Mmoire de DEA.
Universit de Paris-Sud.

ETUDE D'UN SCHEMA VOLUME FINI BOITE

Par Mathieu COLIN

Sous la direction de J.P.CROISILLE

Ce mmoire traite des “schmas botes de type volumes finis”, introduits par J.P.Croisille et B.Courbet dans leur article intitul “Finite volume box schemes on triangular meshes”. Ces schmas approximent les solutions d'quations du type $-div(\phi(u)) = f$. Ils gnralisent le schma boite de Keller. Comme dans ce dernier, u et ϕ sont approchs par des fonctions affines. On utilise l'espace P^1-non conforme de Crouzeix-Raviart pour u et l'espace div-conforme de Raviart-Thomas pour ϕ.

Le but de ce mmoire est la mise en oeuvre de cette mthode sur des exemples prcis afin d'en tudier la convergence. Il traite tout d'abord du cas particulier de la dimension 1 pour laquelle nous apporterons quelques prcisions supplmentaires par rapport l'article. Ensuite, nous tudierons en dtail le cas de la dimension 2. Je prcise que tous les programmes que j'ai crits ont t raliss sous l'environnement Matlab.

I PRESENTATION THEORIQUE DU SCHEMA VOLUME FINI BOITE

I.1 Cadre de l'tude

L'quation modle qui sera considre ici est l'quation de Poisson

$$(1)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

o Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Notons que l'on peut rcrire l'quation en posant $p = \nabla u$

$$(2)\begin{cases} \nabla \cdot p + f = 0 & \text{dans } \Omega \\ p - \nabla u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les deux problmes (1) et (2) sont quivalents et possdent une unique solution $(u,p) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), (H^1(\Omega))^2)$ ds lors que $f \in L^2(\Omega)$ et que Ω est assez rgulier.

Pour tudier cette quation, on commence par introduire un maillage τ_h de l'ouvert Ω compos de triangles K de telle sorte que $\Omega = \cup_{K\in\tau_h} K$. On suppose de plus que le maillage possde de bonnes proprites, c'est--dire

- $\exists C$ telle que $\forall K,\ \forall h,\ d(K)/\rho(K) \leq C$.
- $\forall K \in \tau_h\ d(K) \leq h$.

o d et ρ dsignent respectivement le diamtre de K et le diamtre du cercle inscrit dans K.

Notons A_i l'ensemble des artes internes, A_b l'ensemble des artes situes sur le bord, NA_i et NA_b leurs cardinaux respectifs et $A = A_i \cup A_b$. N_e dsigne le nombre total de triangles.

On dsigne par u_h l'approximation de u dans l'espace P^1 non- conforme, not V_h, et p_h celle de p dans l'espace div-conforme, not Q_h.

Le systme (2) peut alors se mettre sous la forme

$$(3)\begin{cases} (3a) & < \nabla \cdot p_h + f, 1_K >= 0 & \forall K \in \tau_h \\ (3b) & < p_h - \nabla u_h, 1_K >= 0 & \forall K \in \tau_h \\ (3c) & u_h = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rappelons maintenant brivement la dfinition des espaces V_h et Q_h.

$$V_h = \{v_h / \forall K \in \tau_h,\ \ (v_h)_{/K} \in P^1(K) \text{ et } v_h \text{ est continu au milieu de chaque } e \in \partial\Omega\}$$

o P^k dsigne l'ensemble des polynmes de degr infrieur ou gal k par rapport aux deux variables. On note $(p_a(x))_{a\in A}$ la base canonique de V_h.

$$Q_h = \{q_h(x) \in H_{div}(\Omega)/\ \forall K \in \tau_h,\ \ (q_h(x))_{/K} \in RT_0(K)\}$$

avec $\forall K \in \tau_h$, $RT_0 = P_0(K)^2 + P_0(K)\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$.

On note $(P_a(x))_{a\in A}$ la base canonique de Q_h. On peut calculer aisment les deux bases $(p_a(x))_{a\in A}$ et $(P_a(x))_{a\in A}$. Comme nous en aurons besoin pour la suite, je vais le faire maintenant.

Considrons une arte interne a, K_1 et K_2 tant les deux triangles auxquels appartient a. La base $(p_a(x))_{a\in A}$ est en fait la base duale des degrs de libert L_a tels que $< L_a, v_h >= v_h(m_a)$ o m_a dsigne le milieu de a. Nous avons ainsi

$$< L_a, p_{a'} >= \delta_{aa'}\ \ \forall a, a' \in A$$

o δ est le symbole de Kronecker. $p_a(x)$ est une fonction de P^1 donc elle a la forme $p_a(x)_{/K_i} = \alpha_i + \beta_i * x^1 + \gamma_i * x^2$ sur chacun des deux triangles K_1 et K_2 ($x = (x^1, x^2)$). On pose $\partial K_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$. On suppose $a = e_1$ pour fixer les ides. En crivant

$$(4)\begin{cases} p_a(m_{e_1})_{/K_1} = 1 \\ p_a(m_{e_2})_{/K_1} = 0 \\ p_a(m_{e_3})_{/K_1} = 0 \end{cases}$$

on obtient un systme de 3 quations trois inconnues. On peut donc ainsi avoir de manire unique la trace de $p_a(x)$ sur K_1. On fait de mme pour avoir sa trace sur K_2. La valeur exacte de $p_a(x)$ en fonction des coordonnes des sommets de K_1 et K_2 dpend du numro local de l'arte a dans ces deux triangles. Je ne vais donc pas crire explicitement la solution car cela n'apporterai rien dans la comprhension de ce mmoire. Si a est une arte externe, $a \in K$, alors p_a ne possde une trace que sur K que l'on calcule comme ci-dessus.

Calculons maintenant la base $P_a(x)$. Puisque $P_a(x) \in Q_h$, on peut crire sur K_1

$$P_a(x)_{/K_1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

La base $(P_a(x))_{a\in A}$ est en fait la base duale des degrs de libert suivant

$$< L_a, q_h >= \int_a q_h \cdot \nu_a d\sigma.$$

Toujours en crivant les trois quations suivantes

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} < L_{e_1}, P_a(x)_{/K_1} >= 1 \\ < L_{e_2}, P_a(x)_{/K_1} >= 0 \\ < L_{e_3}, P_a(x)_{/K_1} >= 0 \end{array} \right.$$

on obtient un systme de trois quations trois inconnues qui permet de calculer explicitement $P_a(x)$ sur K_1. On effectue le mme calcul sur K_2. On arrive pour finir la forme suivante

$$P_a(x) = P_a(x)_{/K_1} 1_{k_1}(x) - P_a(x)_{/K_2} 1_{K_2}(x)$$

En dsignant par S le sommet oppos l'arte a dans K_1 et S' celui dans K_2 et par $|K_i|$ l'aire de K_i, on a

$$P_a(x)_{/K_1} = \frac{1}{|K_1|} \left[\begin{array}{c} x^1 - x_S^1 \\ x^2 - x_S^2 \end{array} \right] \qquad P_a(x)_{/K_2} = \frac{1}{|K_2|} \left[\begin{array}{c} x^1 - x_{S'}^1 \\ x^2 - x_{S'}^2 \end{array} \right]$$

Si a est une arte externe, $a \in K$, on a seulement

$$P_a(x) = \frac{1}{|K|} \left[\begin{array}{c} x^1 - x_S^1 \\ x^2 - x_S^2 \end{array} \right]$$

Remarquons enfin que la contrainte $q_h(x) \in H_{div}$ est quivalente

$$(6)\ \forall a \in A_i,\ \ a = K_1 \cap K_2,\ \ (q_h(x))_{K_1}.\nu_{e_1} + (q_h(x))_{k_2}.\nu_{e_2} = 0,\ \ \forall x \in a$$

avec $a = e_1$ dans K_1 et $a = e_2$ dans K_2, ν_{e_1} et ν_{e_2} dsignant les normales orientes vers l'extrieur des artes e_1 et e_2.

I.2 Prsentation du systme

On dcompose u_h et p_h sur les bases canoniques de V_h et Q_h.

$$u_h = \sum_{a\in A} u_a p_a(x), \quad p_h = \sum_{a\in A} \rho_a P_a(x).$$

Nous allons d'abord montrer un rsultat intermdiaire utile pour la suite.

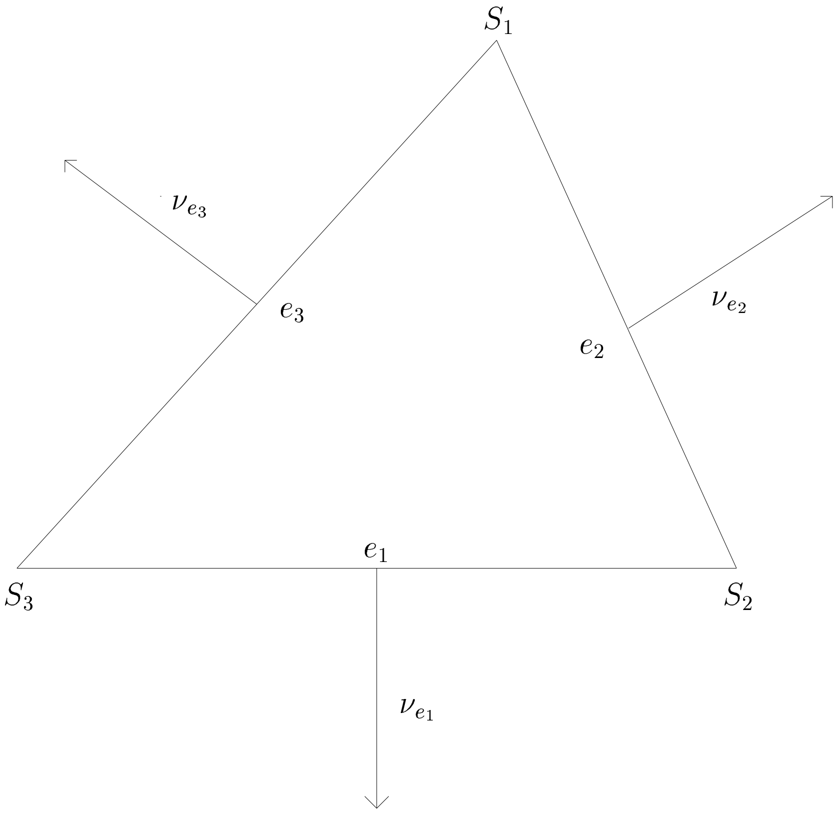

Figure 1: Triangle de τ_h

Proposition I.2.1 *Considrons un triangle K de τ_h. On note $\partial K = \{e_1, e_2, e_3\}$. et $P_{e_1}, P_{e_2}, P_{e_3}$ les fonctions de bases de Q_h correspondantes. On a alors*

$$\forall i \in [1,3] \quad P_{e_i} \cdot \nu_{e_i} = \frac{1}{|e_i|}.$$

On note θ_1, θ_2 et θ_3 les angles des sommets S_1, S_2 et S_3. On va montrer le rsultat pour P_{e_1}, les dmonstrations pour les autres fonctions tant identiques.

Soit $X = (x^1, x^2)$ un point de $[S_2, S_3]$. On a, d'aprs ce qui prcde,

$$P_{e_1}(x) = \frac{1}{2|K|} \overrightarrow{S_1X} .$$

De plus, on a

$$\nu_{e_1} = \frac{1}{|S_2X|} \overrightarrow{S_2X}^{\perp}$$

et donc

$$\overrightarrow{S_1X} \cdot \overrightarrow{S_2X}^{\perp} = (\overrightarrow{S_1S_2} + \overrightarrow{S_2X})\cdot \overrightarrow{S_2X}^{\perp} = \overrightarrow{S_1S_2} \cdot \overrightarrow{S_2X}^{\perp} = |S_1S_2| * |S_2X| * sin(\theta_2)$$

Or on dispose de la formule bien connue dans les triangles reliant l'aire du triangle aux longueurs des cots

$$\frac{1}{2} * |S_1S_2| * |S_2S_3| * sin(\theta_2) = |K|.$$

Il vient donc clairement

$$P_{e_1} \cdot \nu_{e_1} = \frac{|S_2X| * |S_1S_2|}{2 * |K| * |S_2X|} * sin(\theta_2) = \frac{1}{|S_2S_3|} = \frac{1}{|e_1|}.$$

Revenons maintenant aux quations de dpart. Par intgration sur chaque $K \in \tau_h$ de l'quation $(3a)$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 = \textstyle\int_{\partial K} p_h.\nu + |K| f_K &= \sum_{e \in \partial K} \textstyle\int_e \rho_e P_e \cdot \nu_e + |K| f_K \\ &= \sum_{e \in \partial K} \rho_e \textstyle\int_e \frac{1}{|e|} d\sigma + |K| f_K \\ &= \sum_{e \in \partial K} \rho_e + |K| f_K. \end{aligned}$$

o $f_K = \frac{1}{|K|} \int_K f$. Ces relations fournissent N_e quations.
L'quation $(3b)$ assure

$$0 = \int_K (p_h - \nabla u_h) = \sum_{e \in \partial K} p_e \int_K P_e(x) - u_e \int_K \nabla p_e(x).$$

Evaluons ici la quantit $\nabla p_e(x)$.

Proposition I.2.2 *Considrons toujours le mme triangle K. On a*

$$\forall i \in [1,3] \quad \nabla p_{e_i}(x) = \frac{|e_i|}{|K|} \nu_{e_i}.$$

On va montrer l'galit pour e_1. Sur K, on peut crire

$$p_{e_1}(x) = \alpha + \beta x^1 + \gamma x^2.$$

Le systme (4) nous fournit

$$\begin{cases} \alpha+\beta(\frac{x^1_{S_2}+x^1_{S_3}}{2})+\gamma(\frac{x^2_{S_2}+x^2_{S_3}}{2})=1 \\ \\ \alpha+\beta(\frac{x^1_{S_1}+x^1_{S_2}}{2})+\gamma(\frac{x^2_{S_1}+x^2_{S_2}}{2})=0 \\ \\ \alpha+\beta(\frac{x^1_{S_1}+x^1_{S_3}}{2})+\gamma(\frac{x^2_{S_1}+x^2_{S_3}}{2})=0 \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} \beta(x^1_{S_2}-x^1_{S_1})+\gamma(x^2_{S_2}-x^2_{S_1})=2 \\ \\ \beta(x^1_{S_3}-x^1_{S_2})+\gamma(x^2_{S_3}-x^2_{S_2})=0 \end{cases}$$

Le systme possde une solution non nulle puisque (S_1S_2) n'est pas parallle (S_2S_3). On a donc

$$\begin{cases} \beta=\frac{2*(x^2_{S_2}-x^2_{S_3})}{(x^2_{S_2}-x^2_{S_1})*(x^1_{S_3}-x^1_{S_2})-(x^2_{S_3}-x^2_{S_2})*(x^1_{S_2}-x^1_{S_1})} \\ \\ \gamma=\frac{2*(x^1_{S_3}-x^1_{S_2})}{(x^2_{S_2}-x^2_{S_1})*(x^1_{S_3}-x^1_{S_2})-(x^2_{S_3}-x^2_{S_2})*(x^1_{S_2}-x^1_{S_1})} \end{cases}$$

Toujours d'aprs les formules relatives au triangle, on a

$$|(x^2_{S_2}-x^2_{S_1})*(x^1_{S_3}-x^1_{S_2})-(x^2_{S_3}-x^2_{S_2})*(x^1_{S_2}-x^1_{S_1})|=2*|K|$$

ce qui permet de conclure

$$\nabla p_{e_1}(x)=\frac{|e_1|}{|K|}\nu_{e_1}.$$

Ainsi l'quation $(3b)$ s'crit

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\partial K}\rho_e\int_K P_e(x)-u_e\int_K\tfrac{|e|}{|K|}\nu_e &= \sum_{e\in\partial K}\rho_e\int_K P_e(x)-u_e|e|\nu_e\int_K\tfrac{1}{|K|} \\ &= \sum_{e\in\partial K}\rho_e\int_K P_e(x)-u_e|e|\nu_e \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ces relations fournissent $2N_e$ quations. De plus, les conditions de Dirichlet au bord procurent les NA_b quations suivantes

$$\forall a \in A_b, \;\; u_a = 0.$$

On vrifie alors rapidement que le nombre d'inconnues $(u_a, p_a)_{a\in A}$ est gal au nombre d'quations obtenues.

Aprs avoir pos $Q_e = \int_K P_e(x)$ et $N_e = |e|\nu_e$, on obtient le systme suivant

$$(7) \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{e\in\partial K} \rho_e + |K| f_K = 0 & \forall K \in \tau_H \\ \\ \sum_{e\in\partial K} [\rho_e Q_e - u_e N_e] = 0 & \forall K \in \tau_H \\ \\ u_a = 0 & \forall a \in A_b. \end{array} \right.$$

On montre de plus la relation suivante.

Proposition I.2.3

$$(8) \qquad \sum_{e\in\partial K} Q_e = 0.$$

La dmonstration est vidente. Posons

$$Q_K(x) = \frac{1}{2|K|} \begin{bmatrix} x^1 - x^1_G \\ x^2 - x^2_G \end{bmatrix}$$

o G dsigne le centre de gravit de K. On a

$$\sum_{e\in\partial K} Q_e = \sum_{e\in\partial K} \int_K P_e(x) = 3 \int_K Q_K(x) = 0$$

I.3 Rsultat sur la convergence de u_h

J.P.Croisille et B.Courbet ont montr le rsultat suivant, portant sur l'estimation de $u - u_h$ en norme $L^2(\Omega)$.

Thorme I.3.1 *Supposons qu'il existe un recouvrement de τ_h par N_h pavs $(W_i)_{1\le i\le N_h}$ constitus de triangles deux deux disjoints, chaque pav W_i tant constitu de $N_{i,h}$ triangles. Supposons de plus que $N_h = O(\frac{1}{h})$ et que sup $N_{i,h} = O(\frac{1}{h})$. Alors il existe une constante C indpendante de h telle que*

$$|u - u_h|_{L^2(\Omega)} \le Ch|u|_{2,\Omega}$$

o $|u|_{2,\Omega} = [\int |D^2 u(x)|^2 dx]^{\frac{1}{2}}$.

Ce rsultat est pour l'instant le seul dont l'on dispose sur la convergence de u_h vers u.

I.4 Description de l'algorithme

On dsigne toujours par $(u_a)_{a\in A}$ les coordonnes de u_h dans la base $(p_a(x))_{a\in A}$. Pour chaque triangle K du maillage, on note aussi U_K et P_K les vecteurs forms des composantes locales de u_h et p_h dans ce triangle.

$$U_K = [u_{e_1}, u_{e_2}, u_{e_3}]^T \ \ et \ \ P_K = [\rho_{e_1}, \rho_{e_2}, \rho_{e_3}]^T,$$

o $\partial K = \{e_1, e_2, e_3\}$.

On peut alors rcrire le systme (7) sous la forme

$$-\widehat{N}_K \cdot U_K + \widehat{M}_K \cdot P_K = -\widehat{L}_K$$

o

$$\widehat{N}_K = \frac{1}{|K|}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ N^x_{e_1} & N^x_{e_2} & N^x_{e_3} \\ N^y_{e_1} & N^y_{e_2} & N^y_{e_3} \end{bmatrix} \qquad \widehat{M}_K = \frac{1}{|K|}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ Q^x_{e_1} & Q^x_{e_2} & Q^x_{e_3} \\ Q^y_{e_1} & Q^y_{e_2} & Q^y_{e_3} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{L}_K = \begin{bmatrix} f_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La relation (8) assure que la matrice $\widehat{M}_K$ est inversible. Posons maintenant $N_K = \widehat{M}_K^{-1} \cdot \widehat{N}_K$ et $L_K = \widehat{M}_K^{-1} \cdot \widehat{L}_K$. Le systme dfinitif peut s'crire

$$(9) \quad \forall K \in \tau_h, \quad P_K = -L_K + N_K \cdot U_K.$$

Pour liminer les inconnues P_K, on utilise la relation de rciprocit $P_{K_1,e_1} = -P_{K_2,e_2}$ pour toute arte $a \in A_i$, avec $a = e_1$ dans K_1 et $a = e_2$ dans K_2. D'o,

$$(10)\ \forall a \in A_i \quad [N_{K_1} \cdot U_{K_1}]_{e_1} + [N_{K_2} \cdot U_{K_2}]_{e_2} = L_{K_1,e_1} + L_{K_2,e_2}.$$

Enfin, si a est une arte situe sur le bord, la condition de Dirichlet nous donne $u_a = 0$.

Ainsi, nous obtenons le systme global suivant

$$A \cdot U = b$$

d'inconnue $U = (u_a)_{a \in A}$.

L'algorithme final peut alors tre dcrit comme suit

$\star$ Pour chaque triangle $K \in \tau_h$

_on calcul les matrices L_K et N_K

_on injecte ces matrices dans les matrices A et b

$\star$ On rsoud le systme $A \cdot U = b$

I.5 Un rsultat remarquable

On note $U_i \in \mathbb{R}^{NA_i}$ le sous-vecteur de U correspondant aux artes internes de τ_h et A^i la matrice extraite de A correspondante.

Proposition I.5.1 *La matrice A^i est symtrique dfinie positive.*

II CAS OU Ω EST UN OUVERT DE $\mathbb{R}$

II.1 Etude thorique

Commençons donc par tudier ce cas particulier. Prenons pour simplifier $\Omega = [0, 1]$. On dsigne par

_n_p le nombre de points du maillage

_n_e le nombre de cellules: ici $n_e = n_p - 1$

_h le pas du maillage $h = \dfrac{1}{n_e}$.

Les cellules sont ici des segments de droites. La particularit de la dimension 1 est que l'on a ici l'galit des deux bases de Q_h et de V_h. Une cellule *k_cell* est dternine par les deux points de coordonnes x_{k_cell} et x_{k_cell+1}. Les restrictions portant sur le maillage se rsument ici $|x_{k\_cell+1} - x_{k\_cell}| \leq h$. Suivant une mthode classique, tous les calculs relatifs une cellule *k_cell* de l'espace physique seront effectus sur la cellule de rfrence situe dans l'espace de rfrence. On la notera $cell\_ref$. Elle est dfinie par $cell\_ref = [-1, 1]$. Le lien entre une cellule *k_cell* et $cell\_ref$ est donn par la proposition suivante.

Proposition II.1.1 *Pour toute cellule k_cell, il existe une unique transformation F_{k_cell} affine telle que $F_{k\_cell}(cell\_ref) = k\_cell$ et vrifiant de plus $F_{k\_cell}(-1) = x_{k\_cell}$ et $F_{k\_cell}(1) = x_{k\_cell+1}$.*

Ce rsultat est bien sr vident en dimension 1. Dans la suite, on travaillera de manire quivalente sur les deux structures. Considrons donc une cellule k_cell. On pose $e_1 = x_{k\_cell}$ et $e_2 = x_{k\_cell+1}$. Notons P_{e_1} et P_{e_2} les deux fonctions de bases de V_h qui sont associes cette cellule, et p_1, p_2 leurs images par $F^{-1}_{k\_cell}$. Nous avons ici plusieurs choix possibles pour les deux fonctions P_{e_1} et P_{e_2}, et donc pour p_1 et p_2.

Le premier choix, qui est aussi le moins naturel, consiste choisir pour p_1 la fonction affine qui vaut -1 en e_1 et 0 en e_2 et pour p_2 celle qui vaut 0 en e_1 et 1 en e_2. Ces deux fonctions sont celles qui correspondent l'article. Elles ont pour expression

$$p_1 = \frac{x-1}{2}, \qquad p_2 = \frac{x+1}{2}.$$

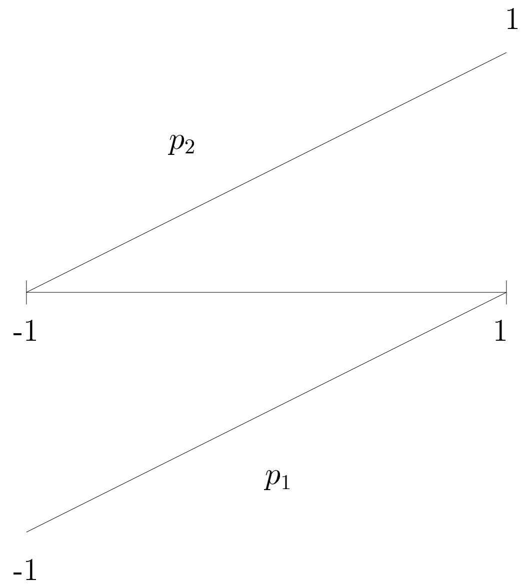

Figure 2: Fonctions de bases “non-naturelles”

En reprenant les notations de la partie **I**, nous allons maintenant calculer les matrices lmentaires $\widehat{M}_{k\_cell}$, $\widehat{N}_{k\_cell}$ et $\widehat{L}_{k\_cell}$. On rappelle que

$$Q_{e_1} = \int_{k\_cell} P_{e_1}(x) = \int_{cell\_ref} p_1(x_{ref}) * Jacob(F_{k\_cell})$$

$$Q_{e_2} = \int_{k\_cell} P_{e_2}(x) = \int_{cell\_ref} p_2(x_{ref}) * Jacob(F_{k\_cell})$$

Les normales de la cellule k_cell sont toujours orientes vers l'extrieur et sont donc gales $\nu_{e_1} = -1$ et $\nu_{e_2} = 1$.

Figure 3: Normales sur k_cell

Notons $U_{k\_cell} = [u_{e_1} \;\; u_{e_2}]^T$ les coordonnes locales de u_h sur k_cell et $P_{k\_cell} = [\rho_{e_1} \;\; \rho_{e_2}]^T$ celles de p_h. Repartons maintenant du systme (10). On a

$$\begin{cases} \rho_{e_1} + \rho_{e_2} + |k\_cell| f_{k\_cell} = 0 & \forall k\_cell \in \tau_h \\ \\ \rho_{e_1} Q_{e_1} + \rho_{e_2} Q_{e_2} - u_{e_1} N_{e_1} - u_{e_2} N_{e_2} = 0 & \forall k\_cell \in \tau_h \\ \\ u_a = 0 & \forall a \in A_b \end{cases}$$

Le systme s'crit donc clairement sous la forme

$$\forall k\_cell \in \tau_h \qquad -\widehat{N}_{k\_cell} \cdot U_{k\_cell} + \widehat{M}_{k\_cell} \cdot P_{k\_cell} = -\widehat{L}_{k\_cell}$$

avec

$$\widehat{M}_{k\_cell} = \frac{1}{|k\_cell|} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Q_{e_1} & Q_{e_2} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{N}_{k\_cell} = \frac{1}{|k\_cell|} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{L}_{k\_cell} = \frac{1}{|k\_cell|} \begin{bmatrix} \int_{k\_cell} f(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice $\widehat{M}_{k\_cell}$ est alors bien inversible puisque l'on a $Q_{e_1} + Q_{e_2} = 0$ et les Q_{e_i} sont non tous les deux nuls. On peut alors crire

$$N_K = \widehat{M}_{k\_cell}^{-1} \cdot \widehat{N}_{k\_cell} \quad \text{Ł}_{k\_cell} = \widehat{M}_{k\_cell}^{-1} \cdot \widehat{L}_{k\_cell}$$

et obtenir le systme suivant

$$P_{k\_cell} = -L_{k\_cell} + N_{k\_cell} \cdot U_{k\_cell}.$$

Nous verrons plus tard comment s'limine P_{k_cell}. Mais revenons tout d'abord sur le choix des fonctions de bases de V_h. Le choix qui semble le plus naturel est de choisir la fonction P_{e_1} qui vaut 1 en e_1 et 0 en e_2 et la fonction P_{e_2} qui vaut 0 en e_1 et 1 en e_2. Cela nous donne

$$p_1 = \frac{1-x}{2} \qquad p_2 = \frac{1+x}{2}.$$

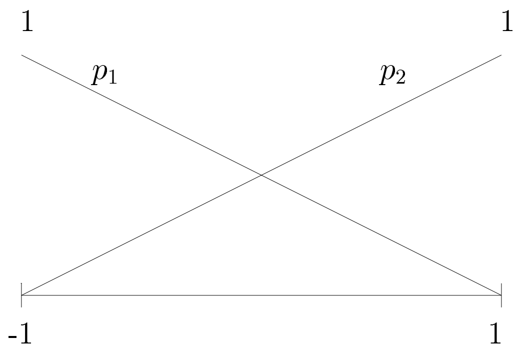

Figure 4: fonctions de bases plus “naturelles”

Cependant un tel choix entraine des modifications dans la structure des matrices lmentaires. En effet, revenons aux quations de bases. On a dj remarqu l'importance de la relation (8) qui permet d'inverser la matrice $\widehat{M}_{k\_cell}$. Avec les deux fonctions de bases P_{e_1} et P_{e_2} cette relation n'est plus vraie car

$$\begin{aligned}
Q_{e_1} + Q_{e_2} &= \int_{k_cell} (P_{e_1} + P_{e_2}) \\
&= \int_{cell_ref} (P_1(F_{k_cell}(x)) + P_2(F_{k_cell}(x))) * Jacob(F_{k_cell}) \\
&= \int_{-1}^{1} (\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2}) * Jacob(F_{k_cell}) \\
&= 2 * Jacob(F_{k_cell}).
\end{aligned}$$

La matrice $\widehat{M}_{k\_cell}$ ne serait alors plus inversible.

Reprenons la relation $(3a)$

$$0 = \int_{\partial K} (p_h.\nu + |K| f_K).$$

On a

$$\rho_{e_1} \int_{e_1} P_{e_1} \cdot \nu_{e_1} + \rho_{e_2} \int_{e_2} P_{e_2} \cdot \nu_{e_2} + |K| f_K = 0.$$

Or

$$\int_{e_1} P_{e_1}(x) \cdot \nu_{e_1} = P_{e_1}(e_1) \cdot \nu_{e_1} = -1$$

Par contre, on a toujours

$$\int_{e_2} P_{e_2} \cdot \nu_{e_2} = 1.$$

On a ainsi

$$-\rho_{e_1} + \rho_{e_2} + |K| f_K = 0$$

La matrice $\widehat{M}_{k\_cell}$ a donc la forme suivante

$$\widehat{M}_{k\_cell} = \frac{1}{|k\_cell|} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ Q_{e_1} & Q_{e_2} \end{bmatrix}$$

De plus, on remarque que

$$\begin{aligned} Q_{e_1} - Q_{e_2} &= \int_{k\_cell} (P_{e_1} + P_{e_2}) \\ &= \int_{cell\_ref} (P_1(F_{k\_cell}(x)) - P_2(F_{k\_cell}(x))) * Jacob(F_{k\_cell}) \\ &= \int_{-1}^{1} (\frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2}) * Jacob(F_{k\_cell}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cette relation assure que la matrice $\widehat{M}_{k\_cell}$ est inversible. Les autres matrices tant inchanges, cela nous permet d'obtenir le mme systme que plus haut.

II.2 Remplissage des matrices A et b. Description de l'algorithme

Je vais maintenant dcrire le programme que j'ai crit et qui met donc en oeuvre la mthode des volumes finis botes dans le cas de la dimension 1. Tout d'abord celui-ci comporte une procdure *l1_shap* qui possde en entre un numro de cellule et qui ressort la transformation qui envoie *cell_ref* sur *k_cell*, son jacobien, les fonctions de rfrences *shap* sur *cell_ref*, qui sont en fait les fonctions p_1 et p_2.

Le programme comporte aussi des procdures qui calculent les matrices $\widehat{M}_K$, $\widehat{N}_K$ et $\widehat{L}_K$. Les calculs des intgrales sont l encore effectus sur *cell_ref* grce la transformation F_{k_cell}, ces intgrales tant calcules l'aide d'une formule de Gauss trois points.

Ensuite, il comporte une procdure qui assemble les grosses matrices A et b partir des matrices lmentaires voques ci-dessus.

Enfin, le programme principal rsout le systme $A \cdot U = b$, trace les courbes exactes et approches et calcule les erreurs en norme L^2 et L^∞.

Prcisons un peu mieux la procdure de remplissage de A et b, celle-ci tant la seule qui peut poser des problmes. On note U le vecteur colonne constitu des coordonnes de u_h suivant la base $(P_a(x))_{a \in A}$. On cherche ici construire le systme $A \cdot U = b$ d'inconnue U. On tudie le cas des conditions aux limites dites de Dirichlet. Ainsi, aprs avoir initialiser les matrices A et b zros, on pose $A(1,1) = 0$ et $A(n_p, n_p) = 1$, ceci afin de tenir compte des conditions aux limites. Rappelons maintenant la relation (10). Elle fournissait l'quation suivante

$$\forall a \in A_i \quad [N_{K_1}.U_{K_1}]_{e_1} + [N_{K_2}.U_{K_2}]_{e_2} = L_{K_1,e_1} + L_{K_2,e_2}.$$

Il faut ici l'adapter au cas de la dimension 1. On considre donc deux cellules successives k_cell_1 et k_cell_2, de sommets respectifs e_1, e_2 et e_2, e_3. Appelons $N_{k\_cell_1}$, $L_{k\_cell_1}$, $N_{k\_cell_2}$ et $L_{k\_cell_2}$ les matrices respectives des deux cellules. On pose, pour simplifier,

$$N_{k\_cell_1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{bmatrix} \qquad N_{k\_cell_2} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$L_{k\_cell_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^1 \\ \lambda_1^2 \end{bmatrix} \qquad L_{k\_cell_2} = \begin{bmatrix} \lambda_2^1 \\ \lambda_2^2 \end{bmatrix}$$

On note aussi u_1, u_2 les composantes de u_h sur k_cell_1 et u_2, u_3 celles sur k_cell_2. La relation de rciprocit au niveau de e_2 s'crit alors

$$-\lambda_1^2 + \gamma_1 u_1 + \delta_1 u_2 = \lambda_2^1 - \alpha_2 u_2 - \beta_2 u_3$$

d'o

$$\gamma_1 u_1 + (\delta_1 + \alpha_2) u_2 + \beta_2 u_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^1.$$

Le remplissage de A et b devient alors vident. Pour k_cell variant de 2 $n_p - 1$, on calcul les matrices L_{k_cell} et N_{k_cell} relative la cellule k_cell. On initialise deux matrices intermdiaires C et q zro et on pose

$$\begin{cases} C(k\_cell, k\_cell) = \alpha \\ C(k\_cell, k\_cell+1) = \beta \\ C(k\_cell+1, k\_cell) = \gamma \\ C(k\_cell+1, k\_cell+1) = \delta \\ q(k\_cell) = \lambda^1 \\ q(k\_cell+1) = \lambda^2 \end{cases}$$

On termine la boucle en effectuant

$$A = A + C \quad b = b + q.$$

II.3 Prsentation des rsultats

J.P.Croisille et B.Courbet ont montr dans leur article une estimation en norme L^2 prouvant que le schma tait d'ordre 1. Cependant, ce schma ne serait d'aucune utilit s'il tait seulement d'ordre 1 car il n'apporterait rien par rapport aux lments finis. Un de mes objectifs tait de vrifier qu'il tait effectivement d'ordre suprieur. Et en effet, les rsultats numriques prouvent qu'il est d'ordre suprieur, au moins d'ordre 2 en norme L^2. Ce qui est aussi remarquable, c'est que ce schma est aussi d'ordre srictement suprieur 1 en norme L^∞.

Dans les tableaux ci-dessous sont consigns les rsultats obtenus avec diffrentes fonctions f. Chaque tableau est aussi suivi de quelques graphiques prsentant les courbes obtenues. Chaque graphique comporte deux courbes, une reprsentant la solution exacte u en pointille et l'autre le solution approche u_h en trait plein.

La norme L^∞ choisie est la suivante

$$|u - u_h|_{L^\infty} = \sup_{x_{k\_cell}} |(u - u_h)(x_{k\_cell}).$$

Fonction f	valeur de $\frac{1}{h}$	$\lvert u - u_h\rvert_{L^2}$	$\lvert u - u_h\rvert_{L^\infty}$
$f(x) = x^2$	4	$9.5e^{-4}$	$1.3e^{-3}$
	9	$1.9e^{-4}$	$2.5e^{-4}$
	49	$6.3e^{-6}$	$8.7e^{-6}$
	74	$2.8e^{-6}$	$3.8e^{-6}$
	99	$1.5e^{-6}$	$2.1e^{-6}$

Cherchons l'ordre de ce schma, c'est--dire le plus grand rel α tel que l'on ait

$$|u - u_h|_{L^2} \leq Ch^\alpha$$

ou encore

$$Ln(|u - u_h|_{L^2}) \leq Ln(C) + \alpha Ln(h).$$

Un rapide calcul de rgression linaire, nous assure que le nuage de points forms des points de coordonnes

$$(Ln(h), Ln(|u - u_h|_{L^2}))$$

peut bien tre assimil une droite d'quation

$$y = (2.008) * x - (4.156)$$

Cela nous fournit $\alpha = 2.008$ et montre donc que le schma est d'ordre au moins 2.

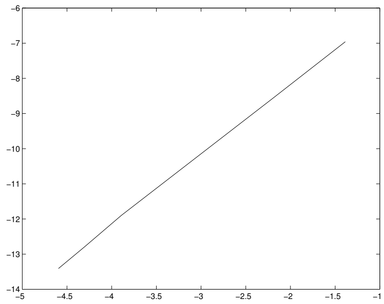

Figure 5: Droite passant par les points $(Ln(h), Ln(|u - u_h|_{L^2}))$

Effectuons le mme calcul pour la norme L^∞. Supposons

$$|u - u_h|_{L^\infty} \leq Ch^\beta.$$

L encore le nuage de points form par les points de coordonnes

$$(Ln(h), Ln(|u - u_h|_{L^\infty}))$$

peut bien tre assimil une droite d'quation $y = (1.997) * x - (3.881)$. Le rsultat $\beta = 1.997$ est assez surprenant car il tendrait prouver que, en dimension 1, le schma est presque d'ordre 2 en norme L^∞.

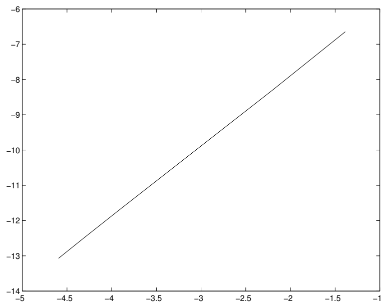

Figure 6: Droite passant par les points $(Ln(h), Ln(|u - u_h|_{L^\infty}))$

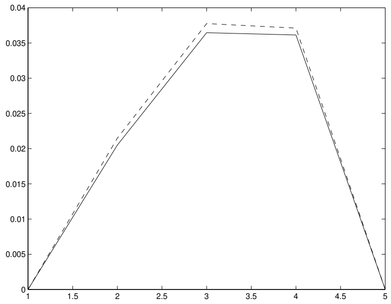

Figure 7: f(x)=x^2, h=$\frac{1}{4}$

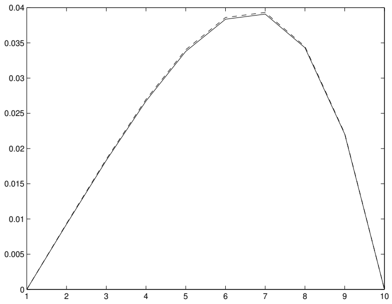

Figure 8: f(x)=x^2, h=$\frac{1}{9}$

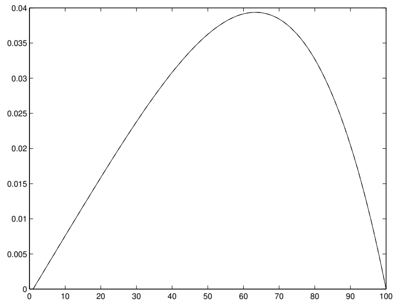

Figure 9: f(x)=x^2, h=$\frac{1}{99}$

Voici maintenant la deuxime fonction f que j'ai tudie.

Fonction f	valeur de $\frac{1}{h}$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$\|u-u_h\|_{L^\infty}$
$f(x)=sin(pi*x)$	4	$3.7e^{-3}$	$5.3e^{-3}$
	9	$7.3e^{-4}$	$1.0e^{-3}$
	49	$2.5e^{-5}$	$3.5e^{-5}$
	59	$1.7e^{-5}$	$2.4e^{-5}$
	74	$1.1e^{-5}$	$1.5e^{-5}$
	84	$8.3e^{-6}$	$1.2e^{-5}$
	99	$6e^{-6}$	$8.5e^{-6}$

Des calculs de rgression linaire assure encore que le schma est au moins d'ordre 2 en norme L^2 et en norme L^∞, puisque les quations respectives vrifies par ces deux normes sont

$$\begin{cases} y=(2.001)*x-(2.826) \\ y=(2.189)*x-(2.147) \end{cases}$$

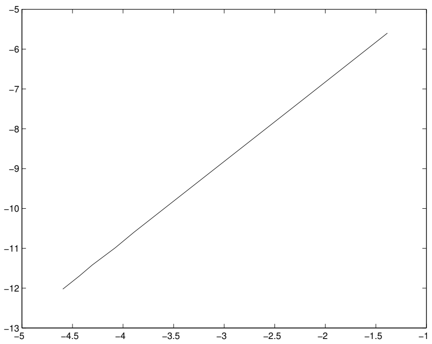

Figure 10: Droite passant par les points $(Ln(h), Ln(|u - u_h|_{L^2}))$

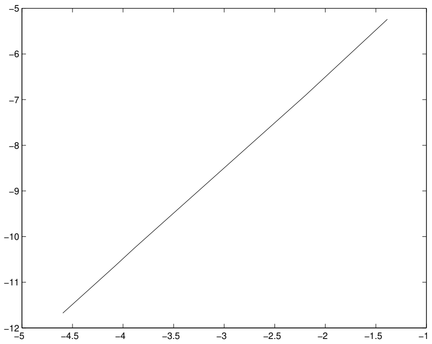

Figure 11: Droite passant par les points $(Ln(h), Ln(|u - u_h|_{L^2}))$

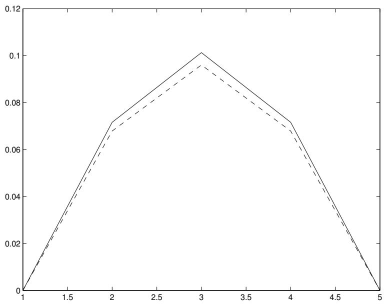

Figure 12: $f(x) = sin(\pi x), \;\; h = \frac{1}{4}$

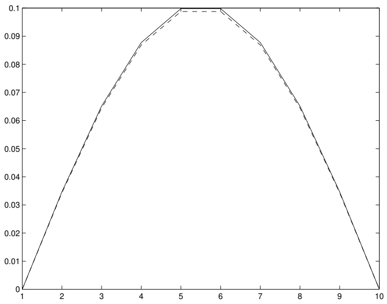

Figure 13: $f(x) = sin(\pi x), \;\; h = \frac{1}{9}$

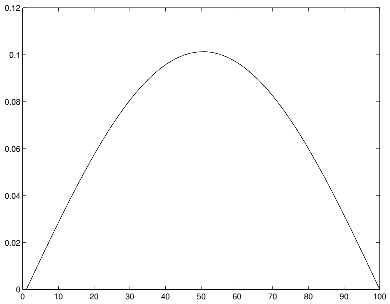

Figure 14: $f(x) = sin(\pi x), \;\; h = \frac{1}{99}$

III CAS OU Ω EST UN OUVERT DE $\mathbb{R}^2$

L'tude thorique ayant dj t vue dans la partie **I**, je ne vais pas ici revenir dessus mais plutt faire une prsentation dtaille du programme que j'ai ralis ainsi que des rsultats que j'ai obtenus.

III.1 Prsentation du programme

Rappelons le problme auquel on s'intresse. Etant donn une fonction $f \in L^2(\Omega)$, il s'agit de rsoudre sur $\Omega = [0,1] * [0,1]$ l'quation

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il faut tout d'abord, comme dans le cas de la dimension 1, dfinir le maillage. Pour simplifier, on va choisir un maillage bien rgulier. On dsigne par h le pas du maillage et $n = \frac{1}{h} + 1$. On associe alors $[0,1]$ la subdivision $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que

$$\forall i \in [1,n] \;\; x_i = (i-1) * h.$$

On utilise la mme subdivision en abscisse et en ordonne. En traçant les horizontales $y = x_i$ et les verticales $x = x_i$, on obtient un dcoupage de $[0,1] * [0,1]$ en $\frac{1}{h^2}$ carr. On divise ensuite chaque carr en deux pour obtenir le maillage final constitu de $\frac{2}{h^2}$ triangles.

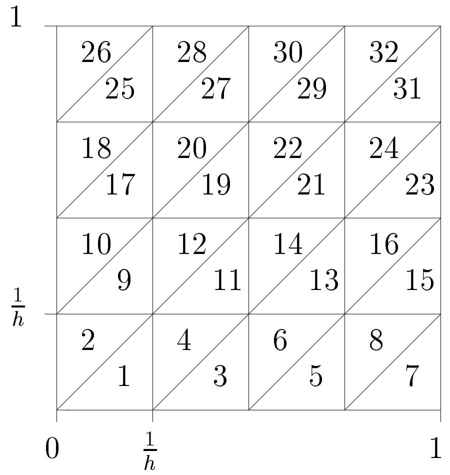

Figure 15: Maillage de $[0,1] * [0,1]$ dans le cas $h = \frac{1}{4}$

Il faut ensuite numroter chaque triangle. L'exemple ci-dessus indique de manire trs claire le choix dans la numrotation.

A partir de maintenant et dans toute la suite, on dsignera par n_{cell} le nombre de triangles, n_{aret} le nombre d'artes total, chaque arte interne tant compte deux fois et par n_{max} le nombre d'artes "physiques", chaque arte n'tant compte qu'une seule fois. Cette distinction me sera utile pour la suite. On a

$$\begin{cases} n_{cell} = \frac{2}{h^2} \\ n_{aret} = 3 * n_{cell} \\ n_{max} = (\frac{n_{aret}}{2} - \frac{2}{h}) + \frac{4}{h} \end{cases}$$

Le programme principal comporte en premier lieu des procdures qui dfinissent le maillage. La premire calcule les coordonnes des trois points de chaque triangle. Elle possde en sortie un tableaux ie 6 lignes et n_{cell} colonnes, chaque colonne tant compose des 6 coordonnes des trois points. Dans un triangle, les sommets possdent la numrotation locale suivante: le premier point est le point d'abscisse et d'ordonne minimales, puis la numrotation suit le sens trigonomtrique.

La deuxime procdure de dfinition du maillage sert rprer les artes par rapport chaque triangle. Les artes sont numrotes de 1 n_{aret}, chaque arte interne tant donc compte deux fois. Elle possde en sortie un tableau nomm $iaret$ n_{aret} lignes et 5 colonnes. Pour une arte k_{aret}, on a

- $iaret(k_{aret}, 1)$=numro du premier triangle auquel appartient l'arte
- $iaret(k_{aret}, 2)$=numro du deuxime triangle auquel appartient l'arte et 0 si c'est une arte externe
- $iaret(k_{aret}, 3)$=numro local de l'arte dans le premier triangle
- $iaret(k_{aret}, 4)$=numro local de l'arte dans le second triangle et 0 si l'arte est une arte externe
- $iaret(k_{aret}, 5)$=0 ou 1, nombre seulement utile pour la programmation

Pour la numrotation locale l'intrieur de chaque triangle, on choisit encore le sens trigonomtrique.

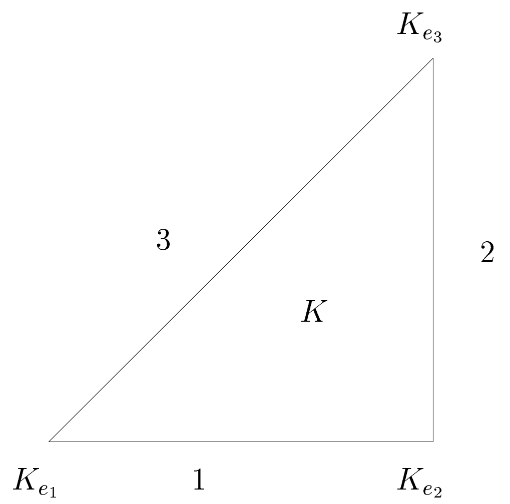

Figure 16: Exemple de numrotation locale des artes et des sommets

Ensuite, il y a une procdure qui partir du tableau $iaret$, pour chaque arte "physique" calcule les numros du ou des triangles auxquels elle appartient ainsi que sa numrotation locale dans les triangles. Elle possde donc en sortie un tableau $iaret_2$ ayant 5 colonnes et n_{max} lignes. Les artes ne sont ici comptes qu'une seule fois et leur numro est le numro global de l'arte physique dans le maillage. Elles corespondent donc aux vraies artes physiques du maillage.

L'avant-dernire procdure de dfinition du maillage calcule partir d'un numro de triangle les numros globaux des trois artes de ce triangle ainsi que le numro local de chacune de ces artes dans le triangle. Elle possde en sortie un tableau tri ayant n_{cell} lignes et 6 colonnes. Les numros globaux des artes sont mis dans les colonnes impaires et sont suivis immdiatement dans les colonnes paires de leurs numros locaux.

Enfin, la dernire calcule les normales aux artes, chaque normales tant orientes vers l'extrieur et met le rsultat dans un tableau $normal$. Il est noter que l'orientation d'une normale dpend du triangle auquel elle appartient. C'est pour cela qu'une arte interne est traite diffrement suivant le triangle auquel elle appartient. Le tableau $normal$ possde donc 6 lignes et n_{aret} colonnes pour tenir compte de cette remarque. Chaque normale est repre par ses deux coordonnes dans le plan.

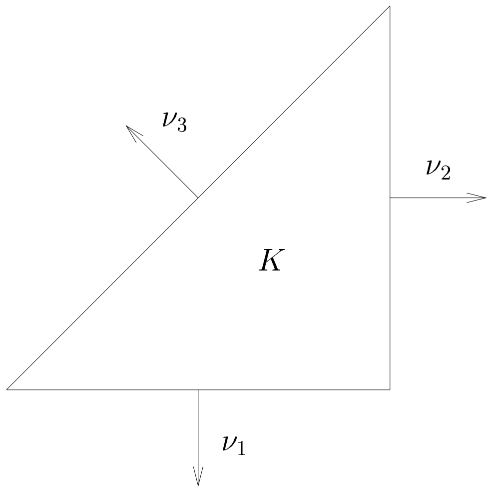

Figure 17: Orientation des normales

Cette dfinition d'un maillage n'est certainement pas optimale dans la gestion de l'espace mmoire de la machine, mais elle est en tout cas trs utile pour la suite du programme.

Ensuite le programme principal possde une procdure qui assemble les matrices A et b dfinies dans la partie **I**. Elle fait bien sr appel des procdures qui calculent sur chaque triangle les matrices L_K et N_K. Ces procdures ne prsentant pas de difficults particulires au niveau de la programmation, je ne vais pas les dtailles ici. Par contre je vais parler de la procdure d'assemblage, comme je l'ai fait dans le cas de la dimension 1. En plus cela montrera l'importance des numrotations globales et locales.

Soit une arte de numro global $k_{aret} \in [1, n_{max}]$. On suppose d'abord que c'est une arte interne. On appelle K_1 et K_2 les deux triangles auxquels elle appartient. On calcule les matrices N_{K_1}, N_{K_2}, L_{K_1} et L_{K_2} relatives aux deux triangles. Pour simplifier on suppose

$$N_{K_i} = \begin{bmatrix} \alpha_i^1 & \beta_i^1 & \gamma_i^1 \\ \alpha_i^2 & \beta_i^2 & \gamma_i^2 \\ \alpha_i^3 & \beta_i^3 & \gamma_i^3 \end{bmatrix} \qquad L_{K_i} = \begin{bmatrix} l_i^1 \\ l_i^2 \\ l_i^3 \end{bmatrix}$$

On note j_1 et j_2 les deux numros locaux de l'arte dans K_1 et K_2 ($(j_1, j_2) \in [1,3]$), $U_{K_i} = [u_i^1, u_i^2, u_i^3]^T$ les coordonnes de u_h dans K_i. La relation (10) s'crit alors

$$[N_{K_1} \cdot U_{K_1}]_{j_1} + [N_{K_2} \cdot U_{K_2}]_{j_2} = L_{K_1,j_1} + L_{K_2,j_2}$$

c'est--dire

$$\alpha_1^{j_1}u_1^1 + \beta_1^{j_1}u_1^2 + \gamma_1^{j_1}u_1^3 + \alpha_2^{j_2}u_2^1 + \beta_2^{j_2}u_2^2 + \gamma_2^{j_2}u_2^3 = l_1^{j_1} + l_2^{j_2}$$

L'algorithme devient alors clair: pour k_{cell} variant de 1 n_{cell}, on calcule les matrices $N_{k_{cell}}$ et $L_{k_{cell}}$. On initialise deux matrices intermdiaires C et q. On remplit C et q de la manire suivante:

- si k_aret est une arte externe, alors
$$\left[\begin{array}{l} C(k\_aret, k\_aret) = 1 \\ b(k\_aret) = u(m_{k\_aret}) \end{array}\right.$$

- sinon
$$\left[\begin{array}{l} \text{pour i variant de 1 3} \\ \quad \text{si } tri(k\_cell, i+1) = 1 \\ \qquad C(tri(k\_cell, i), tri(k\_cell, i) : tri(k\_cell, i) + 2) = N_K(1, 1:3) \\ \quad \text{si } tri(k\_cell, i+1) = 2 \\ \qquad C(tri(k\_cell, i), tri(k\_cell, i) - 1 : tri(k\_cell, i) + 1) = N_K(2, 1:3) \\ \quad \text{si } tri(k\_cell, i+1) = 3 \\ \qquad C(tri(k\_cell, i), tri(k\_cell, i) - 2 : tri(k\_cell, i)) = N_K(3, 1:3) \\ \quad b(tri(k\_cell, i)) = L_K(tri(k\_cell, i+1)) \end{array}\right.$$

On termine la procdure en effectuant $A = A + C$, $b = b + q$.

Ensuite le programme rsoud le systme $A \cdot U = b$, l'aide par exemple de la mthode du gradient conjugu. On dispose ainsi maintenant des coordonnes de u_h suivant la base $(p_a(x))_{a\in A}$. On peut donc passer aux calculs d'erreurs. Regardons tout d'abord la norme L^2. On rappelle que

$$u_h(x) = \sum_{k\_aret=1}^{nmax} U(k\_aret)p_{k\_aret}(x).$$

La norme L^2 de $u - u_h$ peut alors tre calcule de la manire suivante

$$|u - u_h|_{L^2} = \sum_{i=1}^{nmax} \sum_{j=1}^{nmax} U(i)U(j) < p_i(x), p_j(x) >$$

o $< ., . >$ dsigne le produit scalaire dans $L^2([0,1]*[0,1])$. Ainsi la procdure qui calcule la norme L^2 de $u - u_h$ comporte essentiellement le calcul des produits scalaires des fonctions de bases de V_h.

J'ai ensuite regard la qualit de la norme infinie de $u - u_h$, tout en sachant qu'il est possible d'en dfinir plusieurs sortes. J'en ai ici regard trois. Pour une arte a, on note toujours m_a son milieu. La premire norme que j'ai regard est la suivante

$$|u - u_h|_{L_1^\infty} = \sup_{a \in A} |u(m_a) - u_h(m_a)|$$

c'est--dire qu'elle regarde la qualit de $u - u_h$ au milieu de chaque arte du maillage. Une des questions importantes tait de voir s'il existait une diffrence de qualit de la valeur de $u - u_h$ sur les artes obliques d'une part et sur les artes horizontales et verticales d'autre part. En effet, si l'on regarde les coefficients de A au milieu des artes obliques, on s'aperçoit que le schma n'est pas consistant au sens diffrences finies avec le laplacien. C'est--dire que l'on retrouve le laplacien discret 5 points pour les artes obliques et seulement une drive seconde 1D pour les horizontales ou verticales. On se demande donc s'il en rsulte une perte de prcision du schma pour ces artes. Notons A_{obli} l'ensemble des artes obliques et A_{hv} l'ensemble des artes horizontales ou verticales. J'ai donc regard les deux autres normes suivantes

$$|u - u_h|_{L_2^\infty} = \sup_{a \in A_{obli}} |u(m_a) - u_h(m_a)|$$

$$|u - u_h|_{L_3^\infty} = \sup_{a \in A_{hv}} |u(m_a) - u_h(m_a)|.$$

Un autre problme intressant tait de regarder la convergence de p_h vers ∇u. J'ai donc l aussi crit des routines qui calculent les normes $|\nabla u - p_h|_{L^2}$, $|\nabla u - p_h|_{L_1^\infty}$, $|\nabla u - p_h|_{L_2^\infty}$, $|\nabla u - p_h|_{L_3^\infty}$. Tous ces rsultats sont regroups ci-dessous.

III.2 Rsultats

Regardons d'abord la fonction $f(x, y) = (2 * (4\pi)^2) * sin(2\pi x) * sin(2\pi y)$. Dans le tableau ci dessous sont regroupes quelques valeurs concernant les diffrentes normes de $u - u_h$.

h	$triangles$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$\|u-u_h\|_{L_1^\infty}$	$\|u-u_h\|_{L_2^\infty}$	$\|u-u_h\|_{L_3^\infty}$
$\frac{1}{4}$	32	0.111	0.219	0.219	0.164
$\frac{1}{8}$	128	0.030	0.072	0.072	0.049
$\frac{1}{12}$	288	0.0133	0.033	0.033	0.023
$\frac{1}{16}$	512	$7.5e^{-3}$	0.019	0.019	0.013
$\frac{1}{20}$	800	$4.8e^{-3}$	0.012	0.012	$8.3e^{-3}$
$\frac{1}{24}$	1152	$3.3e^{-3}$	$8.5e^{-3}$	$8.5e^{-3}$	$5.8e^{-3}$
$\frac{1}{26}$	1352	$2.9e^{-3}$	$7.2e^{-3}$	$7.2e^{-3}$	$4.9e^{-3}$
$\frac{1}{28}$	1568	$2.5e^{-3}$	$6.3e^{-3}$	$6.3e^{-3}$	$4.3e^{-3}$

Pour calculer l'ordre du schmas pour les diffrentes normes, j'ai l aussi effectu des calculs de rgression linaire. Je prcise qu'ils ont t raliss avec plus de points que ceux rapports ici et avec une plus grande prcision numrique.

On suppose donc que

$$\begin{cases} |u-u_h|_{L^2} \leq C_1 h^{\alpha} \\ |u-u_h|_{L_1^{\infty}} \leq C_2 h^{\beta} \\ |u-u_h|_{L_2^{\infty}} \leq C_3 h^{\gamma} \\ |u-u_h|_{L_3^{\infty}} \leq C_4 h^{\delta} \end{cases}$$

Numriquement, on trouve

$$\begin{cases} \alpha = 1.971 \\ \beta = 1.599 \\ \gamma = 1.599 \\ \delta = 1.906 \end{cases}$$

Les nuages de points forms par les points qui ont les coordones suivantes $(Ln(h), Ln(|u-u_h|_{L^2}))$, $(Ln(h), Ln(|u-u_h|_{L_1^{\infty}}))$, $(Ln(h), Ln(|u-u_h|_{L_2^{\infty}}))$ et $(Ln(h), Ln(|u-u_h|_{L_1^{\infty}}))$ sont bien assimilables des droites d'quations respectives

$$\begin{cases} y = (1.997) * x - 0.570 \\ y = (1.599) * x - 0.634 \\ y = (1.599) * x - 0.634 \\ y = (1.906) * x - 0.914 \end{cases}$$

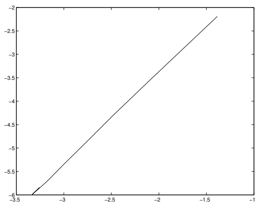

Figure 18: Courbe de linarisation pour $|u-u_h|_{L^2}$

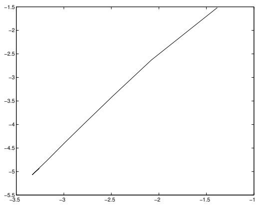

Figure 19: Courbe de linarisation pour $|u-u_h|_{L_1^{\infty}}$

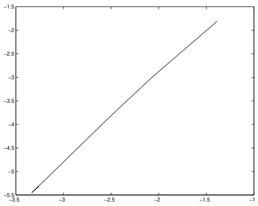

Figure 20: Courbe de linarisation pour $|u - u_h|_{L^\infty_3}$

Voici maintenant quelques graphiques correspondant diffrentes valeurs de h, chaque graphique comportant la fois la solution exacte du problme et la solution approche.

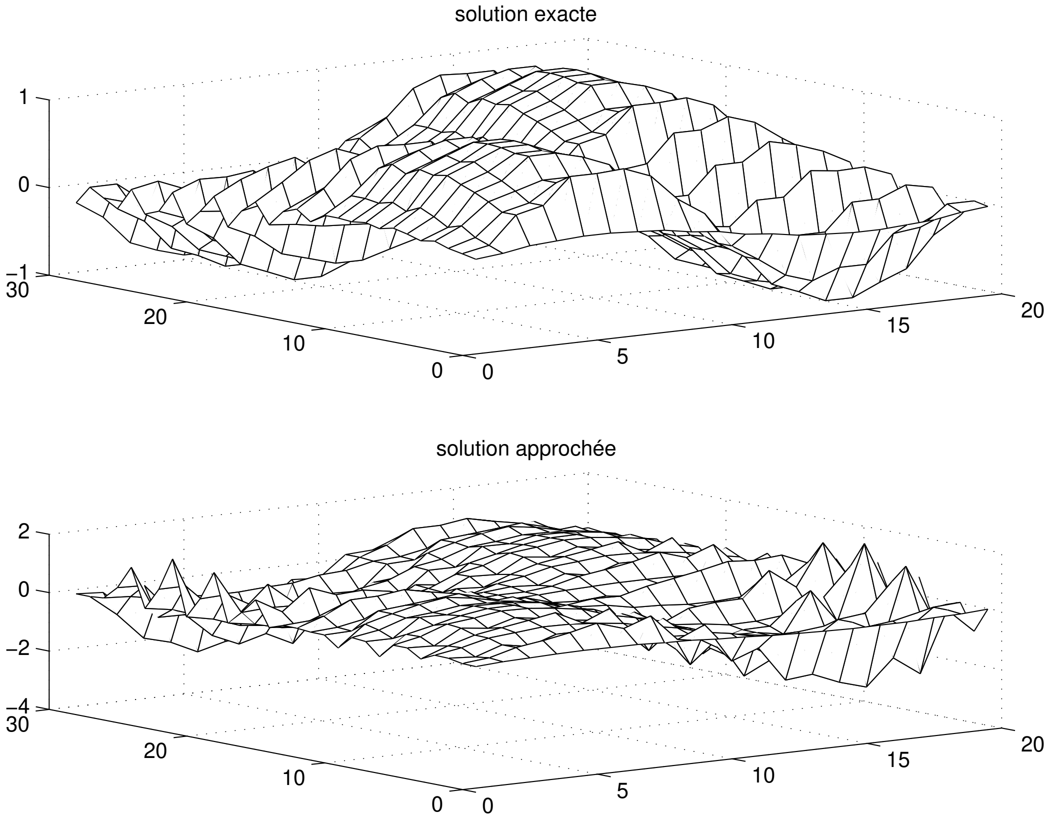

Figure 21: $f(x,y) = (2 * (4\pi)^2) * sin(2\pi x) * sin(2\pi y)$, 200 triangles

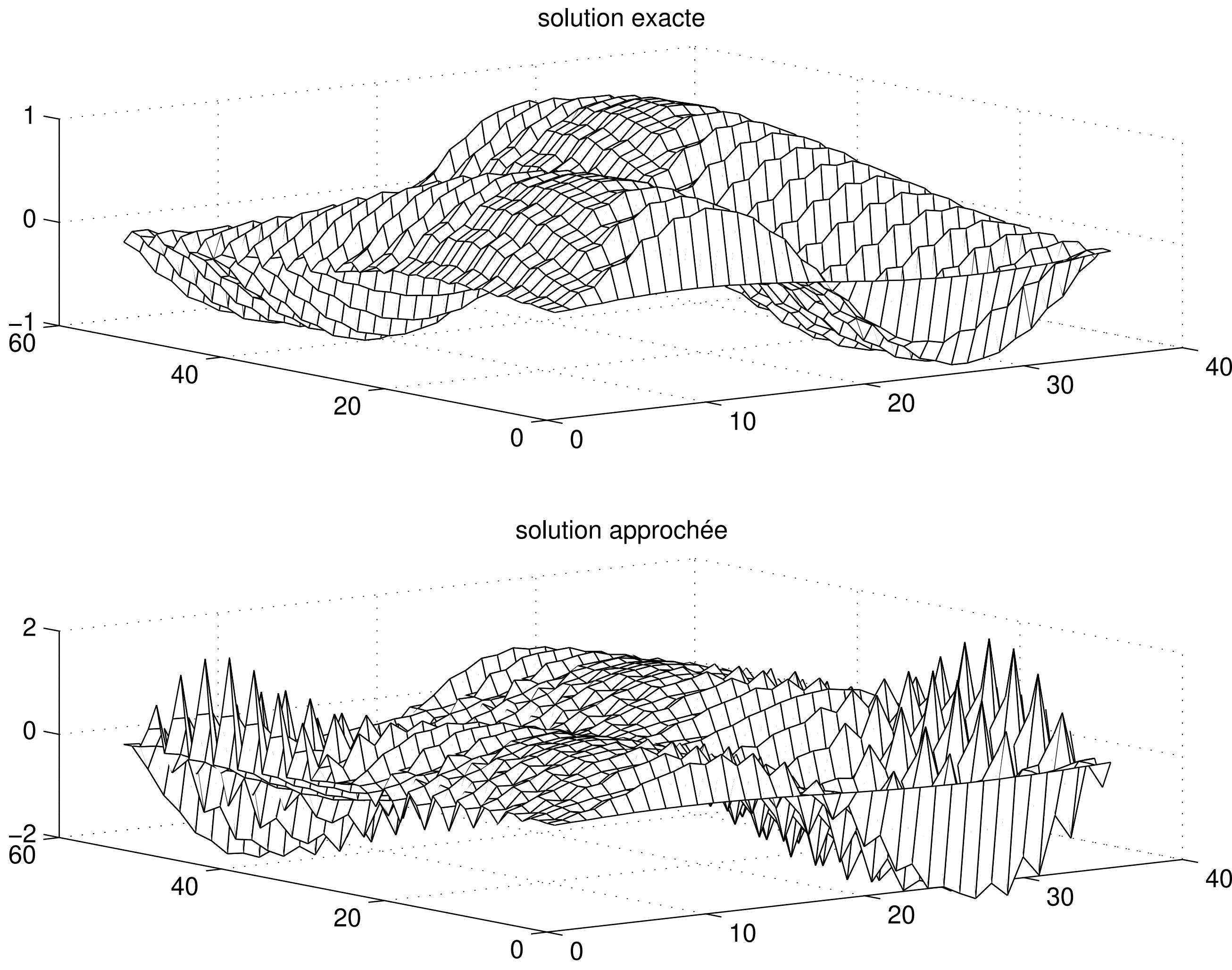

Figure 22: $f(x,y) = (2*(4\pi)^2)*sin(2\pi x)*sin(2\pi y)$, 648 triangles

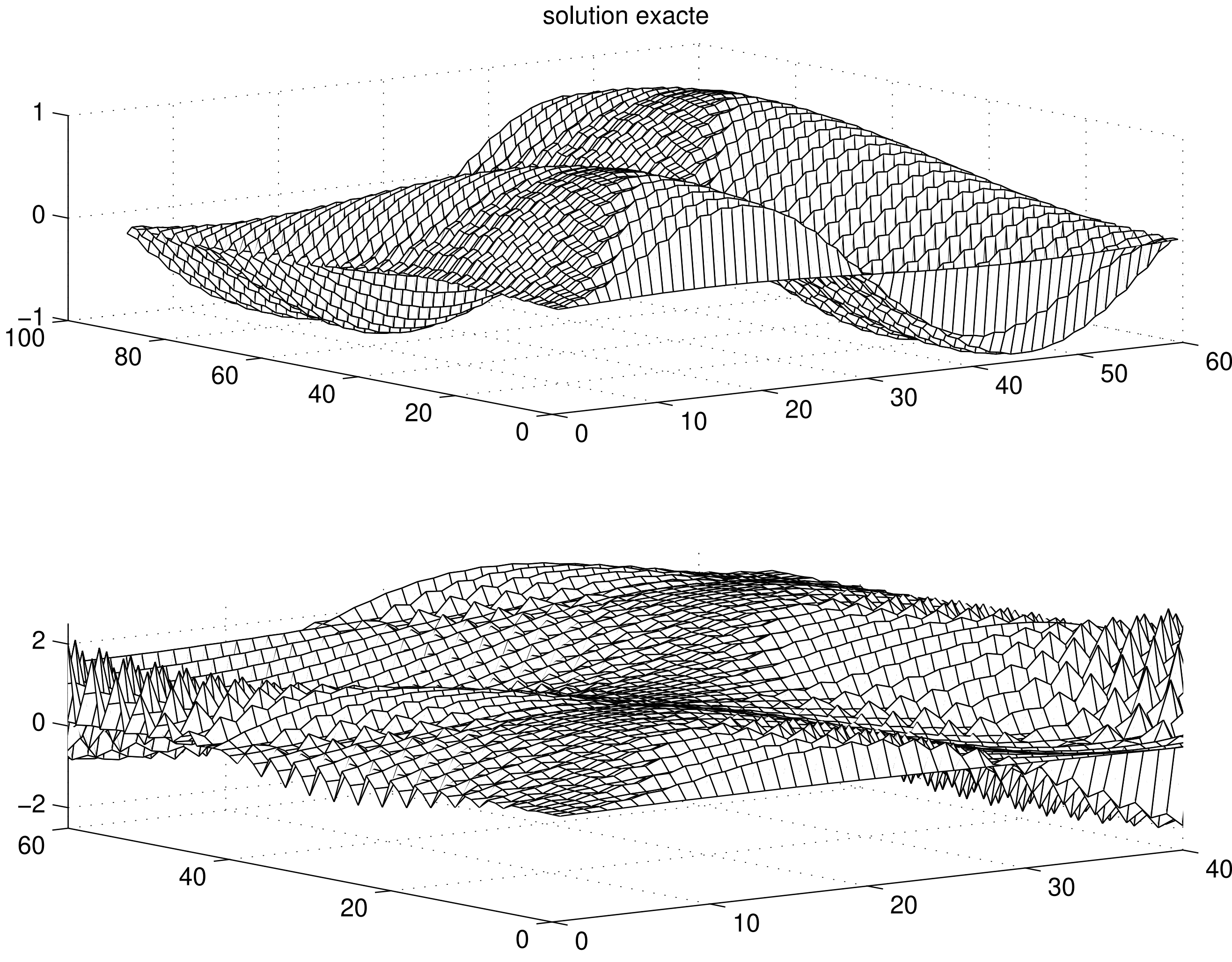

Figure 23: $f(x,y) = (2*(4\pi)^2)*sin(2\pi x)*sin(2\pi y)$, 1800 triangles

Occupons-nous maintenant de la convergence de p_h vers ∇u.

h	$triangles$	$\|\nabla u - p_h\|_{L^2}$	$\|\nabla u - p_h\|_{L_1^\infty}$	$\|\nabla u - p_h\|_{L_2^\infty}$	$\|\nabla u - p_h\|_{L_3^\infty}$
$\frac{1}{4}$	32	1.961	3.253	1.648	3.253
$\frac{1}{8}$	128	1.001	2.232	0.456	2.232
$\frac{1}{12}$	288	0.668	1.574	0.204	1.537
$\frac{1}{16}$	512	0.503	1.203	0.115	1.203
$\frac{1}{20}$	400	0.403	0.975	0.074,	0.975
$\frac{1}{24}$	1152	0.336	0.819	0.051	0.819
$\frac{1}{26}$	1352	0.310	0.684	0.035	0.684
$\frac{1}{28}$	1568	0.2878	0.705	0.038	0.705

Supposons encore que

$$\begin{cases} |\nabla u - p_h|_{L^2} \leq C_1 h^\alpha \\ |\nabla u - p_h|_{L_1^\infty} \leq C_2 h^\beta \\ |\nabla u - p_h|_{L_2^\infty} \leq C_3 h^\gamma \\ |\nabla u - p_h|_{L_3^\infty} \leq C_4 h^\delta \end{cases}$$

Les rsultats numriques assurent

$$\begin{cases} \alpha = 1.013 \\ \beta = 0.842 \\ \gamma = 1.940 \\ \delta = 0.842 \end{cases}$$

Les nuages de points sont aussi assimilables des droites d'quations respectives

$$\begin{cases} y = (1.013) * x + 2.053 \\ y = (0.842) * x + 2.490 \\ y = (1.940) * x + 3.199 \\ y = (0.842) * x + 2.490 \end{cases}$$

On peut maintenant regarder les rsultats d'un peu plus prs. Pour ce qui est de la norme L^2 de $u - u_h$, on trouve que le schma est d'ordre trs lgrement infrieur deux. La diffrence pourrait venir des multiples approximations qui ont t ncessaires pour aboutir ce rsultat. En revanche, pour $\nabla u - p_h$, on trouve bien que l'on a un schma d'ordre 1, ce qui est rassurant car J.P.Croisille et B.Courbet avait bien montr dans leur article l'estimation suivante

$$|\nabla u - p_h|_{L^2} \leq Ch|u|_{2,\Omega}.$$

La norme L^∞ pour $u - u_h$ nous rserve quant elle quelques surprises. En effet, s'il est intressant de noter que pour la norme L_1^∞ le schma est d'ordre strictement suprieur 1 et mme qu'il serait au moins d'ordre $\frac{3}{2}$, il n'en est pas moins surprenant que la norme L_3^∞ apparait bien meilleure que la norme L_2^∞ tant au niveau qualitatif (c'est--dire en valeur relative) qu'au niveau de l'ordre du schma. La tendance s'inverse pour $\nabla u - p_h$, la norme L_2^∞ tant ici bien meilleure que la norme L_3^∞.

Voyons ce qu'il en est pour une autre fonction f. Prenons

$$f(x, y) = -2 * x^2 - 2 * y^2.$$

Ici le problme pos est un peu diffrent car on rsoud

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

h	$triangles$	$\|u-u_h\|_{L^2}$	$\|u-u_h\|_{L_1^\infty}$	$\|u-u_h\|_{L_2^\infty}$	$\|u-u_h\|_{L_3^\infty}$
$\frac{1}{4}$	32	$3.2e^{-3}$	$6.8e^{-3}$	$5.7e^{-3}$	$6.8e^{-3}$
$\frac{1}{8}$	128	$9.4e^{-4}$	$2.7e{-}3$	$1.8e{-}3$	$2.7e^{-3}$
$\frac{1}{12}$	288	4.3^{-4}	$1.3e^{-3}$	$9.1e^{-4}$	$1.3e^{-3}$
$\frac{1}{16}$	512	$2.5e^{-4}$	$8.0e^{-4}$	$5.4e^{-4}$	$8.0e^{-4}$
$\frac{1}{20}$	400	$1.6e^{-4}$	$5.3e^{-4}$	$3.5e^{-4}$	$5.3e^{-4}$
$\frac{1}{24}$	1152	$1.1e{-}4$	$3.8e^{-4}$	$2.5e^{-4}$	$3.8e^{-4}$
$\frac{1}{26}$	1352	$9.4e^{-5}$	$3.2e^{-4}$	$2.2e^{-4}$	$3.2e^{-4}$
$\frac{1}{28}$	1568	$8.2e^{-5}$	$2.8e^{-4}$	$1.9e^{-4}$	$2.8e^{-4}$

En supposant

$$\left\{\begin{array}{l} |u-u_h|_{L^2} \leq C_1 h^\alpha \\ |u-u_h|_{L_1^\infty} \leq C_2 h^\beta \\ |u-u_h|_{L_2^\infty} \leq C_3 h^\gamma \\ |u-u_h|_{L_3^\infty} \leq C_4 h^\delta \end{array}\right.$$

on obtient par un calcul de rgression linaire

$$\begin{cases} \alpha = 1.912 \\ \beta = 1.701 \\ \gamma = 1.767 \\ \delta = 1.701 \end{cases}$$

Les diffrents nuages de points sont encore linarisables, les droites ayant pour quations

$$\begin{cases} y = (1.912) * x - 3.024 \\ y = (1.701) * x - 2.461 \\ y = (1.767) * x - 2.683 \\ y = (1.701) * x - 2.461 \end{cases}$$

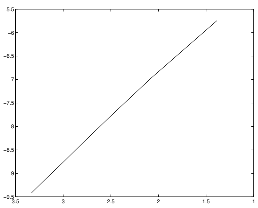

Figure 24: Courbe de linarisation pour $|u - u_h|_{L^2}$

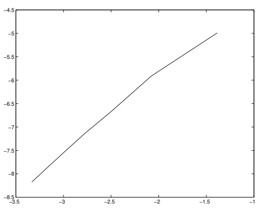

Figure 25: Courbe de linarisation pour $|u - u_h|_{L_1^\infty}$

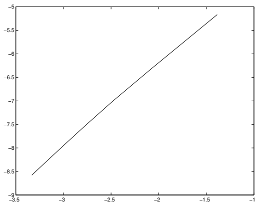

Figure 26: Courbe de linarisation pour $|u - u_h|_{L_2^\infty}$

Voici maintenant les courbes obtenues.

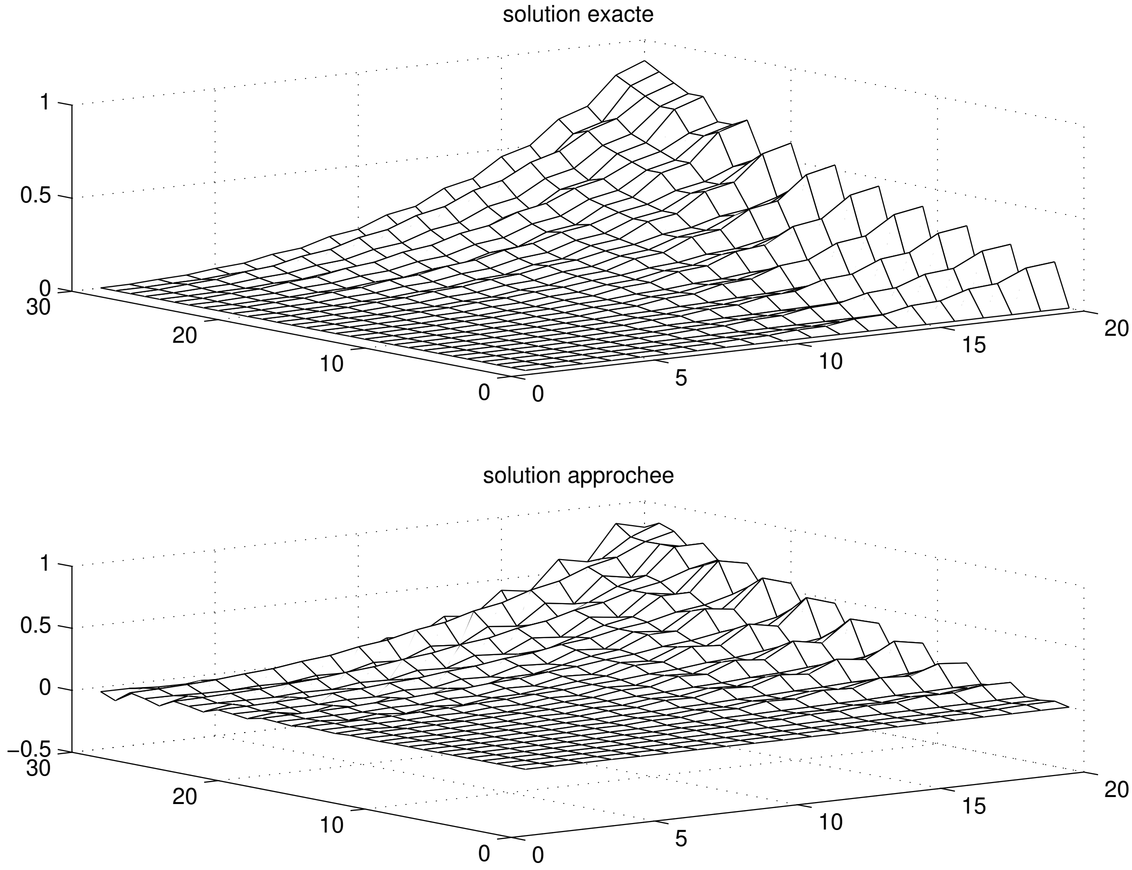

Figure 27: $f(x) = -2 * x^2 - 2 * y^2$, 200 triangles

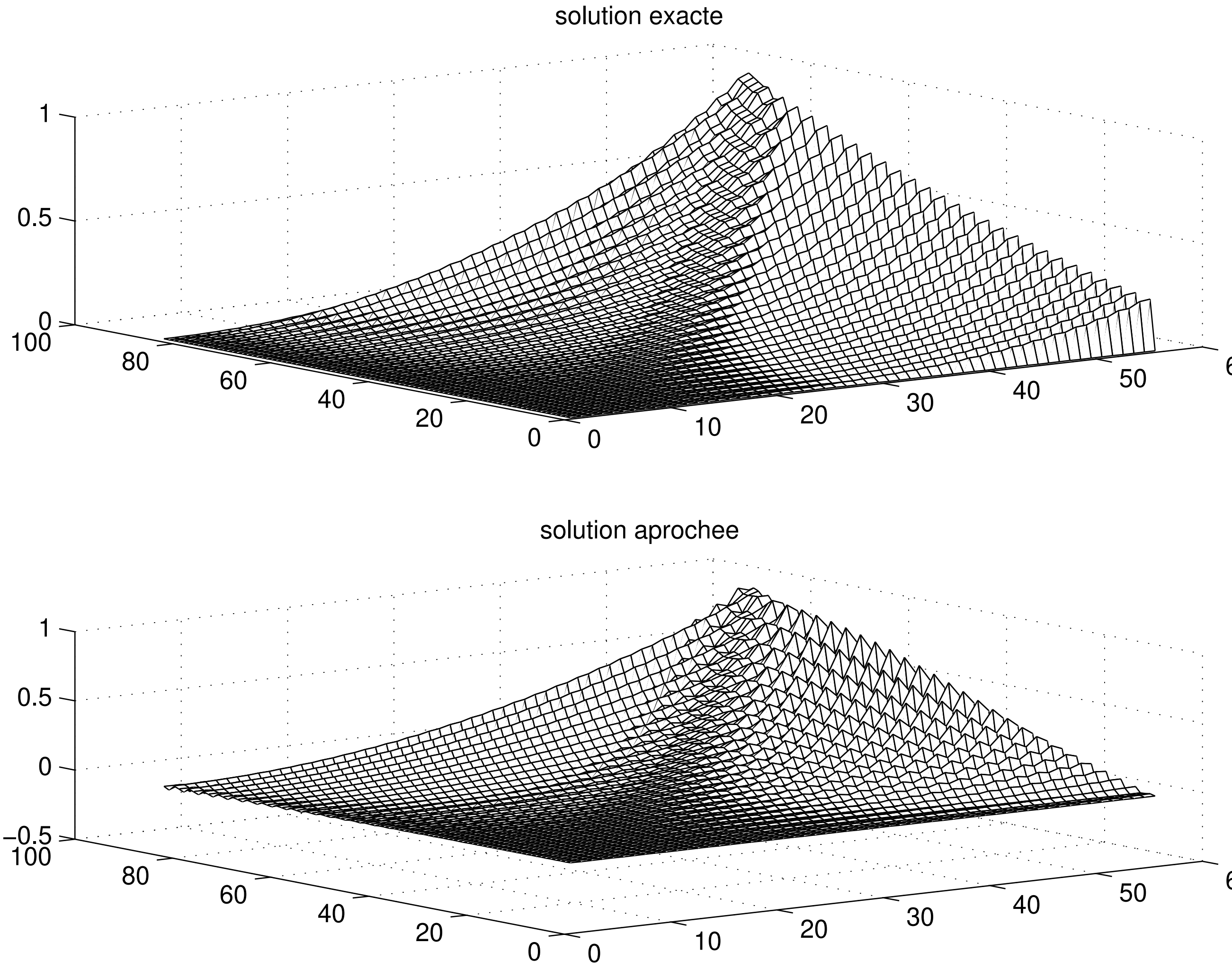

Figure 28: $f(x) = -2 * x^2 - 2 * y^2$, 1568 triangles

Les rsultats pour la convergence de p_h vers ∇u sont regroups dans le tableau ci-dessous.

h	$triangles$	$\|\nabla u - p_h\|_{L^2}$	$\|\nabla u - p_h\|_{L_1^\infty}$	$\|\nabla u - p_h\|_{L_2^\infty}$	$\|\nabla u - p_h\|_{L_3^\infty}$
$\frac{1}{4}$	32	0.144	0.424	0.135	0.424
$\frac{1}{8}$	128	$7.38e^{-2}$	0.232	$8.4e^{-2}$	0.232
$\frac{1}{12}$	288	$4.9e^{-2}$	0.159	$5.96e^{-2}$	0.159
$\frac{1}{16}$	512	$3.72e^{-2}$	0.121	$4.61e^{-2}$	0.121
$\frac{1}{20}$	400	$2.98e^{-2}$	$9.73e^{-2}$	$3.75e{-}2$	$9.73e^{-2}$
$\frac{1}{24}$	1152	$2.48e^{-2}$	$8.15e^{-2}$	$3.17e^{-2}$	$8.15e{-}2$
$\frac{1}{26}$	1352	$2.29e^{-2}$	$7.54e^{-2}$	$2.93e^{-2}$	$7.54e^{-2}$
$\frac{1}{28}$	1568	$2.13e^{-2}$	$7.01e^{-2}$	$2.74e^{-2}$	$7.01e^{-2}$

En crivant une dernire fois

$$\begin{cases} |\nabla u - p_h|_{L^2} \leq C_1 h^\alpha \\ |\nabla u - p_h|_{L_1^\infty} \leq C_2 h^\beta \\ |\nabla u - p_h|_{L_2^\infty} \leq C_3 h^\gamma \\ |\nabla u - p_h|_{L_3^\infty} \leq C_4 h^\delta \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{cases} \alpha = 0.988 \\ \beta = 0.938 \\ \gamma = 0.851 \\ \delta = 0.851 \end{cases}$$

Les droites qui linarisent les nuages de points obtenus sont

$$\begin{cases} y = (0.988) * x - 0.557 \\ y = (0.938) * x + 0.478 \\ y = (0.851) * x - 0.740 \\ y = (0.938) * x + 0.478 \end{cases}$$

Venons-en maintenant aux conclusions gnrales que l'on peut tires de toute cette tude. On note tout d'abord que les rsultats obtenus avec la deuxime fonction f sont "meilleurs " au niveau qualitatif que ceux obtenus avec la premire. Cela peut venir du fait que la formule de Gauss utilise pour calculer les intgrales est exacte pour les polynmes de degr 2. La valeur numrique $\alpha = 1.912$ cense reprsenter l'ordre du schma pour la convergence de u_h vers u est assez dcevante: elle laisse supposer, vu la rgularit de la fonction f choisie, que le schma ne serait finalement pas d'ordre 2 en dimension 2. Par contre, le fait que l'on trouve $\alpha = 0.987 < 1$ pour la convergence de p_h vers ∇u permet de laisser planer un lger doute sur le bien-fond de cette conclusion.

La bonne nouvelle concerne la norme L^∞ puisque l'ordre pour la norme L_1^∞ apparait bien suprieur $\frac{3}{2}$ ce qui assurerait au schma une trs bonne efficacit. On peut noter pour finir que la norme L_2^∞ est meilleure que la norme L_3^∞ dans tous les cas de figure sauf pour la premire fonction f au niveau de la convergence de u_h vers u. Ce cas qui apparait un peu pathologique ne permet malheureusement pas de conclure la question pose plus haut concernant les artes obliques d'une part et les artes verticales et horizontales d'autre part.

CONCLUSION

Un des buts avous de ce stage tait de me faire dcouvrir le monde du numrique. En effet, c'tait pour moi la premire exprience dans ce domaine. C'est pour cela que J.P.croisille m'a conseill d'utiliser Matlab, pour simplifier la programmation. Je dois dire que l'exprience est trs enrichissante et m'a permis de constater, contrairement ce que je croyais, que la partie mathmatique tient la plus grande place dans la rsolution de ce problme et que l'criture du programme n'est en fait qu'un simple recopiage de ce qui a t fait dans l'tude thorique. Un des principes de bases de l'informatique tant qu'un programme ne fonctionne jamais du premier coup, j'ai regrt d'avoir du passer tant de temps debbuger mes programmes, ce qui m'a empch d'approfondir un peu plus la partie thorique de ce stage. J'aurais aim pouvoir rflchir un peu plus sur le cas de la dimension 1 pour, soit trouver des exemples de fonctions f pour lesquelles le schma n'est pas d'ordre 2, soit chercher des lments de dmonstration prouvant qu'il est effectivement d'ordre 2.

[2]

BIBLIOGRAPHIE:

_Finite Volume Box Schemes on Triangular Meshes par J.P.Croisille et B.Courbet.

_A Mixed Finite Element Method For 2^{nd} Order Elliptic Problems par P.A.Raviart et J.M.Thomas.