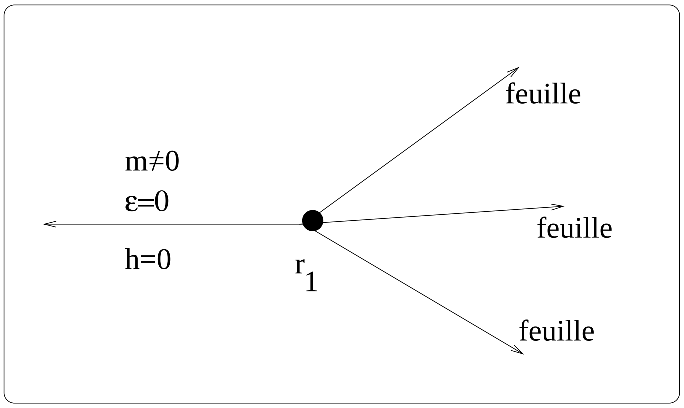
5. Construction d'automorphismes d'ordre p

Le but de cette partie est de donner les résultats constituant le coeur technique de la preuve de la partie réciproque du théorème 4.1. Notamment, on va voir que l'étape essentielle est la construction d'automorphismes d'ordre p du disque fermé à partir d'un arbre de Hurwitz. On fixe une extension finie K de K_0, et on note R son anneau de valuation ; π désigne une uniformisante de R

Proposition 5.1. *Soit Γ un arbre fini connexe et $\mathcal{H} = (K, r_1, d_1, \epsilon, m, h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ ; on suppose que $(\Gamma, \mathcal{H})$ vérifie les conditions suivantes :*

- *La racine r_1 est de valence supérieure ou égale à 3*
- *Toute arête a d'origine r_1 vérifie $\epsilon(a) = 0$. En particulier, le seul sommet non maximal est la racine r_1.*
- *Il existe une unique arête a_1 d'origine r_1 qui n'est pas une feuille (i.e. $m(a_1) \neq 0$).*
- *La racine r_1 est réalisable.*

Alors, si R désigne l'anneau de valuation de K, il existe un automorphisme σ d'ordre p du disque fermé formel Spec $R\{Z\}$ dont l'arbre de Hurwitz associé est équivalent à $(\Gamma, \mathcal{H})$, et tel qu'il existe un paramètre V de $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$ avec $\sigma(V) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_1)}} V\big(1 + \pi^{v_K(\lambda)} V^{m(a_1)}\big)^{-\frac{1}{m(a_1)}}$.



PREUVE.

Remarquons tout d'abord que si le nombre de feuilles a de $(\Gamma, \mathcal{H})$ est $m+1$, alors on a $m(a_1) = -m$ d'après la condition $H[3]$. De plus, la racine est multiplicative d'après $H[6]$. Soit $\bar{u}_{r_1}$ et j_{r_1} vérifiant les conditions de $[M]$. Pour simplifier les notations, on notera $\bar{u} := \bar{u}_{r_1}$, et $t_a := j_s(a)$ pour toute arête a d'origine r_1. On peut supposer $t_{a_1} = +\infty$. Alors, quitte à multiplier $\bar{u}$ par une puissance p-ième, ce qui ne change pas la différentielle $\dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$, on peut supposer que $\bar{u} = \prod_{a\in F}(t-t_a)^{h(a)}$, où F désigne l'ensemble des feuilles distinctes de a_1. Soit T_a dans R relevant t_a, et u un élément de la R-algèbre $\mathcal{A} := R\{T, (T-T_a)^{-1}\}_{a\in F}$ relevant $\bar{u}$. Notons $\mathcal{B} := \dfrac{\mathcal{A}[Y]}{(Y^p - u)}$, c'est une $\mathcal{A}$-algèbre libre de rang p. On considère l'automorphisme de $\mathcal{A}$-algèbre (d'ordre p) σ tel que $\sigma(Y) = \zeta Y$. Le k-morphisme Spec $\bar{\mathcal{B}} \to$ Spec $\bar{\mathcal{A}}$ est un revêtement purement inséparable de degré p de l'ouvert affine $\mathbb{P}^1_k \setminus \{\infty, t_a\}_{a\in F}$, et $d\bar{u}$ ne possède ni zéro, ni pôle sur cet ouvert, donc Spec $\bar{\mathcal{B}}$ est lisse, et c'est un ouvert de la droite projective sur k de la forme $\mathbb{P}^1_k \setminus \{\infty, z_a\}_{a\in F}$, où les z_a sont des éléments de k distincts deux à deux. Autrement dit, on a $\bar{\mathcal{B}} = k[z, (z-z_a)^{-1}]_{a\in F}$. Soit Z (resp. Z_a) un relèvement de z (resp.

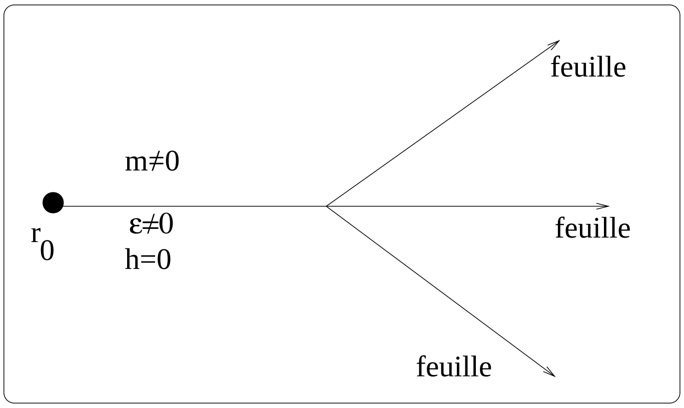
z_a) dans $\mathcal{B}$ (resp. R), comme $\mathcal{B}$ est plat sur R, on a $\mathcal{B} = R\{Z, (Z - Z_a)^{-1}\}_{a\in F}$. Soit ω la forme différentielle $\dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}}$.

Pour $a \in F$, le résidu de ω en t_a est $h(a) \neq 0 \mod p$; il résulte alors de la proposition 1.8 (A,a) que $\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}} R[[T-T_a]]\{(T-T_a)^{-1})\} = R[[Z-Z_a]]\{(Z-Z_a)^{-1}\}$, et l'action induite par celle de σ est donnée sur un paramètre convenable $X_{(a)}$ par $\sigma(X_{(a)}) = \zeta^{h(a)^{-1}}(X_{(a)})$. Remarquons que cette action se prolonge canoniquement en une action sur $R[[X_{(a)}]]$. Soit N le noyau de l'homomorphisme (surjectif) de $R[\langle\sigma\rangle]$-module $\phi : \mathcal{B} \times \prod_{a\in F} R[[X_{(a)}]] \to \prod_{a\in F} R[[Z - Z_a]]\{(Z - Z_a)^{-1}\}$ défini par $\phi(b, (f_a)) = (b \otimes 1 - f_a)_{a\in F}$. D'après le lemme 3.1 du chapitre 3, la $R[\langle\sigma\rangle]$-algèbre N est alors de la forme $R\{Z_0\}$. De plus, l'arbre de Hurwitz associé à l'automorphisme σ de $R\{Z_0\}$ est isomorphe à $(\Gamma, \mathcal{H})$. La dernière assertion résulte de la proposition 1.8 (A,b), car $\mathrm{ord}_\infty d\bar{u} = -(m(a_1) + 1)$. □

Corollaire 5.2. *Soit Γ un arbre fini connexe et $\mathcal{H} = (K, r_1, d_0, \epsilon, m, h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ ; on suppose que $(\Gamma, \mathcal{H})$ vérifie les conditions suivantes :*

- *La racine r_0 est l'origine d'une unique arête a_0, et $\epsilon(a_0) \neq 0$, $m(a_0) \neq 0$.*
- *Si a est une arête positive d'origine $r_1 := t_\Gamma(a_0)$, a est une feuille. En particulier, r_1 est multiplicatif.*
- *Le sommet r_1 est réalisable.*

Alors, il existe un automorphisme σ d'ordre p du disque ouvert formel Spec $R[[Z]]$ dont l'arbre de Hurwitz associé est équivalent à $(\Gamma, \mathcal{H})$, et tel qu'il existe un paramètre X de $R[[Z]]\{Z^{-1}\}$ avec $\sigma(X) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_0)}} X(1 + \pi^{v_K(\lambda)-n_0} X^{m(a_0)})^{-\frac{1}{m(a_0)}}$, où n_0 est un entier donné par la relation $v_K(p) = d_0 + (p-1)n_0$.



PREUVE.

Soit $\mathcal{H}'$ la donnée de Hurwitz sur Γ définie par

$$\mathcal{H}' := (K, r_1, d_1, \epsilon', m, h),$$

où $d_1 := d_0 + m(a_0)(p-1)\epsilon(a_0)$, $\epsilon'(a) = \epsilon(a)$ si $a \notin \{a_0, \bar{a}_0\}$, et $\epsilon'(a_0) = 0$. Alors, $(\Gamma, \mathcal{H}')$ vérifie les hypothèses de la proposition 5.1 (avec $a_1 = \bar{a}_0$). Il existe ainsi un R-automorphisme σ de $R\{Z\}$, d'ordre p, dont l'arbre de Hurwitz s'identifie à $(\Gamma, \mathcal{H}')$, et tel qu'il existe un paramètre V de $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$ tel que l'action induite de σ sur V soit donnée par $\sigma(V) = \zeta^{\frac{1}{m}} V(1 + \pi^{v_K(\lambda)} V^{-m})^{\frac{1}{m}}$, où $m = m(a_0) > 0$ et $\lambda = \zeta - 1$. Notons $e := \epsilon(a_0)$ et considérons la R-algèbre $\dfrac{R[[Z_1, Z_2]]}{(Z_1 Z_2 - \pi^e)}$, munie du R-automorphisme (d'ordre p) $\sigma(Z_1) = \zeta^{-\frac{1}{m}} Z_1(1 + \pi^{v_K(\lambda) - em} Z_1^m)^{-\frac{1}{m}}$. Soit ψ l'isomorphisme de R-alèbres de $R[[Z_2]]\{Z_2^{-1}\}$ sur $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$ qui envoie Z_2 sur V, ψ est σ-équivariant ; en utilisant le lemme 3.2 du chapitre 3, on obtient un automorphisme σ de $R[[Z_0]]$ dont l'arbre de Hurwitz associé s'identifie à $(\Gamma, \mathcal{H})$, et le paramètre au bord $Z' := Z_1$ possède la propriété attendue ; en effet, $v_K(p) = d(r_1) = d_0 + em(a_0)(p-1)$, donc $n_0 = em$. □

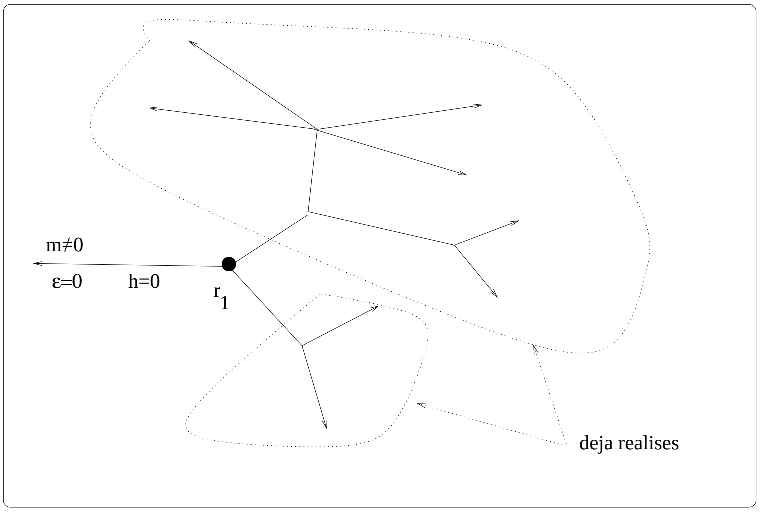
PROPOSITION 5.3. *Soit Γ un arbre fini connexe et $\mathcal{H} = (K, r_1, d_1, \epsilon, m, h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ ; on suppose que $(\Gamma, \mathcal{H})$ vérifie les conditions suivantes :*

- *La racine r_1 est additive.*
- *Il existe une unique arête a_1 d'origine r_1 vérifiant $m(a_1) < 0$.*
- *Si a est une arête d'origine r_1 distincte de a_1, l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_a, \mathcal{H}_a)$ provient d'un R-automorphisme σ_a d'ordre p d'un disque formel $\mathcal{D}_a$, et il existe un paramètre X_a au bord de $\mathcal{D}_a$ tel que*

$$\sigma_a(X_a) = \zeta^{-\frac{1}{m(a)}} X_a(1 + \pi^{v(\lambda) - n_1} X_a^{m(a)})^{-\frac{1}{m(a)}},$$

  où n_1 est l'entier défini par la relation $v_K(p) = d(r_1) + n_1(p-1)$.
- *La racine r_1 est réalisable.*

Alors, si R désigne l'anneau de valuation de K, il existe un automorphisme σ d'ordre p du disque fermé formel Spec $R\{Z\}$ dont l'arbre de Hurwitz associé est isomorphe à $(\Gamma, \mathcal{H})$, et tel qu'il existe un paramètre V de $R[[Z^{-1}]]\{Z\}$ avec $\sigma(V) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_1)}} V(1 + \pi^{v_K(\lambda) - n_1} V^{m(a_1)})^{-\frac{1}{m(a_1)}}$.



PREUVE.

Par la condition $H[3]$, on a $m := m(\bar{a}_1) = -m(a_1) = -1 + \sum_{a \in \mathrm{ar}(r_1)\setminus\{a_1\}} (m(a)+1)$. Soit $\bar{u}_{r_1}$ et j_{r_1} vérifiant les conditions de $[A]$. Pour simplifier les notations, on notera $\bar{u} := \bar{u}_{r_1}$, et $t_a := j_s(a)$ pour toute arête a d'origine r_1. On peut supposer $t_{a_1} = +\infty$. Alors, quitte à ajouter à $\bar{u}$ par une puissance p-ième, ce qui ne change pas la différentielle $d\bar{u}$, on peut supposer que les pôles de $\bar{u}$ sont les t_a, pour a dans $\mathrm{ar}(r_1) \setminus \{a_1\}$. Soit T_a dans R relevant t_a, et u un élément de la R-algèbre $\mathcal{A} := R\{T, (T-T_a)^{-1}\}_{a\in F}$ relevant $\bar{u}$. Notons $\mathcal{B} := \dfrac{\mathcal{A}[W]}{(\frac{(\pi^{n_1}W+1)^p-1}{\pi^{pn_1}} - u)}$, c'est une $\mathcal{A}$-algèbre libre de rang p. On considère l'automorphisme de $\mathcal{A}$-algèbre (d'ordre p) σ tel que $\sigma(W) = \zeta W + \frac{\zeta-1}{\pi^{n_1}}$. Le k-morphisme $\mathrm{Spec}\ \bar{\mathcal{B}} \to \mathrm{Spec}\ \bar{\mathcal{A}}$ est un revêtement purement inséparable de degré p de l'ouvert affine $\mathbb{P}^1_k \setminus \{\infty, t_a\}_{a\in\mathrm{ar}(r_1)\setminus\{a_1\}}$, donné par l'équation $w^p - \bar{u}$, et $d\bar{u}$ ne possède ni zéro, ni pôle sur cet ouvert, donc $\mathrm{Spec}\ \bar{\mathcal{B}}$ est lisse, et c'est un ouvert de la droite projective sur k de la forme $\mathbb{P}^1_k \setminus \{\infty, z_a\}_{a\in\mathrm{ar}(r_1)\setminus\{a_1\}}$, où les z_a sont des éléments de k distincts deux à deux. Autrement dit, on a $\bar{\mathcal{B}} = k[z, (z-z_a)^{-1}]_{a\in\mathrm{ar}(r_1)\setminus\{a_1\}}$. Soit Z (resp. Z_a) un relèvement de z (resp. z_a) dans $\mathcal{B}$ (resp. R), comme $\mathcal{B}$ est plat sur R, on a $\mathcal{B} = R\{Z, (Z-Z_a)^{-1}\}_{a\in\mathrm{ar}(r_1)\setminus\{a_1\}}$.

Pour $a \in \mathrm{ar}(r_1) \setminus \{a_1\}$, on a $1 + \mathrm{ord}_{t=t_a} d\bar{u} = -m(a) \neq 0 \mod p$; il résulte alors de la proposition 1.8 (B) que $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} R[[T-T_a]]\{(T-T_a)^{-1})\}$ est égal à $R[[Z-Z_a]]\{(Z-Z_a)^{-1}\}$, et l'action induite par celle de σ est donnée sur un paramètre convenable $\tilde{X}_a$ de $R[[Z-Z_a]]\{(Z-Z_a)^{-1}\}$ par

$$\sigma(\tilde{X}_a) = \zeta^{-\frac{1}{m}(a)} \tilde{X}_a (1 + \pi^{v_K(\lambda)-n_1} \tilde{X}_a^{m(a)})^{-\frac{1}{m}(a)}.$$

Soit ψ_a l'isomorphisme équivariant de $\mathcal{O}(\mathcal{D}_a)^{\wedge}_{(\pi)} = R[[X_a]]\{X_a^{-1}\}$ sur $R[[Z-Z_a]]\{(Z-Z_a)^{-1}\}$ qui envoie X_a sur $\tilde{X}_a$. En utilisant le lemme 3.1 du chapitre 3, on construit alors une R-algèbre de la forme $R\{Z_0\}$, muni d'un R-automorphisme σ d'ordre p, dont l'arbre de Hurwitz associé s'identifie à $(\Gamma, \mathcal{H})$. De plus, comme $\mathrm{ord}_\infty d\bar{u} = -(m(a_1)+1)$, la proposition 1.8 (B) montre l'existence d'un paramètre V vérifiant les conditions attendues. □

Comme précédemment, en en déduit le

Corollaire 5.4. *Soit Γ un arbre fini connexe et $\mathcal{H} = (K, r_0, d_0, \epsilon, m, h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ ; on suppose que $(\Gamma, \mathcal{H})$ vérifie les conditions suivantes :*

- *La racine r_0 est additive ou étale.*
- *Il existe une unique arête a_0 d'origine r_0.*
- *Si a est une arête d'origine $r_1 := t_\Gamma(a_0)$ distincte de $a_1 := \bar{a}_0$, l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_a, \mathcal{H}_a)$ provient d'un R-automorphisme σ_a d'ordre p d'un disque formel, tel qu'il existe un paramètre X_a avec*
$$\sigma_a(X_a) = \zeta^{-\frac{1}{m(a)}} X_a (1 + \pi^{v(\lambda) - n_1} X_a^{m(a)})^{-\frac{1}{m(a)}},$$
où n_1 est l'entier défini par la relation $v_K(p) = d(r_1) + n_1(p-1)$.
- *Le sommet r_1 est réalisable.*

Alors, si R désigne l'anneau de valuation de K, il existe un automorphisme σ d'ordre p du disque formel Spec $R[[Z]]$ dont l'arbre de Hurwitz associé est isomorphe à $(\Gamma, \mathcal{H})$, et tel qu'il existe un paramètre X au bord du disque formel avec $\sigma(X) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_0)}} X (1 + \pi^{v_K(\lambda) - n_0} X^{m(a_o)})^{-\frac{1}{m(a_0)}}$, où n_0 est l'entier défini par la relation $v_K(p) = d_0 + (p-1)n_0$.

6. Démonstration du théorème 4.1

On raisonne par récurrence sur le nombre maximal $N \geq 3$ de sommets d'une chaîne d'origine r_0 et de sommet terminal maximal. Notons P_N la propriété suivante : Tout arbre de Hurwitz vérifiant les conditions $D[i]$, où $1 \leq i \leq 3$, et dont le nombre maximum de sommets d'une chaîne d'origine r_0 et de sommet terminal maximal est inférieur ou égal à N, provient d'un automorphisme σ du disque formel, tel qu'il existe un paramètre X au bord du disque, avec $\sigma(X) = \zeta^{-\frac{1}{m(a_0)}} X (1 + \pi^{v_K(\lambda) - n_0} X^{m(a_o)})^{-\frac{1}{m(a_0)}}$.

La propriété P_3 résulte du corollaire 5.2.

Si maintenant $N \geq 4$, on suppose P_{N-1} démontrée ; soit $(\Gamma, \mathcal{H})$ un arbre de Hurwitz vérifiant les conditions $D[i]$, où $1 \leq i \leq 3$, et tel que le nombre maximal de sommets d'une chaîne d'origine r_0 et de sommet terminal maximal est égal à N. Alors, les hypothèses du corollaire 5.4 sont vérifiées, et donc l'arbre de Hurwitz

$(\Gamma, \mathcal{H})$ provient d'un automorphisme d'ordre p d'un disque formel, avec un bon paramètre au bord.

7. Un critère de réalisabilité

7.1. Notations. Soit I un ensemble fini, non vide, on note $\mathcal{P}_I$ l'ensemble des partitions de I. L'ensemble $\mathcal{P}_I$ est en bijection avec l'ensemble des relations d'équivalence sur I : Plus précisément, si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur I, la partition associée est par définition l'ensemble des classes d'équivalence ; réciproquement, si P est une partition, on définit une relation d'équivalence sur I par $i \equiv j \mod P$ si et seulement si il existe J dans P tel que i et j appartiennent à J. La partition associée à la relation d'égalité sur I sera notée $P_=$.

Il existe une relation d'ordre naturelle sur $\mathcal{P}_I$, à savoir $P < P'$ si et seulement si pour tout J' dans P', il existe J dans P tel que $J' \subset J$. Autrement dit, si la relation d'équivalence correspondant à P' est plus fine que celle correspondant à P.

7.2. Le k-schéma $X_{\underline{e}}$. Soient m un entier positif premier à p, I un ensemble fini à $m+1$ éléments, $\underline{e} := (e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{F}_p$, telle que $\sum_{i\in I} e_i = 0$; on notera $X_{\underline{e}}$ le sous-schéma fermé de Spec $k[T_i]_{i\in I}$ d'idéal $(\sum_{i\in I} e_i T_i^\nu)_{1\le\nu\le m-1,(\nu,p)=1}$. Soit $x := (t_i)$ un point rationnel sur k de $X_{\underline{e}}$, il définit une partition P_x de I telle que $i = j \mod P_x$ si et seulement si $t_i = t_j$. Pour une partition P fixée de I, on notera $X_{\underline{e},P}$ le sous-schéma fermé de $X_{\underline{e}}$ d'idéal $(T_i - T_j)_{i\equiv j \mod P}$. En particulier, $X_{\underline{e},P_=} = X_{\underline{e}}$. On notera $X^*_{\underline{e},P}$ l'ouvert de $X_{\underline{e},P}$ complémentaire de la réunion des $X_{\underline{e},P'}$, avec $P' < P$. On remarquera que $X^*_{\underline{e},P}(k) = \{x \in X_{\underline{e}}(k), P_x = P\}$

Lemme 7.1. *Soit P une partition de I, différente de $P_=$. alors si $x = (t_i)$ est un point rationnel sur k de $X_{\underline{e}}$ avec $P_x = P$, on a $\sum_{i\in J} e_i = 0$ pour tout J dans P.*

preuve. Pour J dans P, notons $a_J = t_i$ pour n'importe quel i dans J, ce qui est bien défini car $P = P_x$. Alors, on a $\sum_{J\in P}(\sum_{i\in J} e_i)a_J^\nu = 0$ pour ν variant de 0 à $m-1$. Comme P est différente de $P_=$, le cardinal r de P est inférieur ou égal à m. Les a_J étant distincts deux à deux, on déduit des r premières équations la relation $\sum_{i\in J} e_i = 0$ pour J dans P. □

Définition 7.2. On dira qu'une partition de I est $\underline{e}$-adaptée si pour tout J dans P, on a $\sum_{i\in J} e_i = 0 \mod p$. On notera $\mathcal{P}_{I,\underline{e}}$ l'ensemble des partitions $\underline{e}$-adaptées de I.

Corollaire 7.3.
(a) Si P est une partition de I, $\underline{e}$-adaptée, alors $X_{\underline{e},P}$ est isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}_k^P := \mathrm{Spec}\, k[A_J]_{J\in P}$. En particulier, $X_{\underline{e},P}$ est de dimension card$P$.
(b) Soit $Y_{\underline{e}} := \cup_{P\in\mathcal{P}_{I,\underline{e}}} X_{\underline{e},P}$, alors $X_{\underline{e},réd}$ est la réunion disjointe de $Y_{\underline{e}}$ et de $X^*_{\underline{e}} := X^*_{\underline{e},P_=}$.

PREUVE.
(a) L'isomorphisme en question est donné par l'isomorphisme

$$\frac{k[T_i]_{i\in I}}{(T_i - T_j)_{i\equiv j \mod P}} \to k[A_J]_{J\in P}$$

qui envoie T_i sur A_J, où $J = i \mod P$.
(b) résulte du lemme 7.1, qui entraîne que $X_{\underline{e},\text{réd}}(k)$ est la réunion disjointe de $Y_{\underline{e}}(k)$ et de $X^*_{\underline{e}}(k)$. □

Proposition 7.4.
(a) Les composantes irréductibles de $Y_{\underline{e}}$ sont les $X_{\underline{e},P}$, où P est une partition maximale $\underline{e}$-adaptée.
(b) Si il existe une partition maximale $\underline{e}$-adaptée avec card$P \leq [\frac{m}{p}] + 1$, alors $X^*_{\underline{e}}(k)$ est non vide.
(c) Si $X^*_{\underline{e}}(k)$ est non vide, l'ouvert $X^*_{\underline{e}}$ est régulier.

PREUVE. L'assertion (a) est claire. Pour toute composante irréductible Z de $X_{\underline{e}}$, la dimension de Z est supérieure ou égale à $m+1-(m-1-[\frac{m}{p}]) = [\frac{m}{p}]+2$. Soit P une partition maximale $\underline{e}$-adaptée avec card$P \leq [\frac{m}{p}] + 1$, alors $X_{\underline{e},P}$ n'est pas une composante irréductible de $X_{\underline{e}}$, et une composante irréductible de $X_{\underline{e}}$ contenant $X_{\underline{e},P}$ doit alors rencontrer $X^*_{\underline{e}}(k)$. Il reste à voir l'assertion (c) : On voit immédiatement que l'espace tangent en un point fermé de $X^*_{\underline{e}}$ est de dimension $[\frac{m}{p}] + 2$, donc inférieur à la dimension en ce point. On applique alors le critère jacobien. □

Remarque 7.5. Le stabilisateur $S_\infty := \{z \mapsto az + b | a \in k^*, b \in k\}$ dans $\mathrm{PGL}(2, k)$ du point ∞ dans $\mathbb{P}^1(k)$ est de dimension 2, et agit librement sur $X^*_{\underline{e}}$. Si $X^*_{\underline{e}}(k)$ est non vide, le quotient de $X^*_{\underline{e}}$ par l'action de S_∞ est donc une variété algébrique affine sur k de dimension $[\frac{m}{p}]$.

7.3. Critère de réalisabilité.

PROPOSITION 7.6. *Soit* $(\Gamma, \mathcal{H})$ *un arbre de Hurwitz, et* s *un sommet de* Γ.
(a) Supposons que s *est multiplicatif, et qu'il existe une unique arête* a_0 *d'origine* s *telle que* $m(a_0) \neq 0$. *Notons* $m := -m(a_0)$, $I_s := ar(s) \setminus a_0$ *et* $\underline{h} := (h(a))_{a \in I_s}$.

Alors, si il existe une partition maximale $\underline{h}$*-adaptée* P *de* I_s *avec* $cardP \leq [\dfrac{m}{p}] + 1$, *le sommet* s *est réalisable.*

(b) Supposons que s *est additif, et qu'il existe une unique arête* a_0 *d'origine* s *telle que* $m(a_0) < 0$. *Notons* $m := -m(a_0)$, I_s *la réunion disjointe de* $I'_s := ar(s) \setminus a_0$ *et d'un ensemble fini à* $m+1-card(I'_s)$ *éléments, et* $\underline{e} = (e_i)_{i \in I_s}$ *la famille définie par* $e_i := m(i)$ *si* $i \in I'_s$ *et* $e_i = -1$ *sinon.*

Alors, si il existe une partition maximale $\underline{e}$*-adaptée* P *de* I_s *avec* $cardP \leq [\dfrac{m}{p}] + 1$, *le sommet* s *est réalisable.*

REMARQUE 7.7. La proposition précédente généralise la proposition III 4.5.1 de [**6**]. Plus précisément, avec la terminologie employée dans cette proposition, le fait que (h_i) appartienne au lieu critique revient à dire que la partition grossière est maximale, ce qui pour $m < p$ est équivalent au critère 7.6. Par ailleurs, l'exemple III 4.7 de ce même article prouve que le critère n'est pas nécessaire.

PREUVE.
(a) On cherche $\bar{u} := \bar{u}_s$ sous la forme $\bar{u} = \prod_{i \in I_s} (t - t_i)^{h_i}$, en convenant que $j_s(a_0) = \infty$ et que h_i désigne un représentant de $h(i)$ dans $\mathbb{Z}$, avec la relation $\sum_{i \in I_s} h_i = 0$. Soit $x := t^{-1}$, on a alors $\bar{u} = \prod_{i \in I_s} (1 - t_i x)^{h_i}$, d'oú

$$\frac{d\bar{u}}{\bar{u}} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} (\sum_{i \in I_s} h_i t_i^{\nu+1}) x^\nu dx.$$

La relation $\mathrm{div}(\dfrac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}) = -\sum_{a \in \mathrm{ar}(s)} (m(a)+1)[j_s(a)]$ est alors équivalente à $\mathrm{ord}_\infty \dfrac{d\bar{u}}{\bar{u}} = m-1$, ce qui revient à dire que (t_i) est un point rationnel sur k de $X^*_{\underline{h}}$. On utilise alors la proposition 7.4.
(b) On cherche $\bar{u} := \bar{u}_s$ sous la forme

$$\bar{u} = \frac{\prod_{i \in I_s \setminus I'_s} (t - t_i)}{\prod_{i \in I'_s} (t - t_i)^{m(i)}}.$$

On convient que $j_s(a_0) = \infty$. Comme ci-dessus, on montre alors que la relation

$$\operatorname{div}(d\bar{u}_s) = -\sum_{a \in \operatorname{ar}(s)} (m(a)+1)[j_s(a)]$$

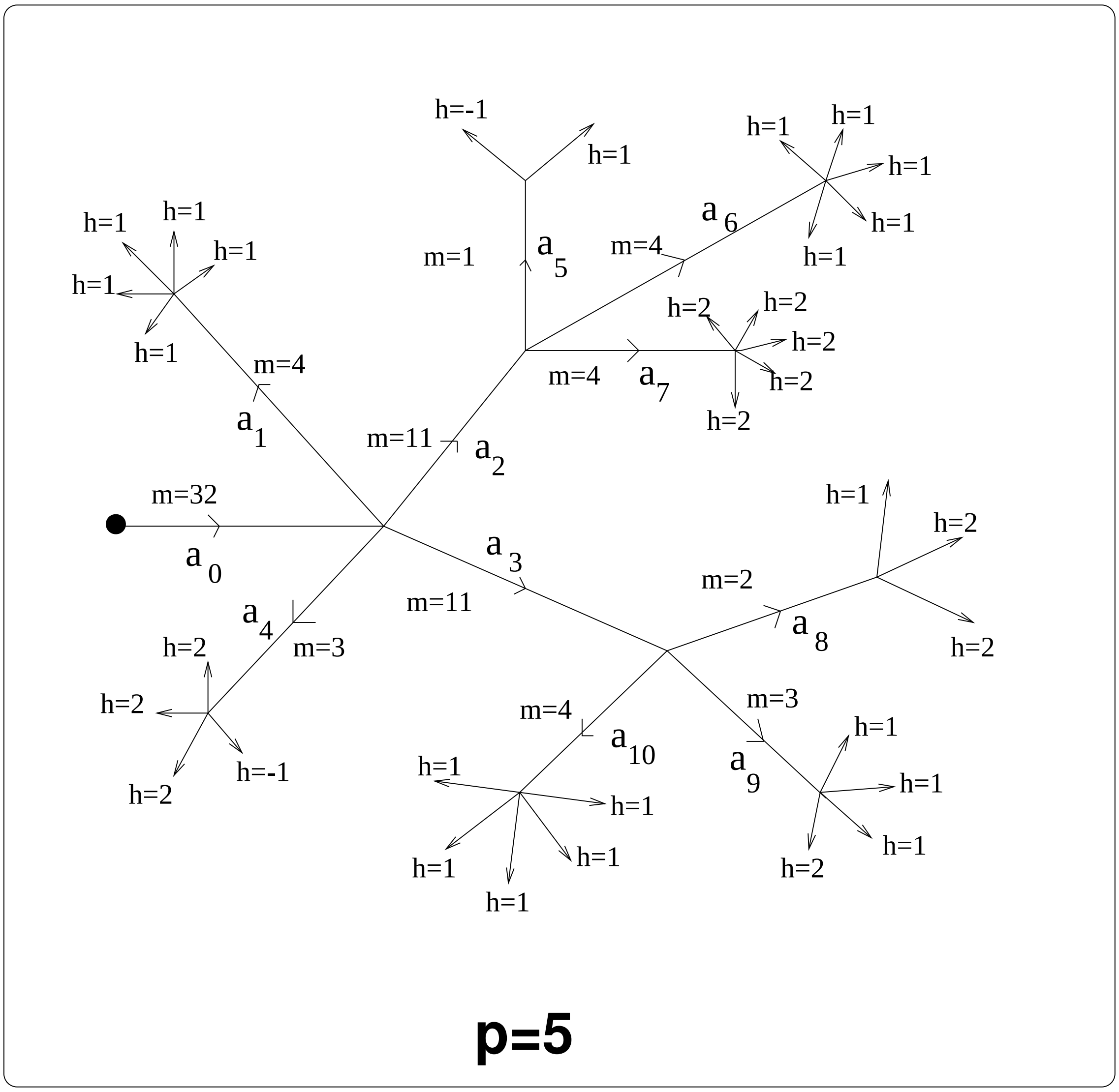
revient à dire que (t_i) est un point rationnel sur k de $X^*_{\underline{e}}$. $\square$

Corollaire 7.8. *Si $p = 2$, tout sommet non maximal d'un arbre de Hurwitz est réalisable.*

Ce dernier résultat peut se démontrer aussi directement, en exhibant un point de $X^*_{\underline{e}}(k)$, avec I un ensemble de cardinal pair et $e_i = 1$ pour tout i dans I.

8. Un exemple avec $p = 5$

On donne ici un exemple d'arbre de Hurwitz provenant d'un automorphisme d'ordre 5 d'un disque formel sur un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques $(0, 5)$, sans toutefois préciser ni K, ni la différente à la racine (qu'on peut toujours sans restriction supposer nulle, i.e. on peut supposer que l'automorphisme agit sans inertie au bord), ni la métrique (Pour un K donné, il y a en général plusieurs métriques possibles). Par souci de concision, sur la figure n'apparaissent que les valeurs non nulles de h et de m. On a numéroté les arêtes qui ne sont pas des feuilles.



Proposition 8.1.
Soit K_0 le corps des fractions de $W(k)[\zeta]$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique 5 et ζ une racine primitive 5-ième de l'unité. Il existe une extension finie K de K_0 et une métrique ϵ sur l'arbre ci-dessus telle que l'arbre

de Hurwitz obtenu provienne d'un automorphisme d'ordre 5 *du disque formel sur l'anneau de valuation R de K, opérant sans inertie au bord, avec conducteur de Hasse* 32.

PREUVE.

Posons $K := K_0[\lambda^{\frac{1}{4224}}]$, où $\lambda = \zeta - 1$. Dans ce cas, on peut par exemple prendre la métrique suivante (bien évidemment, c'est très loin d'être la seule possibilité pour un corps aussi ramifié) : Les épaisseurs des arêtes a_i sont :

- $\epsilon(a_0) := 33.$
- $\epsilon(a_1) := 792.$
- $\epsilon(a_2) := 96.$
- $\epsilon(a_3) := 96.$
- $\epsilon(a_4) := 1056.$
- $\epsilon(a_5) := 2112.$
- $\epsilon(a_6) := 528.$
- $\epsilon(a_7) := 528.$
- $\epsilon(a_8) := 1056.$
- $\epsilon(a_9) := 704.$
- $\epsilon(a_{10}) := 528.$

Avec un tel K et la métrique définie ci-dessus (avec la racine étale), on obtient un arbre de Hurwitz en utilisant la définition de m et de h donnée sur le dessin. Il reste à voir que les sommets de valence supérieure à 3 sont réalisables. Pour cela, on applique la proposition 7.6 :
Les sommets multiplicatifs sont tous réalisables, car la partition grossière est maximale dans chaque cas.
Le sommet additif origine de a_5 est réalisable : La partition $\underline{e}$-adaptée

$$\{(4,-1,-1,-1,-1),(4,-1,-1,-1,-1),(1,-1)\}$$

de $\underline{e} := (4,4,1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$ est maximale, de cardinal $3 = [\frac{11}{5}] + 1$.
Le sommet additif origine de a_8 est réalisable : La partition $\underline{e}$-adaptée

$$\{(4,-1,-1,-1,-1),(3,-1,-1,-1),(2,-1,-1)\}$$

de $\underline{e} := (2,3,4,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1)$ est maximale, de cardinal $3 = [\frac{11}{5}] + 1$.

Le sommet additif origine de a_2 est réalisable : La partition $\underline{e}$-adaptée

$$\{(1,1,3),(4,-1,-1,-1,-1),(-1,-1,-1,-1,-1),\dots,(-1,-1,-1,-1,-1)\}$$

(où $(-1,-1,-1,-1,-1)$ est répété 5 fois) de $\underline{e} := (1,1,3,4,4,-1,\dots,-1)$ (où -1 est répété 29 fois) est maximale, de cardinal $7 = [\frac{32}{5}] + 1$.

$\square$

CHAPITRE 6

Automorphismes d'ordre p d'une couronne formelle

Soit K un corps discrètement valué complet, de caractéristique nulle, de corps résiduel k algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$. On note R l'anneau de valuation de K, et π une uniformisante de R. On suppose que K contient une racine primitive p-ième de l'unité $\zeta = \lambda + 1$. Enfin, e est un entier strictement positif.

1. Modèle minimal d'une couronne ouverte avec action d'un automorphisme d'ordre p

Considérons un R-automorphisme σ d'ordre p de la couronne formelle $\mathcal{C}_e$, F_σ l'ensemble de ses points fixes géométriques dans $\mathcal{C}_{e,K} := \mathcal{C}_e \times_{\mathrm{Spec}\ R} \mathrm{Spec}\ K$, (éventuellement vide). De plus, on supposera tous les points fixes rationnels sur K. Il existe un unique modèle minimal $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$ de $\mathcal{C}_{e,K}$ pour lequel les spécialisations des points de F_σ sont lisses et distinctes : Si F_σ est vide, $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$ est égal à $\mathcal{C}_e$. Sinon, il est construit de la façon suivante : Choisissons une coordonnée de Laurent Z sur $\mathcal{C}_e$, on commence par éclater les idéaux (π^a, Z), où a décrit l'ensemble des valuations prises par les points de F_σ. On obtient ainsi une chaîne de droites projectives reliée à chaque extrémité à la transformée stricte d'un des deux bords de $\mathcal{C}_e$. Si le modèle ainsi obtenu ne sépare pas les spécialisations des points de F_σ, on éclate encore les fibres formelles contenant plus d'un point de F_σ (ce sont des disques formels) pour obtenir le modèle minimal cherché. Sa fibre spéciale est un arbre de droites projectives, relié aux composantes correspondant aux transformés strictes des bords. La chaîne de composantes irréductibles obtenue dans la première étape, menant d'un bord à l'autre, s'appelle la **chaîne fondamentale** . Les composantes de la chaîne fondamentale seront dites fondamentales.

2. Arbre de Hurwitz associé à un automorphisme d'ordre p d'une couronne formelle

Soit Γ_σ^* l'arbre dual de la fibre spéciale de $\mathcal{M}_\sigma := \mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$. Choisissant l'un des deux bords η de $\mathcal{C}_e$, on oriente Γ_σ^* à partir du sommet r_η correspondant. Soit Γ_σ l'arbre orienté décrit ci-dessous :

- L'ensemble des sommets de Γ_σ est la réunion disjointe de $\mathrm{som}\Gamma_\sigma^*$ et de F_σ. Le sommet correspondant à un point x de F_σ sera noté s_x.

– L'ensemble des arêtes positives de Γ_σ est la réunion disjointe de $\mathrm{ar}^+\Gamma_\sigma^*$ et de F_σ. L'arête positive correspondant à un point x de F_σ sera noté a_x.
– Si x est un point de F_σ, le sommet terminal de a_x est s_x et l'origine de a_x est le sommet de Γ_σ^* sur lequel se spécialise x.

Soit s un sommet de Γ_σ^* ; le point générique de la composante irréductible correspondant à s définit une valuation discrète v_s du corps des fractions $\mathcal{K}_e$ de $\mathcal{A}_e$. On note $\delta(s)$ la valuation de la différente de l'extension de corps valués $(\mathcal{K}_e, v_s)/(\mathcal{K}_e^\sigma, v_s)$. D'après la proposition 1.6 du chapitre 5, on a $0 \leq \delta(s) \leq v_K(p)$. Un sommet s de Γ_σ^* sera dit multiplicatif si $\delta(s) = v_K(p)$, additif si $0 < \delta(s) < v_K(p)$ et étale si $\delta(s) = 0$.

On définit une application $\epsilon := \epsilon_\sigma$ de $\mathrm{ar}\Gamma_\sigma$ dans $\mathbb{N}$: Si a est une arête de Γ_σ^*, elle correspond à un point double z_a de $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$, on définit alors $\epsilon(a)$ comme étant l'épaisseur de z_a dans $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$. Si maintenant $a = a_x$, où x est un point de F_σ), on définit $\epsilon(a) := 0$.

On définit une application $m := m_\sigma$ de $\mathrm{ar}\Gamma_\sigma$ dans $\mathbb{Z}$ et une application $h := h_\sigma$ de $\mathrm{ar}\Gamma_\sigma$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de la façon suivante : Soit a une arête de Γ_σ. Si a est une arête de Γ_σ^* (resp. $a = a_x$, où x est un point de F_σ), elle correspond à un point double orienté z_a de $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$ (resp. à la spécialisation de x dans la fibre spéciale de $\mathcal{M}(\mathcal{C}_{e,K}, \sigma)$). Soit ξ_a le bord de la couronne formelle (resp. du disque formel) $\mathrm{Spec}\ \hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a}$ qui correspond à l'origine de a. On notera $\hat{\mathcal{O}}_a$ le localisé-complété $(\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M}_\sigma, z_a})^\wedge_{\xi_a}$. On note ω_a la 1-forme différentielle associée au torseur $\mathrm{Spec}\ \hat{\mathcal{O}}_a \to \mathrm{Spec}\ \hat{\mathcal{O}}_a^\sigma$ si ce torseur est radiciel en réduction. On pose $m(a) := -(1 + \mathrm{ord}_{\xi_a}\omega_a)$ et $h(a)$ égal au résidu de ω_a si l'origine de a est un sommet multiplicatif. Si maintenant l'origine de a est un sommet additif, on pose $m(a) = -(1 + \mathrm{ord}_{\xi_a}\omega_a)$ et $h(a) = 0$. Si l'origine de a est un sommet étale, $m(a)$ est le conducteur de Hasse de l'extension $\hat{\mathcal{O}}_a \otimes_R k/\hat{\mathcal{O}}_a^\sigma \otimes_R k$. Enfin, $m(\bar{a}_x) = -m(a_x)$ et $h(\bar{a}_x) = -h(a_x)$.

Proposition 2.1.

La donnée $\mathcal{H}_\sigma := (K, r_\eta, \delta(r_\eta), \epsilon_\sigma, m_\sigma, h_\sigma)$ *est une donnée de Hurwitz sur* Γ_σ. *On dira que l'arbre de Hurwitz* $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ *est l'arbre de Hurwitz associé à l'automorphisme* σ *de la couronne formelle d'épaisseur* e. *Par ailleurs,*

– *(Loi de variation de la différente) Pour tout sommet* s *de* Γ_σ, *on a*

$$\delta(s) = d(s) := \delta(r_\eta) + (p-1) \sum_{a \in ar^+\Gamma_s} m(a)\epsilon(a),$$

où Γ_s *est la chaîne d'origine* r_η *et de sommet terminal* s.

– *Le cardinal de F_σ est égal à $m(a_\eta)+m(a_{\eta'})$, où a_η (resp. $a_{\eta'}$) est l'unique arête d'origine r_η (resp. $r_{\eta'}$).*
– *Les sommets de valence supérieure ou égale à 3 sont réalisables.*
– *Un sommet maximal est soit le sommet terminal d'une feuille, soit $r_{\eta'}$, où η' est le bord de la couronne opposé à η ($r_{\eta'}$ est le sommet terminal de la chaîne fondamentale).*
– *Si a est une feuille de $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$, alors l'origine de a est soit un sommet maximal de Γ_σ^*, soit un sommet fondamental.*
– *Il existe au plus deux sommets fondamentaux qui sont multiplicatifs. De plus, s'il y en a deux, il existe une arête qui les relie.*

PREUVE. Le fait que $\mathcal{H}_\sigma$ soit une donnée de Hurwitz se montre exactement de la même façon que pour le disque. En particulier, on prouve de même que les sommets de valence supérieure ou égale à 3 sont réalisables. La loi de la variation de la différente résulte de la proposition 1.10 du chapitre 5.

Soit s un sommet maximal. Supposons s non fondamental, on note alors a l'unique arête de sommet origine fondamental et de sommet terminal non fondamental qui apparait dans la chaîne positive Γ_s. L'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma[a], \mathcal{H}_\sigma[a])$ provient alors d'un automorphisme d'ordre p du disque formel, on sait alors que s est le sommet terminal d'une feuille de $(\Gamma_\sigma[a], \mathcal{H}_\sigma[a])$, donc de $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$. Si maintenant s est fondamental, comme il est maximal il doit être égal à $r_{\eta'}$.

Montrons à présent la formule donnant le cardinal de F_σ, c'est-à-dire le nombre de feuilles de l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$. Cela peut se voir par récurrence sur le nombre de sommets fondamentaux :
Si il n'y a que deux sommets fondamentaux, F_σ est vide, et la proposition 1.10 montre la formule.
Soit $N \geq 3$, supposons la formule démontrée pour les automorphismes d'ordre p de couronnes formelles dont l'arbre de Hurwitz possède $N-1$ sommets fondamentaux. Soit σ un automorphisme d'ordre p d'une couronne formelle $\mathcal{C}$ d'épaisseur e dont l'arbre de Hurwitz possède N sommets fondamentaux. Alors, si s est le sommet fondamental sommet terminal de l'arête a_η et a l'unique arête fondamentale d'origine s, l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma[a], \mathcal{H}_\sigma[a])$ provient de l'automorphisme σ restreint à la couronne formelle $\mathcal{C}[a]$ de fibre générique formée des points x tels que $\epsilon(a) < v_K(Z(x)) < e$, où Z est une coordonnée de Laurent sur $\mathcal{C}$. Le nombre de feuilles de $(\Gamma_\sigma[a], \mathcal{H}_\sigma[a])$ est alors $m(a) + m(a_{\eta'})$. Si b est une arête non fondamentale de Γ_σ d'origine s, le nombre de feuilles de $(\Gamma_\sigma[b], \mathcal{H}_\sigma[b])$, qui provient

d'un automorphisme de disque formel, est égal à $m(b)+1$. Donc, si I désigne l'ensemble des arêtes non fondamentales d'origine s, le cardinal de F_σ est, d'après $H[3]$:

$$\begin{aligned}\sum_{b\in I}(m(b)+1)+m(a)+m(a_{\eta'}) &= \quad -(m(\bar{a}_\eta)+1)+2-1+m(a_{\eta'}) \\ &= \quad m(a_\eta)+m(a_{\eta'})\end{aligned}$$

Il reste à voir la dernière assertion. Pour s un sommet fondamental distinct de r_η et $r_{\eta'}$, soit a_1 l'arête fondamentale de sommet terminal s et a_2 l'arête fondamentale d'origine s. Alors la pente de la variation de la différente le long de la chaîne fondamentale est égale à $m(a_1)(p-1)$ avant le sommet s et à $m(a_2)(p-1)$ après. Donc, la variation de la pente au passage de s est égale, d'après $H[3]$, à $-\sum_{a\in \mathrm{ar}(s), a\neq a_1,a_2}(m(a)+1)<0$, car pour une arête a non fondamentale d'origine s, $(\Gamma_\sigma[a],\mathcal{H}_\sigma[a])$ provient d'un automorphisme d'ordre p du disque formel et donc $m(a)\geq 0$. La variation de la différente le long de la chaîne fondamentale est donc une fonction continue, linéaire par morceaux et concave (i.e. la pente diminue). Supposons qu'il existe un sommet fondamental multiplicatif, et prenons s le plus petit d'entre eux. Alors, soit s est maximal, et alors c'est le seul sommet multiplicatif fondamental, soit il existe une (unique) arête fondamentale a d'origine s et alors $m(a)\geq 0$. Si $m(a)=0$, le sommet terminal de a est multiplicatif, et ensuite la différente doit chuter, donc les éventuels sommets suivants ne sont pas multiplicatifs. Sinon, s est le seul sommet multiplicatif fondamental. $\square$

3. Théorème de réalisation

Comme pour le cas du disque, on peut donner une caractérisation des arbres de Hurwitz provenant d'un automorphisme d'ordre p d'une couronne formelle (ne permutant pas les bords). Nous ne donnons pas une preuve complète de ce théorème, au sens où le procédé de recollement utilisé est juste esquissé. Nous renvoyons le lecteur au cas du disque pour des détails.

THÉORÈME 3.1.
Soit Γ un arbre fini, connexe et $\mathcal{H}:=(K,r_0,d_0,\epsilon,m,h)$ une donnée de Hurwitz sur Γ. Alors $(\Gamma,\mathcal{H})$ provient d'un automorphisme σ d'ordre p d'une couronne formelle (ne permutant pas les bords) si et seulement si il vérifie les conditions $C[i]$, $1\leq i\leq 4$ ci-dessous.

$C[1]$ *La racine r_0 est de valence 1*

$C[2]$ *Il existe un unique sommet maximal* r'_0 *de* Γ_σ *tel que l'unique arête a d'origine* r'_0 *vérifie* $\epsilon(a) \neq 0$. *On appelle alors la chaîne reliant* r_0 *à* r'_0 *la chaîne fondamentale, et on la notera* Γ_0. *Les sommets (resp. arêtes) de la chaîne fondamentale seront dits fondamentaux (resp. fondamentales).*

$C[3]$ *Si s est un sommet maximal de* Γ_σ *distinct de* r'_0, *l'unique arête de sommet terminal s est une feuille.*

$C[4]$ *Tout sommet de valence supérieure ou égale à 3 est réalisable.*

De plus, l'épaisseur de la couronne formelle est alors la somme $\sum_{a \in ar^+(\Gamma_0)} \epsilon(a)$ *des longueurs des arêtes fondamentales..*

PREUVE.

Soit σ un automorphisme d'une couronne formelle, ne permutant pas les bords. $C[1]$ résulte de la construction du modèle minimal. Les assertions restantes ont déjà été vues.

Montrons maintenant la réciproque. On suppose donc que $(\Gamma, \mathcal{H})$ vérifie les propriétés $C[i]$, $1 \leq i \leq 4$. On voit alors immédiatement le

LEMME 3.2. *Si s est un sommet fondamental et a une arête non fondamentale d'origine s, l'arbre* $(\Gamma[a], \mathcal{H}[a])$ *vérifie les propriétés* $D[i]$, $1 \leq i \leq 3$ *du théorème 4.1 du chapitre 5.*

On procède alors par récurrence sur le nombre N de sommets de la chaîne fondamentale.

Supposons d'abord $N = 2$. L'arbre de Hurwitz est alors réduit à sa chaîne fondamentale, d'après $C[1]$ et $C[2]$ (r'_0 est maximal). Notons a l'unique arête positive de Γ, et $e := \epsilon(a)$, qui est non nul d'après $C[2]$. Si la racine r_0 est additive ou étale, alors $m(a)$ est premier à p. Soit n l'entier déterminé par $v_K(p) = d_0 + n(p-1)$, Z une coordonnée de Laurent sur $\mathcal{C}_e$; l'automorphisme σ de $\mathcal{C}_e$ donné par $\sigma(Z) = \zeta^{-\frac{1}{m(a)}} Z(1 + \pi^n Z^{m(a)})^{-\frac{1}{m(a)}}$ a alors un arbre de Hurwitz équivalent à $(\Gamma, \mathcal{H})$. Si maintenant r_0 est multiplicatif, $h(a) \neq 0 \mod p$. L'automorphisme σ de $\mathcal{C}_e$ donné par $\sigma(Z) = \zeta^{-\frac{1}{h(a)}} Z$ a alors un arbre de Hurwitz équivalent à $(\Gamma, \mathcal{H})$.

Supposons maintenant $N \geq 3$, et le théorème démontré pour $N - 1$. Soit s le sommet fondamental qui est l'origine de l'unique arête a' de sommet terminal r'_0.

Soit Γ_1 le sous-arbre de Γ obtenu en retirant les arêtes positives d'origine s, et $\mathcal{H}_1$ la donnée de Hurwitz restreinte de $\mathcal{H}$ sur Γ_1. Alors, la chaîne fondamentale de $(\Gamma_1, \mathcal{H}_1)$ possède $N-1$ sommets, et $(\Gamma_1, \mathcal{H}_1)$ vérifie les conditions $C[i]$, pour $1 \leq i \leq 4$. Il existe alors un automorphisme σ_1 d'ordre p de la couronne formelle d'épaisseur $e_1 := \sum_{a \in \mathrm{ar}^+ \Gamma_0, a \neq a'} \epsilon(a) = e - \epsilon(a')$. dont l'arbre de Hurwitz est équivalent à $(\Gamma_1, \mathcal{H}_1)$.

Par ailleurs, soit Γ_2 le sous-arbre de Γ de sommets s et r'_0 et dont l'unique arête est a, et $\mathcal{H}_2$ la donnée de Hurwitz restreinte de $\mathcal{H}$ sur Γ_2. D'après le cas $N = 2$, il existe un automorphisme σ_2 d'ordre p de la couronne formelle d'épaisseur $e_2 = \epsilon(a')$ dont l'arbre de Hurwitz est équivalent à $(\Gamma_2, \mathcal{H}_2)$. Par hypothèse, s est réalisable. Soit (u_s, j_s) vérifiant les conditions de $[M]$ si s est multiplicatif, et celles de $[A]$ si s est additif (Le sommet s ne peut pas être étale). On construit à l'aide de u_s et du lemme 3.2 un automorphisme d'ordre p de $R\{Z, Z^{-1}\}$, et on peut alors recoller d'un côté la couronne d'épaisseur e_1 munie de σ_1 et de l'autre la couronne d'épaisseur e_2, munie de l'automorphisme σ_2. On obtient alors une couronne formelle d'épaisseur e munie d'un automorphisme σ dont l'arbre de Hurwitz est équivalent à $(\Gamma, \mathcal{H})$. □

4. Un critère suffisant de réalisabilité

Soit s est un sommet de Γ, où $(\Gamma, \mathcal{H})$ est un arbre de Hurwitz satisfaisant les conditions $C[i]$, $i \neq 5$. Si s n'est pas un sommet fondamental, ou si s est un sommet fondamental tel que $m(a_1)m(a_2) \leq 0$, où a_1 et a_2 sont les deux arêtes fondamentales d'origine s, on peut lui appliquer le critère 7.4. La seule différence avec le cas du disque provient de l'éventuel sommet fondamental s tel que $m(a_1) < 0$ et $m(a_2) < 0$.

4.1. Le k-schéma $V_{\underline{e}}$.

Soient m_1 et m_2 des entiers positifs premiers à p, I un ensemble à $m_1 + m_2$ éléments. On se donne une famille $\underline{e} := (e_i)_{i \in I}$ d'éléments inversibles de $\mathbb{F}_p$, telle que $\sum_{i \in I} e_i = 0$. On notera $V_{\underline{e}}$ le sous-schéma fermé de Spec $k[T_i, X_i]_{i \in I}$ d'idéal engendré par les $\sum_{i \in I} e_i T_i^{\nu}$, où $1 \leq \nu < m_1$, $(\nu, p) = 1$, par les $\sum_{i \in I} e_i X_i^{\nu}$, où $1 \leq \nu < m_2$, $(\nu, p) = 1$, et par les $T_i X_i - 1$, $i \in I$. Alors, pour toute composante irréductible Z de $V_{\underline{e}}$, $\dim Z \geq [\dfrac{m_1}{p}] + [\dfrac{m_2}{p}] + 2$.

Soit $x := (t_i, t_i^{-1})$ un point rationnel de $V_{\underline{e}}$ sur k, il définit une partition P_x de I telle que $i \equiv j \mod P_x$ si et seulement si $t_i = t_j$. Pour une partition P fixée de

I, on notera $V_{\underline{e},P}$ le sous-schéma fermé de $V_{\underline{e}}$ d'idéal $((T_i-T_j),(X_i-X_j))_{i\equiv j \mod P}$. En particulier, $V_{\underline{e},P_=} = V_{\underline{e}}$. On notera $V^*_{\underline{e},P}$ l'ouvert de $V_{\underline{e},P}$ complémentaire de la réunion des $V_{\underline{e},P'}$, avec $P' < P$. On remarquera que

$$V^*_{\underline{e},P}(k) = \{x \in X_{\underline{e}}(k), P_x = P\}.$$

Lemme 4.1. *Soit P une partition de I, différente de $P_=$. alors si $x = (t_i, t_i^{-1})$ est un point rationnel sur k de $V_{\underline{e}}$ avec $P_x = P$, on a $\sum_{i\in J} e_i = 0 \mod p$ pour tout J dans P.*

La preuve est identique à celle donnée pour $X_{\underline{e}}$ au chapitre 5. On en déduit de même le corollaire et la proposition ci-dessous :

Corollaire 4.2.
(a) Si P est une partition de I, $\underline{e}$-adaptée, alors $V_{\underline{e},P}$ est isomorphe à

$$\mathbb{G}^P_{m,k} := Spec\ \frac{k[A_J, B_J]_{J\in P}}{(A_J B_J - 1)}.$$

En particulier, $V_{\underline{e},P}$ est de dimension card$P$.
(b) Soit $Q_{\underline{e}} := \cup_{P\in\mathcal{P}_{I,\underline{e}}} V_{\underline{e},P}$, alors $V_{\underline{e},réd}$ est la réunion disjointe de $Q_{\underline{e}}$ et de $V^*_{\underline{e}} := V^*_{\underline{e},P_=}$.

Proposition 4.3.
(a) Les composantes irréductibles de $Q_{\underline{e}}$ sont les $V_{\underline{e},P}$, où P est une partition maximale $\underline{e}$-adaptée.
(b) Si il existe une partition maximale $\underline{e}$-adaptée avec card$P \leq [\frac{m_1}{p}] + [\frac{m_2}{p}] + 1$, alors $V^*_{\underline{e}}(k)$ est non vide.

4.2. critère suffisant de réalisabilité.

Nous ne donnons ici que le critère pour un sommet fondamental s pour lequel les deux arêtes a_1 et a_2 fondamentales d'origine s vérifient $m_1 := -m(a_1) > 0$ et $m_2 := -m(a_2) > 0$.

Proposition 4.4.
(a) Supposons que s est multiplicatif. Notons $I_s := ar(s) \setminus \{a_1, a_2\}$ et $\underline{h} := (h(a))_{a\in I_s}$. Alors, si il existe une partition maximale $\underline{h}$-adaptée P de I_s avec card$(P) \leq [\frac{m_1}{p}] + [\frac{m_2}{p}] + 1$, le sommet s est réalisable.
(b) Supposons que s est additif. Notons I_s la réunion disjointe de l'ensemble fini $I'_s := ar(s) \setminus \{a_1, a_2\}$ et d'un ensemble fini à $m_1 + m_2 - card(I'_s)$ éléments, et

$\underline{e} = (e_i)_{i\in I_s}$ *la famille définie par* $e_i := m(i)$ *si* $i \in I'_s$ *et* $e_i = -1$ *sinon. Alors, si il existe une partition maximale* $\underline{e}$*-adaptée* P *de* I_s *avec card*$(P) \leq [\frac{m_1}{p}] + [\frac{m_2}{p}] + 1$, *le sommet* s *est réalisable.*

PREUVE.
(a) On suppose s multiplicatif. On peut supposer $\infty = j_s(a_1)$ et $0 = j_s(a_2)$, et on pose $j_s(a) = t_a$ pour a dans I_s. Remarquons que la relation

$$\sum_{a\in \mathrm{ar}(s)} (m(a)+1) = 2$$

entraîne card$I_s = m_1 + m_2$. On peut alors chercher $\bar{u}_s$ sous la forme

$$\bar{u}_s := \prod_{a\in I_s} (t - t_a)^{h(a)}$$

où $\mathrm{ord}_{t=0}\bar{u}_s = \mathrm{ord}_{t=\infty}\bar{u}_s = 0$. Posons $\omega_s := \frac{d\bar{u}_s}{\bar{u}_s}$, le résidu de ω_s en t_a est alors $h(a)$. Un petit calcul montre que la relation

$$\mathrm{div}\omega_s = (m_1 - 1)[\infty] + (m_2 - 1)[0] - \sum_{a\in I_s}[t_a]$$

est alors équivalente à

$$\sum_{a\in I_s} h(a)t_a^{\nu} = 0, \quad -m_2 < \nu < m_1, \quad (\nu, p) = 1.$$

c'est-à-dire que (t_a, t_a^{-1}) définit un point de $V^*_{\underline{h}}(k)$. On applique alors le critère 4.3.
(b) On suppose s additif à présent. On peut supposer $\infty = j_s(a_1)$ et $0 = j_s(a_2)$, et on pose $j_s(a) = t_a$. Remarquons que la relation

$$\sum_{a\in \mathrm{ar}(s)} (m(a)+1) = 2$$

entraîne $\sum_{a\in I'_s}(m(a)+1) = m_1 + m_2$. On peut alors chercher $\bar{u}_s$ sous la forme

$$\bar{u}_s := \frac{\prod_{i\in I_s\setminus I'_s}(t-t_i)}{\prod_{a\in I'_s}(t-t_a)^{m(a)}},$$

où $\mathrm{ord}_{t=0}\bar{u}_s = \mathrm{ord}_{t=\infty}\bar{u}_s = 0$. Posant $\omega_s := d\bar{u}_s$, la relation

$$\mathrm{div}\omega_s = (m_1 - 1)[\infty] + (m_2 - 1)[0] - \sum_{a\in I'_s}(m(a)+1)[t_a]$$

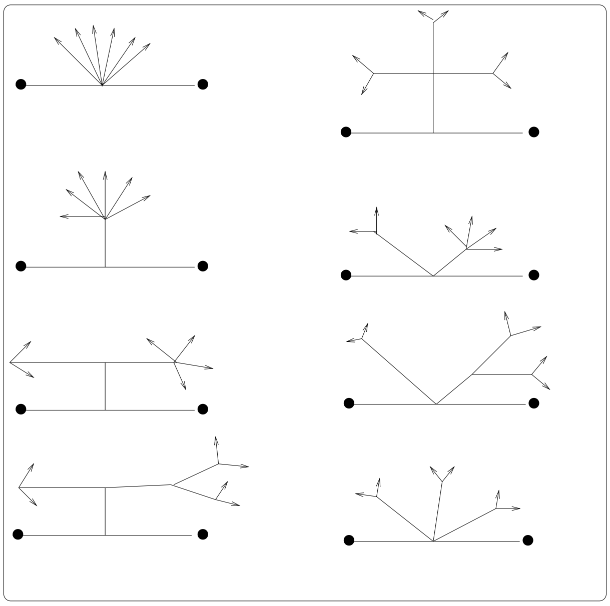
est alors équivalente à

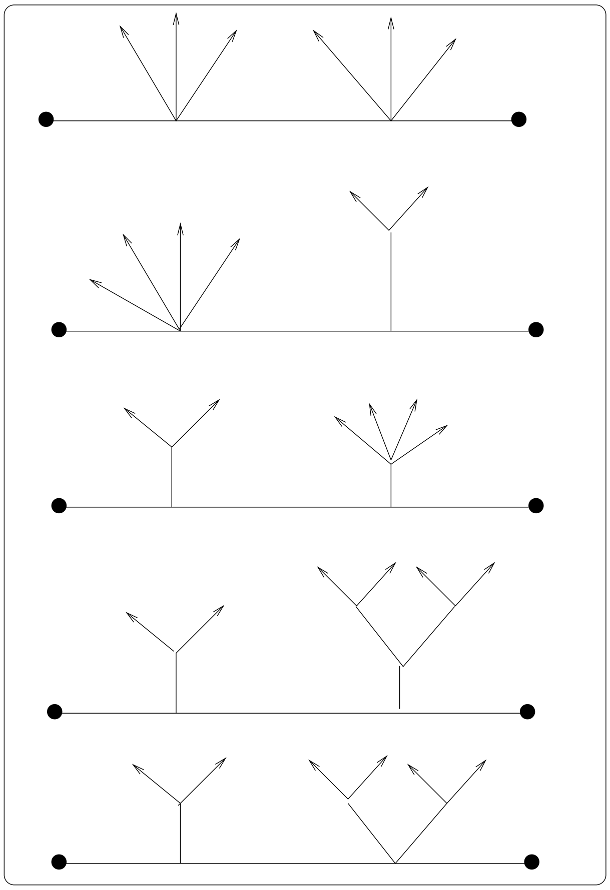
$$\sum_{i\in I_s} e_i t_i^{\nu} = 0, \quad -m_2 < \nu < m_1, \quad (\nu, p) = 1.$$

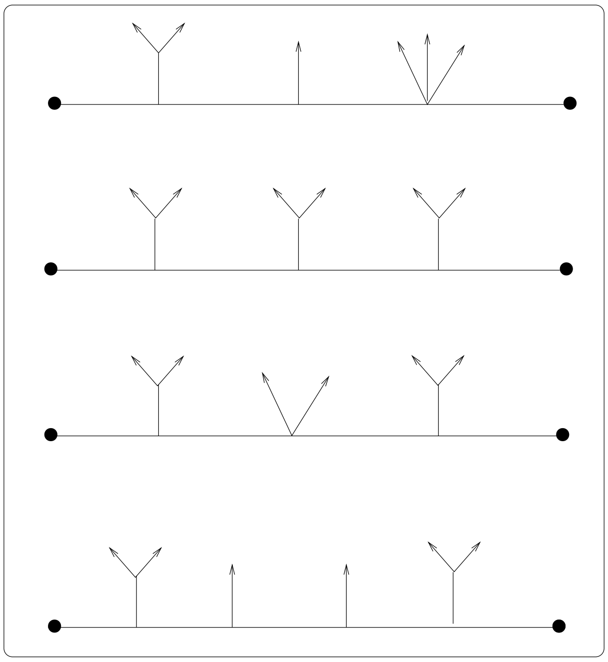
c'est-à-dire que (t_i, t_i^{-1}) définit un point de $V_{\underline{e}}^*(k)$. On applique alors le critère 4.3. $\square$

5. Involutions de couronnes formelles en inégales caractéristiques $(0, 2)$ avec conducteur 3 à chaque bord

Soit σ une involution d'une couronne formelle en inégales caractéristiques $(0, 2)$ avec conducteur 3 à chaque bord. Alors l'arbre Γ_σ est de l'un des 17 types suivants. De plus, si Γ est un arbre de cette liste, on peut trouver une donnée de Hurwitz qui la réalise.







6. Structure des automorphismes d'ordre p à petits conducteurs

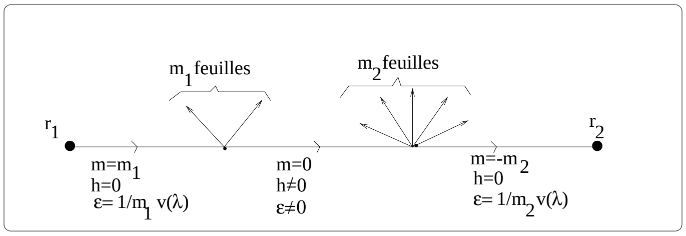
Dans ce qui suit, σ désigne un automorphisme d'ordre p de $\mathcal{C}_e$, qui ne permute pas les bords, opérant sans inertie aux bords. On fera l'hypothèse ici que $m_1 < p$ et $m_2 < p$, où $m_1 + 1$ et $m_2 + 1$ désignent les conducteurs aux bords η_1 et η_2.

6.1. L'arbre de Hurwitz d'un automorphismes d'ordre p à petits conducteurs.

THÉORÈME 6.1. *Soit σ un automorphisme de $\mathcal{C}_e$ d'ordre p, ne permutant pas les bords, qui opère sans inertie aux bords. Soit m_i le conducteurs au bord η_i, $i = 1, 2$. On note r_i le sommet correspondant au bord η_i. Si $m_1 < p$ et $m_2 < p$, la chaîne fondamentale de l'arbre de Hurwitz de σ contient au plus deux sommets en dehord de r_1, r_2. De plus, s'il y en a deux, ils sont multiplicatifs. Autrement dit, l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ (avec pour fixer les idées la racine r_1) est de l'un des trois types ci-dessous :*

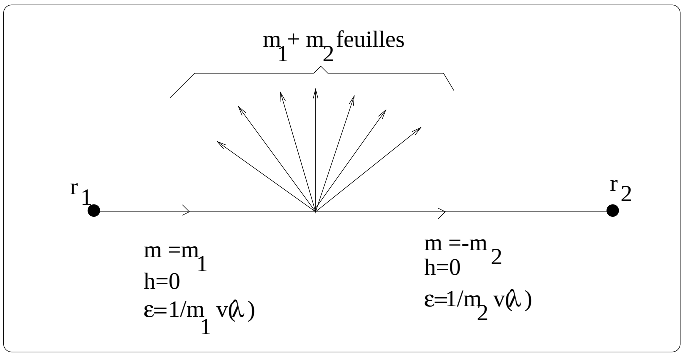
Type I : $e > (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})v_K(\zeta - 1)$

Si $e > (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})v_K(\lambda)$, la chaîne fondamentale de l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ est formée de la racine r_1, origine d'une arête a_1 de sommet terminal multiplicatif s_1, lui-même origine d'une arête dont le sommet terminal s_2 est multiplicatif et enfin du sommet r_2 (sommet terminal de a_2). De plus, pour $i = 1, 2$, il y a exactement m_i feuilles d'origine s_i. Enfin, $\epsilon(a_i) = \dfrac{1}{m_i}v_K(\lambda)$.



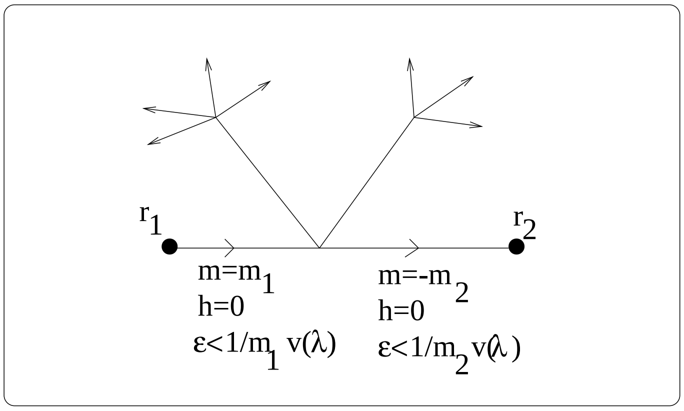
Type II : $e = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})v_K(\zeta - 1)$

Si $e = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})v_K(\lambda)$, la chaîne fondamentale de l'arbre de Hurwitz $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ est formée d'un sommet multiplicatif s, relié à r_i par une arête a_i au sommet r_i, *pour* $i = 1, 2$. *De plus* s *est le sommet d'exactement* $m_1 + m_2$ *feuilles. Enfin,* $\epsilon(a_i) = \dfrac{1}{m_i} v_K(\lambda)$.



Type III : $e < (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\zeta - 1)$

Si $e < (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) v_K(\lambda)$, *la chaîne fondamentale de l'arbre de Hurwitz* $(\Gamma_\sigma, \mathcal{H}_\sigma)$ *est formée d'un sommet additif* s, *relié à* r_i *par une arête* a_i *au sommet* r_i, *pour* $i = 1, 2$. *Le nombre d'arêtes non fondamentales d'origine* s *est inférieur à* $\inf(m_1, m_2)$. *Si* a *est une telle arête, et si* $m(a) < p$, *les arêtes positives d'origine le sommet terminal de* a *sont des feuilles. Il y a au plus une arête* a *d'origine* s *pour laquelle* $m(a) > p$. *Enfin,* $\epsilon(a_i) < \dfrac{1}{m_i} v_K(\lambda)$ *pour* $i = 1, 2$.



PREUVE.

L'automorphisme σ possède $m_1 + m_2$ points fixes. Ainsi, la chaîne fondamentale est formée d'au moins trois sommets. Soit s un sommet fondamental différent de r_1 et r_2, on note a_1 l'unique arête fondamentale positive d'origine le sommet terminal s et a_2 l'unique arête fondamentale positive d'origine s. Supposons $m(a_1) > 0$ et $m(a_2) > 0$. En particulier, s est un sommet additif réalisable, on prend les notations de $[A]$. Soit $\omega = d\bar{u}_s$. On peut supposer $j_s(\bar{a}_1) = +\infty$ et $t_{a_2} = 0$. Comme $\mathrm{ord}_\infty d\bar{u}_s = m(a_1) > 0$, quitte à ajouter une puissance p-ième, on peut de plus supposer $\bar{u}_s$ de la forme

$$\bar{u}_s = \frac{P(t)}{\prod_{a\in \mathrm{ar}^+(s)}(t - t_a)^{m(a)}}$$

avec $\deg(P) = \sum_{a\in\mathrm{ar}^+(s)} m(a)$, et $P(t_a) \neq 0$ pour a dans $\mathrm{ar}^+(s)$. Prenant la coordonnée $x := t^{-1}$, en notant Q le polynôme $Q(x) := x^{\sum_{a\in\mathrm{ar}^+(s)} m(a)} P(\frac{1}{x})$, on a alors

$$\bar{u}_s = \frac{Q(x)}{\prod_{a\in\mathrm{ar}^+(s)}(1 - t_a x)^{m(a)}}.$$

Comme par ailleurs $1 \leq 1 + \mathrm{ord}_\infty \omega = m(a_1) \leq m_1 < p$, on a le développement en série de Laurent

$$\bar{u}_s = 1 + \alpha x^{m(a_1)} \mod x^{m(a_1)+1},$$

où α est non nul. Mais alors,

$$Q(x) = (1 + \alpha x^{m(a_1)} + x^{m(a_1)+1} l(x)) \prod_{a\in\mathrm{ar}^+(s)} (1 - t_a x)^{m(a)}.$$

On a $(\sum_{a\in\mathrm{ar}^+(s)} m(a)) - (m(a_1)) \leq \sum_{a\in\mathrm{ar}^+(s)} m(a) - m(a_1) = 2 - \mathrm{card}(\mathrm{ar}(s)) < 0$. Le coefficient de $x^{m(a_1)}$ dans $Q(x)$ est donc $\alpha \neq 0$. Or, le degré de Q est égal à $\sum_{a\in\mathrm{ar}^+(s)} m(a)$, on obtient donc une contradiction. On ne peut pas avoir $m(a_1) > 0$ et $m(a_2) > 0$. Il existe donc au plus une arête fondamentale positive a telle que $m(a) > 0$, et c'est donc forcément l'arête d'origine r_1. De même, la seule arête fondamentale positive a telle que $m(a) < 0$ est l'arête de sommet terminal r_2. On voit qu'il y a trois cas : Notons s_1 le sommet terminal de l'arête a_1 d'origine r_1, et a_0 l'arête fondamentale positive d'origine s_1.

Si $m(a_0) = 0$, s_1 est multiplicatif, et le sommet terminal s_2 de a est multiplicatif. On tombe sur le type I. On a $m_1 = m(a_1)$, les arêtes positives d'origine s distinctes de a sont des feuilles, et la relation $\sum_{a\in\mathrm{ar}(s)}(m(a) + 1) = 2$ montre qu'il y en a m_1. De même, il y a m_2 feuilles d'origine s_2 (le sommet terminal de a_0). Le calcul de $\epsilon(a_i)$ se fait en utilisant la loi de variation de la différente. On a alors $e > \epsilon(a_1) + \epsilon(a_2) = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})v_K(\lambda)$.

Supposons à présent $m(a_0) < 0$ et s_1 multiplicatif. Alors le sommet terminal de a_0 est r_2. On tombe sur le type II. On voit alors que les sommets non fondamentaux d'origine s_1 sont des feuilles, et la relation $\sum_{a\in \mathrm{ar}(s)}(m(a)+1) = 2$ montre qu'il y en a $m_1 + m_2$. On voit alors facilement que $e = \epsilon(a_1) + \epsilon(a_2) = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})v_K(\lambda)$.

Supposons enfin $m(a_0) < 0$ (i.e. $m(a_0) = -m_2$) et s_1 additif. Soit q le nombre d'arêtes non fondamentales d'origine $s = s_1$. On peut alors supposer, avec les notations de la proposition 4.4,

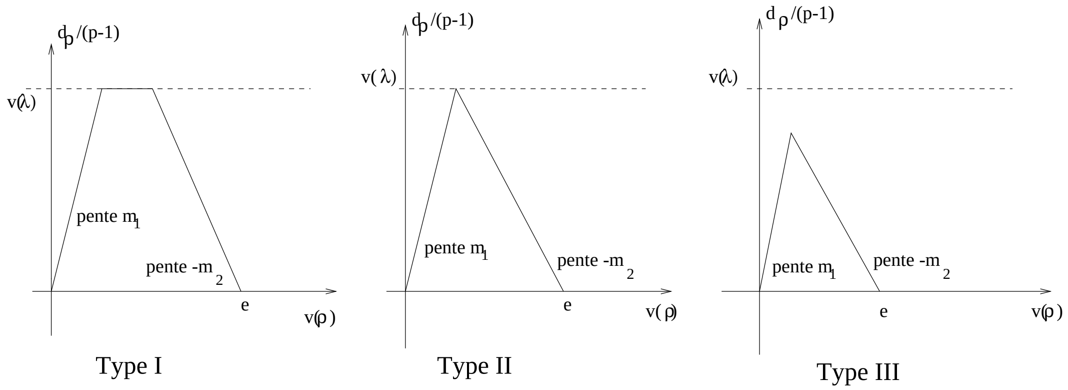
$$\bar{u}_s = \frac{P(t)}{\prod_{a\in I'_s}(t-t_a)^{m(a)}}$$

où $\deg(P) = \sum_{a\in I'_s} m(a)$, $j_s(\bar{a}_1) = \infty$, $j_s(a_2) = 0$, $j_s(a) = t_a \neq 0$ pour a dans I'_s, $P(0)\prod_{a\in I'_s} P(t_a) \neq 0$, et $\mathrm{ord}_\infty d\bar{u}_s = m_1 - 1$, $\mathrm{ord}_0 d\bar{u}_s = m_2 - 1$. On a $\bar{u}_s = 1 + \alpha t^{m_2} \mod t^{m_2+1}$, où $\alpha \neq 0$. Ainsi,

$$P(t) = (1 + \alpha t^{m_2} + t^{m_2+1} l(x)) \prod_{a\in I'_s} (1 - t_a^{-1} t)^{m(a)}.$$

Or, $\deg(P) = \sum_{a\in I'_s} m(a) = m_1 + m_2 - q$. Si $m_1 < q$, on a $\deg(P) < m_2$ et on obtient alors une contradiction en remarquant que le coefficient de t^{m_2} doit être α. Donc $q \leq m_1$, et en regardant également le dévelloppement de $\bar{u}_s$ en ∞, on voit que $q \leq m_2$. Le fait qu'il y ait au plus une arête non fondamentale a d'origine s pour laquelle $m(a) > p$ résulte de $m_1 + m_2 < 2p$. Si a est une arête non fondamentale a d'origine s pour laquelle $m(a) < p$, toute arête d'origine

$t_{\Gamma_\sigma}(a)$ est une feuille d'après le théorème III 3.1 de [**6**]. Enfin, la loi de variation de la différente entraîne que $e < (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})v_K(\lambda)$.



$\square$

6.2. Exemples du type I.

La méthode de construction indiquée dans la preuve de la proposition 1.4 du chapitre 4 conduit à des automorphismes du type I, si on part de deux automorphismes du disque formel dont les points fixes sont équidistants. Réciproquement, le lemme ci-dessous montre que tout automorphisme du type I s'obtient de cette manière.

LEMME 6.2. *Soit σ un automorphisme d'ordre p d'une couronne formelle ne permutant pas les bords, dont l'arbre de Hurwitz est réduit à deux sommets reliés par une arête a telle que $m(a) = 0$. Alors, il existe une coordonnée de Laurent Z sur la couronne formelle telle que $\sigma(Z) = \zeta^\ell Z$, où $(\ell, p) = 1$.*

PREUVE.

Notons e l'épaisseur de la couronne formelle, le quotient de $\mathcal{C}_e$ par σ est une couronne formelle d'épaisseur pe. Prenons une coordonnée de Laurent T sur la couronne quotient, le morphisme $\mathcal{C}_e \to \mathcal{C}_{pe} = \mathcal{C}_e/\langle\sigma\rangle$ induit un torseur étale au-dessus de la fibre générique. Soit $y^p = u(T)$ une équation de ce torseur, où u est un inversible de $\mathcal{O}(\mathcal{C}_{pe}) \otimes_R K$. On écrit $u = T^r(1+g)$, où g est dans l'idéal $(\pi, Z, \frac{\pi^{pe}}{Z})$. Si on avait $p|r$, alors la réduction à l'un des deux bords serait additive, ce qui contredit $m(a) = 0$. Ainsi, r est premier à p, et quitte à changer de coordonnée de Laurent, on peut supposer $g = 0$. Mais alors, $Z = y$ est une coordonnée de Laurent sur $\mathcal{C}_e$, et $\sigma(Z) = \zeta^\ell Z$, où $(\ell, p) = 1$. $\square$

6.3. Un exemple explicite d'automorphisme du type II.

L'exemple ci-dessous est du type II. C'est le seul exemple explicite (c'est-à-dire donné par sa série de Laurent) d'automorphisme d'ordre p d'une couronne que nous connaissons.

Exemple 6.3. On suppose ici $p \neq 2$ et $R = W(k)[\zeta]$. Considérons, pour a et b deux entiers positifs distincts modulo p :

$$A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \zeta^a + \zeta^b & \lambda(\zeta^b - \zeta^a) \\ \lambda^{-1}(\zeta^b - \zeta^a) & \zeta^a + \zeta^b \end{pmatrix}$$

(On remarquera que $v_K(\zeta^b - \zeta^a) = v_K(\lambda)$.)
La matrice A est d'ordre p car dans $GL(2, K)$, on a

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \zeta^a & 0 \\ 0 & \zeta^b \end{pmatrix} P \text{ avec } P := \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Dans $GL(2, k)$, A induit la matrice (d'ordre p) $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(b-a) & 1 \end{pmatrix}$, et A définit un automorphisme σ_A d'ordre p de la droite projective $\mathbb{P}^1_R$ par

$$\sigma_A(Z) := \frac{(\zeta^a + \zeta^b)Z + \lambda(\zeta^b - \zeta^a)}{(\lambda^{-1}(\zeta^b - \zeta^a))Z + (\zeta^a + \zeta^b)}.$$

L'automorphisme σ_A laisse alors stable la couronne ouverte $0 < v_K(Z) < 2v_K(\lambda)$:

$$\sigma_A(Z) = Z\left(1 + \frac{\lambda^{-1}(\zeta^b - \zeta^a)}{\zeta^a + \zeta^b}\frac{\lambda^2}{Z}\right)\left(1 + \frac{\lambda^{-1}(\zeta^b - \zeta^a)}{\zeta^a + \zeta^b}Z\right)^{-1} \text{ dans } R[[Z, \frac{\lambda^2}{Z}]]$$

σ_A opère sans inertie, avec conducteur 2 aux deux bords.

De cet exemple, on peut déduire des automorphismes d'ordre p de couronnes formelles, avec conducteurs $m+1$ aux deux bords ; il suffit de faire le changement de base $Z := W^m$, avec m premier à p. Dans le cas $p \neq 2$, on trouve ainsi l'automorphisme d'ordre p de $R[[Z, \frac{\lambda^{\frac{2}{m}}}{Z}]]$, où $R = W(k)[\lambda^{\frac{1}{m}}]$:

$$\sigma(Z) = Z\left(1 + \frac{\lambda^{-1}(\zeta^b - \zeta^a)}{\zeta^a + \zeta^b}\frac{\lambda^2}{Z^m}\right)^{\frac{1}{m}}\left(1 + \frac{\lambda^{-1}(\zeta^b - \zeta^a)}{\zeta^a + \zeta^b}Z^m\right)^{-\frac{1}{m}}$$

6.4. Un exemple du type III.

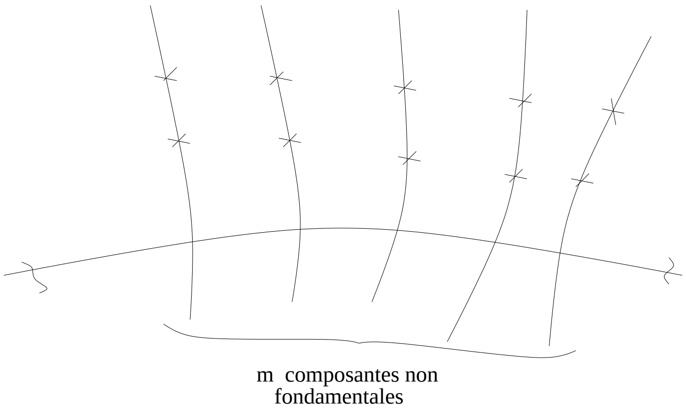
Nous allons donner un exemple, à l'aide des méthodes de la géométrie rigide. Le principe est le suivant : On cherche un revêtement p-cyclique C de $\mathbb{P}^1_K$ ayant une réduction semi-stable formée de deux composantes irréductibles se coupant en un point double ordinaire. Ce point est nécessairement stable sous l'action de $G := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Les points de C se spécialisant au point double forment alors une couronne ouverte, stable sous l'action de G ([**15**], 3.3.2).

EXEMPLE 6.4.

Soit m un entier premier à p et $\alpha \in K^{alg}$ tel que $\frac{1}{2}v_K(\lambda) < v_K(\alpha) < v_K(\lambda)$, considérons le revêtement p-cyclique f de $\mathbb{P}^1_K$ donné par l'équation

$$Y^p = \frac{1 - \alpha^p T_1^m}{1 - \alpha^p(1 + \alpha^{-p}\lambda^p)T_1^m}.$$

Il est ramifié en $2m$ points. Au dessus de la couronne $0 < v_K(T_1^{-1}) < \frac{2p}{m}v_K(\alpha)$, on obtient une couronne ouverte, nécessairement stable sous l'action de $G := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec conducteur $m + 1$ à chaque bord. Si σ est un générateur de G, σ est de type III.



PREUVE.

On supposera que R contient une racine m-ième de λ. Au-dessus du disque $D_1 :\ v_K(T_1) \geq 0$, on obtient l'équation dans $R\{T_1\}$

$$\begin{aligned} Y^p = &\quad (1-\alpha^p T_1^m)(1+\alpha^p(1+\alpha^{-p}\lambda^p)T_1^m) \mod \pi\lambda^p \\ = &\quad 1+\lambda^p T_1^m \mod \pi\lambda^p \end{aligned}$$

Posons $Y := \lambda W_1 + 1$; Il suit

$$\frac{(\lambda W_1+1)^p-1}{\lambda^p} = T_1^m \mod \pi$$

Ainsi, résiduellement, l'équation du revêtement est $w_1^p - w_1 = t_1^m$.

Posons maintenant $T_2 := \dfrac{\alpha^{-\frac{2p}{m}}}{T_1}$, au-dessus du disque $D_2 :\ v_K(T_2) \geq 0$, l'équation du revêtement est

$$\begin{aligned} Y^p = &\quad (1+\alpha^{-p}\lambda^p)^{-1}\frac{1-\alpha^p T_2^m}{1-\alpha^p(1+\alpha^{-p}\lambda^p)^{-1}T_2^m} \\ = &\quad (1+\alpha^{-p}\lambda^p)^{-1}(1-\alpha^p T_2^m)(1+\alpha^p(1-\alpha^{-p}\lambda^p)T_1^m \mod \pi\lambda^p) \\ = &\quad (1+\alpha^{-p}\lambda^p)^{-1}(1-\lambda^p T_2^m \mod \pi\lambda^p). \end{aligned}$$

Après une extension éventuelle finie de K, en posant $\lambda W_2 + 1 := (1+\alpha^{-p}\lambda^p)^{\frac{1}{p}}Y$, on obtient l'équation

$$\frac{(\lambda W_2+1)^p-1}{\lambda^p} = -T_2^m \mod \pi.$$

Ainsi, résiduellement, l'équation du revêtement est $w_2^p - w_2 = -t_2^m$.

En notant $f : C \to \mathbb{P}^1_K$ le revêtement ci-dessus, $\{f^{-1}(D_1), f^{-1}(D_2)\}$ est un recouvrement pur de C ([**3**], p164). La réduction associée E de C est formée de deux composantes irréductibles E_1 et E_2, données respectivement par les équations: $w_1^p - w_1 = t_1^m$ et $w_2^p - w_2 = -t_2^m$. La courbe E_1 (resp. E_2) est étale au-dessus de la droite affine Spec $(k[t_1])$ (resp. Spec $(k[t_2])$), totalement ramifié à l'infini avec conducteur $m+1$. Il reste à voir que E_1 et E_2 se coupent suivant un point double ordinaire. Considérons la suite exacte de $\mathcal{O}_E$-modules déduite de la normalisation $\phi : \tilde{E} \to E$.

$$0 \to \mathcal{O}_E \to \phi_*\mathcal{O}_{\tilde{E}} \to \mathcal{F} \to 0$$

où $\mathcal{F}$ est un faisceau gratte-ciel de support le lieu singulier de E. Quitte à faire une extension finie de K, il existe un modèle propre et plat $\mathcal{E}$ sur R de C, dont la fibre générique est lisse et la fibre spéciale s'identifie à E ([**3**] p168). De l'égalité des caractéristiques d'Euler-Poincaré résiduelle et générique pour $\mathcal{E}$, i.e. $\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_E)$, on déduit :

$$\chi(\mathcal{O}_{\tilde{E}}) = \chi(\mathcal{O}_E) + \chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{O}_C) + \chi(\mathcal{F})$$

Si $g,\ g_1,\ g_2$ désignent respectivement le genre de C, E_1 et E_2, on obtient

$$\dim_k H^0(E, \mathcal{F}) = 1 - g_1 + 1 - g_2 - (1 - g)$$

Or, d'après le théorème de Hurwitz,

$$1 - g = p - m(p-1)$$

$$1 - g_1 = 1 - g_2 = p - \frac{1}{2}(m+1)(p-1)$$

et finalement $\dim_k H^0(E, \mathcal{F}) = 1$. La réduction E possède donc un seul point singulier qui est un point double ordinaire.

□

Bibliographie

[1] Bertin J., Mézard A. : Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques. Prépublication n^o439 de l'institut Fourier, (1998)

[2] Deligne P., Mumford D. : The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. IHES 36, 75-110 (1969)

[3] Fresnel J., Van der Put M. : Géométrie Analytique Rigide et Applications. Progress in Mathematics, Birkäuser (1981)

[4] Garuti M. : Prolongement de revêtements galoisiens en géométrie rigide. Compositio Math. 104 (n^o3), 305-331 (1996)

[5] Green B., Matignon M. : Lifting of Galois covers of smooth curves. Compositio Math. 113 (n^o 3), 237-272 (1998)

[6] Green B., Matignon M. : Order p automorphisms of the open disc of a p-adic field. J. Amer. Soc 12 (n^o 1), 269-303 (1999)

[7] Grothendieck A., Dieudonné J. : Eléments de Géométrie Algébrique, chap. III, Publ. Math. IHES 11 (1961)

[8] Harbater D. : Formal patching and adding branch points. Amer. J. of Math. 115 (n^o3), 487-508 (1993)

[9] Harbater D., Stevenson K. : Patching and thickening problems. J. of Alg. 212, 272-304 (1999)

[10] Henrio Y. : Automorphismes d'ordre p des couronnes p-adiques ouvertes. C. R. Acad. Sci Paris, t. 329, Série I, 47-50 (1999)

[11] de Jong A.J. : Families of curves and alterations. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 47 (n^o2), 599-621 (1997)

[12] Oort F. : Lifting algebraic curves, abelian varieties, and their endomorphisms to characteristic zero. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 46 (1987)

[13] Oort F. : Some Questions in Algebraic Geometry. Utrecht Univ., Math. Dept. Preprint Series, June 1995.

[14] Oort F., Sekiguchi T., Suwa N. : On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 22, 345-375 (1989)

[15] Raynaud M. : Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d'Abhyankar. Invent. Math 116, 425-462 (1994)

[16] Saïdi M. : Revêtements étales abéliens, courants sur les graphes et réduction semi-stable des courbes. Manuscripta Math. 89, 245-265 (1996)

[17] Saïdi M. : Revêtements modérés et groupe fondamental de graphe de groupes. Compositio Math. 107 (n^o3), 319-338 (1997)