Oscillations fortes sur un champ linéairement dégénéré

Christophe CHEVERRY [*], Olivier GUES [†], Guy METIVIER [‡]

March 7, 2002

Table des matières

[*]IGD, Université de Lyon I, 99 622 Villeurbanne
[†]Université de Nice-Sophia Antipolis, 06 108 Nice
[‡]IRMAR, Université de Rennes I, 35 042 Rennes

1 Introduction

Des résultats généraux ont vu le jour ces dernières années en matière d'optique géométrique non linéaire (voir par exemple [19]). Lorsque les équations possèdent des structures particulières, comme c'est souvent le cas pour les modèles issus de la physique, les équations de transport, au lieu d'être non-linéaires, sont linéaires. C'est le phénomène appelé transparence dans [17]. Pour atteindre des régimes non linéaires, ont doit soit augmenter les temps (ou distances) de propagation, soit augmenter les amplitudes au delà des régimes considérés dans les théorèmes généraux.

Pour des systèmes semi-linéaires, ce programme a connu de sérieuses avancées c.f les travaux de Joly-Métivier-Rauch [17] sur les équations de Maxwell-Bloch, de Colin-Lannes [6] pour la mécanique des fluides, et de Jeanne [16] pour les équations de Yang-Mills.

Pour les systèmes de lois de conservation, l'équation de propagation générale pour les enveloppes de paquets d'onde est de la forme :

$$\partial_t u + c\partial_x u + \gamma \partial_\theta u^2 = 0\,.$$

Le coefficient d'auto-interaction γ, s'annule exactement quand l'oscillation est associée à un mode linéairement dégénéré. La plupart des systèmes physiques ont des valeurs propres linéairement dégnérées et la question de l'optique géométrique transparente est donc extrèmement naturelle. Le but de cet article est d'aborder ce problème, dans le contexte des systèmes multi-dimensionnels.

On se place en dimension d d'espace et on considère le système

$$\partial_t f_0(u) \,+\, \sum_{j=1}^{d} \,\partial_{x_j} f_j(u) \,=\, 0 \tag{1.1}$$

où les flux f_j sont définis et C^∞ sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que ce système admet une entropie strictement convexe. On se donne une solution $\bar{u}_0$ de l'équation (1.1). On cherche des familles de solutions paramétrées par $\varepsilon \in]0,1]$, ayant un développement asymptotique de la forme :

$$u^\varepsilon(t,x) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \dot{u}^\varepsilon_a(t,x) \,=\, \bar{u}_0(t,x) \,+\, \sum_{n=n_0}^{n_1} \,(\sqrt{\varepsilon})^n \; u_n\Big(t,x,\frac{\varphi_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon}\Big) \tag{1.2}$$

où $n_0 \leq n_1$ sont deux entiers. Le paramètre ε joue le rôle d'une longueur d'onde. Le terme principal des oscillations est d'amplitude en $O\big(\varepsilon^{n_0/2}\big)$

pour une fréquence en $O(\varepsilon^{-1})$. Le cas $n_0 = 2$ est le régime général de l'optique géométrique dite *faiblement non linéaire.* Pour $n_0 = 1$, on parlera d'oscillations *fortes.* Pour $n_0 = 0$, on atteint le domaine des oscillations de *grande amplitude.*

Pour un système quelconque, les oscillations de faible amplitude ($n_0 = 2$) se propagent sur n'importe quel mode. Ce résultat est établi dans les articles [12], [13] et [20]. Appliqué aux modes associés à des valeurs propres linéairement dégénérées, il conduit à des équations de transport qui sont linéaires, donnant lieu au phénomène de *transparence.* Dans le cas d'ocillations associée à des modes linéairement dégénérés, on s'attend alors à pouvoir augmenter la force des oscillations.

En dimension un d'espace, le problème de l'existence et la stabilité d'oscillations de grande amplitude ($n_0 = 0$) associées à des modes linéairement dégénérés a été étudié par W.E [8] pour la dynamique des gaz 1D, puis par A.Heibig [15] et B.Sévennec [26] dans un cadre général. Ces contributions sont aujourd'hui englobées dans un énoncé obtenu par A.Corli et O.Guès [7] qui se situe dans le cadre plus général des solutions stratifiées.

Par ailleurs, en dimension quelconque, associées à des modes linéairement dégénérés, on dispose toujours de solutions particulières de (1.1) sous la forme d'ondes simples

$$u(t,x) = v\big(h(\xi \cdot x - \sigma t)\big),$$

avec v de classe C^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ξ et σ bien choisis et h une fonction arbitraire de $C^1(\mathbb{R}; I)$ (cf [21]). On peut choisir h périodique de période ε, obtenant ainsi des oscillations de grande amplitude associées à la phase $\varphi = \xi \cdot x - \sigma t$. La question est alors d'étudier la stabilité de telles solutions.

Dans ce travail, on aborde de façon systématique en dimension $d > 1$ la construction de solutions ayant un développement asymptotique de la forme (1.2), avec $n_0 = 1$. Les résulats vont principalement dans deux directions.

• En premier lieu, on montre que, *en général, le régime pertinent de l'optique géométrique associée à un champ linéairement dégénéré est celui des oscillations fortes.* Pour cela, par une méthode BKW, on établit l'existence de solutions approchées (1.2) avec $n_0 = 1$, polarisées sur un mode linéairement dégénéré (théorème 3.1). Ce sont les conditions de transparence résultant de l'hypothèse de dégénérescence linéaire, qui permettent de dévisser la cascade des équations BKW en une suite de problèmes bien posés résolus par récurrence. Le régime des oscillations fortes donne donc toujours lieu à des équations BKW bien posées, au contraire de celui des oscillations de grandes amplitudes comme montré par D. Serre [24] dans le cadre de la dynamique des gaz isentropiques, pour les oscillations de grande amplitude polarisées sur la vitesse.

D'autre part, l'évolution du profil principal u_1^* est en général couplée à celle de la moyenne $\langle u_2 \rangle$. Le système $(\mathscr{Z}_1)$ qui gouverne cette évolution est non linéaire, ce qui montre bien que le premier régime non linéaire est, en général, celui des oscillations fortes.

• La question est ensuite de savoir si les solutions approchées u_a^ε construites par la méthode BKW sont effectivement asymptotes à des solutions exactes sur un intervalle de temps $[0, T]$ uniforme en ε. C'est la question de la *stabilité* des solutions approchées. La discussion porte d'abord sur le linéarisé $\mathcal{L}_c$ de (1.1) autour d'une solution approchée u_a^ε. Ce linéarisé contient des termes singuliers en ε^{-1} et en $\varepsilon^{-1/2}$ qui font que l'hyperbolicité ne suffit pas à assurer la validité d'estimations à priori uniformes en ε.

En dimension $d = 1$, la stabilité est obtenue en utilisant seulement l'existence d'un *bon symétriseur* cf [7], [15], [24]. En dimension $d > 1$, cela ne suffit pas à garantir la stabilité, comme le montre la dynamique des gaz. L'existence d'un bon symétriseur n'empèche pas *les perturbations dans des directions transverses à la phase φ de donner lieu à des instabilités fortes de type Rayleigh* cf [10], [11]. En fait *il semble que ce phénomène soit de portée générale.*

On organise la discussion de la stabilité en deux parties. Au paragraphe 5, on discute la signification intrinsèque des termes singuliers, ainsi que la mise du linéarisé sous forme canonique. On obtient la stabilité linéaire et non linéaire des solutions BKW sous deux hypothèses. La première est l'existence d'un bon symétriseur. La seconde exige que la valeur propre linéairement dégénérée ne dépende pas de u. La première hypothèse est réaliste au vu des applications mais la seconde est très restrictive.

Dans un deuxième temps, au paragraphe 6, on s'intéresse à la cause des instabilités. Les instabilités sont dues à l'intéraction des oscillations de phase φ avec des oscillations de phase ψ arbitraire. Si l'hypothèse de dégénérescence linéaire de la valeur propre implique que les coefficients d'auto-interaction s'annulent, il n'en est pas de même pour les coefficients d'interaction entre ondes associées à des phases différentes. On est donc amené à faire une analyse de type optique géométrique multi-phases pour le linéarisé $\mathcal{L}_c$ et cette optique là n'a pas de raisons d'être transparente. Par exemple, pour les équations de la dynamique des gaz, l'analyse des oscillations transverses fait apparaître le système linéarisé des équations d'Euler incompressibles, qui donne lieu aux instabilités de Rayleigh (cf [10]). Dans ce cas, l'équation linéarisés $\mathcal{L}_c\dot{u} = 0$ admet des solutions qui croissent exponentiellement en temps, en $e^{\gamma t/\sqrt{\varepsilon}}$. Comme dans [11], ces instabilités linéaires exponentielles donnent lieu à des instabilités non linéaires (cf paragraphe 6 ; voir aussi [17] dans le cas semi-linéaire). Si l'on n'énonce pas de théorème précis dans ce sens, il semble que les conditions qui conduisent à ces instabilités exponentielles sont générales.

L'analyse ci-dessus ne clôt pas la question de la stabilité des solutions BKW. Dans certains cas, le linéarisé peut être faiblement stable (ou faiblement instable), c'est à dire que les solutions de $\mathcal{L}_c\dot{u} = 0$ sont à croissance au plus polynômiale en ε^{-1}. Il est alors naturel de chercher des estimations uniformes en pondérant avec des puissances de ε les différentes composantes du vecteur u. Par un changement d'inconnues singulier en ε, on peut alors espérer se ramener à des équations linéairement et non linéairement uniformément stables pour les nouvelles inconnues. Cette stratégie est effectivement gagnante en dimension d'espace égale à un (cf [7], [15]) ou, dans le cas de équations d'Euler, pour des oscillations u_1 portées uniquement sur l'entropie (cf [4]). L'idée d'utiliser un changement d'inconnues singulier est présentée dans [17] dans le contexte des équations semi-linéaires.

Enfin, les calculs BKW effectués pour les oscillations fortes et l'analyse de stabilité ci-dessus, indiquent quelles sont les contraintes qui permettent d'envisager avec efficacité l'existence d'oscillations de grande amplitude. Les conditions requises portent à la fois sur la structure du système, la polarisation du profil principal des oscillations et sur le choix de la fonction $\bar{u}_0$. Pour la dynamique des gaz, cela revient à considérer des oscillations dont le terme principal est polarisé sur l'entropie uniquement. La construction sous ces hypothèses et l'analyse de solutions (1.2) avec $n_0 = 0$ est l'objet de [4].

Notre article est organisé comme suit. Le paragraphe 2 précise le contexte (équations, notations, définitions, ...). La chapitre 3 regroupe les résultats principaux. Le paragraphe 4 se rapporte à la construction des solutions approchées. Les parties 5 et 6 parlent de stabilité et d'instabilité.

2 Le contexte

2.1 Les équations

On considère le système de lois de conservation (1.1). Les flux f_j sont des fonctions C^∞ sur l'ouvert $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que le système est hyperbolique symétrisable dans la direction du temps :

Hypothèse 2.1. *Il existe une matrice $\Sigma_0(u)$ symétrique définie positive, de classe C^∞ sur $\mathcal{U}$ et telle que les d matrices :*

$$\Sigma_j(u) := \Sigma_0(u)\ f_0'(u)^{-1}\ f_j'(u), \qquad j \in \{1, \dots, d\} \tag{2.1}$$

sont symétriques pour tout $u \in \mathcal{U}$.

L'hypothèse 2.1 est satisfaite par de nombreux exemples physiques et en particulier dès que le système admet une entropie strictement convexe [9]. Sous l'hypothèse 2.1, la matrice

$$A(u, \xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j\, f_0'(u)^{-1}\, f_j'(u)$$

possède des valeurs propres qui sont toutes réelles. On en sélectionne une, notée $\lambda(u, \xi)$. On pose $E(u, \xi) := \ker\big(A(u, \xi) - \lambda(u, \xi)\,\mathrm{Id}\big)$.

La plupart des systèmes issus de la physique possèdent une valeur propre linéairement dégénérée (en abrégé l.d.g.) ce qui motive :

Hypothèse 2.2. *La valeur propre λ est linéairement dégénérée et de multiplicité constante κ pour (u, ξ) parcourant $\mathcal{U} \times \mathbb{S}^{d-1}$.*

On a noté $\mathbb{S}^{d-1}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$. L'hypothèse 2.2 impose :

$$\exists\, \kappa \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\, (u, \xi) \in \mathcal{U} \times \mathbb{S}^{d-1} : \quad \dim E(u, \xi) = \kappa. \tag{2.2}$$

$$\forall\, (u, \xi) \in \mathcal{U} \times \mathbb{S}^{d-1}, \quad \forall v \in E(u, \xi) : \quad v \cdot \nabla_u \lambda(u, \xi) = 0\,. \tag{2.3}$$

Pour $\kappa > 1$, il n'est pas nécessaire d'ajouter (2.3) car la relation (2.3) est alors une conséquence de (2.2) (voir Boillat [2]). Un résultat important est que sous l'hypothèse 2.2, pour tout $\xi \neq 0$, le champ de κ-plans $E(\cdot, \xi)$ est intégrable (cf [2], [25]). Il engendre donc un feuillatage noté $\Im_\xi$. Localement, il existe un changement de variables $u \mapsto \Phi_\xi(u) = \widetilde{u} = (z, w) \in \mathbb{R}^{N-\kappa} \times \mathbb{R}^\kappa$ tel que

$$\forall \widetilde{u}\,, \qquad E(\widetilde{u}, \xi) = \{(0, w)\ :\ w \in \mathbb{R}^\kappa\,\}\,. \tag{2.4}$$

Dans toute la suite, on suppose que les hypothèses 1 et 2. sont satisfaites.

2.2 Les phases et les profils

On s'intéresse au régime des oscillations fortes. Le développement asymptotique (1.2) s'écrit

$$u^\varepsilon(t, x) \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} u_a^\varepsilon\big(t, x, \frac{\varphi_\varepsilon}{\varepsilon}\big)\,. \tag{2.5}$$

$$u_a^\varepsilon(t, x, \theta) \;=\; \bar{u}_0(t, x) \;+\; \sum_{n=1}^{n_1} (\sqrt{\varepsilon})^n\ u_n(t, x, \theta)\,. \tag{2.6}$$

On cherche des solutions telles que $\partial_\theta u_1 \not\equiv 0$, qui échappent donc au cadre faiblement non-linéaire traité par O. Guès [12]-[13]. L'objectif de ce paragraphe est de décrire les ingrédients φ_ε, $\bar u_0$ et u_n pour $1 \le n \le n_1$.

Le problème étant hyperbolique, on pourrait s'intéresser à des solutions locales en espace et en temps de (1.1). Néanmoins, pour simplifier, on fera des hypothèses globales en espace. Par vitesse finie de propagation, les résultats locaux s'en déduisent.

- *Les profils.* En (2.6), $\bar u_0(t,x)$ est une solution particulière du système (1.1), définie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ avec $T > 0$:

$$\partial_j f_0(\bar u_0) + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f_j(\bar u_0) = 0, \qquad \text{sur} \quad [0,T] \times \mathbb{R}^d . \tag{2.7}$$

La fonction $\bar u_0$ prend ses valeurs dans un compact de l'ouvert $\mathcal{U}$. Elle est dans l'espace $C_b^\infty(T)$ des fonctions qui sont bornées et dont les dérivées à tout ordre sont bornées sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. Par exemple, on peut choisir $\bar u_0(t,x) = \underline{u}$ constante. Dans toute la suite, la fonction $\bar u_0$ est considérée comme une donnée fixée.

Pour $n \ge 1$, $u_n(t,x,\theta)$ est une fonction des variables lentes $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ et de la variable rapide $\theta \in \mathbb{T} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$. Elle est périodique de période 2π en θ. Elle se sépare en :

$$u_n(t,x,\theta) = \bar u_n(t,x) + u_n^*(t,x,\theta) .$$

On a noté respectivement $\bar u(t,x)$ et $u^*(t,x,\theta)$ la moyenne et l'oscillation de la fonction $u(t,x,\theta)$, qui est périodique en θ. On a :

$\bar u(t,x) \; = \; \langle u \rangle(t,x) \; := \; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u(t,x,\theta)\, d\theta, \qquad u^* \; = \; u - \overline{u}\, .$

Les profils sont cherchés dans des espaces de Sobolev basés sur L^2. Pour s entier, $s > \frac{d+3}{2}$ et $T > 0$, on considère l'espace

$$\mathcal{W}^s(T) := \big\{ u\, ;\; u \in C^j\big([0,T]; H^{s-j}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})\big),\; \forall\, j \in \{0, \dots, s\} \big\} . \tag{2.8}$$

On note H^∞ l'intersection des espace H^s et $\mathcal{W}^\infty(T)$ l'intersection des $\mathcal{W}^s(T)$. On définit des espaces similaires sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ pour des fonctions indépendantes de θ. Pour simplifier, et sans risque de confusion, on notera encore $\mathcal{W}^s(T)$ les espaces correspondants.

La moyenne $\overline{u}_1$ du premier profil u_1 est une solution dans $\mathcal{W}^\infty(T)$ de l'équation linéarisée

$$
\begin{aligned}
f_0'(\bar{u}_0)\,\partial_t\bar{u}_1 \;+\; \sum_{j=1}^{d} f_j'(\bar{u}_0)\,\partial_{x_j}\bar{u}_1 \;+\; (D_u^2 f_0)(\bar{u}_0)(\bar{u}_1,\partial_t\bar{u}_0)& \\
+\; \sum_{j=1}^{d} (D_u^2 f_j)(\bar{u}_0)(\bar{u}_1,\partial_{x_j}\bar{u}_0) \;=\; 0\,.&
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Etant donné une condition initiale dans $H^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'équation (2.9) détermine $\bar{u}_1 \in \mathcal{W}^\infty(T)$.

Les oscillations u_n^* et les moyennes $\overline{u}_{n+1}$ sont, pour $n \geq 1$, déterminés à l'aide d'équations qui seront décrites au cours du paragraphe 4.

- *Les phases.* La phase $\varphi_\varepsilon(t,x)$ se partage en :

$$
\varphi_\varepsilon(t,x) := \varphi(t,x) + \sqrt{\varepsilon}\varphi^1(t,x)
\tag{2.10}
$$

La phase dominante $\varphi(t,x)$ est une fonction C^∞ définie sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, solution de l'équation eikonale :

$$
\partial_t\varphi \;+\; \lambda(\bar{u}_0,\partial_x\varphi) \;=\; 0, \qquad \varphi(0,x) \;=\; \varphi_0(x)\,.
\tag{2.11}
$$

On suppose que $d\varphi \in C_b^\infty(T)$ et qu'elle est non stationnaire :

$$
\exists c>0\,,\quad \forall (t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\,,\quad |\partial_x\varphi(t,x)| \geq c\,.
\tag{2.12}
$$

Par exemple, si $\bar{u}_0$ est une constante $\underline{u}$, on peut choisir pour φ une phase plane

$$
\varphi(t,x) = \underline{\tau}t + \underline{\xi}\cdot x\,,\quad \text{avec}\quad \underline{\xi}\neq 0 \;\text{ et }\; \underline{\tau} = -\lambda(\underline{u},\underline{\xi})\,.
\tag{2.13}
$$

La phase de correction $\varphi^1 \in \mathcal{W}^\infty(T)$ est déterminée par les choix de $\bar{u}_0$, $\bar{u}_1$ et φ. Elle s'obtient par résolution de :

$$
\begin{cases}
\partial_t\varphi^1 + (\partial_x\varphi^1\cdot\nabla_\xi)\lambda(\bar{u}_0,\partial_x\varphi) + (\bar{u}_1\cdot\nabla_u)\lambda(\bar{u}_0,\partial_x\varphi) = 0\,. \\
\varphi^1(0,x) = 0\,.
\end{cases}
\tag{2.14}
$$

Ce choix est justifié au paragraphe 4.3. Il conduit à une phase φ^1 qui est nulle lorsque $\bar{u}_1 = 0$.

Avec (2.10), le développement asymptotique (1.2) s'interprète selon une optique géométrique bi-phase :

$$
\dot{u}^\varepsilon(t,x) \;\sim\; \bar{u}_0(t,x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{\varepsilon})^n\;\tilde{u}_n\Big(t,x,\frac{\varphi^1(t,x)}{\sqrt{\varepsilon}},\frac{\varphi(t,x)}{\varepsilon}\Big)
$$

où les $\tilde{u}_n$ se déduisent des u_n. Cependant, nous ne considérerons pas de tels développements généraux. Au contraire, nous nous ramènerons au cas particulier où $\overline{u}_1 = 0$ et $\varphi^1 = 0$, auquel cas le developpement fait intervenir une seule phase φ indépendante de ε.

2.3 Notations

Ce paragraphe regroupe la plupart des notations qui sont utilisées par la suite. Le lecteur qui s'interroge sur la définition d'une expression peut s'y reporter. On écrit en abrégé :

$$\partial_0 := \partial_t, \qquad \partial_{d+1} := \partial_\theta, \qquad \partial_j := \partial_{x_j}, \qquad 1 \le j \le d\,.$$

On travaille avec les variables éclatées (t, x, θ). On résout :

$$(\mathcal{S}) \qquad \mathcal{S}(u^\varepsilon; \partial_{t,x,\theta})u^\varepsilon = \sum_{j=0}^{d} \Sigma_j(u^\varepsilon)\, \partial_j u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{d} \partial_j \varphi_\varepsilon\, \Sigma_j(u^\varepsilon)\, \partial_\theta u^\varepsilon = 0$$

où les matrices $\Sigma_j(u)$ sont définies en (2.1). Toute solution $u^\varepsilon(t, x, \theta)$ du système $(\mathcal{S})$ fournit une solution $\tilde{u}^\varepsilon(t, x) = u^\varepsilon\big(t, x, \frac{\varphi_\varepsilon}{\varepsilon}\big)$ du système (1.1).

Le symbole de $(\mathcal{S})$ est

$$S(u, \tau, \xi) := \tau \Sigma_0(u) + \sum_{j=1}^{d} \xi_j \Sigma_j(u)\,. \tag{2.15}$$

Soit k un entier non nul. On note $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^l; \mathbb{R}^m)$ l'ensemble des applications k-linéaires symétriques sur $\mathbb{R}^l$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ et $u \in \mathcal{U}$ on désigne par $L_k(u, \xi)$ l'élément de $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ qui est défini par la relation :

$$k!\; f_0'(u) L_k(u, \xi) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j (D_u^k f_j)(u) - \lambda(u, \xi)(D_u^k f_0)(u). \tag{2.16}$$

En particulier, $L_1(u, \xi) = A(u, \xi) - \lambda(u, \xi)\,\mathrm{Id} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On introduit aussi la forme symétrique

$$\Sigma(u, \xi) := \Sigma_0(u) L_1(u, \xi) = -\lambda(u, \xi) \Sigma_0(u) + \sum_{j=1}^{d} \xi_j\, \Sigma_j(u)\,. \tag{2.17}$$

On remarque que :

$$S(u, \tau, \xi) = \Sigma(u, \xi) + \big(\tau + \lambda(u, \xi)\big)\, \Sigma_0(u)\,. \tag{2.18}$$

On désigne par $\Pi(u,\xi)$, une application C^∞ sur $\mathcal{U}\times\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ tel que pour tout (u,ξ), $\Pi(u,\xi)$ est un projecteur sur $\ker L_1(u,\xi) = \ker\Sigma(u,\xi)$:

$$L_1(u,\xi)h = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h = \Pi(u,\xi)h\,. \tag{2.19}$$

En particulier, $L_1(u,\xi)\Pi(u,\xi) = 0$. On se donne une application $Q \in C^\infty(\mathcal{U}\times\mathbb{R}^d\backslash\{0\})$ telle que $Q(u,\xi)$ soit un inverse partiel de $L_1(u,\xi)$ à valeurs dans $\ker\Pi(u,\xi)$:

$$Q(u,\xi)L_1(u,\xi) = \mathrm{Id} - \Pi(u,\xi)\,, \quad \Pi(u,\xi)Q(u,\xi) = 0\,. \tag{2.20}$$

Enfin on se donne une application $\Pi'(u,\xi)$, C^∞ sur $\mathcal{U}\times\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ telle

$$\ker\Pi'(u,\xi) = \mathrm{im}L_1(u,\xi). \tag{2.21}$$

En particulier, $\Pi'(u,\xi)L_1(u,\xi) = 0$. D'autre part, comme λ est une valeur propre semi-simple de $A(u,\xi)$, en tout point $(u,\xi)\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ on a $\mathrm{im}L_1\cap\ker L_1 = \{0\}$ et

$$\mathrm{rang}(\Pi'\Pi) = \mathrm{rang}\Pi' = \mathrm{rang}\Pi = \kappa\,. \tag{2.22}$$

Les identités ci-dessus impliquent que pour tout $(u,\xi)\in\mathcal{U}\times\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$:

$$f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Pi'(u,\xi)f = 0\,. \\ Q(u,\xi)f = 0\,. \end{cases} \tag{2.23}$$

- *Exemples.* Plusieurs choix sont naturels. On peut choisir $\Pi = \Pi' = \Pi_S$ le projecteur spectral de $A(u,\xi)$ associé à la valeur propre $\lambda(u,\xi)$. On peut aussi choisir $\Pi = \Pi_\perp$ le projecteur orthogonal sur $\ker L_1 = \ker\Sigma$. Par symétrie on a aussi $\Pi_\perp\Sigma = 0$ et on peut par exemple choisir $\Pi' = \Sigma_0^{-1}\Pi_\perp\Sigma_0$. Dans la pratique, il est parfois intéressant de faire d'autres choix. Par exemple, Π' peut être donné par une base du co-noyau de L_1 (vecteurs propres à gauche). Quant à l'inverse partiel, il est uniquement déterminé de $\mathrm{im}L_1$ dans $\ker\Pi$. Sa définition sur un supplémentaire de $\mathrm{im}L_1$ n'intervient pas.

On définit un élément $\Gamma_2(u,\xi)$ dans $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ par :

$$\Gamma_2(u,\xi)(w_1,w_2) := -2\,Q(u,\xi)\,L_2(u,\xi)(w_1,w_2)\,. \tag{2.24}$$

Enfin, on introduit les formes trilinéaires :

$$\begin{aligned} 2B\!\!l'(u,\xi)(u_1;v,w) := &-\big((u_1\cdot\nabla_u\Sigma)v\,,\,w\big) \\ &+\big((v\cdot\nabla_u\Sigma)u_1\,,\,w\big) + \big((w\cdot\nabla_u\Sigma)u_1\,,\,v\big)\,. \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$2B\!\!l''(u,\xi)(u_1;v,w) := \big((v\cdot\nabla_u\lambda)\Sigma_0u_1\,,\,w\big) + \big((w\cdot\nabla_u\lambda)\Sigma_0u_1\,,\,v\big)\,. \tag{2.26}$$

Ici les applications $\nabla_u\Sigma$, $\nabla_u\lambda$ et Σ_0 sont évaluées en (u,ξ). On remarque que ces formes sont symétriques en (v,w). On note $B\!\!l = B\!\!l' + B\!\!l''$.

Une fonction qui dépend des variables (u, ξ) donne lieu, après substitution de (u, ξ) par $(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)$, à une fonction de (t, x). On définit ainsi :

$$
\begin{array}{lll}
v \cdot \nabla\lambda := v \cdot \nabla_u \lambda(\bar{u}_0, \partial_x \varphi), & \mathcal{L}_k \, := \, L_k(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)\,. & \\
\mathcal{P} := \Pi(\bar{u}_0, \partial_x \varphi), & \mathcal{P}' := \Pi'(\bar{u}_0, \partial_x \varphi), & \mathcal{Q} := Q(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)\,. \\
\mathcal{B}\ell' = B\ell'(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)\,, & \mathcal{B}\ell'' = B\ell''(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)\,, & \mathcal{B}\ell = B\ell(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)\,.
\end{array}
$$

Par souci de simplification, on ne fait pas mention dans ces expressions des variables (t, x). Cela ne doit pas préter à confusion. Les relations précédentes se transcrivent comme suit :

$$\mathcal{L}_1 \mathcal{P} = 0 \quad \text{et} \quad \ker \mathcal{L}_1 = \mathrm{im} \mathcal{P}\,. \tag{2.27}$$

$$\mathcal{Q} \mathcal{L}_1 = \mathrm{Id} - \mathcal{P}, \qquad \mathcal{Q} \mathcal{P} = \mathcal{P}\, \mathcal{Q} = 0\,. \tag{2.28}$$

$$\mathcal{P}' \mathcal{L}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{im} \mathcal{L}_1 = \ker \mathcal{P}'\,. \tag{2.29}$$

On a aussi, en tout point (t, x) :

$$f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}' f = 0\,. \\ \mathcal{Q} f = 0\,. \end{array} \right. \tag{2.30}$$

2.4 Définitions

Ce paragraphe est destiné à donner un sens précis aux diverses terminologies qui ont été employées.

- *Solutions approchées*. On cherche à résoudre l'équation $(\mathcal{S})$ dans les espaces $\mathcal{W}^s(T)$ avec s assez grand. On munit ces espaces de la famille de normes :

$$\| \, u \, \|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T)} := \sup_{t \in [0,T]} \sum_{|\alpha| \leq s} \| \, \varepsilon^{|\alpha|} \partial^\alpha_{t,x,\theta} u(t, \cdot) \, \|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})}, \qquad \varepsilon \in]0, 1]\,.$$

Pour $\varepsilon = 1$, on note simplement $\| \cdot \|_{\mathcal{W}^s(T)}$. Pour $\varepsilon \in]0, 1]$, on a clairement:

$$\varepsilon^s \, \| \, u \, \|_{\mathcal{W}^s(T)} \leq \| \, u \, \|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T)} \leq \| \, u \, \|_{\mathcal{W}^s(T)} \;\; . \tag{2.31}$$

On dit que la famille $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]}$ est bornée dans $\mathcal{W}^s_\varepsilon(T)$ si on a la majoration uniforme : $\sup_{\varepsilon \in \,]0,1]} \;\; \| \, u^\varepsilon \, \|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T)} < +\infty\,.$

Par extension, $\mathcal{W}^s(+\infty)$ est l'espace des fonctions $u(t, \cdot)$ définies sur $\mathbb{R}^+$ et telles que u soit dans $\mathcal{W}^s(T)$ pour tout $T < +\infty$. De même, on dit que la famille $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]}$ est bornée dans $\mathcal{W}^s_\varepsilon(+\infty)$ si elle est bornée dans $\mathcal{W}^s_\varepsilon(T)$ pour tout $T < +\infty$.

On considère des profils u_n choisis dans $\mathcal{W}^{s+1}(T)$. Pour $n_1 < +\infty$, la formule $u_a^\varepsilon - \bar{u}_0 = \sum_{n=1}^{n_1} \varepsilon^{n/2} u_n$ définit une famille bornée dans $\mathcal{W}^{s+1}(T)$. Pour $n_1 = +\infty$, on utilise le procédé de sommation de Borel afin de donner un sens à la série :

$$u_a^\varepsilon - \bar{u}_0 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n/2} u_n \,. \tag{2.32}$$

On obtient encore une famille bornée dans $\mathcal{W}^{s+1}(T)$, modulo une famille qui est $O(\varepsilon^\infty)$ dans $\mathcal{W}^{s+1}(T)$.

Si $s > \frac{d+3}{2}$, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ la fonction u_a^ε est de classe C^1 et on a :

$$R_a^\varepsilon := \mathcal{S}(u_a^\varepsilon; \partial_{t,x,\theta}) u_a^\varepsilon \, \in \mathcal{W}^s(T) \,.$$

C'est encore vrai pour $s = \infty$.

Définition 2.1. *Soit r avec $0 \leq r \leq +\infty$. On dit que la famille $\{u_a^\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]}$, donnée par (2.6) ou (2.32) si $n_1 = \infty$, avec les $u_n \in \mathcal{W}^{s+1}(T)$, est une solution approchée du système $(\mathcal{S})$ à l'ordre r dans $\mathcal{W}^s(T)$ si :*

$$\| \, R_a^\varepsilon \, \|_{\mathcal{W}^s(T)} = O(\varepsilon^r) \,.$$

On note $\mathcal{O}_a^s(r)$ l'ensemble des solutions approchées d'ordre r à coefficients $u_n \in \mathcal{W}^{s+1}(T)$.

- <u>*Stabilité*</u>. Une fois construites les solutions apporchées, la question est de savoir si elles sont proches de solutions exactes. On formalise ici cette notion de stabilité. On se donne $r > s + 1 > \frac{d+5}{2}$.

Définition 2.2. *On dit que la famille de solutions approchées $\{u_a^\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]} \in \mathcal{O}_a^s(r)$ est stable sur $[0,T]$ si la condition suivante est satisfaite. Pour toute famille $\{R^\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]}$ bornée dans $\mathcal{W}_\varepsilon^s(T)$ et toute famille $\{I^\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]}$ bornée dans $H^s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})$, il existe un seuil $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, le problème de Cauchy :*

$$\mathcal{S}(u^\varepsilon; \partial_{t,x,\theta}) u^\varepsilon = R_a^\varepsilon + \varepsilon^r R^\varepsilon, \qquad u^\varepsilon(0,x,\theta) = u_a^\varepsilon(0,x,\theta) + \varepsilon^r I^\varepsilon$$

admet une solution unique u^ε définie sur l'intervalle $[0,T]$ qui vérifie :

$$\| \, u^\varepsilon - u_a^\varepsilon \, \|_{\mathcal{W}_\varepsilon^s(T)} = \, O(\varepsilon^r) \,. \tag{2.33}$$

Par extension, on dit que la famille $\{u_a^\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,1]}$ est stable sur $[0,+\infty]$ si elle est stable sur tous les intervalles $[0,T]$ avec $0 \leq T < +\infty$.

En particulier, en choisissant $R^\varepsilon = -\,\varepsilon^{-r}\,R_a^\varepsilon$ et, par exemple, $I^\varepsilon = 0$, on obtient des solutions exactes u^ε du système $(\mathcal{S})$, définies sur l'intervalle $[0,T]$ et voisine à $O(\varepsilon^r)$ près de u_a^ε dans $\mathcal{W}_\varepsilon^s(T)$. Comme $r > s+1 > \frac{d+5}{2}$, l'encadrement (2.31), l'injection de Sobolev et l'estimation (2.33) donnent :

$$\parallel u^\varepsilon - u_a^\varepsilon \parallel_{L^\infty([0,T];Lip(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}))} = O(\varepsilon)\,.$$

La substitution $\theta = \varphi_\varepsilon/\varepsilon$ fournit des solutions $\widetilde{u}^\varepsilon(t,x) = u^\varepsilon(t,x,\varphi_\varepsilon/\varepsilon)$ du système initial (1.1). On a donc

$$\parallel \widetilde{u}^\varepsilon - \widetilde{u}_a^\varepsilon \parallel_{L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d))} = O(\varepsilon)\,,$$

et aussi :

$$\parallel \widetilde{u}^\varepsilon - \widetilde{u}_a^\varepsilon \parallel_{L^\infty([0,T];Lip(\mathbb{R}^d))} = O(1)\,.$$

Lorsque $\partial_\theta u_1 \not\equiv 0$, on observe que la famille $\{\widetilde{u}_a^\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,1]}$ n'est pas bornée dans $W^{1,\infty}$. Il s'ensuit que la famille $\{\widetilde{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,1]}$ n'est pas bornée dans $W^{1,\infty}$, ni même à variations locales bornées. En fait les dérivées premières dans les directions transverses à la phase φ des solutions $\widetilde{u}^\varepsilon$ sont de taille $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Lorsque $\partial_\theta u_1 \equiv 0$, le régime est celui de l'optique géométrique faiblement non linéaire. Des résultats standards (cf [12]-[13]) affirment que les solutions approchées sont stables au sens de la définition 2.2 .

- *Instabilités non linéaire*. Nous décrirons aussi des exemples d'instabilités fortes, du type des instabilités de Rayleigh. Le mécanisme est celui d'une amplification exponentielle en temps rapide $t/\sqrt{\varepsilon}$ des petites perturbations. On formalise ici cette notion d'instabilité (cf [11], [17]).

Définition 2.3. *On dit que la famille de solutions approchées* $\{u_a^\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,1]} \in \mathcal{O}_a^s(\infty)$ *est non linéairement instable sur* $[0,T]$ *si la condition suivante est satisfaite. Pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et* $\delta > 0$*, il existe des constantes* C*,* $\varepsilon_0 > 0$ *et* $c > 0$*, et une famille de solutions* $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon\in]0,1]}$ *de* $(\mathcal{S})$*, définies et régulières sur les intervalles* $[0,T(\varepsilon)]$*, telles que pour tout* $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ *on a :*

$$\|u_a^\varepsilon(0) - u^\varepsilon(0)\|_{L^\infty} \leq C\,\varepsilon^m\,. \tag{2.34}$$

$$\sup_{t\in[0,\min(\delta,T(\varepsilon))]} \|u_a^\varepsilon(t) - u^\varepsilon(t)\|_{L^\infty} \geq c\,\sqrt{\varepsilon}\,. \tag{2.35}$$

Autrement dit, pour des données initiales très proches de celles de u_a^ε, l'écart entre la solution exacte et la solution approchée u_a^ε est, en un temps arbitrairement petit, du même ordre que le second terme $\sqrt{\varepsilon}u_1$ du développement BKW.

La substitution $\theta = \varphi_\varepsilon/\varepsilon$ conduit à des énoncés analogues pour des solutions de l'équation initiale (1.1).

2.5 Un modèle : la dynamique des gaz

Les solutions régulières des équations de la dynamique des gaz en dimension d d'espace vérifient le système conservatif :

$$\text{(2.36)} \qquad \begin{cases} \partial_t \varrho + \nabla_x \cdot (\varrho v) = 0 \,. \\ \partial_t (\varrho\, v_i) + \nabla_x \cdot (\varrho v v_i) + \partial_i p = 0, \qquad 1 \leq i \leq d \,. \\ \partial_t (\varrho s) + \nabla_x \cdot (\varrho s v) = 0 \,. \end{cases}$$

On choisit ici pour variables d'état (ϱ, v, s, p) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Elles représentent respectivement la densité de particules par unité de volume, la vitesse de la particule, la densité d'entropie par unité de masse et de volume, et la pression. Les quantités ϱ, p et s sont liées par une loi d'état $\varrho = \beta(p, s)$ qui vérifie :

$$\beta(p,s) \,>\, 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial p}(p,s) \,>\, 0, \qquad p \,>\, 0, \qquad s \in \mathbb{R} \,.$$

On manipule le système (2.36) sous une forme quasi-linéaire symétrique, en utilisant les variables p, v et s :

$$\text{(2.37)} \qquad \begin{cases} \alpha(p,s)(\partial_t p + v \cdot \nabla_x p) + \nabla_x \cdot v = 0 \\ \beta(p,s)(\partial_t v \,+\, v \cdot \nabla_x v) + \nabla_x p = 0 \\ \partial_t s + v \cdot \nabla_x s = 0 \end{cases}$$

avec $\alpha(p,s) := \frac{1}{\beta(p,s)} \, \frac{\partial \beta}{\partial p}(p,s)$. Pour un gaz parfait, $\beta(p,s) = p^{1/\gamma} e^{-\,s/\gamma}$ et $\alpha(p,s) = \gamma \, p$, la constante γ étant positive.

Le système (2.36) s'inscrit tout à fait dans le cadre de notre étude. La symétrie (hypothèse 2.1) est évidente sur l'écriture (2.37). La valeur propre $\lambda(u,\xi) = v \cdot \xi$ est linéairement dégénérée et de multiplicité d constante. L'hypothèse 2.2 est donc satifaite. La discussion met en jeu :

- les lois d'état α et β.

- le propagateur $\partial_t + v \cdot \nabla_x$. Cette dérivée particulaire devient en variables éclatées $X := \partial_t + v \cdot \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon}(\dot{X}\varphi_\varepsilon)\partial_\theta$.

- les matrices :

$$\Sigma_0(u) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta \times \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma(u,\xi) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\xi & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Σ_0 est le coefficient de ∂_t dans la forme symétrique et Σ est définit en (2.17). On remarque que le symbole $\Sigma(u,\xi) = \Sigma(\xi)$ ne dépend pas de l'état u. On le note $\Sigma(\xi) = \sum \xi_j M_j$. Par suite, le projecteur orthogonal $\Pi_\perp(u,\xi) = \Pi_\perp(\xi)$ sur $\ker \Sigma(\xi)$ ne dépend pas de l'état u. Le système éclaté s'écrit alors :

$$(\mathcal{D}) \qquad \mathcal{D}(u^\varepsilon; \partial_{t,x,\theta})u^\varepsilon = \Sigma_0(u^\varepsilon) X u^\varepsilon + \sum_{j=1}^{d} M_j\ \partial_j u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Sigma(\partial_x \varphi_\varepsilon)\, u^\varepsilon = 0\,.$$

Le système isentropique concerne les solutions pour lesquelles la fonction s reste constante. Il concerne les $d+1$ inconnues (ϱ, v). On récupère alors $\kappa = d - 1 > 0$ si $d > 1$.

3 Enoncé des résultats

3.1 Solutions BKW

Le premier résultat important de ce travail concerne l'existence de solutions fortes asymptotiques. On suppose que le système (1.1) vérifie les hypothèses 2.1 et 2.2. On se donne $\bar{u}_0 \in C_b^\infty(T)$ solution de (1.1), $\bar{u}_1 \in \mathcal{W}^\infty(T)$ solution de (2.9) et les phases φ et φ^1 solutions de (2.11) et (2.14) avec $d\varphi \in C_b^\infty(T)$ et $\varphi_1 \in \mathcal{W}^\infty(T)$.

Théorème 3.1. *Il existe des suites de profils u_1^* et u_n pour $n \geq 2$, dans $W^\infty(T)$, telles que les fonctions définies par* (2.6) *sont solutions approchées du système $(\mathcal{S})$ à l'ordre $(n_1 - 1)/2$ dans $\mathcal{W}^s(T)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$. En outre, on peut choisir arbitrairement dans $H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})$ les données initiales associées aux composantes $\mathcal{P}u_n^*$ et $\bar{u}_{n+1}$.*

On obtient aussi des solutions approchées à l'ordre infini en remplaçant la somme de (2.6) par une série asymptotique sommée par le procédé de Borel.

Dans cet énoncé, on a $\mathcal{P} = \Pi(\overline{u}_0, \partial_x\varphi)$ comme indiqué au paragraphe 2.3. Le théorème 3.1 est démontré au paragraphe 4. On fait d'abord la démonstration dans le cas où $\bar{u}_1 = 0$ et $\varphi^1 = 0$. En substituant le développement (2.6) dans $\mathcal{S}$ et en ordonnant en puissances de $\varepsilon^{1/2}$, on obtient une suite d'équations $F_n = 0$. La première étape consiste à montrer que ce système équivaut à un système triangulaire de la forme

$$\begin{cases} (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_n^* = h_n \\ \mathcal{Z}_n(\mathcal{P}u_n^*, \overline{u}_{n+1}) = f_n \end{cases}$$

où h_n et g_n s'expriment à l'aide des u_k^* et $\overline{u}_{k+1}$ pour $k \leq n-1$ et où $\mathcal{Z}_n$ est un système couplé d'équations en $\mathcal{P}u_n^*$ et $\underline{u}_{n+1}$. Cette réduction des équations

$F_n = 0$ n'est pas du tout évidente. Elle n'est possible que parce que, à chaque étape, un certain nombre de termes s'annulent, comme conséquence des hypothèses de transparence, ici de l'hypothèse 2.2.

La deuxième étape consiste à résoudre les équations $\mathcal{Z}_n(\mathcal{P}u_n^*, \overline{u}_{n+1}) = f_n$. Ceci n'est pas immédiatement clair non plus, le caractère hyperbolique des équations n'étant pas assuré. Néanmoins, en introduisant une inconnue supplémentaire qui s'interprète comme un terme de déphase ψ_n pour $\mathcal{P}u_n^*$, on résout ce système en déterminant d'abord $v_n^* = \mathcal{P}u_n^*(t, x, \theta - \psi_n)$ et $\overline{u}_{n+1}$ comme solution d'un système hyperbolique, puis en résolvant une équation pour ψ_n.

Enfin, au paragraphe 4.3, par un argument assez simple, on réduit le cas général où $\bar{u}_1 \neq 0$ au cas précédent.

En particulier, le premier profil u_1^* et $\overline{u}_2$ sont déterminés par

$$\begin{cases} (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_1^* = 0\,. \\ \mathcal{Z}_1(\mathcal{P}u_1^*, \overline{u}_2) = 0\,. \end{cases}$$

On reconnait en premier rang la condition de polarisation sur les modes propres associés à la valeur propre λ. Par contre, on peut choisir la donnée initiale de $\mathcal{P}u_1^*$ arbitrairement, donc non nulle, créant ainsi de véritables oscillations fortes. Le système $\mathcal{Z}_1$ est non linéaire. Néanmoins, la solution existe sur l'intervalle de temps $[0, T]$ en entier. Cela est dû à la réduction triangulaire de ce système qui se ramène à une succession de problèmes linéaires, les non linéarités n'intervenant que comme termes sources identifiés durant les étapes précédentes. Mais les effets non linéaires (interaction entre les différentes composantes, effets des oscillations sur le champ moyen) sont bien présents et décrits par l'équation $\mathcal{Z}_1 = 0$. Ceci indique clairement que le régime pertinent en présence d'un champ l.d.g. est (en général) fourni par les oscillations fortes.

La marge de liberté obtenue sur les données initiales est celle qu'on attend en pareilles circonstances (comparer avec [12] et [13]). Le fait que les données initiales des composantes $(\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_n^*$ sont déterminées traduit les conditions de compatibilités nécéssaires sur les donnés Cauchy pour que la solution soit de type (2.6) avec des oscillations sur le seul mode λ.

L'ordre des solutions approchées peut être fixé quelconque. Il est possible de travailler avec une régularité Sobolev finie. Toutefois, il faut faire un décompte précis des pertes de régularité dans les itérations. Pour récupérer des profils u_n dans $\mathcal{W}^s$ avec $\frac{d+3}{2} < s < +\infty$, il faut prendre les données initiales dans $H^{s+2\,n_1}$. Les détails sont laissés au lecteur.

3.2 Stabilité hyperbolique

Il est bien connu que les ondes associées à des modes linéairement dégénérés peuvent donner lieu à des instabilités (cf [1] pour les discontinuités de contact multidimensionnelles, [10] pour les ondes de cisaillement, [24] pour les oscillations de grande amplitude). Nous allons reprendre cette problématique sous l'angle de l'optique géométrique.

On se donne une solution approchée u_a^ε avec $\langle u_1 \rangle = 0$ et $\varphi_1 = 0$. On analyse d'abord la *stabilité linéaire* de cette famille. Le linéarisé complet $\mathcal{L}_c^\varepsilon$ de l'équation $(\mathcal{S})$ en u_a^ε est de la forme

$$\mathcal{L}_c^\varepsilon = R^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\, A_0 \partial_\theta + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \big(A_1 \partial_\theta + B_1 \big) + C^\varepsilon \,, \tag{3.1}$$

où R^ε est une famille de systèmes *symétriques* en $\partial_{t,x,\theta}$ à coefficients uniformément Lipschitziens et les C^ε sont uniformément bornés. En outre, $A_0 = \Sigma(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)$ est symétrique et indépendant de la variable θ. Par contre, A_1 est symétrique et dépend de la variable θ par l'intermédiaire du profil u_1. De même, B_1 dépend de u_1 donc de θ. La méthode d'énergie standard par intégration par parties fait apparaître le terme singulier :

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, (D\dot{u}, \dot{u}) \quad \text{avec} \quad D := \frac{1}{2}\big(- \partial_\theta A_1 + B_1 + {}^t B_1 \big). \tag{3.2}$$

Avec les notations (2.25) et (2.26) on a :

$$\big(D\dot{u}\,,\, \dot{u} \big) = B\!\!l(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)(\partial_\theta u_1 ; \dot{u}, \dot{u})\,. \tag{3.3}$$

En conséquence, *le symétriseur Σ_0, qui conduit à la forme symétrique* (3.1)*, fournit une estimation d'énergie uniforme en ε pour le linéarisé $\mathcal{L}_c^\varepsilon$, si et seulement si la matrice symétrique D est positive ou nulle.* Comme par construction D est de moyenne nulle, cela impose $D \equiv 0$. La condition $D \equiv 0$ implique la stabilité L^2 uniforme du linéarisé. On montre qu'elle entraine aussi la stabilité non linéaire des solutions approchées :

Théorème 3.2. *Soit u_a^ε une solution approchée dans $\mathcal{O}_a^s(r)$ avec $r > s+1 > \frac{d+5}{2}$, avec $\bar{u}_1 = 0$. On suppose que les termes (u_0, u_1^*) et φ sont tels que la matrice D définie ci-dessus s'annule sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}$. Alors la famille $\{u_a^\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0,1]}$ est stable sur l'intervalle $[0,T]$ au sens de la définition* 2.2.

Si $u_1^* \equiv 0$, alors $D = 0$ et le théorème redonne la stabilité de l'optique géométrique faiblement non linéaire [12], [13].

On discute maintenant la validité de l'hypothèse $D \equiv 0$ lorsque $u_1^* \not\equiv 0$. Suivant la décomposition (2.25)-(2.26), on écrit $D = D' + D''$ avec :

$$(3.4) \qquad \big(D'\dot u\,,\,\dot u\big) = \mathcal{B}'(\partial_\theta u_1; \dot u, \dot u)\,, \qquad \big(D''\dot u\,,\,\dot u\big) = \mathcal{B}''(\partial_\theta u_1; \dot u, \dot u)\,.$$

On lie d'abord la condition $D' = 0$ à la notion de *bon symétriseur* introduite dans [7], [15] et [26]. Cette notion est une notion 1D, qui s'applique dans chaque direction $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$ au système :

$$(3.5) \qquad \partial_t f_0(u) + \partial_x f_\xi(u) = 0\,, \qquad f_\xi(u) := \sum_{j=1}^{d} \xi_j f_j(u)\,.$$

La proposition suivante est démontrée au paragraphe 4.

Proposition 3.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

i) Pour toute direction ξ dans $\mathbb{S}^{d-1}$, la matrice $\Sigma_0(u)$ est un bon symétriseur au sens donné dans [7], [15] et [26] *pour le système* (3.5).

ii) Pour toute direction ξ dans $\mathbb{S}^{d-1}$, la dérivée de Lie du tenseur 2 fois covariant $\Sigma(u,\xi)$ le long du feuilletage $\Im_\xi$ est nulle.

iii) Pour tout $(u,\xi) \in \mathcal{U} \times \mathbb{S}^{d-1}$ et tout $u_1 \in E(u,\xi)$, la forme $\mathcal{B}'(u,\xi)(u_1;\cdot,\cdot)$ est nulle.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dira que Σ_0 est un bon symétriseur pour l'équation (1.1). La définition de bon symétriseur 1D est rappelée au paragraphe 4. Elle s'exprime simplement dans des variables où le champ $E(u,\xi)$ est redressé comme en (2.4) et *ii*) en donne la définition intrinsèque invariante par changement d'inconnues. L'existence d'un bon symétriseur Σ_0 est un point clé dans la preuve de la stabilité 1D (cf [15], [7]). Cette condition est satisfaite dans de nombreux cas, en particulier par le système d'Euler ($\mathcal{D}$). On retient que si Σ_0 est un bon symétriseur, alors le terme singulier $(D'\dot u, \dot u)$ s'annule.

En ce qui concerne le terme $(D''\dot u, \dot u)$, on a:

$$(D''\dot u, \dot u) = (\dot u \cdot \nabla\lambda)\big(\Sigma_0 \partial_\theta u_1, \dot u\big) = \big((\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp)\dot u \cdot \nabla\lambda\big)\big(\Sigma_0 \partial_\theta u_1, \mathcal{P}_\perp \dot u\big)$$

où $\mathcal{P}_\perp$ est le projecteur orthogonal sur $\ker \Sigma(\bar u_0, \partial_x\varphi)$. On voit donc que ce terme n'est pas de signe constant, sauf s'il est nul. Comme la matrice Σ_0 est définie positive, si $\partial_\theta u_1 \neq 0$, en choisissant $\mathcal{P}_\perp \dot u = \partial_\theta u_1$, on voit que cette contribution est nulle si et seulement si $(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp)\dot u \cdot \nabla\lambda = 0$ pour tout $\dot u$. Compte tenu de l'hypothèse 2.2, cela équivaut à :

$$(3.6) \qquad \nabla_u \lambda(\bar u_0, \partial_x\varphi) = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d\,.$$

Cette condition n'est qu'exceptionnellement vérifiée. Notons toutefois que (3.6) est satisfaite si la valeur propre λ est indépendante de u ou si $\bar{u}_0 = \underline{u}$ est une constante, $\partial_x \varphi = \underline{\xi}$ est constante et $\nabla \lambda(\underline{u}, \underline{\xi}) = 0$. En résumé, on retient :

Proposition 3.2. *Si Σ_0 est un bon symétriseur, la condition $D = 0$ est satisfaite si et seulement si $(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)$ vérifie* (3.6)*.*

On donnera au paragraphe 5.2 des exemples de systèmes non linéaires admettant un bon symétriseur et vérifiant (3.6).

La démonstration du théorème 3.2 repose, pour l'obtention d'estimations H^s et la preuve de la stabilité non linéaire, sur une réduction du linéarisé à une forme modèle. L'hypothèse 2.2 de dégénérescence linéaire de λ implique que les matrices A_1 et B_1, et donc D, ont une structure particulière (lemme 5.1). On peut aussi simplifier l'écriture du linéairisé en introduisant un changement d'inconnues de la forme :

$$\check{u} = (\mathrm{Id} + \sqrt{\varepsilon}\phi_1)\dot{u} \,. \tag{3.7}$$

Alors, l'opérateur $\check{\mathcal{L}}_c^\varepsilon = (\mathrm{Id} + \sqrt{\varepsilon}\, {}^t\phi_1)\mathcal{L}_c^\varepsilon(\mathrm{Id} + \sqrt{\varepsilon}\,\phi_1)$ a la même forme que $\mathcal{L}_c^\varepsilon$. On montre (proposition 5.1) que l'on peut choisir ϕ_1 de sorte que $\check{\mathcal{L}}_c^\varepsilon$ prenne la forme simplifiée

$$\check{\mathcal{L}}_s^\varepsilon = \check{R}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\, A_0\, \partial_\theta + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, \check{B}_1 \tag{3.8}$$

modulo un terme $\check{C}^\varepsilon$ uniformément borné. En outre, $\check{B}_1$ est symétrique. A l'issue de ces manipulations, on a éliminé la dépendance en θ du coefficient de la dérivée $\frac{1}{\varepsilon}\,\partial_\theta$. La singularité en ε se trouve reportée au niveau de la contribution d'ordre zéro $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\check{B}_1$. En outre, le changement d'inconnues (3.7) laisse invariant la matrice D et on a :

$$D = \check{D} = \frac{1}{2}\big(\check{B}_1 + {}^t\check{B}_1\big) = \check{B}_1 \,.$$

Lorsque $D = 0$, on voit que le terme singulier $\check{B}_1$ disparaît lui aussi. On peut alors reprendre l'analyse menée dans [3], [12] et [13] pour construire des solutions exactes correspondant à données initiales préparées.

3.3 Instabilité hyperbolique

La condition $D = 0$ est suffisante pour garantir la stabilité du linéarisé $\mathcal{L}_c^\varepsilon$. L'étude de cette stabilité peut être affinée par une analyse des interactions d'oscillations à l'échelle ε entre l'oscillation principale portée par u_1 et des oscillations de plus petites amplitudes portées par la perturbation $\dot{u}$. L'idée est de faire interagir ces oscillations à l'échelle de temps normale de l'optique géométrique non linéaire qui est ici $\sqrt{\varepsilon}$.

On travaille dans un cadre simplifié. La fonction $\bar{u}_0$ est une constante $\underline{u}$. La phase $\varphi(t,x) = \underline{\tau} t + \underline{\xi} \cdot x$ est plane, avec $\underline{\xi} \neq 0$. L'équation eikonale (2.11) implique $\underline{\tau} = -\lambda(\underline{u}, \underline{\xi})$. Le terme principal de l'oscillation forte u_1 est une fonction à valeurs réelles, vérifiant $\partial_\theta u_1 \not\equiv 0$ et $\bar{u}_1 \equiv 0$.

On se donne une phase auxiliaire $\psi(t,x) = \tau t + \xi \cdot x$. On rend apparentes les oscillations à l'échelle ε dans la direction $d\psi$ et pour une échelle de temps en $\sqrt{\varepsilon}$, en faisant agir $\mathcal{L}_c^\varepsilon$ sur des expressions de la forme :

$$\dot{u}(t,x,\theta) \,=\, \check{u}\Big(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, x, \theta, \frac{\psi}{\varepsilon}\Big)\,. \tag{3.9}$$

Ici $\check{u}(s,x,\theta,\omega)$ est une fonction périodique en les variables θ et ω. On calcule $\sqrt{\varepsilon}\,\mathcal{L}_c^\varepsilon \dot{u}$. On obtient une contribution qui s'écrit comme suit :

$$\check{\mathcal{L}}\check{u} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\underline{S}(d\varphi\partial_\theta + d\psi\partial_\omega)\check{u} + (\underline{\Sigma}_0\partial_s + G)\check{u} + \sqrt{\varepsilon}R\check{u}\,. \tag{3.10}$$

La lettre R désigne un opérateur hyperbolique symétrique. On note :

$$\underline{S}(\tau,\xi) = S\big(\underline{u},(\tau,\xi)\big), \qquad \underline{\Sigma}_0 = \Sigma_0(\underline{u})\,.$$

La lettre G représente un opérateur en (θ,ω), dont les coefficients dépendent des paramètres (t,x) et aussi de θ par l'intermédiaire de u_1 :

$$G(\partial_\theta,\partial_\omega)\check{u} = u_1 \cdot \nabla_u S(\underline{u}, d\varphi\partial_\theta + d\psi\partial_\omega)\check{u} + \check{u}\cdot\nabla_u S(\underline{u}, d\varphi)\partial_\theta u_1\,. \tag{3.11}$$

L'intervention de $\check{\mathcal{L}}$ met en jeu un terme singulier en $\varepsilon^{-1/2}$, qui force la polarisation des données dans le noyau de $\underline{S}(d\varphi\partial_\theta + d\psi\partial_\omega)$. On introduit les fréquences caractéristiques :

$$Z := \big\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2\,;\ \det\underline{S}(\alpha d\varphi + \beta d\psi) = 0\big\}\,. \tag{3.12}$$

A tout couple (α,β) dans $\mathbb{Z}^2$ est associé le projecteur orthogonal $P_{\alpha,\beta}$ sur $\ker\underline{S}(\alpha d\varphi + \beta d\psi)$. Les $P_{\alpha,\beta}$ servent à définir le projecteur (orthogonal) $\mathbb{P}$ sur $\ker\underline{S}(d\varphi\partial_\theta + d\psi\partial_\omega)$:

$$\mathbb{P}\Big(\sum u_{\alpha,\beta}\,e^{i(\alpha\theta+\beta\omega)}\Big) = \sum P_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\beta}\,e^{i(\alpha\theta+\beta\omega)}\,. \tag{3.13}$$

Le reste $\sqrt{\varepsilon}R$ ne va pas intervenir dans l'étude asymptotique de $\check{\mathcal{L}}$. On peut se concentrer sur l'opérateur :

$$\mathbb{L} := \mathbb{P}\underline{\Sigma}_0\mathbb{P}\partial_s + \mathbb{G}, \qquad \mathbb{G} := \mathbb{P}G\mathbb{P}\,. \tag{3.14}$$

On remarque que G et $\mathbb{G}$ sont à coefficients constants en ω. Ainsi les opérations précédentes se prêtent bien à une décomposition en séries de Fourier en ω. Pour β fixé dans $\mathbb{Z}$, on pose :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\beta\Big(\sum u_\alpha\, e^{i\alpha\theta}\Big) := \sum P_{\alpha,\beta} u_\alpha\, e^{i\alpha\theta}\,. \\ &G_\beta(\theta,\partial_\theta) := G(\theta,\partial_\theta,i\beta)\,. \\ &\mathbb{L}_\beta := \mathbb{P}_\beta\underline{\Sigma}_0\mathbb{P}_\beta\partial_s + \mathbb{G}_\beta, \qquad \mathbb{G}_\beta := \mathbb{P}_\beta G_\beta \mathbb{P}_\beta\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Exemple 3.1. On considère l'équation d'Euler $(\mathcal{D})$. On se place en dimension deux d'espace. On note $x = (x_1, x_2)$ les coordonnées. Par changement de repère, on se ramène au cas où la vitesse $\underline{v}$ est nulle. On perturbe l'état de base $\underline{u} = (\underline{p}, 0, \underline{s})$. Le profil u_1 se décompose en (p_1^*, v_1^*, s_1^*). La valeur propre $\lambda = 0$ produit les phases planes caractéristiques $\xi \cdot x$ où ξ parcourt $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On fixe $\underline{\xi} \neq 0$ et on note $\varphi(t,x) = \underline{\xi} \cdot x$. Les autres valeurs propres correspondent aux modes acoustiques. Elles conduisent aux phases caractéristiques $\psi(t,x) = \tau t + \xi \cdot x$ avec $\xi \neq 0$ et $\tau^2 = \underline{c}^2|\xi|^2$, où $\underline{c}$ est la vitesse du son. Notant $\check{u} = (\check{p}, \check{v}, \check{s})$, l'action de G se réduit à :

$$G(\theta,\partial_\omega)\check{u} = (v_1^* \cdot \xi)\, \underline{\Sigma}_0\partial_\omega\check{u} + (\check{v}\cdot\underline{\xi})\, \underline{\Sigma}_0\partial_\theta u_1\,.$$

3.1.a) Phase $\psi(t,x) = \xi \cdot x$ associée à un mode l.d.g. Par changement de coordonnées, on se ramène à $(\underline{\tau},\underline{\xi}) = (0,1,0)$ et on choisit $(\tau,\xi) = (0,0,1)$. On récupère alors $Z = \mathbb{Z}^2$. Pour $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, $P_{\alpha,\beta}$ est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}\,{}^t(0,\nu,0) \oplus \mathbb{R}\,{}^t(0,0,1)$ avec $\nu = (-\beta,\alpha)/|(\alpha,\beta)|$. Les fonctions $\check{u}$ vérifiant $\check{u} = \mathbb{P}\check{u}$ et $\langle\check{u}\rangle = 0$ ont leur composante de pression nulle. Elles sont représentées via leurs composantes de vitesse $\check{v}$ et d'entropie $\check{s}$. La condition $\check{u} = \mathbb{P}\check{u}$ se traduit en $\mathrm{div}_{\theta,\omega}\check{v} = 0$. L'équation $\mathbb{L}\check{u} = 0$ est, pour la partie de moyenne nulle, équivalente à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_s\check{v} + v_1(\theta)\cdot\nabla_{\theta,\omega}\check{v} + \check{v}\cdot\nabla_{\theta,\omega}v_1 = \nabla_{\theta,\omega}q, \qquad \mathrm{div}_{\theta,\omega}\check{v} = 0\,. \\ \partial_s\check{s} + v_1(\theta)\cdot\nabla_{\theta,\omega}\check{s} + \check{v}\cdot\nabla_{\theta,\omega}s_1 = 0\,. \end{array} \right. \tag{3.16}$$

On retrouve sur les linéarisés le fait bien connu (cf [23]) selon lequel l'équation incompressible (3.16) s'obtient par optique géométrique à partir de l'équation compressible. Par ailleurs, l'équation pour la moyenne $\langle\check{u}\rangle$ n'est autre que $\partial_s\langle\check{u}\rangle = 0$. Elle est découplée de (3.16) et, à ce titre, peut être oubliée.

3.1.b) Phase $\psi(t,x)=\tau t+\xi\cdot x$ associée à un mode acoustique. L'ensemble Z regroupe alors les points dont les deux coordonnées sont dans $\mathbb{Z}$, situés sur l'union de trois droites :

$$Z \,=\, \{\,(\alpha,0)\,;\ \alpha\in\mathbb{Z}\,\}\ \cup\{\,(0,\beta)\,;\ \beta\in\mathbb{Z}\,\} \\ \cup\ \big\{\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2\,;\ \alpha=-2\beta(\xi\cdot\underline{\xi})/|\underline{\xi}|^2\in\mathbb{Z}\,\big\}\,.$$

Pour $\beta=0$, les propriétés de transparence fournissent $\mathbb{G}_0=0$. Pour $\beta\neq 0$ fixé, il y a au plus deux entiers relatifs α vérifiant $(\alpha,\beta)\in Z$. Le projecteur $\mathbb{P}_\beta$ sélectionne au plus deux modes de Fourier. L'action de $\mathbb{G}_\beta$ est non triviale si et seulement si $2\beta(\xi\cdot\underline{\xi})/|\underline{\xi}|^2$ est un entier relatif. Dans ce cas, l'équation $\mathbb{L}_\beta\breve{u}=0$ s'interprète en un système différentiel linéaire posé en dimension deux. Ce système est diagonalisable, à valeurs propres imaginaires pures. Ses solutions restent bornées pour tout temps. Les informations données ci-dessus sont reprises et détaillées à l'occasion de l'exemple 6.1.

On introduit de la souplesse dans les estimations d'énergie :

Définition 3.1. *Etant donnée une fonction croissante $k:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+_*$, on dit que la famille $\mathcal{L}^\varepsilon_c$ est stable dans L^2 de type k si pour tout $\varepsilon\in]0,1]$ et toute fonction test $\dot u$ dans $H^1([0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{T})$, on a pour tout $t\in[0,T]$:*

$$\|\dot u(t)\|_{L^2}\ \le\ k(t/\sqrt{\varepsilon})\,\Big(\|\dot u(0)\|_{L^2}+\int_0^t\|\mathcal{L}^\varepsilon_c\dot u(t')\|_{L^2}\,dt'\Big)\,. \tag{3.17}$$

Soient c_1, c_2 et m des constantes strictement positives. Pour les choix respectifs $k(s)=c_1$, $k(s)=c_1+c_2\,s^m$ et $k(s)=c_1\,e^{c_2 s}$, on parle de stabilité uniforme, polynômiale et exponentielle.

Il est commode pour présenter les résultats de se ramener par changement linéaire d'inconnues au cas où $\underline{\Sigma}_0=\mathrm{Id}$. Les solutions de $\mathbb{L}\breve{u}=0$ sont alors décrites par le semi-groupe $e^{-s\mathbb{G}}$. On procède à des estimations d'énergie sur $\mathbb{L}$, qui font apparaître :

$$\mathrm{Re}\big(\mathbb{G}\breve{u},\breve{u}\big)=\mathrm{Re}\big(G\mathbb{P}\breve{u},\mathbb{P}\breve{u}\big)=\big(D\mathbb{P}\breve{u},\mathbb{P}\breve{u}\big)=O\big(\|\breve{u}\|^2\big) \tag{3.18}$$

où D est précisément la matrice introduite en (3.2). On constate ainsi que l'opérateur $e^{-s\mathbb{G}}$ est continu sur L^2 avec plus précisément :

$$g(s):=|||e^{-s\mathbb{G}}|||\le c_1\,e^{c_2 s},\qquad |||T|||:=\sup_{\|u\|_{L^2}\le 1}\ \|\,Tu\,\|_{L^2}\ . \tag{3.19}$$

Il se trouve que la croissance en s de la fonction g est un facteur limitant pour le type k de stabilité L^2 sous-jacent.

Théorème 3.3. *Si la famille $\mathcal{L}_c^\varepsilon$ est stable dans L^2 de type k, alors forcément on a $g \preceq k$ c'est à dire :*

$$g(s) \le k(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ .$$

Autrement dit le comportement asymptotique en temps des solutions des équations de modulation fournies par l'optique géométrique faiblement non linéaire est un révélateur de la nature des estimations d'énergie qu'il est possible d'espérer. On applique ce principe aux divers cas de figure qui ont été rencontrés.

Exemple 3.2. *Stabilité uniforme.* Lorsque $D = 0$, l'action de G se simplifie conformément à :

$$G\check{u} = u_1 \cdot \nabla_u S(\underline{u}, d\psi \partial_\omega)\check{u} .$$

Comme le profil u_1 ne dépend pas de ω et comme le symbole $u_1 \cdot \nabla_u S(\underline{u}, \beta d\psi)$ est symétrique, on reconnait en G un opérateur antisymétrique. On a :

$$\exists c_1 > 0; \qquad g(s) \le c_1, \quad \forall s \in \mathbb{R} .$$

Dès lors, on s'attend à pouvoir démontrer la stabilité uniforme. C'est ce que confirme notre théorème 3.2.

Pour la dynamique des gaz, on a $D \not\equiv 0$. L'analyse menée en 3.1.b) indique que les phases ψ portées par les modes acoustiques conduisent à des fonctions g qui sont dans $L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Seule la situation 3.1.a) est susceptible de donner lieu à une fonction g non bornée sur $\mathbb{R}^+$. La discussion se trouve donc reportée au niveau du système (3.16).

Exemple 3.3. *Stabilité polynômiale.* On regarde ce que devient (3.16) lorsque l'oscillation forte est portée par l'entropie. On impose $u_1 = (0, 0, s_1)$. On a alors la simplification :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_s \check{v} = 0, \qquad \operatorname{div}_{\theta,\omega} \check{v} = 0 . \\ \partial_s \check{s} + \check{v}_1 \partial_\theta s_1 = 0 . \end{array} \right. \tag{3.20}$$

La composante $\check{v}_1(s,\theta) = \check{v}_1(0,\theta)$ est déterminée par la première équation. On choisit $\check{v}_1(0,\cdot) \not\equiv 0$. L'équation sur $\check{s}$ met alors en jeu le terme source $\check{v}_1 \partial_\theta s_1 \not\equiv 0$ connu. La composante $\check{s}$ grandit linéairement en s. D'où :

$$\exists (c_1, c_2, c_3, c_4) \in (\mathbb{R}_*^+)^4; \qquad c_1 + c_2\, s \le g(s) \le c_3 + c_4\, s, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ .$$

D'une part la famille $\mathcal{L}_c^\varepsilon$ ne peut pas être uniformément stable dans L^2. D'autre part le comportement en s de g est exempt de croissance exponentielle. On parle alors de *stabilité faible* du linéarisé $\mathcal{L}_c^\varepsilon$. La taille à un instant $t > 0$ de la norme L^2 des solutions s'obtient en multipliant la norme L^2 des données initiales par le facteur singulier $\varepsilon^{-1/2}$. On peut espérer compenser cette perte en jouant sur la petitesse du reste $\mathcal{L}_c^\varepsilon u_a^\varepsilon$. La construction de solutions exactes associées aux u_a^ε reste envisageable. Concrètement, on cherche des estimations uniformes en pondérant les composantes du vecteur u par des puissances différentes du paramètre ε. Par un changement d'inconnues singulier en ε, on se ramène à des équations linéairement et non linéairement stables pour les nouvelles inconnues. Ce programme est mené à son terme dans notre article [4]. Il demande en prérequis de pouvoir construire des oscillations fortes qui restent confinées sur l'entropie. Les contraintes que cela implique sont détaillées au paragraphe 4.4, consacré aux interactions entre modes l.d.g.

Exemple 3.4. *Stabilité exponentielle.* Pour Euler, lorsque l'oscillation forte est polarisée sur la vitesse, la discussion s'organise autrement. L'analyse spectrale de (3.16) pour $u_1 = {}^t(0, \sin m\theta, 0)$ est détaillée dans [10] où il est prouvé que l'opérateur $\mathbb{G}$ a un spectre absolument continu imaginaire pur et des valeurs propres isolées, de partie réelle non nulles, symétriques par rapport à l'axe imaginaire. En particulier, il existe un vecteur propre u dans L^2 vérifiant :

$$\mathbb{G}u = \mu u \neq 0, \quad \Re e\, \mu < 0\,.$$

On en déduit immédiatement :

$$\exists (c_1, c_2) \in (\mathbb{R}_*^+)^2; \qquad g(s) \geq c_1\, e^{c_2 s}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+\,.$$

D'après le théorème 3.3, la famille $\mathcal{L}_c^\varepsilon$ ne peut pas être polynômialement stable dans L^2. La construction BKW livre des solutions approchées à un $\bigcirc(\varepsilon^m)$ près, avec m arbitraire. Cela ne suffit pas pour compenser l'amplification en $e^{t/\sqrt{\varepsilon}}$ sous-jacente. C'est pourquoi, dans la suite, on parlera de préférence d'*instabilité exponentielle.*

Comme $\mathbb{G}$ est la somme directe orthogonale des $\mathbb{G}_\beta$, on a :

$$g_\beta(s) \leq g(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad \text{avec} \quad g_\beta(s) := |||e^{-s\mathbb{G}_\beta}|||\,.$$

La transparence implique que pour $\beta = 0$, on a toujours :

$$P_{\alpha,0} D P_{\alpha,0} = \mathcal{P} D \mathcal{P} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}\,.$$

C'est à dire $\mathbb{G}_0 = 0$ et donc $g_0 \equiv 0$. Cette propriété est prouvée au lemme 5.1 et se voit bien sur la forme matricielle donnée en (5.16). Pour $\beta \neq 0$ le calcul (3.18) effectué sur $\mathbb{G}_\beta$ fait apparaître les matrices $P_{\alpha,\beta} D P_{\alpha,\beta}$ où α parcourt $\mathbb{Z}$. En général, lorsque $D \neq 0$, on s'attend à pouvoir ajuster ψ et β de façon à ce que les $P_{\alpha,\beta} D P_{\alpha,\beta}$ soient non tous nuls. Il est alors vraissemblable que le semi-groupe $e^{-s\mathbb{G}_\beta}$ et donc $e^{-s\mathbb{G}}$ ait un taux de croissance exponentielle $c_2 > 0$.

Si tel est le cas, il convient d'examiner les conséquences d'une telle instabilité linéaire sur le problème non linéaire. Pour avancer, on a besoin de renforcer les hypothèses, comme indiqué en 6.3. En suivant les méthodes développées dans [11] et [17], on montre que la forte instabilité linéaire induit une instabilité non linéaire :

Théorème 3.4. *Sous l'hypothèses* 6.1*, la solution asymptotique* u_a^ε *donnée par le théorème* 3.1 *est non linéairement instable au sens de la définition* 2.3.

4 Solutions BKW

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 3.1. Avant de commencer les calculs, on précise les propriétés de transparence impliquées par l'hypothèse 2.2

4.1 Transparence quasi-linéaire conservative

On part de l'identité :

$$\sum_{j=1}^{d} \xi_j \; f_j'(u)\, \Pi(u,\xi) \;-\; \lambda(u,\xi)\; f_0'(u)\, \Pi(u,\xi) \;=\; 0\,. \tag{4.1}$$

Avec les notations du paragraphe 2.3, ceci s'écrit :

$$L_1(u,\xi)\, \Pi(u,\xi) \;=\; 0\,. \tag{tr1}$$

En dérivant $k-1$ fois (4.1) par rapport à u, on obtient une relation qui lie l'application k-linéaire $L_k(\cdot, \ldots, \cdot, \Pi\cdot)$ aux expressions L_j et aux dérivées $D_u^j \Pi$ et $D_u^j \lambda$ pour $j < k$. Sous l'hypothèse 2.2, le calcul se simplifie pour faire apparaître une forme nulle appelée condition de *transparence*. On explicite ces relations pour $k = 2$ et 3. Dans les énoncés ci dessous, $(u,\xi) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ est fixé et on note $\Pi = \Pi(u,\xi)$, $L_k = L_k(u,\xi)$ etc.

Lemme 4.1. *Pour tout* (v_1, v_2) *dans* $\mathbb{R}^{2N}$*, on a :*

$$2\Pi' \, L_2(v_1, \Pi v_2) = (v_1 \cdot \nabla_u \lambda)\Pi'\Pi v_2 \,. \tag{4.2}$$

$$\Pi' \, L_2(\Pi v_1, \Pi v_2) = 0 \,. \tag{tr2}$$

Preuve. En dérivant par rapport à u dans la direction v_1, l'identité (4.1) appliquée à v_2 puis en multipliant par $f_0'^{-1}$, on récupère l'identité :

$$2L_2(v_1, \Pi v_2) \;=\; (v_1 \cdot \nabla_u \lambda)\, \Pi v_2 \;-\; L_1\,(v_1 \cdot \nabla_u \Pi) v_2 \,. \tag{4.3}$$

Comme $\Pi' L_1 = 0$, l'identité (4.2) en résulte. Par ailleurs, pour $v_1 = \Pi v_1$, l'hypothèse (2.3) implique que $v_1 \nabla_u \lambda = 0$ et (tr2) suit. $\square$

En composant (4.3) à gauche par l'inverse partiel Q, on obtient :

$$2 \; Q \; L_2(v_1, \Pi v_2) \;=\; -\,(\mathrm{Id} - \Pi)\,(v_1 \cdot \nabla_u \Pi) v_2 \,. \tag{4.4}$$

En dérivant l'identité $\Pi \circ \Pi = \Pi$ dans la direction v, il vient

$$(\mathrm{Id} - \Pi)\; (v \cdot \nabla_u \Pi) = (v \cdot \nabla_u \Pi)\Pi \,.$$

Par définition, L_2 s'exprime à l'aide des dérivées secondes des flux f_j et est donc une application bilinéaire symétrique. En utilisant la notation Γ_2 du paragraphe 2.3, on obtient que :

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\Pi w_1, \Pi w_2) : &= -2 Q L_2(\Pi w_1 \Pi w_2) \\ &= (\Pi w_1 \cdot \nabla_u \Pi)\Pi w_2 \;=\; (\Pi w_2 \cdot \nabla_u \Pi)\Pi w_1 \,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Lemme 4.2. *Pour tout* (v_1, v_2, v_3) *dans* $\mathbb{R}^{3N}$*, on a :*

$$\begin{aligned} &3\Pi' L_3(\Pi v_1, \Pi v_2, \Pi v_3) + \Pi' L_2\big(\Pi v_1, \Gamma_2(\Pi v_2, \Pi v_3)\big) \\ &\quad + \Pi' L_2\big(\Pi v_2, \Gamma_2(\Pi v_1, \Pi v_3)\big) + \Pi' L_2\big(\Pi v_3, \Gamma_2(\Pi v_1, \Pi v_2)\big) \;=\; 0 \,. \end{aligned} \tag{tr3}$$

Preuve. Les identités (4.3) et (4.5) impliquent :

$$2 \; L_2(\Pi v_1, \Pi v_2) + L_1 \Gamma_2(\Pi v_1, \Pi v_2) = 0 \,.$$

On multiplie cette égalité à gauche par $f_0'(u)$ pour obtenir:

$$\sum_{j=1}^{d} \xi_j \; f_j''(u)(\Pi v_1, \Pi v_2) - \lambda(u,\xi) \; f_0''(u)(\Pi v_1, \Pi v_2)$$
$$+ \Big(\sum_{j=1}^{d} \xi_j \; f_j'(u) - \lambda(u,\xi) f_0'(u) \Big) \Gamma_2(u,\xi)(\Pi v_1, \Pi v_2) = 0 \,.$$

Dans cette expression, $\Pi = \Pi(u,\xi)$. On la dérive par rapport à u dans la direction h puis on multiplie l'identité obtenue à gauche par $f_0'(u)^{-1}$:

$$\begin{aligned}6L_3(\Pi v_1, \Pi v_2, h) + 2L_2\big((h\cdot\nabla_u\Pi)v_1, \Pi v_2\big) + 2L_2\big(\Pi v_1, (h\cdot\nabla_u\Pi)v_2\big)\\ +2L_2\big(h, \Gamma_2(\Pi v_1, \Pi v_2)\big) + L_1F_1 - (h\cdot\nabla_u\lambda)F_2 = 0\,.\end{aligned}$$

On teste contre $h = \Pi v_3$ et on projette à gauche selon Π'. Ces opérations ont pour effet d'annuler les contributions L_1F_1 et $(h\cdot\nabla_u\lambda)F_2$. Comme $v_1 = \Pi v_1$ et $v_2 = \Pi v_2$, il reste :

$$\begin{aligned}6\Pi' L_3(\Pi v_1, \Pi v_2, \Pi v_3) + 2\Pi' L_2\big((\Pi v_3\cdot\nabla_u\Pi)\Pi v_1, \Pi v_2\big)\\ +2\Pi' L_2\big(\Pi v_1, (\Pi v_3\cdot\nabla_u\Pi)v_2\big) + 2\Pi' L_2\big(\Pi v_3, \Gamma_2(\Pi v_1, \Pi v_2)\big) = 0\,.\end{aligned}$$

On utilise (4.5) pour exprimer $(\Pi v_3\cdot\nabla_u\Pi)\Pi v_1$ et $(\Pi v_3\cdot\nabla_u\Pi)\Pi v_2$ à l'aide de $\Gamma_2(\Pi v_1, \Pi v_3)$ et $\Gamma_2(\Pi v_2, \Pi v_3)$. En tenant compte de la symétrie de L_2 et Γ_2, on trouve l'identité (tr3). □

4.2 Construction des solutions approchées

On se donne une solution $\overline{u}_0$ de $(\dot{\mathcal{S}})$ dans $H^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^d)$. On suppose d'abord que

$$\bar u_1(t,x) = 0, \quad \forall\,(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d\,. \tag{4.6}$$

La phase φ est solution de (2.11) et la phase φ^1 est nulle.

Pour u_a^ε de la forme (2.6) (avec $n_1 = \infty$) on a

$$f_j\big(u_a^\varepsilon(t,x,\theta)\big) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{\varepsilon})^n\; f_{j,n}(t,x,\theta)\,.$$

avec :

$$\begin{aligned}&f_{j,0}(t,x) = f_j\big(\bar u_0(t,x)\big), \quad \forall\, j\in\{0,\dots,d\}\,.\\ &f_{j,n} := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\,!}\sum_{p_1+\ldots+p_k=n}(D_u^k f_j)(\bar u_0)(u_{p_1},\dots,u_{p_k}), \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*\,.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{S}(u_a^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta})u_a^\varepsilon \sim \Sigma(u_a^\varepsilon) f_0'(\overline{u}_0)\sum_{n=-1}^{+\infty}(\sqrt{\varepsilon})^n F_n\,, \qquad F_n = F_n^1 \,+\, \partial_\theta F_{n+2}^2$$

avec :

$$F^1_n := \sum_{j=0}^{d} f_0'(\bar u_0)^{-1}\ \partial_j f_{j,n}\ , \qquad F^2_n := \sum_{j=0}^{d} \partial_j\varphi\ f_0'(\bar u_0)^{-1}\ f_{j,n}\,.$$

On a introduit le facteur $f_0'^{-1}(\overline{u}_0)$ pour retrouver les notations du paragraphe 2.3 et on convient que $F^1_{-1}=0$. On obtient une solution approchée à l'ordre r si et seulement si :

$$F_n\ = F^1_n\ +\ \partial_\theta F^2_{n+2}\ =\ 0,\quad \forall\, n\in\{-1,\dots,2r-1\}\,.$$

On sépare F_n en sa moyenne et son oscillation, notant que $\partial_\theta F^2_{n+1}$ est toujours de moyenne nulle. Par ailleurs, utilisant (2.30), on sépare la condition $F^*_n=0$ en $\mathcal{P}'F^*_n=0$ et $\mathcal{Q}F^*_n=0$. On regroupe alors les conditions de la manière suivante :

$$(\mathcal{E}_n)\qquad\qquad \mathcal{Q}F^*_{n-1}=0\,,\quad \mathcal{P}'F^*_n=0\,,\qquad \overline{F}_{n+1}\ =\ 0\,,$$

Pour $n=-1$, on adopte la convention $F^*_{-2}=0$. Si les équations $(\mathcal{E}_n)$ sont satisfaites pour $n\in\{-1,\dots,2r\}$, alors $F_n=0$ pour $n\le 2r-1$, et u^ε_a est solution approchée à l'ordre r. On montre d'abord que $(\mathcal{E}_{-1})$ est toujours satisfaite et que $(\mathcal{E}_0)$ et $(\mathcal{E}_1)$ déterminent u^*_1 et $\overline{u}_2$. On donnera ensuite l'argument général de la récurrence.

4.2.1 Analyse des premiers termes

- <u>*L'équation* $(\mathcal{E}_{-1})$</u>. Avec les notations du paragraphe 2.3, on a :

$$F^*_{-1}=\partial_\theta F^2_1=\mathcal{L}_1\partial_\theta u_1\,,\qquad \overline{F}^1_0=\sum_{j=0}^{d} f_0'(\bar u_0)^{-1} f_j'(\bar u_0)\partial_j\bar u_0\,.$$

D'une part $F^*_{-2}=0$ et $\mathcal{P}'\mathcal{L}_1=0$. D'autre part $\overline{u}_0$ est solution de l'équation $(\dot{\mathcal{S}})$. On voit ainsi que l'équation $(\mathcal{E}_{-1})$ est satisfaite.

- <u>*L'équation* $(\mathcal{E}_0)$</u>. Comme $\mathcal{Q}\mathcal{L}_1=\mathrm{Id}-\mathcal{P}$, l'équation $\mathcal{Q}F^*_{-1}=0$ s'écrit $(\mathrm{Id}-\mathcal{P})\partial_\theta u_1=0$, et est donc équivalente à la condition de polarisation :

$$(\mathcal{Z}_0')\qquad\qquad (\mathrm{Id}-\mathcal{P})u^*_1=0\,.$$

Par ailleurs :

$$F^*_0=\partial_\theta F^2_2=\mathcal{L}_1\partial_\theta u_2+\partial_\theta\mathcal{L}_2(u_1,u_1)\,.$$
$$\bar F_1=\bar F^1_1=\sum_{j=0}^{d} f_0'(\bar u_0)^{-1}\ \partial_j\big(f_j'(\bar u_0)\bar u_1\big)\,.$$

La seconde équation est de toute évidence vérifiée puisqu'on a pris $\overline{u}_1 = 0$. Si u_1^* satisfait $(\mathcal{Z}_0')$, alors la condition de transparence (tr2) du lemme 4.1 implique que $\mathcal{P}' F_0^* = \partial_\theta \mathcal{P}' \mathcal{L}_2(\mathcal{P} u_1^*, \mathcal{P} u_1^*) = 0$. En conclusion, $(\mathcal{E}_0)$ se réduit à la condition de polarisation $(\mathcal{Z}_0')$ que l'on suppose dorénavant satisfaite.

- *L'équation* $(\mathcal{E}_1)$. L'équation $\mathcal{Q} F_0^* = 0$ s'écrit :

$$(\mathrm{Id} - \mathcal{P}) \partial_\theta u_2 = -\partial_\theta \mathcal{Q} \mathcal{L}_2(u_1, u_1) \,.$$

Comme ∂_θ est injective sur les fonctions à moyenne nulle et que $u_1 = u_1^*$, elle équivaut donc à :

$$(\mathcal{Z}_1') \qquad (\mathrm{Id} - \mathcal{P}) u_2^* = -\mathcal{Q} \mathcal{L}_2(\mathcal{P}\, u_1^*, \mathcal{P}\, u_1^*)^* = \frac{1}{2} \big(\Gamma_2(\mathcal{P} u_1^*, \mathcal{P} u_1^*) \big)^* \,.$$

Ensuite, le calcul fournit :

$$F_1^* = M u_1^* + \mathcal{L}_1 \partial_\theta u_3 + 2 \partial_\theta \mathcal{L}_2(u_1, u_2) + \partial_\theta \mathcal{L}_3(u_1, u_1, u_1) \,.$$

$$\bar{F}_2 = \sum_{j=0}^{d} f_0'(\bar{u}_0)^{-1} \; \partial_j \overline{f_{j,2}} \,.$$

Ici M est le linéarisé de $(\mathcal{S})$ en $\overline{u}_0$:

$$M v = M(t, x, \partial_{t,x})\, v := \sum_{j=0}^{d} f_0'(\bar{u}_0)^{-1} \; \partial_j \big(f_j'(\bar{u}_0)\, v \big) \,.$$

Lemme 4.3. *L'opérateur $\mathcal{P}' M \mathcal{P}$ est de la forme $\mathcal{P}'(X_0 + E)\mathcal{P}$ avec :*

$$X_0 := \partial_t \, + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_j} (\bar{u}_0, \partial_x \varphi) \partial_j \,, \qquad E := \sum_{j=0}^{d} \mathcal{P} f_0'(\bar{u}_0)^{-1} \; \partial_j \big(f_j'(\bar{u}_0) \mathcal{P} \big) \,.$$

Preuve. C'est un résultat classique, qui s'obtient en dérivant en ξ la relation $A(u,\xi)\Pi(u,\xi) = \lambda(u,\xi)\,\Pi(u,\xi)$, puis en multipliant à gauche par $\Pi'(u,\xi)$. Il vient

$$\Pi'(u,\xi)\, f_0'(u)^{-1} \, f_j'(u)\, \Pi(u,\xi) = \frac{\partial \lambda}{\partial \xi_j}(u,\xi)\, \Pi'(u,\xi) \Pi(u,\xi), \quad \forall\, j \in \{1, \dots, d\} \,.$$

Par définition de M on a :

$$\mathcal{P}' M \mathcal{P} v = \mathcal{P}' M \mathcal{P} (\mathcal{P} v) = \sum_{j=0}^{d} \mathcal{P}' f_0'(\bar{u}_0)^{-1} f_j'(\bar{u}_0) \mathcal{P} \partial_j (\mathcal{P} v)$$

$$+ \sum_{j=0}^{d} \mathcal{P}' \, f_0'(\bar{u}_0)^{-1} \, \partial_j \big(f_j'(\bar{u}_0)\, \mathcal{P} \big) \; \mathcal{P}\, v \,.$$

$\square$

L'équation $\mathcal{P}'F_1^* = 0$ fait apparaître l'opérateur $\mathcal{P}'M\mathcal{P}$ agissant sur la composante $u_1^* = \mathcal{P}u_1^*$; le terme $\mathcal{P}'\mathcal{L}_1\partial_\theta u_3$ s'annule. Comme $u_1 = u_1^* = \mathcal{P}u_1^*$, le lemme 4.1 implique que $\mathcal{P}'\mathcal{L}_2(u_1, \mathcal{P}u_2^*) = 0$. On a donc :

$$\partial_\theta \mathcal{P}'\mathcal{L}_2(u_1, u_2) = \mathcal{P}'\mathcal{L}_2(\partial_\theta u_1, \overline{u}_2) + \partial_\theta \mathcal{P}'\mathcal{L}_2(u_1^*, (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_2^*)\,.$$

Par $(\mathcal{Z}_1')$, le dernier terme s'exprime à l'aide de u_1^*. En outre, le lemme 4.2 implique :

$$\mathcal{P}'\mathcal{L}_3(u_1^*, u_1^*, u_1^*) + \mathcal{P}'\mathcal{L}_2(u_1^*, \Gamma_2(u_1^*, u_1^*)) = 0\,.$$

On en déduit que l'équation $\mathcal{P}'F_1^* = 0$ se réduit à :

$$\mathcal{P}'M\mathcal{P}u_1^* + 2\mathcal{P}'\mathcal{L}_2(\overline{u}_2, \partial_\theta \mathcal{P}u_1^*) - \mathcal{P}\mathcal{L}_2\big(\overline{\Gamma_2(u_1^*, u_1^*)}, \partial_\theta \mathcal{P}u_1^*\big) = 0\,.$$

On utilise l'identité (4.2) pour exprimer les deux terniers termes sous la forme $(w \cdot \nabla_u \lambda)\partial_\theta \mathcal{P}'\mathcal{P}u_1^*$. Notant :

$$\text{(4.7)} \qquad \begin{cases} h_1(t, x, u_1^*, \overline{u}_2) := \bar{u}_2 \cdot \nabla\lambda + < \mathcal{Q}\,\mathcal{L}_2(\mathcal{P}\,u_1^*, \mathcal{P}\,u_1^*) > \cdot\nabla\lambda \\ X = X_0 + h_1\partial_\theta \end{cases}$$

et explicitant les termes $\overline{f_{j,2}}$ intervenant dans $\overline{F}_2$, on a montré le résulat suivant.

Lemme 4.4. *Pour u_1 vérifiant* (4.6) *et* $(\mathcal{Z}_0')$*, les équations contenues dans* $(\mathcal{E}_1)$ *sont équivalentes à un système portant sur* $(\mathcal{P}u_1^*, \bar{u}_2)$ *:*

$$(\mathcal{Z}_1)\ : \qquad \begin{cases} \mathcal{P}'(X + E)\mathcal{P}u_1^* = 0 \\ M\bar{u}_2 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=0}^{d} f_0'(\bar{u}_0)^{-1}\partial_j < f_j''(\bar{u}_0)(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*) >= 0 \end{cases}$$

complété par la relation $(\mathcal{Z}_1')$ *qui détermine* $(\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_2^*$.

La résolution de $(\mathcal{Z}_1)$ n'est pas immédiate. La première équation est bien un transport pour $\mathcal{P}u_1^*$, mais elle dépend de $\overline{u}_2$ par l'intermédiaire du coefficient de ∂_θ, h_1. Par contre la seconde fait intervenir les dérivées en (t, x) du terme quadratique moyenné $< f_j''(\bar{u}_0)(u_1^*, u_1^*) >$. Néanmoins, le problème de Cauchy pour $(\mathcal{Z}_1)$ est bien posé. On note $H^s_{pol}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})$ l'espace des données initiales de regularité H^s pour $\mathcal{P}u_1^*$: il s'agit de l'espace des fonctions u dans $H^s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, de moyenne nulle et telles que $\mathcal{P}_{|t=0}u = u$.

Proposition 4.1. *Soit $s > \frac{3+d}{2}$. Pour toute donnée initiale $(\mathcal{P}u_{1,0}^*, \bar{u}_{2,0})$ sélectionnée dans $H_{pol}^{s+1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{R}^d)$, le système $(\mathcal{Z}_1)$ admet une unique solution $(\mathcal{P}u_1^*, \bar{u}_2)$ dans $\mathcal{W}^s(T) \times \mathcal{W}^s(T)$. La fonction $(\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_2^*$ définie par $(\mathcal{Z}_1')$ est alors dans $\mathcal{W}^s(T)$.*

Remarque 4.1. La perte de régularité des données H^{s+1} vers la solution $\mathcal{W}^s$ illustre le caractère “faiblement” hyperbolique de $(\mathcal{Z}_1)$. Par ailleurs, on notera que la solution existe sur l'intervalle $[0, T]$ où sont définis u_0 et φ, bien que le problème soit non linéaire.

Preuve. On introduit une inconnue auxiliaire $\psi_1(t, x)$ solution de l'équation

$$X_0\, \psi_1 = h_1, \qquad \psi_1(0, x) \;=\; 0\,. \tag{4.8}$$

On fait jouer à ψ_1 le rôle d'un décalage de phase. On procède au changement de fonction :

$$v_1^*(t, x, \theta) = \mathcal{P}u_1^*\big(t, x, \theta + \psi_1(t, x)\big). \tag{4.9}$$

Par construction, la première équation de $(\mathcal{Z}_1)$ est équivalente à :

$$\mathcal{P}'(X_0 + E)\mathcal{P}v_1^* = 0, \quad \mathcal{P}v_1^* = v_1^*. \tag{4.10}$$

En outre, pour toute fonction continue $g(t, x, u)$, on a :

$$\int_{\mathbb{T}} g\big(\mathcal{P}v_1^*(t, x, \theta')\big)\ d\theta' \;=\; \int_{\mathbb{T}} g\big(\mathcal{P}u_1^*(t, x, \theta)\big)\ d\theta\,.$$

En particulier, le coefficient h_1 défini en (4.7) vérifie :

$$h_1(t, x, u_1^*, \overline{u}_2) = h_1(t, x, v_1^*, \overline{u}_2)\,.$$

De même :

$$< f_j''(\bar{u}_0)(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*) >=< f_j''(\bar{u}_0)(\mathcal{P}v_1^*, \mathcal{P}v_1^*) > \ .$$

Il est alors clair que, par le changement d'inconnues (4.9), le système composé de $(\mathcal{Z}_1)$ et (4.8) pour $(\mathcal{P}u_1^*, \overline{u}_2, \psi_1)$ est équivalent au système suivant, portant sur les inconnues $(\mathcal{P}v_1^*, \overline{u}_2, \psi_1)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{P}'(X_0 + E)\mathcal{P}v_1^* = 0\,. \\ M\bar{u}_2 = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{d} f_0'(\bar{u}_0)^{-1}\partial_j < f_j''(\bar{u}_0)(\mathcal{P}v_1^*, \mathcal{P}v_1^*) > \ . \\ X_0\psi_1 = h_1(t, x, v_1^*, \overline{u}_2)\,. \end{array}\right. \tag{4.11}$$

Pour résoudre (4.11), on s'organise selon un ordre précis.

On détermine d'abord $v_1^* = \mathcal{P}v_1^* \in \mathcal{W}^{s+1}(T)$ comme solution de la première équation avec donnée de Cauchy $v^*_{1|t=0} = \mathcal{P}u^*_{1,0} \in H^{s+1}$. Il s'agit en effet d'une équation de transport, dans le fibré $\ker(\mathrm{Id} - \mathcal{P})$, et la condition (2.22) implique que le rang de $\mathcal{P}'\mathcal{P}$ est bien égal à la dimension de la fibre.

La seconde équation est une equation linéaire en $\overline{u}_2$ avec second membre connu dans $\mathcal{W}^s(T)$ puisque $s > d + 3/2$ (on perd au passage une dérivée). Comme le système M est hyperbolique symétrisable, cette équation a une unique solution telle que $\overline{u}_{2|t=0} = \bar{u}_{2,0} \in H^s$ et $\overline{u}_2 \in \mathcal{W}^s(T)$.

Ayant déterminé v_1^* et $\overline{u}_2$ le terme source h_1 de la troisième équation est connu et appartient à $\mathcal{W}^s(T)$. On résout alors cette équation avec la donnée initiale $\psi_{1|t=0} = 0$ pour trouver $\psi_1 \in \mathcal{W}^s(T)$.

On conclut en vérifiant que $\mathcal{P}u_1^*$ défini par (4.9) appartient à $\mathcal{W}^s(T)$, ce qui est vrai puisque s est assez grand. $\square$

4.2.2 La récurrence

On montre que le raisonnement tenu pour traiter $(\mathcal{E}_1)$ s'étend aux $(\mathcal{E}_n)$ qui suivent. Notons :

$$U_n = (\mathcal{P}u_n^*, \overline{u}_{n+1}, (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u^*_{n+1})\,.$$

Par construction, on a :

$$U_0 = (\mathcal{P}u_0^*, \bar{u}_1, (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_1^*) = (0, 0, 0)\,.$$

La proposition 4.1 fournit $U_1 \in \mathcal{W}^\infty(T)$ si les données initiales affectées à $(\mathcal{P}u_1^*, \overline{u}_2)$ sont dans H^∞. On retient que la composante $(\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_2^*$ est donnée par $(\mathcal{Z}_1')$.

Lemme 4.5. *Pour $n \geq 2$, supposons connus les U_k, pour $k < n$, dans $\mathcal{W}^\infty(T)$. Alors, l'équation $(\mathcal{E}_n)$ est équivalente à un système d'équations pour U_n de la forme*

$$(\mathcal{Z}_n) \qquad \begin{cases} \mathcal{P}'(X + E)\mathcal{P}u_n^* + \mathcal{P}'h_n\partial_\theta \mathcal{P}u_1^* + \mathcal{G}_{n-1} = 0. \\ M\bar{u}_{n+1} + \displaystyle\sum_{j=0}^{d} f_0'(\bar{u}_0)^{-1}\partial_j < f_j''(\bar{u}_0)(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*) > +\mathcal{G}_{n-1} = 0\,. \end{cases}$$

$$(\mathcal{Z}_n') \qquad (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u^*_{n+1} = -2\mathcal{Q}\big(\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*)\big)^* + \mathcal{G}_{n-1}\,.$$

Le champ de vecteurs X est déterminé en (4.7). *On a :*

$$h_n := \big(\overline{u}_{n+1} - < \Gamma_2(u_1^*, \mathcal{P}u_n^*) > \big) \cdot \nabla\lambda \,. \tag{4.12}$$

Les $\mathcal{G}_k$ désignent différentes expressions qui ne dépendent que de $(U_1, \dots , U_k)$ et de leurs dérivées.

Preuve. Pour $n \geq 2$, on a :

$$F_{n-1}^* = \mathcal{L}_1 \partial_\theta u_{n+1} + 2\partial_\theta \mathcal{L}_2(u_1, u_n) + \mathcal{H}_{n-1}$$

où les $\mathcal{H}_k$ sont des expressions qui ne dépendent que de $(u_0, \dots , u_k)$ et de leurs dérivées. En particulier, ce sont des fonction du type $\mathcal{G}_k$.

Poussant le développement un cran plus loin, on a, pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} F_n^* = M u_n^* + \mathcal{L}_1 \partial_\theta u_{n+2} + 2\partial_\theta \mathcal{L}_2(u_1, u_{n+1}) \\ + \iota_n \partial_\theta \mathcal{L}_2(u_2, u_n) + 3\partial_\theta \mathcal{L}_3(u_1, u_1, u_n) + \mathcal{H}_{n-1} \,. \end{aligned}$$

Le coefficient ι_n introduit ici vaut 1 si $n = 2$ et 2 pour $n > 2$. Par ailleurs, on trouve :

$$\overline{F}_{n+1} = M\overline{u}_{n+1} + \sum_{j=0}^{d} f_0'(\bar{u}_0)^{-1} \partial_j < f_j''(\bar{u}_0)(u_1^*, u_n^*) > + \mathcal{H}_{n-1} \,.$$

La première équation $\mathcal{Q}F_{n-1}^* = 0$ de $(\mathcal{E}_n)$ s'écrit, en inversant ∂_θ dans l'ensemble des fonctions de moyenne nulle :

$$(\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_{n+1}^* = -2\mathcal{Q}\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*)^* + \mathcal{G}_{n-1} = \big(\Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*)\big)^* + \mathcal{G}_{n-1} \,.$$

On obtient la forme $(\mathcal{Z}_n')$ annoncée.

De même, l'équation $\overline{F}_{n+1} = 0$ conduit directement à la seconde équation de $(\mathcal{Z}_n)$, en décomposant u_n^* en $\mathcal{P}u_n^* + (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_n^*$.

On analyse maintenant l'équation $\mathcal{P}'F_n^* = 0$. On a $\mathcal{P}'\mathcal{L}_1\partial_\theta u_{n+2} = 0$ et, d'après le lemme 4.1, $\mathcal{P}'\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_{n+1}^*) = 0$. Par conséquent, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'F_n^* =& \mathcal{P}'M\mathcal{P}u_n^* + 2\partial_\theta \mathcal{P}'\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_1^*, \overline{u}_{n+1} + (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_{n+1}^*) \\ &+ \iota_n \partial_\theta \mathcal{P}'\mathcal{L}_2(u_2, u_n) + 3\partial_\theta \mathcal{P}'\mathcal{L}_3(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*) + \mathcal{G}_{n-1} \,. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Avec $(\mathcal{Z}_n')$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_1^*, (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_{n+1}^*) = \mathcal{P}'\mathcal{L}_2\big(\mathcal{P}u_1^*, \Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*)\big) \\ - \mathcal{P}'\mathcal{L}_2\big(\mathcal{P}u_1^*, \overline{\Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*)}\big) + \mathcal{G}_{n-1} \,. \end{aligned}$$

Par le lemme 4.1, on a :

$$\mathcal{P}'\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_1^*, \overline{u}_{n+1}) = \mathcal{P}'(\overline{u}_{n+1} \cdot \nabla\lambda)\mathcal{P}u_1^* .$$
$$\mathcal{P}'\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_1^*, \overline{\Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*)}) = \mathcal{P}'(< \Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*) > \cdot\nabla\lambda)\mathcal{P}u_1^* .$$

Par le lemme 4.2, on a :

$$\begin{aligned} 3\mathcal{P}'\mathcal{L}_3(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*) = &-2\mathcal{P}'\mathcal{L}_2\big(\mathcal{P}u_1^*, \Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_n^*)\big) \\ &- \mathcal{P}'\mathcal{L}_2\big(\mathcal{P}u_n^*, \Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*)\big) . \end{aligned}$$

On sait par ailleurs que :

$$\mathcal{P}'\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_2^*, \mathcal{P}u_n^*) = 0, \qquad u_n - \mathcal{P}u_n^* = \mathcal{G}_{n-1} .$$

Por calculer le terme $\mathcal{L}_2(u_2, u_n)$, il convient de distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$. Pour $n = 2$, la composante $\mathcal{P}u_2^*$ est inconnue. Par contre, pour $n > 2$, $\mathcal{P}u_2^*$ est identifié. Quelque soit la situation, on a la décomposition :

$$\iota_n \mathcal{P}'\mathcal{L}_2(u_2, u_n) = 2\mathcal{P}'\mathcal{L}_2\big(\overline{u}_2 + (\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_2^*, \mathcal{P}u_n^*\big) + \mathcal{G}_{n-1} .$$

A l'aide de $(\mathcal{Z}_1')$, on extrait :

$$(\mathrm{Id} - \mathcal{P})u_2^* = \frac{1}{2}\big(\Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*)\big)^* = \frac{1}{2}\Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*) + < \mathcal{Q}\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*) > .$$

En utilisant le lemme 4.1, il vient :

$$\iota_n \mathcal{P}'\mathcal{L}_2(u_2, u_2) = \mathcal{P}'h_1\mathcal{P}u_n^* + \mathcal{P}'\mathcal{L}_2\big(\Gamma_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*), \mathcal{P}u_n^*\big) + \mathcal{G}_{n-1} ,$$

où la fonction $h_1 = (\overline{u}_2 + < \mathcal{Q}\mathcal{L}_2(\mathcal{P}u_1^*, \mathcal{P}u_1^*) >) \cdot \nabla\lambda$, définie comme en (4.7), ne dépend que des variables (t, x).

On assemble les renseignements obtenus ci-dessus pour réduire l'équation $\mathcal{P}'F_n^* = 0$ sous la forme :

$$\mathcal{P}'M\mathcal{P}u_n^* + \mathcal{P}'h_1\partial_\theta\mathcal{P}u_n^* + \mathcal{P}'h_n\partial_\theta\mathcal{P}u_1^* = \mathcal{G}_{n-1} . \tag{4.14}$$

Finalement, on applique le lemme 4.3. On voit que les contraintes figurant dans $(\mathcal{E}_n)$ se ramènent aux systèmes $(\mathcal{Z}_n)$ et $(\mathcal{Z}_n')$. Le lemme 4.5 est démontré. $\square$

Il reste à montrer que l'équation $(\mathcal{Z}_n)$ permet de déterminer les composantes $\mathcal{P}u_n^*$ et $\bar{u}_{n+1}$.

Proposition 4.2. *Pour $n \geq 2$, supposons connus les U_k, pour $k < n$, dans $\mathcal{W}^\infty(T)$. Alors, pour toute donnée initiale $(\mathcal{P}u^*_{n,0}, \bar{u}_{n+1,0})$ sélectionnée dans l'espace $H^\infty_{pol}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}) \times H^\infty(\mathbb{R}^d)$, le système $(\mathcal{Z}_n)$ admet une unique solution $(\mathcal{P}u^*_n, \bar{u}_{n+1})$ dans $\mathcal{W}^\infty(T)$. La fonction $(\mathrm{Id} - \mathcal{P})u^*_{n+1}$ définie par $(\mathcal{Z}'_n)$ est dans $\mathcal{W}^\infty(T)$.*

Preuve. On introduit à nouveau une inconnue auxiliaire $\psi_n(t,x)$ qui est solution de

$$X_0\,\psi_n \;=\; \bar{u}_{n+1} \cdot \nabla\lambda, \qquad \psi_n(0,x) \;=\; 0\,. \tag{4.15}$$

On effectue le changement d'inconnues

$$w^*_n(t,x,\theta) = \mathcal{P}w^*_n(t,x,\theta) := \mathcal{P}u^*_n(t,x,\theta) + \psi_n(t,x)\partial_\theta u^*_1(t,x,\theta)\,. \tag{4.16}$$

On a alors :

$$\mathcal{P}'(X+E)\mathcal{P}w^*_n = \mathcal{P}'(X+E)\mathcal{P}u^*_n + \mathcal{P}'(X_0\psi_n)\partial_\theta u^*_1 + \psi_n\mathcal{P}'(X+E)\mathcal{P}\partial_\theta u^*_1\,.$$

La dérivée ∂_θ commute avec l'opérateur $\mathcal{P}'(X+E)\mathcal{P}$ dont les coefficients ne dépendent pas de θ. Par suite, l'équation $(\mathcal{Z}_1)$ implique que le dernier terme est nul. Avec (4.15), la première équation de $(\mathcal{Z}_n)$ équivaut à :

$$\mathcal{P}'(X+E)\mathcal{P}w^*_n - (< \Gamma_2(u^*_1, \mathcal{P}u^*_n) > \cdot \nabla\lambda)\partial_\theta u^*_1 = \mathcal{G}_{n-1}\,.$$

La symétrie de Γ_2 fournit :

$$< \Gamma_2(u^*_1, \partial_\theta u^*_1) >= \frac{1}{2} < \partial_\theta \Gamma_2(u^*_1, u^*_1) >= 0\,.$$

On en déduit :

$$< \Gamma_2(u^*_1, \mathcal{P}u^*_n) >=< \Gamma_2(u^*_1, \mathcal{P}w^*_n) > \;.$$

De même, par symétrie des f''_j :

$$< f''_j(u_0)(u^*_1, \mathcal{P}u^*_n) >=< f''_j(u_0)(u^*_1, \mathcal{P}w^*_n) > \;.$$

On constate que les contraintes $(\mathcal{Z}_n)$ et (4.15) sont équivalentes au système suivant, portant sur les inconnues $(\mathcal{P}w^*_n, \bar{u}_{n+1}, \psi_n)$:

$$\begin{cases} \mathcal{P}'(X+E)\mathcal{P}w^*_n + \mathcal{P}'(< \Gamma_2(u^*_1, \mathcal{P}w^*_n) > \cdot \nabla\lambda)\partial_\theta u^*_1 = \mathcal{G}_{n-1}\,. \\ M\overline{u}_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{d} f'_0(\bar{u}_0)^{-1}\partial_j < f''_j(\bar{u}_0)(\mathcal{P}u^*_1, \mathcal{P}w^*_n) > + \mathcal{G}_{n-1}\,. \\ X_0\psi_n = \overline{u}_{n+1} \cdot \nabla_u\lambda\,. \end{cases}$$

On résout ces équations dans l'ordre. La première est associée à la donnée initiale $\mathcal{P}w^*_{n|t=0} = \mathcal{P}u^*_{n,0}$. Elle conduit à $w^*_n = \mathcal{P}w^*_n \in \mathcal{W}^\infty(T)$. Dès lors, la seconde équation met en jeu un terme source connu. Avec la donnée initiale $\overline{u}_{n+1,0}$, elle détermine $\overline{u}_{n+1} \in \mathcal{W}^\infty(T)$. La dernière équation donne accès à ψ_n. Enfin, le changement d'inconnues inverse de (4.16) fournit $\mathcal{P}u^*_n$. On a ainsi une solution $(\mathcal{P}u^*_n, \overline{u}_{n+1})$ de $(\mathcal{Z}_n)$. $\square$

4.3 Démonstration du théorème 3.1, cas général

L'analyse du paragraphe 4.2 fournit une démonstration du théorème 3.1 lorsqu'on a $\overline{u}_1 = 0$. On montre maintenant que la méthode s'adapte au cas général. L'idée est que la construction des solutions BKW est explicite et dépend continûment des données $\overline{u}_0$ et φ.

Soit $\overline{u}_{1,0} \in H^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour $\delta > 0$ assez petit, le problème de Cauchy pour (1.1) avec la donnée initiale

$$\bar{u}^\delta_0(0,x) = \bar{u}_0(0,x) + \delta \bar{u}_1(0,x)$$

admet une unique solution $\bar{u}^\delta_0(t,x)$ telle que $\bar{u}_0 - \bar{u}^\delta_0$ est bornée dans $\mathcal{W}^\infty(T)$. De même, pour $\delta > 0$ assez petit, l'équation eikonale

$$\partial_t \varphi^\delta + \lambda(\bar{u}^\delta_0, \partial_x \varphi^\delta) \;=\; 0, \qquad \varphi^\delta(0,x) = \varphi_0(x)$$

détermine la phase φ^δ telle que $d\varphi^\delta - d\varphi$ est bornée dans $\mathcal{W}^\infty(T)$.

On effectue la construction du paragraphe 4.2 autour des états de base $\bar{u}^\delta_0$. On obtient ainsi des solutions asymptotiques de $(\mathcal{S})$:

$$u^{\varepsilon,\delta}(t,x,\theta) \sim \overline{u}^\delta_0 + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^{n/2} u_n(\delta,t,x,\theta)$$

ou encore des solution asymptotiques

$$\widetilde{u}^{\varepsilon,\delta}(t,x) \sim \overline{u}^\delta_0 + \sum_{n\geq 1} \varepsilon^{n/2} u_n\Big(\delta,t,x,\frac{\varphi^\delta(t,x)}{\varepsilon}\Big)$$

de (1.1). La construction montre que les profils $u_n(\delta,\cdot)$ et les phases φ^δ sont des fonctions C^∞ en $\delta \in [0,\delta_0]$, si les données initiales pour les $\mathcal{P}^\delta u_n(\delta)$ et les $\overline{u}_{n+1}(\delta)$ le sont. On approche alors les différentes expressions u^δ_j, φ^δ, $\mathcal{P}^\delta$, ... par leurs développements de Taylor lorsque δ tend vers zéro. En particulier :

$$\begin{aligned}
&\bar{u}_0(\delta,t,x) = \bar{u}_0(t,x) + \delta\ \bar{u}_1(t,x) \;+\; \bigcirc(\delta^2)\,.\\
&\varphi^\delta(t,x) = \varphi(t,x) + \delta\ \varphi^1(t,x) \;+\; \bigcirc(\delta^2)\,.\\
&u_1(\delta,t,x) = u^*_1(t,x,\theta) + \bigcirc(\delta)\,.
\end{aligned}$$

Les équations qui déterminent $\bar{u}_1$ et φ^1 sont respectivement le linéarisé de (1.1) en $\bar{u}_0$ et le linéarisé de l'équation eiconale en $(\varphi, \bar{u}_0)$. Ceci est conforme à ce qui est annoncé au paragraphe 2.2.

Finalement, on peut lier les paramètres δ et ε en choisissant $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. On a alors

$$\frac{\varphi^\delta}{\varepsilon} = \frac{\varphi_\varepsilon}{\varepsilon} + \psi(\sqrt{\varepsilon}, t, x)\,, \quad \varphi_\varepsilon := \varphi + \sqrt{\varepsilon}\varphi^1$$

où ψ est C^∞ en (σ, t, x). Développant

$$u_n(\sqrt{\varepsilon}, t, x, \theta + \psi(\sqrt{\varepsilon}, t, x)) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^{k/2} u_{n,k}(t, x, \theta)$$

et regroupant les termes en $v_n = \sum_{p+q=n} u_{p,q}$, on voit que

$$\widetilde{u}_a^{\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}}(t, x) \sim \overline{u}_0 + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^{n/2} v_n\Big(t, x, \frac{\varphi_\varepsilon}{\varepsilon}\Big)$$

a bien la forme (1.2). En particulier, on trouve :

$$v_1(t, x, \theta) = \overline{u}_1(t, x) + u_1^*(t, x, \theta)\,.$$

Il reste à voir qu'on peut choisir arbitrairement les données initiales $\overline{v}_{n+1,0}$ et les $\mathcal{P}v^*_{n,0}$ pour $n \geq 2$. Par exemple, on peut choisir les données initiales $\overline{u}_{n+1}(\delta)_{|t=0} = \overline{v}_{n+1,0}$. Dans ce cas, on a bien pour $n \geq 2$:

$$\overline{v}_{n+1|t=0} = \sum_{p+q=n+1} u_{p,q|t=0} = \overline{v}_{n+1,0}\,.$$

De même, si on choisit par récurrence sur n les données initiales

$$\mathcal{P}^\delta u_n^*(\delta)_{|t=0} = \mathcal{P}^\delta\big(\mathcal{P}v^*_{n,0} - \sum_{p=1}^{n-1} u^*_{p,n-p|t=0}\big)$$

on a

$$\mathcal{P}v^*_{n|t=0} = \big(\mathcal{P}^\delta u_n^*(\delta)\big)_{|\delta=0,t=0} + \mathcal{P}\sum_{p=1}^{n-1} u^*_{p,n-p|t=0}$$

et comme $(P^\delta)_{|\delta=0} = \mathcal{P}$, on a bien $(\mathcal{P}v_{n^*})_{|t=0} = \mathcal{P}v^*_{n,0}$.

4.4 Interactions entre modes linéairement dégénérés

Pour la dynamique des gaz, la dimension κ de l'espace propre $E(u,\xi)$ est égale à d. Le profil u_1^* se sépare en une partie de type vitesse, polarisée dans l'espace orthogonal au vecteur $\nabla\varphi$ et une composante sur l'entropie. L'analyse de stabilité indique que la composante s occupe un statut à part. Il est naturel de se demander si une oscillation forte polarisée sur s reste confinée à s, malgré les interactions qui se produisent. Si $\bar{u}_0$ est un état constant, on va voir que la réponse est négative mais il est intéressant de noter que pour des $\bar{u}_0$ généraux, les oscillations sur s se transmettent effectivement à la vitesse.

Dans un premier temps, il convient d'indiquer pour un système général (1.1) les conditions d'existence de variables d'état dont le rôle est analogue à celui de l'entropie pour l'équation d'Euler. Avec les notations du paragraphe 2.1, on pose :

$$\mathbb{F}(u) := \bigcap_{\xi\neq 0} E(u,\xi), \qquad \grave{\kappa}(u) := \dim\ \mathbb{F}(u) \geq 0\,. \tag{4.17}$$

Pour un système général, on s'attend à ce que $\mathbb{F}(u) = \{0\}$. Toutefois, on remarque que pour le système d'Euler, $\mathbb{F}(u)$ est précisément l'espace où varie la composante associée à l'entropie. L'hypothèse suivante est satisfaite pour le système des équations d'Euler (2.37)

Hypothèse 4.1. *La dimension $\grave{\kappa}(u)$ est une constante strictement positive.*

Sous cette hypothèse, le système (1.1) hérite de propriétés supplémentaires, décrites et établies dans [4]. On utilise dans ce paragraphe les renseignements suivants. D'abord il est possible de redresser $\mathbb{F}(u)$. Autrement dit, aprrès changement de variables d'état, on peut décomposer $u = (\acute{u}, \grave{u})$:

$$\mathbb{F}(u) = \mathbb{F} := \{\acute{u} = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R}^{\grave{\kappa}}\,. \tag{4.18}$$

Ensuite, la valeur propre $\lambda(u,\xi)$ est linéaire en ξ et indépendante de $\grave{u}$:

$$\lambda(u,\xi) \;=\; \xi\cdot\mu(\acute{u}) \;=\; \sum_{j=1}^{d} \xi_j\ \mu_j(\acute{u})\,. \tag{4.19}$$

On note $\grave{\mathcal{P}}$ le projecteur (orthogonal) sur $\mathbb{F}$. On a :

$$f_j'(u)\,\grave{\mathcal{P}} \;=\; \mu_j(\acute{u})\ f_0'(u)\,\grave{\mathcal{P}}, \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, j \in \{1,\ldots,d\}\,. \tag{4.20}$$

Après intégration, cela implique :

$$f_j(u) = \mu_j(\acute{u})\ f_0(u) + g_j(\acute{u}), \quad \forall\, u \in \mathbb{R}^N, \quad \forall\, j \in \{1, \ldots, d\}\,. \tag{4.21}$$

Par exemple, pour l'équation d'Euler (2.37), on a :

$$\grave{\kappa} = 1\,, \qquad \mathbb{F} = \big\{ {}^t(0,0,s)\,;\ s \in \mathbb{R} \big\}\,.$$
$$\text{pour } u = {}^t(p,v,s)\ : \quad \acute{u} = {}^t(p,v), \quad \grave{u} = s\,, \quad \grave{P}u = {}^t(0,0,s)\,.$$

La décomposition (4.21) a lieu avec :

$$f_0(u) = \beta(p,s)\,{}^t(1,v,s), \quad \mu_j(\acute{u}) = v_j, \quad g_j(\acute{u}) = p\,{}^t(\delta_{ij})_{0 \leq i \leq d+1}\,.$$

On cherche des solutions $(u_1^*, \bar{u}_2)$ de l'équation $(\mathcal{Z}_1)$ vérifiant la condition supplémentaire :

$$u_1^* = \grave{\mathcal{P}} u_1^* \tag{4.22}$$

qui implique bien sûr que $u_1^* = \mathcal{P} u_1^*$ puisque $\mathbb{F} \subset E(\bar{u}_0(t,x), \partial_x \varphi(t,x))$. On considère donc des données initiales vérifiant :

$$u_{1,0}^* = \grave{\mathcal{P}} u_{1,0}^*\,. \tag{4.23}$$

Dans ce qui suit, on choisit pour $\mathcal{P}$ le projecteur orthogonal sur $\ker \mathcal{L}_1$, de sorte que :

$$\mathcal{P}\grave{\mathcal{P}} = \grave{\mathcal{P}}\mathcal{P} = \grave{\mathcal{P}}\,. \tag{4.24}$$

Proposition 4.3. *Les solutions de* $(\mathcal{Z}_1)$ *vérifient* (4.22) *pour toutes les données initiales dans* H^∞ *astreintes à* (4.23) *si et seulement si :*

$$(\mathcal{P} - \grave{\mathcal{P}})\, f_0'(\bar{u}_0)^{-1}\ f_0''(\bar{u}_0)\,(X_0\,\bar{u}_0, \grave{\mathcal{P}} v)\ =\ 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^N\,. \tag{4.25}$$

Preuve. On se place dans des variables où (4.18) est vérifié. On étudie la différence :

$$d(t,x,\theta) := (\mathcal{P} - \grave{\mathcal{P}}) u_1^*(t,x,\theta) = \mathcal{P} d(t,x,\theta)\,.$$

D'après (2.22), l'équation $(\mathcal{Z}_1)$ s'écrit encore :

$$\mathcal{P}(X + E)\mathcal{P} u_1^* = 0\,.$$

On compose à gauche avec $\grave{\mathcal{P}}$. On utilise (4.24) et le fait que la projection $\grave{\mathcal{P}}$ ne dépend pas des variables (t,x) pour récupérer :

$$\mathcal{P} X \grave{\mathcal{P}} u_1^* + \grave{\mathcal{P}} E \mathcal{P} u_1^* = 0\,.$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}X\mathcal{P}d = -(\mathcal{P} - \grave{\mathcal{P}})E\mathcal{P}d - (\mathcal{P} - \grave{\mathcal{P}})E\grave{\mathcal{P}}u_1^* \,.$$

La quantité $d = \mathcal{P}d$ est donc solution d'un système différentiel. Le critère nécessaire et suffisant pour qu'une fonction d nulle à l'instant initial le reste s'écrit :

$$(\mathcal{P} - \grave{\mathcal{P}})\, E\, \grave{\mathcal{P}}\, v \;=\; 0, \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^N \,.$$

D'après (4.20) et la définition de la matrice E, on a la simplification :

$$\begin{aligned}(\mathcal{P} - \grave{\mathcal{P}})\, E\, \grave{\mathcal{P}}\, v \;&=\; \sum_{j=0}^{d} (\mathcal{P} - \grave{\mathcal{P}})\, f_0'(\bar{u}_0)^{-1}\; \partial_j\big(\mu_j(\bar{u}_0)\;f_0'(\bar{u}_0)\,\grave{\mathcal{P}}v\big)\\ &=\; (\mathcal{P} - \grave{\mathcal{P}})\, f_0'(\bar{u}_0)^{-1}\; f_0''(\bar{u}_0)\,(X_0\,\bar{u}_0, \grave{\mathcal{P}}v)\,.\end{aligned}$$

On voit apparaître à cet endroit la condition (4.25). □

En particulier, la condition (4.25) est satisfaite quand

$$X_0\,\bar{u}_0 \;=\; 0\,. \tag{4.26}$$

Comme $\bar{u}_0$ est aussi solution de (1.1), on est en présence d'un système d'équations surdéterminé. Ce système admet cependant des solutions particulières. Par exemple les fonctions constantes.

Pour la dynamique des gaz (2.37), si l'état de base $\bar{u}_0 = (\bar{p}_0, \bar{v}_0, \bar{s}_0)$ vérifie $X_0(\bar{p}_0, \bar{s}_0) \equiv 0$ et $X_0\bar{v}_0 \not\equiv 0$, un simple calcul indique que la contrainte (4.26) n'est pas vérifiée. Cela signifie que des oscillations fortes polarisées à l'instant initial sur s se transmettent lorsque le temps évolue en des oscillations fortes sur la vitesse. Du coup, elles engendrent une instabilité forte (cf paragraphe 6).

5 Stabilité hyperbolique

On étudie la stabilité de $(\mathcal{S})$ autour d'une solution approchée u_a^ε construite au paragraphe 4. Pour simplifier, on suppose ici que $\overline{u}_1 = 0$, ce qui par l'analyse du paragraphe 4.3, n'est pas une restriction.

5.1 Analyse du linéarisé

On considère une solution approchée de $(\mathcal{S})$, ou plus généralement une famille de fonctions de la forme

$$u^\varepsilon(t,x,\theta) = \bar{u}_0(t,x) + \sqrt{\varepsilon}u_1(t,x,\theta) + \varepsilon v^\varepsilon(t,x,\theta) \tag{5.1}$$

avec v^ε bornée dans l'espace des fonctions Lipschitziennes sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}$. Le linéarisé de $(\mathcal{S})$ en u^ε s'écrit :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_c^\varepsilon \dot u = & \sum_{j=0}^{d} \Sigma_j(u^\varepsilon)\partial_j \dot u + \frac{1}{\varepsilon}\Sigma(u^\varepsilon, \partial_x\varphi)\partial_\theta \dot u \\
& + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{d} \partial_j\varphi\big(\dot u\cdot\nabla_u\Sigma_j(u^\varepsilon)\big)\partial_\theta u^\varepsilon + \sum_{j=0}^{d}\big(\dot u\cdot\nabla_u\Sigma_j(u^\varepsilon)\big)\partial_j u^\varepsilon\,.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

La partie différentielle est symétrique. La difficulté vient des termes singuliers. On a

$$\Sigma(u^\varepsilon, \partial_x\varphi) = A_0 + \sqrt{\varepsilon}A_1 + \varepsilon A_2$$

avec :

$$A_0 = S(\bar u_0, d\varphi) = \Sigma(\bar u_0, \partial_x\varphi)\,. \tag{5.3}$$

$$A_1 = (u_1\cdot\nabla_u S)(\bar u_0, d\varphi) = (u_1\cdot\nabla_u\Sigma)(\bar u_0, \partial_x\varphi)\,. \tag{5.4}$$

Ici A_2 est une fonction régulière de $(\varepsilon, \bar u_0, u_1, v, \partial_x\varphi)$. On a utilisé que φ est solution de l'équation eikonale, que λ est linéairement dégénérée, que $\bar u_1 = 0$ et que $u_1 = u_1^*$ est polarisé sur le noyau de $\mathcal{L}_1$. De même :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{d}\partial_j\varphi(\dot u\cdot\nabla\Sigma_j(u^\varepsilon))\partial_\theta u^\varepsilon &= (\dot u\cdot\nabla_u S)(\bar u_0, d\varphi)\partial_\theta u^\varepsilon \\
&= \sqrt{\varepsilon}B_1\dot u + \varepsilon B_2\dot u\,.
\end{aligned}
$$

Ici B_2 est une fonction régulière de $(\varepsilon, \bar u_0, u_1, v, \partial_x\varphi)$ et :

$$B_1\dot u = (\dot u\cdot\nabla_u S)(\bar u_0, d\varphi)\partial_\theta u_1\,. \tag{5.5}$$

On décompose B_1 en $B_1' + B_1''$ avec :

$$
\begin{cases}
B_1'\dot u = \dot u\cdot\nabla_u\Sigma(\bar u_0, \partial_x\varphi)\partial_\theta u_1\,. \\
B_1''\dot u = (\dot u\cdot\nabla_u\lambda)(\bar u_0, \partial_x\varphi)\Sigma_0(\bar u_0)\partial_\theta u_1\,.
\end{cases}
\tag{5.6}
$$

Avec $R_j := \Sigma_j(u^\varepsilon)$, le linéarisé s'écrit alors sous la forme

$$\mathcal{L}_c^\varepsilon = \sum_{j=0}^{d} R_j\partial_j + A_2\partial_\theta + \frac{1}{\varepsilon}A_0\partial_\theta + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(A_1\partial_\theta + B_1) + C$$

où C est une fonction régulière de $(\varepsilon, \bar u_0, u_1, v, \partial_x\varphi)$.

Les R_j et les A_j sont des applications symétriques et uniformément Lipchitziennes. La matrice A_0 est symétrique et indépendante de θ tandis que C est uniformément bornée. La méthode d'énergie standard, qui consiste à intégrer $(\mathcal{L}_c^\varepsilon \dot{u}, \dot{u})$, conduit à un terme singulier :

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\big(D(u_1)\dot{u}, \dot{u}\big)\,, \quad D(u_1) = -\partial_\theta A_1 + B_1 + {}^t B_1\,. \tag{5.7}$$

On décompose cette matrice D en $D' + D''$ avec :

$$D'(u_1) = -\partial_\theta A_1 + B_1' + {}^t B_1'\,, \quad D''(u_1) = B_1'' + {}^t B_1''\,. \tag{5.8}$$

On analyse d'abord la structure des termes singuliers. Pour des raisons évidentes de symétrie, on choisit maintenant les projecteurs $\Pi_\perp(u,\xi)$, projecteurs orthogonaux sur le noyau de $\Sigma(u,\xi)$. Comme au paragraphe 3, on note $\mathcal{P}_\perp = \Pi_\perp(\bar{u}_0, \partial_x\varphi)$.

Lemme 5.1. *Les matrices A_1 et B_1 vérifient :*

$$\mathcal{P}_\perp A_1 \mathcal{P}_\perp = 0\,. \tag{5.9}$$

$$\mathcal{P}_\perp B_1' = 0\,, \quad B_1''\mathcal{P}_\perp = 0\,, \quad \mathcal{P}_\perp B_1 \mathcal{P}_\perp = 0\,. \tag{5.10}$$

$$(B_1 - \partial_\theta A_1)\mathcal{P}_\perp = 0\,. \tag{5.11}$$

Preuve. C'est une conséquence des relations de transparence. On a $\Sigma(u,\xi)\Pi_\perp(u,\xi) = 0$ et par symétrie $\Pi_\perp(u,\xi)\Sigma(u,\xi) = 0$. En dérivant la première identité dans la direction h, il vient :

$$h \cdot \nabla_u \Sigma(u,\xi)\Pi_\perp(u,\xi) = -\Sigma(u,\xi)\big(h \cdot \nabla_u \Pi_\perp(u,\xi)\big)\,. \tag{5.12}$$

En particulier :

$$\Pi_\perp(u,\xi)\big(h \cdot \nabla_u \Sigma(u,\xi)\big)\Pi_\perp(u,\xi) = 0\,. \tag{5.13}$$

Appliquée en $u = \bar{u}_0$, $\xi = \partial_x\varphi$ et $h = u_1$, cette identitée implique que $\mathcal{P}_\perp A_1 \mathcal{P}_\perp = 0$. Comme $\partial_\theta u_1 = \Pi_\perp(\bar{u}_0,\xi)\partial_\theta u_1$, on a aussi $\mathcal{P}_\perp B_1' = 0$. Par ailleurs, $h \cdot \nabla\lambda(u,\xi) = 0$ quand $h = \Pi_\perp(u,\xi)h$, d'où $B_1''\mathcal{P}_\perp = 0$.

On pose $h_1 = \partial_\theta u_1 = \Pi_\perp h_1$. On se donne k avec $k = \Pi_\perp k$. On a :

$$(B_1 - \partial_\theta A_1)k = (k \cdot \nabla_u \Sigma)h_1 - (h_1 \cdot \nabla_u \Sigma)k,$$

les matrices étant évaluées en $u = \bar{u}_0$ et $\xi = \partial_x\varphi$. On a aussi via (5.12) :

$$(B_1 - \partial_\theta A_1)k = -\Sigma\big((k \cdot \nabla_u \Pi_\perp)h_1 - (h_1 \cdot \nabla_u \Pi_\perp)k\big)\,.$$

On interprète cette égalité à l'aide de (4.5). On trouve :

$$(B_1 - \partial_\theta A_1)k = -\Sigma\big(\Gamma_2(k, h_1) - \Gamma_2(h_1, k)\big)\,.$$

La symétrie de Γ_2 donne accès à $(B_1 - \partial_\theta A_1)\mathcal{P}_\perp = 0$. $\square$

On peut visualiser ce lemme sous une forme matricielle. Dans une base constituée d'une base de $\ker \mathcal{P}_\perp$ et d'une base de $\mathrm{im}\mathcal{P}_\perp$, on a :

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_0^{1,1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A_1^{1,1} & A_1^{1,2} \\ {}^tA_1^{1,2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

$$B_1' = \begin{pmatrix} {B_1'}^{1,1} & \partial_\theta A_1^{1,2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1'' = \begin{pmatrix} B_1''^{1,1} & 0 \\ B_1''^{2,1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

Par conséquent, la matrice D définie en (5.7) se met sous la forme :

$$D = \begin{pmatrix} B_1^{1,1} + {}^tB_1^{1,1} - \partial_\theta A_1^{1,1} & {}^tB_1''^{2,1} \\ B_1''^{2,1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

On peut simplifier la forme du linéarisé à l'aide d'un changement d'inconnues

$$\dot{u} = \phi^\varepsilon \check{u}\,, \quad \phi^\varepsilon = \mathrm{Id} + \sqrt{\varepsilon}\phi_1(t,x,\theta)\,, \tag{5.17}$$

où ϕ_1 est une matrice régulière en (t,x,θ). On pose alors :

$$\check{\mathcal{L}}\check{u} :=^t \phi^\varepsilon \mathcal{L}_c^\varepsilon \dot{u} =^t \phi^\varepsilon \mathcal{L}_c^\varepsilon \phi^\varepsilon \check{u}\,. \tag{5.18}$$

L'opérateur $\check{\mathcal{L}}$ a clairement la même forme que $\mathcal{L}_c^\varepsilon$:

$$\check{\mathcal{L}} = \sum_{j=0}^{d} \check{R}_j \partial_j + \check{A}_2 \partial_\theta + \frac{1}{\varepsilon}\check{A}_0\partial_\theta + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\check{A}_1\partial_\theta + \check{B}_1) + \check{C}\,.$$

De nouveau les matrices symétriques $\check{R}_j$ et $\check{A}_j$ sont des fonctions régulières de (u_0, u_1, v) et ϕ_1. La partie $\check{C}$ dépend en outre des dérivées de ϕ_1. On a :

$$\begin{cases} \check{A}_0 = A_0\,. \\ \check{A}_1 = A_1 + {}^t\phi_1 A_0 + A_0\phi_1\,. \\ \check{B}_1 = B_1 + A_0\partial_\theta\phi_1\,. \end{cases} \tag{5.19}$$

Proposition 5.1. *On peut choisir ϕ_1 de sorte que :*

$$\begin{aligned} &\check{A}_1 = 0\,, \qquad\qquad \check{B}_1\mathcal{P}_\perp = 0\,. \\ &\mathcal{P}_\perp\check{B}_1(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) = \mathcal{P}_\perp B_1''(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp)\,. \\ &(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp)\check{B}_1(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) = \tfrac{1}{2}(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp)\big(B_1 + {}^tB_1 - \partial_\theta A_1\big)(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp)\,. \end{aligned}$$

Preuve. On note $\mathcal{Q}_\perp = Q_\perp(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)$ où $Q_\perp(u,\xi)$ désigne l'inverse partiel de $\Sigma(u,\xi)$. Avec ces conventions, on a :

$$Q_\perp \Sigma = \Sigma Q_\perp = \mathrm{Id} - \Pi_\perp , \quad Q_\perp \Pi_\perp = \Pi_\perp Q_\perp = 0, \quad A_0 \mathcal{Q}_\perp = \mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp \,.$$

On pose :

$$\phi_1 := -\mathcal{Q}_\perp \Big(\frac{1}{2} A_1 (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) + A_1 \mathcal{P}_\perp + Z (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \Big) \,.$$

La matrice Z est pour l'instant inconnue. On prend Z antisymétrique. Ainsi l'introduction de Z ne modifie pas le calcul de $\check{A}_1$ qui livre, pour ce choix de ϕ_1, le premier résultat $\check{A}_1 = 0$.

On se tourne alors vers $\check{B}_1$. On obtient :

$$\begin{aligned} \check{B}_1 = B_1 &- \frac{1}{2} (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \partial_\theta A_1 (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \\ &- (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \partial_\theta A_1 \mathcal{P}_\perp - (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \partial_\theta Z (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \,. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\check{B}_1 \mathcal{P}_\perp = B_1 \mathcal{P}_\perp - (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \partial_\theta A_1 \mathcal{P}_\perp \,.$$

Les relations établies au lemme 5.1 fournissent :

$$\check{B}_1 \mathcal{P}_\perp = 0, \qquad \mathcal{P}_\perp \check{B}_1 (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) = \mathcal{P}_\perp B_1'' (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \,.$$

Il reste à traiter :

$$(\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \check{B}_1 (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) = (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \Big(B_1 - \frac{1}{2} \partial_\theta A_1 - \partial_\theta Z \Big) (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_\perp) \,.$$

On rappelle que B_1 est une fonction linéaire de $u_1 = u_1^*$. C'est donc une fonction de moyenne nulle en θ. Le terme $\partial_\theta Z$ permet d'absorber la partie antisymétrique de B_1. Il suffit pour cela de poser $\partial_\theta Z = \frac{1}{2}(B_1 - {}^t B_1)$. Dès lors, on voit apparaître la dernière égalité de la proposition 5.1. $\square$

Dans une base comme en (5.14), on a :

$$\check{B}_1 = \begin{pmatrix} \check{B}_1^{1,1} & 0 \\ B_1''^{2,1} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \quad \check{B}_1^{1,1} = {}^t \check{B}_1^{1,1} \,.$$

Comme A_0 est symétrique et ne dépend que des variables (t,x), on a, comme on pouvait le prévoir :

$$\check{D} := -\partial_\theta \check{A}_1 + \check{B}_1 + {}^t \check{B}_1 = \check{B}_1 + {}^t \check{B}_1 = D \,.$$

Soit encore :

$$\check{D} = D = \begin{pmatrix} 2\check{B}_1^{1,1} & {}^t B_1''^{2,1} \\ B_1''^{2,1} & 0 \end{pmatrix} . \tag{5.20}$$

On termine ce paragraphe par un examen du terme :

$$D'(u_1) = -\partial_\theta A_1 + B_1' + {}^t B_1' .$$

On se sert des définitions (2.25), (5.4) et (5.6) pour exprimer le produit scalaire $(D'\dot{u}, \dot{u})$ autrement :

$$(D'\dot{u}, \dot{u}) = 2\mathcal{B}l'(\bar{u}_0, \partial_x \varphi)(\partial_\theta u_1; \dot{u}, \dot{u}) . \tag{5.21}$$

On peut à présent prouver que la condition $D'(u_1) = 0$ a une signification intrinsèque.

Lemme 5.2. *Considérant $\Sigma(u,\xi)$ comme un tenseur 2 fois covariant, pour tout $(u,\xi) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ et tout $h_1 \in E(u,\xi)$, $\mathcal{B}l'(u,\xi)(h_1; \cdot, \cdot)$ est la dérivée de Lie de ce tenseur en (u,ξ), le long d'un champ $X(v)$ défini au voisinage de u, tel que $X(\cdot) \in E(\cdot,\xi)$ et $X(u) = h_1$.*

Preuve. On fixe $\xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$. Soit X un champ tel que :

$$X(u) = h_1, \quad (\mathrm{Id} - \Pi)(v,\xi) X(v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{U} .$$

Autrement dit, il existe une fonction $h(v)$ vérifiant :

$$h(u) = h_1, \quad X(v) = \Pi(v,\xi) h(v), \quad \forall v \in \mathcal{U} .$$

La dérivée de X en u le long du vecteur k est donnée par :

$$X'(u)k = (k \cdot \nabla_u \Pi)(u,\xi) h_1 + \Pi(u,\xi) \big(k \cdot \nabla h(u)\big) .$$

La quantité $X'(u)$ peut être représentée comme une matrice de taille $N \times N$. D'après (5.12), on a :

$$(k \cdot \nabla_u \Sigma)(u,\xi) h_1 = -\Sigma(u,\xi)(k \cdot \nabla_u \Pi)(u,\xi) h_1 = -\Sigma(u,\xi) X'(u) k .$$

La matrice de la forme quadratique associée à $\mathcal{B}l'(h_1; \cdot, \cdot)$ s'interprète alors, au regard de ce qui précède et la définition (2.25), suivant :

$$(X \cdot \nabla_u \Sigma + \Sigma X' + {}^t X' \Sigma)(u,\xi) .$$

On reconnait en cette expression la dérivée de Lie du tenseur 2 fois covariant $\Sigma(\cdot,\xi)$ le long du champ X. $\square$

5.2 Bon symétriseur

La notion de *bon symétriseur* est dégagée dans [7], [15] et [26]. Elle concerne la dimension un d'espace. Elle s'applique par exemple au système de lois de conservation :

$$\partial_t f_0(u) + \partial_y \Big(\sum_{j=1}^{d} \xi_j \ f_j(u) \Big) = 0 \,. \tag{5.22}$$

Le vecteur $\xi \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ est fixé. La lettre y répresente la variable $y = \xi \cdot x \in \mathbb{R}$. La notion de bon symétriseur s'exprime dans des variables d'état u où le feuilletage $\Im_\xi$ est redressé comme indiqué en (2.4). L'espace propre $E(u, \xi)$ est alors indépendant de u. Notons le $E(\xi)$. Dans ces conditions, on dit que Σ_0 est un bon symétriseur pour (5.22) lorsque :

$$(h \cdot \nabla_u)\Sigma(u, \xi) = 0, \quad \forall\, (u, h) \in \mathcal{U} \times E(\xi)\,. \tag{5.23}$$

Ceci revient à dire que si l'on écrit $u = (z, w)$ comme en (2.4), $\Sigma(u, \xi)$ est indépendant des variables w.

Preuve de la proposition 3.1.

Par changement de variables $u = \Phi(v)$, la matrice $\Sigma(u, \xi)$ se transforme en $\widetilde{\Sigma}(v, \xi) = {}^t\Phi'(v)\Sigma(u, \xi)\Phi'(v)$, c'est-à-dire comme un tenseur deux fois covariant (Σ est une forme quadratique sur l'espace tangent à $\mathcal{U}$). Dans les coordonnées redressées, la dérivée de Lie le long du champ constant h tangent au feuilletage $\Im_\xi$ coïncide avec la dérivée classique $h \cdot \nabla_u$. La condition (5.23) exprime que ces dérivées sont nulles. La notion de dérivée de Lie est intrinsèque, préservée par changement de variables. Par conséquent, (5.23) est équivalent à l'annulation de la dérivée de Lie de $\Sigma(\cdot, \xi)$ le long des champs tangents au feuilles de $\Im_\xi$.

D'après le lemme 5.2, cette condition est équivalente à l'annulation de $B\!\!\!/'(h_1; \cdot, \cdot)$ pour tout $u \in \mathcal{U}$ et $h_1 \in E(u, \xi)$. $\square$

Pour un système général, le changement de variables ϕ_ξ qui redresse le feuilletage $\Im_\xi$ dépend effectivement de la direction $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$. Il arrive néanmoins, par exemple dans le cas de la dynamique des gaz, que l'on puisse redresser les $\Im_\xi$ simultanément en ξ.

Définition 5.1. *On dit que la famille de feuilletages $\{\Im_\xi\}_{\xi \in \mathbb{S}^{d-1}}$ possède une rigidité affine si pour tout ξ dans $\mathbb{S}^{d-1}$, les feuilles de $\Im_\xi$ sont des sous-espaces affines de dimension κ, parallèles.*

Il est possible de caractériser la rigidité affine autrement:

Lemme 5.3. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) La famille $\{\Im_\xi\}_{\xi\in\mathbb{S}^{d-1}}$ *possède une rigidité affine.*

ii) Pour tout ξ *dans* $\mathbb{S}^{d-1}$*, la projection orthogonale* $\Pi_\perp(u,\xi)$ *ne dépend pas de la variable* u*.*

iii) On a :

$$(v\cdot\nabla_u\Sigma)(u,\xi)\Pi_\perp(u,\xi)w \;=\; 0, \qquad \forall\,(v,w,u,\xi)\,. \tag{5.24}$$

Preuve. Par définition, i) équivaut à dire que pour tout $\xi\in\mathbb{S}^{d-1}$, il existe un espace $E(\xi)$ de dimension κ tel que la feuille de $\Im_\xi$ passant par u est $(u+E(\xi))\cap\mathcal{U}$, ou encore que $E(u,\xi)=E(\xi)$ pour tout $u\in\mathcal{U}$. Cela revient à dire que $\Pi_\perp$ est indépendant de u.

D'après (5.12), l'idendité (5.24) s'écrit aussi :

$$\Sigma(v\cdot\nabla_u\Pi_\perp)\Pi_\perp \;\equiv\; 0\,.$$

De plus, en dérivant l'identité $\Pi_\perp\circ\Pi_\perp=\Pi_\perp$, on obtient :

$$(v\cdot\nabla_u\Pi_\perp)\Pi_\perp=(\mathrm{Id}-\Pi_\perp)\;(v\cdot\nabla_u\Pi_\perp)\,.$$

Comme Σ est inversible sur l'image de $\mathrm{Id}-\Pi_\perp$, (5.24) équivaut à :

$$(v\cdot\nabla_u\Pi_\perp)\Pi_\perp=(\mathrm{Id}-\Pi_\perp)(v\cdot\nabla_u\Pi_\perp)\equiv 0\,.$$

Compte tenu de la symétrie de la matrice $v\cdot\nabla_u\Pi_\perp$, cette condition revient à imposer $v\cdot\nabla_u\Pi_\perp=0$. On retrouve la condition *ii*). □

En présence de rigidité affine, il se produit de nombreuses simplifications. Par exemple, la contribution Γ_2 disparaît puisqu'on a :

$$\Gamma_2(w_1,w_2)=(\mathrm{Id}-\Pi_\perp)(w_1\cdot\nabla_u\Pi_\perp)w_2=0\,.$$

Par ailleurs, Σ_0 est un bon symétriseur si et seulement si :

$$\Sigma(u,\xi)\;=\;\Sigma\big((\mathrm{Id}-\Pi_\perp)(\xi)u,\xi\big),\quad \forall\,(u,\xi)\in\mathcal{U}\times\mathbb{S}^{d-1}\,. \tag{5.25}$$

Exemple 5.1. On termine ce paragraphe en donnant des exemples de systèmes quasi-linéaires qui possèdent de la rigidité affine et un bon symétriseur. On se donne d scalaires $\{\mu_j(u)\}_{1\le j\le d}$ et d matrices $\{M_j\}_{1\le j\le d}$ symétriques et constantes. On suppose que le noyau de l'application linéaire

$M(\xi) = \sum_{j=1}^d \xi_j \, M_j$ est de dimension $\kappa > 0$ constante lorsque ξ parcourt $\mathbb{S}^{d-1}$. Par exemple :

$$M(\xi) = {}^t R \begin{pmatrix} 0 & {}^t\xi \\ \xi & 0 \end{pmatrix} R \, .$$

Soit une matrice $\Sigma_0(u)$ définie positive. On considère alors le système défini par les matrices :

$$\Sigma_j(u) := \mu_j(u)\Sigma_0(u) + M_j, \qquad 1 \leq j \leq d \, . \tag{5.26}$$

La valeur propre $\lambda(u,\xi) = \sum \xi_j \mu_j(u)$ est de multiplicité constante et le noyau $E(u,\xi) = \ker M(\xi)$ est indépendant de u. De plus $\Sigma(u,\xi) = M(\xi)$ et Σ_0 est un bon symétriseur. Pour que λ soit linéairement dégénérée il faut et il suffit que $v \cdot \nabla_u \mu(u) \in \xi^\perp$ pour $v \in \ker M(\xi)$. Si les μ_j sont constants, alors λ est linéairement dégénérée et vérifie la condition (3.6). Le système ainsi construit est conservatif si $\Sigma_0 = \eta''$ est la matrice Hessienne d'une fonction η strictement convexe. On notera que le système construit est effectivement non linéaire.

5.3 Preuve du théorème 3.2

Soit :

$$u_a^\varepsilon = \bar{u}_0 + \sqrt{\varepsilon} u_1 + \varepsilon v_a^\varepsilon \tag{5.27}$$

une solution approchée dans $\mathcal{O}_a^s(r)$ avec $r > s+1 > \frac{d+5}{2}$. En particulier, v_a^ε est borné dans $\mathcal{W}^{s+1}(T)$. On suppose en outre que $\overline{u}_1 = 0$ et que la matrice D définie en (5.7) est nulle. On se donne enfin une famille R^ε bornée dans $\mathcal{W}_\varepsilon^s(T)$ et une famille I^ε bornée dans $H^s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})$. Il s'agit de montrer que, pour ε assez petit, le problème de Cauchy

$$\mathcal{S}(u^\varepsilon ; \partial_{t,x,\theta}) u^\varepsilon = R_a^\varepsilon + \varepsilon^r R^\varepsilon \qquad u^\varepsilon(0,x,\theta) = u_a^\varepsilon(0,x,\theta) + \varepsilon^r \, I^\varepsilon$$

admet une solution dans $\mathcal{W}^s(T)$ et qu'il existe C tel que pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$:

$$\left\| u^\varepsilon - u_a^\varepsilon \right\|_{\mathcal{W}_\varepsilon^s(T)} \leq C \varepsilon^r \, .$$

On cherche la solution sous la forme $u^\varepsilon = u_a^\varepsilon + \varepsilon^r d^\varepsilon$. L'équation pour d^ε s'écrit :

$$\mathcal{S}(u^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta}) d^\varepsilon + \mathcal{S}'(t,x,\varepsilon^r d^\varepsilon) d^\varepsilon = \varepsilon^{-r} R_a^\varepsilon + R^\varepsilon, \qquad d^\varepsilon_{|t=0} = I^\varepsilon \tag{5.28}$$

avec :

$$\mathcal{S}'(t,x,v)h := \sum_{j=0}^{d} \int_0^1 (h\cdot\nabla_u \Sigma_j)\big(u_a^\varepsilon(t,x)+sv\big)\,\partial_j u_a^\varepsilon(t,x)\,ds$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{d} \partial_j\varphi(t,x)\int_0^1 (h\cdot\nabla_u\Sigma_j)\big(u_a^\varepsilon(t,x)+sv\big)\,\partial_\theta u_a^\varepsilon(t,x)\,ds\,.$$

Le système (5.28) est hyperbolique symétrisable à données H^s. Il possède une solution locale en temps (voir [21]), de durée de vie $T^*(\varepsilon)>0$. De plus, si $T^*(\varepsilon)<+\infty$, on a nécessairement :

$$\limsup_{t\longrightarrow T^*(\varepsilon)-} \quad \|\, u^\varepsilon(t,\cdot)\,\|_{H^s(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T})} = \,+\infty\,.$$

En particulier :

$$\lim_{t\longrightarrow T^*(\varepsilon)-} \quad \|\, u^\varepsilon\,\|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(t)} = \,+\infty\,.$$

Le théorème 3.2 résulte alors de :

$$\exists\varepsilon_0>0\,; \qquad \inf_{\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_0]} \ T^*(\varepsilon)\;>\;T\,. \tag{5.29}$$

$$\sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]} \ \big\|d^\varepsilon\big\|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T)} < +\infty\,. \tag{5.30}$$

Compte tenu des critères d'explosion rappelés ci-dessus, il suffit de montrer qu'il existe des constantes ε_0 et M telles que :

$$\forall\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]\,,\quad \forall T'\le \min\big(T^*(\varepsilon),T\big),\qquad \|d^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T')}\;\le M\,. \tag{5.31}$$

La démonstration se fait en deux temps. D'abord, on utilise la proposition 5.1 pour effectuer un changement d'inconnues qui transforme l'équation (5.28) en une équation similaire dont les termes singuliers sont à coefficients constants. Ensuite, on applique une méthode de commutateurs pour estimer les normes H^s de la solution de (5.28).

- *Réduction de l'équation*. On écrit :

$$\Sigma(u^\varepsilon,\partial_x\varphi)=\Sigma(\bar u_0,\partial_x\varphi)+\sqrt{\varepsilon}(u_1\cdot\nabla_u\Sigma)(\bar u_0,\partial_x\varphi)+\varepsilon\mathcal{R}_{d+1}(\varepsilon,t,x,v_a^\varepsilon+\varepsilon^{r-1}d^\varepsilon)$$

où R_{d+1} est une matrice régulière de ses arguments. De même

$$\mathcal{S}'(t,x,\varepsilon^r d^\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}B_1+E(\varepsilon,t,x,v_a^\varepsilon,\partial_{t,x,\theta}v_a^\varepsilon,\varepsilon^{r-1}d^\varepsilon)$$

où B_1 est défini en (5.6) et E est une fonction C^∞ de ses arguments. L'équation pour d^ε est donc de la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\varepsilon, v_a^\varepsilon, \varepsilon^{r-1}d^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta})d^\varepsilon + E(\varepsilon, t, x, v_a^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta}v_a^\varepsilon, \varepsilon^{r-1}d^\varepsilon)d^\varepsilon \\ + \frac{1}{\varepsilon}A_0\partial_\theta d^\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(A_1\partial_\theta d^\varepsilon + B_1 d^\varepsilon) = \varepsilon^{-r}R_a^\varepsilon + R^\varepsilon\,.\end{aligned}$$

où les coefficients de l'opérateur quasi-linéaire symétrique $\mathcal{R}$ sont des fonctions régulières de $(\varepsilon, v_a^\varepsilon, \varepsilon^{r-1}d^\varepsilon)$.

Ensuite, on applique le changement d'inconnues $d^\varepsilon = (\mathrm{Id} + \sqrt{\varepsilon}\phi_1)\check{d}^\varepsilon$ avec ϕ_1 donné à la proposition 5.1. Comme $D = 0$, la formule (5.20) implique que $\check{d}^\varepsilon$ vérifie :

$$\check{\mathcal{R}}(\varepsilon, v_a^\varepsilon, \varepsilon^{r-1}\check{d}^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta})\check{d}^\varepsilon + \check{E}(\varepsilon, t, x, v_a^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta}v_a^\varepsilon, \varepsilon^{r-1}\check{d}^\varepsilon)\check{d}^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}A_0\partial_\theta\check{d}^\varepsilon = \check{R}^\varepsilon\,.$$

Ici, on a posé :

$$\check{R}^\varepsilon := (\mathrm{Id} + \sqrt{\varepsilon}\,{}^t\phi_1)(\varepsilon^{-r}R_a^\varepsilon + R^\varepsilon)\,.$$

Par ailleurs $\check{\mathcal{R}}$ est de même nature que $\mathcal{R}$.

La matrice $A_0 = \Sigma(\bar{u}_0, \partial_x\varphi)$ dépend des seules variables (t, x). D'après l'hypothèse 2.1, elle est de rang constant. Cela implique l'existence d'une matrice inversible régulière $\check{\phi}(t,x)$ telle que $\underline{\Sigma} := {}^t\check{\phi}(t,x)\,\Sigma(\bar{u}_0, \partial_x\varphi)\,\check{\phi}(t,x)$ est constante. On pose $\widetilde{d}^\varepsilon := \check{\phi}(t,x)^{-1}\,\check{d}^\varepsilon$ de sorte que $\widetilde{d}^\varepsilon$ est solution de :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}(\varepsilon, v_a^\varepsilon, \varepsilon^{r-1}\widetilde{d}^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta})\widetilde{d}^\varepsilon + \widetilde{E}(\varepsilon, t, x, v_a^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta}v_a^\varepsilon, \varepsilon^{r-1}\widetilde{d}^\varepsilon)\widetilde{d}^\varepsilon \\ + \frac{1}{\varepsilon}\underline{\Sigma}\partial_\theta\widetilde{d}^\varepsilon = \widetilde{R}^\varepsilon := \check{\phi}\check{R}^\varepsilon\end{aligned} \tag{5.32}$$

où $\widetilde{\mathcal{R}}$ et $\widetilde{E}$ sont de même nature que $\mathcal{R}$ et E.

Il suffit maintenant de résoudre les problème de Cauchy pour (5.32) avec pour nouvelles données initiales :

$$\widetilde{d}^\varepsilon{}_{|t=0} = \widetilde{I}^\varepsilon := \check{\phi}^{-1}{}_{|t=0}\big(\mathrm{Id} + \sqrt{\varepsilon}\phi_{1|t=0}\big)^{-1}\,I^\varepsilon\,. \tag{5.33}$$

Le contrôle annoncé en (5.31) résulte alors de l'estimation :

$$\forall\varepsilon\in]0,\varepsilon_0],\quad \forall T' < \min(T^*(\varepsilon), T),\qquad \|\widetilde{d}^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T')} \leq M\,. \tag{5.34}$$

- *Estimations d'énergie*.

On raisonne dorénavant sur (5.32). La démonstration des majorations (5.34) est inspirée du travail de O.Guès [12] (voir aussi G. Browning et H.O.

Kreiss [3]). Pour estimer les quantités $\widetilde{d}^\varepsilon_\alpha := \varepsilon^{|\alpha|}\partial^\alpha_{t,x,\theta}\widetilde{d}^\varepsilon$ on dérive l'équation (5.32). Comme $\underline{\Sigma}$ est constante, on trouve que

$$\widetilde{\mathcal{R}}(\varepsilon, v^\varepsilon_a, \varepsilon^{r-1}\widetilde{d}^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta})\widetilde{d}^\varepsilon_\alpha + \frac{1}{\varepsilon}\underline{\Sigma}\widetilde{d}^\varepsilon_\alpha = \widetilde{R}^\varepsilon_\alpha \tag{5.35}$$

où :

$$\widetilde{R}^\varepsilon_\alpha = \varepsilon^{|\alpha|}\partial^\alpha\big(\widetilde{R}^\varepsilon - \widetilde{E}(\varepsilon^{r-1}\widetilde{d}^\varepsilon)\widetilde{d}^\varepsilon\big) - \big[\varepsilon^{|\alpha|}\partial^\alpha, \mathcal{R}(\varepsilon^{r-1}\widetilde{d}^\varepsilon, \partial_{t,x,\theta})\big]\widetilde{d}^\varepsilon\,.$$

Dans ces expressions, on a simplifié l'écriture de $\widetilde{\mathcal{R}}$ et $\widetilde{E}$ pour ne retenir que la dépendance en $\widetilde{d}^\varepsilon$. Les autres coefficients v^ε_a ne sont pas mentionnés. Leur intervention ne pose pas de problème car ils sont bornés dans $\mathcal{W}^{s+1}(T)$. On évalue le terme de droite. Par hypothèse, le terme $\varepsilon^{|\alpha|}\partial^\alpha\widetilde{R}^\varepsilon$ est borné dans $C^0([0,T];L^2)$ puisque $\widetilde{R}^\varepsilon$ se déduit de R^ε par multiplication par une matrice C^∞ bornée dans $\mathcal{W}^\infty(T)$. Les autre termes sont sommes d'expressions de la forme

$$h = \varepsilon^{|\alpha|+(r-1)(p-1)}\,\Phi\,\partial^{\alpha^1}\widetilde{d}^\varepsilon\ldots\partial^{\alpha^p}\widetilde{d}^\varepsilon\,\partial^{\beta^1}v^\varepsilon_a\ldots\partial^{\beta^q}v^\varepsilon_a$$

où Φ est une fonction C^∞ des arguments $(t,x,v^\varepsilon_a,\varepsilon^{r-1}\widetilde{d}^\varepsilon)$, et les multiindices α^j et β^k vérifient :

$$\begin{aligned}&l := |\alpha^1| + \cdots + |\alpha^p| \le |\alpha|\,.\\ &l' := |\beta^1| + \cdots + |\beta^q| \le |\alpha| + 1\,.\\ &l + l' \le |\alpha| + 1\,.\end{aligned}$$

En utilisant les règles de multiplication dans les espaces de Sobolev

$$H^{s'}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T})\times H^{s''}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}) \subset H^{s'''}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T})$$

quand $0 \le s''' \le \min(s', s'')$ et $s' + s'' - s''' > \frac{d+1}{2}$, on voit que pour $s > \frac{d+3}{2}$, $|\alpha| \le s$ et $t \le T' < \min(T^*(\varepsilon), T)$, on récupère :

$$\begin{aligned}\|h(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T})} \le C\varepsilon^{|\alpha|+(r-1)(p-1)}\,&\|\Phi\|_{L^\infty([0,T']\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{T})}\|v^\varepsilon_a\|^q_{\mathcal{W}^{s+1}(T')}\\ &\times\|\widetilde{d}^\varepsilon\|^{p-1}_{\mathcal{W}^s(T')}\|\widetilde{d}^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^{|\alpha|}(T')}\,.\end{aligned}$$

Comme v^ε_a est bornée dans $\mathcal{W}^{s+1}$ et que $\delta = r - 1 - s > 0$, on voit que pour $|\alpha| \le s$, on a :

$$\|h(t)\|_{L^2} \le C\|\Phi\|_{L^\infty}\big(1 + \varepsilon^\delta\|\widetilde{d}^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T')}\big)^{p-1}\|\widetilde{d}^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T')}\,.$$

L'injection de Sobolev implique que pour $s \geq 1 + \frac{d+1}{2}$:

$$\|w\|_{L^\infty} + \|\partial w\|_{L^\infty} \leq C\varepsilon^{-1-\frac{d+1}{2}} \|w\|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T')} . \tag{5.36}$$

Comme v^ε_a est bornée, cela parmet de majorer Φ dans L^∞. On voit alors qu'il existe une fonction continue $K(\cdot)$ telle que pour $|\alpha| \leq s$ on a pour $t \in [0, T']$ et $T' < \min(T^*(\varepsilon), T)$:

$$\|\widetilde{R}^\varepsilon_\alpha(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})} \leq K\big(\varepsilon^\delta M^\varepsilon(T')\big)\, M^\varepsilon(T') \tag{5.37}$$

avec $M^\varepsilon(T') := \|\widetilde{d^\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T')}$.

D'autre part, (5.36) implique que les coefficients de $\widetilde{\mathcal{R}}$ sont bornés et ont des dérivées premières bornées par $K_1(\varepsilon^\delta M^\varepsilon(T'))$. Il en va de même pour l'inverse du coefficient de ∂_t. Comme $\widetilde{\mathcal{R}}$ et $\underline{\Sigma}$ sont symétriques, une intégration par parties montre qu'il existe des fonctions $K_1(\cdot)$ et $K_2(\cdot)$, telles que pour $t \in [0, T']$ et $T' < \min(T^*(\varepsilon), T)$:

$$\begin{aligned} \|\widetilde{d^\varepsilon_\alpha}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})} \leq & K_1(M) e^{tK_2(M)} \|\widetilde{d^\varepsilon_\alpha}(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})} \\ & + K_1(M) \int_0^t e^{(t-t')K_2(M)}\, \|\widetilde{R}^\varepsilon_\alpha(t')\|_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})}\, dt' \end{aligned} \tag{5.38}$$

avec $M = M^\varepsilon(T')$.

On estime maintenant les données initiales $\widetilde{d^\varepsilon_\alpha}(0)$. Pour cela on utilise l'équation (5.32) qui permet d'exprimer les dérivées temporelles $\partial_t^j \widetilde{d^\varepsilon}(t, \cdot)$ en fonction des dérivées spatiales $\partial^\alpha_{x,\theta} \widetilde{d^\varepsilon}(t, \cdot)$ de longueur $|\alpha| \leq j$. La présence du terme singulier $\frac{1}{\varepsilon} \underline{\Sigma}\, \partial_\theta$ fait en sorte que chaque dérivation en temps consomme une puissance du paramètre ε. Cette perte est compensée par le recours à une norme à poids, en l'occurrence celle de l'espace $\mathcal{W}^s_\varepsilon$. Par un calcul analogue à celui utilisé pour les commutateurs, on obtient qu'il existe une constante C_0, qui ne dépend que des normes de u_0, u_1, d'un majorant des normes de v^ε_a dans $\mathcal{W}^{s+1}(T)$ et de I^ε dans $H^s(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})$ telle que pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, on a :

$$\| \varepsilon^j \partial_t^j \widetilde{d^\varepsilon}(0, \cdot)\, \|_{H^{s-j}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T})} \leq C_0 \, .$$

En particulier, les normes L^2 des $\widetilde{d^\varepsilon_\alpha}(0)$ sont uniformément bornées.

En sommant (5.38) pour tous $|\alpha| \leq s$ et en utilisant (5.37) et le lemme de Gronwall, on en déduit qu'il existe des fonctions K_1 et K_2 telles que pour tout $T' < \min(T^*(\varepsilon), T)$ on a :

$$\|\widetilde{d^\varepsilon}\|_{\mathcal{W}^s_\varepsilon(T')} \leq K_1(\varepsilon^\delta M^\varepsilon(T'))\, e^{T' K_2(\varepsilon^\delta M^\varepsilon(T'))} \, . \tag{5.39}$$

- <u>*Fin de la démonstration du théorème 3.2.*</u>

On choisit $M > \max\big(C_0, K_1(1)e^{TK_2(1)}\big)$ puis ε_0 tel que $\varepsilon_0^\delta M \le 1$. Alors, par un argument usuel de continuation, (5.39) implique que pour $\varepsilon \le \varepsilon_0$ et $T' < \min(T^*(\varepsilon), T)$ on a $M^\varepsilon(T') \le M$. L'estimation (5.34) en résulte et la démonstration du théorème 3.2 est complète.

6 Instabilités

Les oscillations à l'échelle ε portées par le profil principal u_1 interagissent avec les oscillations de plus petites amplitudes portées par la perturbation $\dot u$. Ces interactions sont susceptibles d'induire des mécanisme d'amplification qui, éventuellement, se traduisent, au niveau des équations de modulation fournies par une analyse BKW à deux phases, par des taux de croissance en temps plus ou moins forts. Réciproquement ces taux de croissance indiquent quels types d'estimations d'énergie sont possibles pour le linéarisé $\mathcal{L}_c^\varepsilon$. Dans un premier temps, on formalise cette idée. Ensuite on se tourne vers le problème non linéaire. On met à jour des conditions suffisantes pour l'existence d'instabilités non linéaires, dont un exemple typique est celui des instabilités de Rayleigh (cf [10]).

6.1 Divers types d'instabilité

On se place dans le cadre du paragraphe 3.3. On en reprend les notations. On commence par établir :

Théorème 6.1. *Si la famille $\mathcal{L}_c^\varepsilon$ est stable dans L^2 de type k, alors on a pour tout $\mathbf{v} \in C^1([0,\infty[; H^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^2))$ et tout $s \ge 0$:*

$$\text{(6.1)} \qquad \|\mathbb{P}\mathbf{v}(s)\|_{L^2} \le k(s)\left(\|\mathbb{P}\mathbf{v}(0)\|_{L^2} + \int_0^s \|\mathbb{L}\mathbf{v}(s')\|_{L^2}\, ds'\right).$$

Preuve. On commence par établir (6.1) lorsque $\mathbf{v}$ est un polynôme trigonométrique en les variables θ et ω, à coefficients très réguliers :

$$\mathbf{v}(\mathbf{s},\mathbf{x},\theta,\omega) = \sum_{\text{finie}} \mathbf{v}_{\alpha,\beta}(\mathbf{s},\mathbf{x})\, \mathbf{e}^{\mathbf{i}(\alpha\theta+\beta\omega)}, \qquad \mathbf{v}_{\alpha,\beta} \in \mathbf{C^1}\big([\mathbf{0},\mathbf{T}];\mathbf{H}^\infty(\mathbb{R}^\mathbf{d})\big).$$

On pose :

$$\dot v(t,x,\theta) = \mathbf{v}\Big(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}, x, \theta, \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}\Big).$$

On fait agir $\mathcal{L}_c^\varepsilon$ sur la fonction test $\dot{v}$. Il sort :

$$\mathcal{L}_c^\varepsilon \dot{v} = \frac{1}{\varepsilon} S(\underline{u}, d\psi\partial_\omega + d\varphi\partial_\theta)\mathbf{v} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\big(\underline{\Sigma}_0 \partial_s + G\big)\mathbf{v} + \mathbf{f}$$

où $\mathbf{f} = O(\partial_{s,x,\theta,\omega}\mathbf{v}) + O(\mathbf{v})$. On sépare $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{v}_1$ où $\mathbf{v}_0$ est un polynôme trigonométrique à coefficients réguliers, sélectionné dans le noyau de la projection $\mathrm{Id} - \mathbb{P}$. Ainsi :

$$S(\underline{u}, d\psi\partial_\omega + d\varphi\partial_\theta)\mathbf{v}_0 = 0\,.$$

On note $Q_{\alpha,\beta}$ l'inverse de $\underline{S}(\alpha d\varphi + \beta d\psi)$ lorsque $(\alpha,\beta) \notin Z$ ou un inverse partiel lorsque $(\alpha,\beta) \in Z$. Les $Q_{\alpha,\beta}$ servent à définir un opérateur $\mathbb{Q}$ qui agit sur les polynômes trigonométriques conformément à :

$$\mathbb{Q}\Big(\sum_{\text{finie}} \mathbf{v}_{\alpha,\beta}\, e^{i(\alpha\theta+\beta\omega)}\Big) = \sum_{\text{finie}} Q_{\alpha,\beta}\mathbf{v}_{\alpha,\beta}\, e^{i(\alpha\theta+\beta\omega)}\,.$$

En particulier, on repère le polynôme trigonométrique

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbb{Q}\big(\underline{\Sigma}_0\partial_s + G\big)\mathbf{v}_0$$

qui est ajusté de façon à ce que :

$$S(\underline{u}, d\psi\partial_\omega + d\varphi\partial_\theta)\mathbf{v}_1 = -(\mathrm{Id} - \mathbb{P})\big(\underline{\Sigma}_0\partial_s + G\big)\mathbf{v}_0\,.$$

Avec ces choix, on a la simplification :

$$\mathcal{L}_c^\varepsilon \dot{v} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathbb{L}\mathbf{v}_0 + \mathbf{f}_1$$

où $\mathbf{f}_1 = O\big(\partial_{s,x,\theta,\omega}(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1)\big) + O\big(\mathbf{v}_0,\mathbf{v}_1\big)$. On reporte $\dot{v}$ au niveau de (3.17). On remplace t par $\sqrt{\varepsilon}s$ puis on effectue le changement de variables $t' = \sqrt{\varepsilon}s'$ dans l'intégrale. Il sort

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_0(s) + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{v}_1(s)\|_{L^2} \leq k(s)\,\Big(&\|\mathbf{v}_0(0) + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{v}_1(0)\|_{L^2} \\ &+ \int_0^s \|\mathbb{L}\mathbf{v}_0(s') + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{f}_1(s')\|_{L^2}\, ds'\Big)\end{aligned}$$

où il faut prendre garde à ce que les normes L^2 sont évaluées en (x,θ), la phase non stationnaire ψ étant substituée à la variable ω. On fait tendre ε vers zéro. Il reste :

$$\|\mathbf{v}_0(s)\|_{L^2} \leq k(s)\,\Big(\|\mathbf{v}_0(0)\|_{L^2} + \int_0^s \|\mathbb{L}\mathbf{v}_0(s')\|_{L^2}\, ds'\Big)$$

où cette fois-ci les normes L^2 sont en (x,θ,ω). L'opérateur $\mathbb{L}$ agit continûment de $C^1([0,\infty[; H^1(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^2))$ dans $C^0([0,\infty[; L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^2))$. Par densité des polynômes trigonométriques, on récupère (6.1) pour toute fonction test $\mathbf{v}$ ayant la régularité indiquée. $\square$

Preuve du théorème 3.3. Soit $\mathbf{v}$ dans $H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^2)$. Comme le semi-groupe $e^{-s\mathbb{G}}$ préserve la régularité, la fonction $e^{-s\mathbb{G}}\mathbf{v}$ est, entre autre, dans l'espace $C^1([0,\infty[;H^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^2))$. On applique (6.1) avec pour fonction test $e^{-s\mathbb{G}}\mathbf{v}$ ce qui donne :

$$\parallel e^{-s\mathbb{G}}\mathbf{v} \parallel_{L^2} \leq k(s) \parallel \mathbf{v} \parallel_{L^2}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ .$$

Par continuité de $e^{-s\mathbb{G}}$ sur L^2, cela implique :

$$g(s) := |||e^{-s\mathbb{G}}||| \leq k(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ .$$

La fonction g est bien controlée par k. □

Le théorème 3.3 est utile dans la pratique, comme en témoigne la discussion du paragraphe 3.3. Par orthogonalité, on a :

$$g_\beta \preceq g \preceq \sup_{\beta \in \mathbb{Z}} g_\beta .$$

Le comportement de la fonction g est le reflet de celui des g_β. Les propriétés de g_β sont déterminées par l'action de $\mathbb{G}_\beta$. C'est pourquoi il est intéressant de dégager la structure de $\mathbb{G}_\beta$.

Considérons un profil u_1^* qui possède seulement deux harmoniques de signes opposés $+\delta$ et $-\delta$:

$$u_1^*(t,\theta) = r e^{i\delta\theta} + \overline{r} e^{-i\delta\theta}, \quad \delta \in \mathbb{N} . \tag{6.2}$$

Ici, r est un vecteur fixé dans $E(\underline{u},\underline{\xi})$ et $\overline{r}$ désigne son complexe conjugué. La fonction u_1^* est bien à valeurs réelles. De plus ce choix de u_1^* est compatible avec la forme des équations $(\mathcal{Z}_1)$ du paragraphe 4.2. On note $\mathbb{G}_\beta^\delta$ l'opérateur $\mathbb{G}_\beta$ associé à un tel u_1^*. Tout $\mathbb{G}_\beta$ s'obtient par combinaison linéaire des $\mathbb{G}_\beta^\delta$ où δ parcourt $\mathbb{N}$. Pour simplifier les calculs, on fixe (β,δ) et on concentre notre attention sur $\mathbb{G}_\beta^\delta$.

L'opérateur $\mathbb{G}_\beta^\delta$ est un opérateur différentiel du premier ordre que l'on écrit sous la forme $e^{i\delta\theta}G^+(\partial_\theta) + e^{-i\delta\theta}G^-(\partial_\theta)$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} G^+(\partial_\theta)v = r \cdot \nabla_u S(\underline{u}, i\beta d\psi + d\varphi\partial_\theta)v + i\delta\, v \cdot \nabla_u S(\underline{u}, d\varphi) r . \\ G^-(\partial_\theta)v = \overline{r} \cdot \nabla_u S(\underline{u}, i\beta d\psi + d\varphi\partial_\theta)v - i\delta\, v \cdot \nabla_u S(\underline{u}, d\varphi) \overline{r} . \end{array} \right.$$

On regarde comment $\mathbb{G}_\beta^\delta$ agit sur les modes de Fourier. On trouve :

$$\mathbb{G}_\beta^\delta\big(\sum v_\alpha e^{i\alpha\theta}\big) = \sum \big(G_\alpha^+ v_{\alpha-\delta} + G_\alpha^- v_{\alpha+\delta}\big) e^{i\alpha\theta} \tag{6.3}$$

avec :

$$G_\alpha^+ := P_{\alpha,\beta} G^+\big(i(\alpha-\delta)\big) P_{\alpha-\delta,\beta}\,, \qquad G_\alpha^- := P_{\alpha,\beta} G^-\big(i(\alpha+\delta)\big) P_{\alpha+\delta,\beta}\,.$$

L'opérateur $\mathbb{G}_\beta^\delta$ s'interprète ainsi comme un système matriciel de dimension infinie. C'est l'analyse spectrale de ce système qui renseigne sur le comportement de g_β. Il arrive que cette analyse se simplifie.

Exemple 6.1. On reprend la situation examinée en 3.1.b) dans le cas isentropique, avec $\gamma := -2\beta(\xi \cdot \underline{\xi})/|\underline{\xi}|^2$ dans $\mathbb{Z}^*$. On prend $\underline{\xi} = {}^t(1,0)$ et $r = {}^t(0,1)$. On écrit :

$$\underline{\Sigma}_0 = diag(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2), \qquad \sigma_1 \sigma_2\, \underline{c}^2 = 1, \qquad \sigma_1 > 0, \qquad \sigma_2 > 0\,.$$

On considère deux phases caractéristiques. L'une est associée au mode l.d.g. tandis que l'autre correspond à un mode acoustique :

$$\varphi(t,x) = \underline{\xi} \cdot x, \qquad \psi(t,x) = -\underline{c}|\xi| t + \xi \cdot x\,.$$

Ces deux phases engendrent une troisième phase caractéristique :

$$\phi(t,x) = \gamma\varphi(t,x) + \beta\psi(t,x) = \beta(-\underline{c}|\xi|t - \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\,.$$

Les noyaux des matrices $\underline{S}(d\psi)$ et $\underline{S}(d\phi)$ sont de dimension un, engendrés respectivement par les vecteurs :

$$r_1 = {}^t(|\xi|/\sigma_1 \underline{c}, \xi_1, \xi_2), \qquad r_2 = {}^t(|\xi|/\sigma_1 \underline{c}, -\xi_1, \xi_2)\,.$$

La projection $P_{\alpha,\beta}$ est non nulle seulement si $\alpha = 0$ ou $\alpha = \gamma$. Par conséquent $\mathbb{G}_\beta^\delta$ est non trivial seulement si $\delta = -\gamma$ ou $\delta = \gamma$. On examine le cas $\delta = -\gamma$, l'autre cas étant analogue. L'action de $\mathbb{G}_\beta^{-\gamma}$ se réduit à :

$$\mathbb{G}_\beta^{-\gamma}\big(\sum v_\alpha e^{i\alpha\theta}\big) = G_0^+ v_\gamma + G_\gamma^- v_0\, e^{i\gamma\theta}\,.$$

L'équation $\mathbb{L}_\beta \check{u} = 0$ se formule dans la base engendrée par les vecteurs r_1 et r_2. Elle est équivalente au système différentiel de dimension deux :

$$\partial_s \check{u} + \begin{pmatrix} 0 & c_+ \\ c_- & 0 \end{pmatrix} \check{u} = 0, \qquad \check{u} = \begin{pmatrix} \check{u}_1 \\ \check{u}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,. \tag{6.4}$$

Les scalaires c_+ et c_- sont identifiés via :

$$c_+ = {}^t r_1 G^+(i\gamma) r_2, \qquad c_- = {}^t r_2 G^-(0) r_1\,.$$

Pour Euler, on trouve :

$$G^{\pm}(i\gamma)v = i\beta\,(r\cdot\xi)\,\underline{\Sigma}_0 v \pm i\delta\,(v\cdot\underline{\xi})\,\underline{\Sigma}_0 r\,.$$

On en déduit les relations :

$$c_+ = c_- = i\beta\,(r\cdot\xi)\ {}^t r_1\underline{\Sigma}_0 r_2 + i\gamma\sigma_2\xi_1\xi_2\,.$$

Il s'ensuit que :

$$\exists c_1 > 0; \qquad g_\beta \preceq c_1, \quad \forall \beta\in\mathbb{Z}\,.$$

Autrement dit, les interactions entre modes l.d.g. et modes acoustiques ne provoquent pas, du point de vue de l'optique géométrique, des phénomènes d'amplification.

On a vu que par transparence $\mathbb{G}_0 = 0$. Pour $\beta\neq 0$ fixé, l'opérateur $\mathbb{G}_\beta$ est en général non trivial. L'action de $\mathbb{G}_\beta$ met en jeu les $\mathbb{G}_\alpha^{\pm}$ qui, pour les grandes valeurs de α, ressemblent aux $\mathbb{G}_\alpha^{\pm}$ associés à $\mathbb{G}_0$. Sous cet angle $\mathbb{G}_\beta$ peut être perçu comme une perturbation de $\mathbb{G}_0$. Ce point de vue conduit au résultat suivant :

Lemme 6.1. *Soient $\beta\in\mathbb{Z}$ et $k\in\mathbb{N}$ fixés. L'opérateur $\mathbb{G}_\beta$ est borné de l'espace $H^k(\mathbb{T})$ dans lui même.*

Preuve. Il suffit de prouver l'estimation :

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{Z}}\ \max\big(\parallel G_\alpha^+\parallel ; \parallel G_\alpha^-\parallel\big)\ <\ +\infty\,.$$

On raisonne sur les G_α^+. Les G_α^- se traitent de manière analogue. L'opérateur G_α^+ est non trivial seulement si les deux couples (α,β) et $(\alpha-\delta,\beta)$ donnent lieu à des phases caractéristiques. Pour $\alpha\neq 0$, on a alors :

$$\ker\, S(\underline{u},\alpha d\varphi+\beta d\psi) = \ker\, S(\underline{u},d\varphi+\beta d\psi/\alpha)\neq\{0\}\,.$$

$$\ker\, S(\underline{u},(\alpha-\delta)d\varphi+\beta d\psi) = \ker\, S(\underline{u},(1-\delta/\alpha)d\varphi+\beta d\psi/\alpha)\neq\{0\}\,.$$

Cela implique :

$$\underline{\tau}+\beta\tau/\alpha = -\lambda(\underline{u},\underline{\xi}+\beta\xi/\alpha), \quad (1-\delta/\alpha)\underline{\tau}+\beta\tau/\alpha = -\lambda\big(\underline{u},(1-\delta/\alpha)\underline{\xi}+\beta\xi/\alpha\big)\,.$$

On a aussi :

$$P_{\alpha,\beta} = \Pi(\underline{u},\underline{\xi}+\beta\xi/\alpha), \qquad P_{\alpha-\delta,\beta} = \Pi\big(\underline{u},(1-\delta/\alpha)\underline{\xi}+\beta\xi/\alpha\big)\,.$$

On isole le terme principal du développement asymptotique en α de G_α^+ lorsque α tend vers $\pm\infty$. On obtient

$$G_\alpha^+ = i\alpha \, \underline{\Pi}_\perp \left[r \cdot \nabla_u S\big(\underline{u}, (\underline{\tau}, \underline{\xi})\big)\right] \underline{\Pi}_\perp + R_\alpha, \qquad \underline{\Pi}_\perp := \Pi_\perp(\underline{u}, \underline{\xi})$$

où les restes R_α satisfont la majoration :

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{Z}} \, \| R_\alpha \| < +\infty \, .$$

Le vecteur r est polarisé dans $E(\underline{u}, \underline{\xi})$. Avec l'hypothèse 2.2, on a la simplification :

$$\underline{\Pi}_\perp \left[r \cdot \nabla_u S\big(\underline{u}, (\underline{\tau}, \underline{\xi})\big)\right] \underline{\Pi}_\perp \; = \; \underline{\Pi}_\perp \left[r \cdot \nabla_u \Sigma(\underline{u}, \underline{\xi})\right] \underline{\Pi}_\perp \, .$$

On se souvient alors de la relation (5.13), obtenue comme conséquence des conditions de transparence, qui garantit l'élimination de cette dernière quantité. Bref, on a $G_\alpha^+ = R_\alpha$. Le lemme 6.1 suit. $\square$

Le lemme 6.1 est un résultat de type perturbatif. Rien ne garantit que les normes des opérateurs $\mathbb{G}_\beta$ soient uniformément bornées lorsque β parcourt $\mathbb{Z}$.

On déduit du lemme reflem51 que, mesurant les normes dans l'espace des opérateurs bornés de $L^2(\mathbb{T})$ dans lui même $\big($ou de $H^k(\mathbb{T})$ dans lui même$\big)$, on a :

$$g_\beta(s) \leq e^{s \, ||| \mathbb{G}_\beta |||}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \, .$$

On voit ici que le semi-groupe $e^{-s\mathbb{G}_\beta}$ présente un taux de croissance au plus exponentielle. On peut arriver à la même conclusion en utilisant le caractère symétrique de la partie principale de G_β. Cela étant dit, le résultat du lemme 6.1 est notablement plus fort.

6.2 Instabilités non linéaires

Les instabilités linéaires mises à jour dans l'étude de l'exemple 3.4 conduisent à des amplifications exponentielles. On s'attend à ce que ces amplifications se traduisent en instabilités pour le problème non linéaire lui même, dans l'esprit des résultats d'E. Grenier [11]. Inspirés par la dynamique des gaz, nous développons cette idée dans le cadre suivant. On se donne $\underline{u}$, et on suppose que la valeur propre λ est telle que $\lambda(\underline{u}, \xi)$ est linéaire en ξ :

$$\lambda(\underline{u}, \xi) = \underline{a} \cdot \xi, \qquad \underline{a} \in \mathbb{R}^d \, . \tag{6.5}$$

On se donne la phase $\varphi = \underline{\tau} t + \underline{\xi} \cdot x$ avec $\underline{\xi} \neq 0$ et $\underline{\tau} = -\underline{a} \cdot \underline{\xi}$. On considère une solution approchée $u_a^\varepsilon \in \mathcal{O}_a^\infty(\infty)$ d'ordre infini avec $\bar{u}_0 = \underline{u}$ et u_1 de la forme (6.2) avec $\delta = 1$. On se ramène à $\underline{\Sigma}_0 = \mathrm{Id}$. On remarque que la solution approchée u_a^ε construite au paragraphe 4 existe et est régulière pour tout temps, donc en particulier sur $[0,1] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}$.

Pour ξ linéairement indépendant de $\underline{\xi}$, on considère une seconde phase, elle aussi associée à λ, notée $\psi = \tau t + \xi \cdot x$ avec $\tau = -\underline{a} \cdot \xi$. Les non linéarités conduisent à considérer non seulement la phase ψ mais aussi ses harmoniques. On définit donc l'ensemble Z comme en (3.12). La linéarité de λ en ξ implique que Z coïncide avec $\mathbb{Z}^2$.

Rappel des notations. On note $\underline{S} = L(\underline{u}, \cdot)$ et $\nabla \underline{S} = (\nabla_u S)(\underline{u}, \cdot)$. Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$, $P_{\alpha,\beta}$ désigne le projecteur orthogonal sur $\ker \underline{S}(\alpha d\varphi + \beta d\psi)$. Par décomposition en séries de Fourier, ces projecteurs induisent dans $L^2(\mathbb{T}^2; \mathbb{C}^N)$ un projecteur orthogonal $\mathbb{P}$ sur le noyau de $\underline{S}(d\varphi\partial_\theta + d\psi\partial_\omega)$. De même, pour chaque $\beta \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbb{P}_\beta$ le projecteur orthogonal dans $L^2(\mathbb{T}; \mathbb{C}^N)$ sur le noyau de $\underline{S}(i\beta d\psi + d\varphi\partial_\theta)$ et

$$G_\beta(\theta, \partial_\theta) = e^{i\theta} G_\beta^+(\partial_\theta) + e^{-i\theta} G_\beta^-(\partial_\theta)$$

avec :

$$\begin{cases} G_\beta^+(\partial_\theta)v = r \cdot \nabla \underline{S}(i\beta d\psi + d\varphi\partial_\theta)v + i\beta v \cdot \nabla \underline{S}(d\varphi) r\,. \\ G_\beta^-(\partial_\theta)v = \overline{r} \cdot \nabla \underline{S}(i\beta d\psi + d\varphi\partial_\theta)v - i\beta v \cdot \nabla \underline{S}(d\varphi) \overline{r}\,. \end{cases}$$

On désigne par $\mathbb{G}_\beta$ l'opérateur $\mathbb{P}_\beta G_\beta \mathbb{P}_\beta$.

Hypothèse 6.1.

i) L'opérateur $\mathbb{G}_1$ admet une valeur propre μ telle que $\gamma_0 := -\Re e\, \mu > 0$, associée à une fonction propre $w \in H^\infty(\mathbb{T})$.

ii) Pour tout $\gamma > \gamma_0$ il existe C tel que :

$$g(s) \leq C e^{\gamma s}, \qquad \forall s \in \mathbb{R}^+\,. \tag{6.6}$$

iii) Les inverses partiels $Q_{\alpha,\beta}$ de $\underline{S}(\alpha d\varphi + \beta d\psi)$ sont uniformément bornés pour (α, β) parcourant $\mathbb{Z}^2$.

L'hypothèse 6.1 est motivée par l'étude des équations d'Euler. L'énoncé suivant reprend celui du théorème 3.4.

Théorème 6.2. *Sous l'hypothèse 6.1, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$, il existe des constantes C, $\varepsilon_0 > 0$ et $c > 0$, et une famille $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]}$ de solutions du* *système $(\mathcal{S})$, l'expression u^ε étant définie sur l'intervalle $[0,T(\varepsilon)]$, telle que pour tout $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$ on a :*

$$\|u_a^\varepsilon(0)-u^\varepsilon(0)\|_{L^\infty}\leq C\varepsilon^m\,. \tag{6.7}$$

$$\sup_{t\in[0,\min(\delta,T(\varepsilon))]}\|u_a^\varepsilon(t)-u^\varepsilon(t)\|_{L^\infty}\geq c\sqrt{\varepsilon}\,. \tag{6.8}$$

La preuve de cet énoncé est décomposée en quatre étapes. On part de la solution approchée u_a^ε et on cherche une solution de $(\mathcal{S})$ sous la forme :

$$u^\varepsilon=u_a^\varepsilon+\varepsilon^m\dot{u}^\varepsilon=\underline{u}+\sqrt{\varepsilon}u_1+\varepsilon v_a^\varepsilon+\varepsilon^m\dot{u}^\varepsilon,\qquad m\geq 2\,. \tag{6.9}$$

Comme en (5.28), l'équation pour $\dot{u}^\varepsilon$ s'écrit :

$$\mathcal{S}(u^\varepsilon,\partial_{t,x,\theta})\dot{u}^\varepsilon+\mathcal{S}'(t,x,\varepsilon^m\dot{u}^\varepsilon)\dot{u}^\varepsilon=f^\varepsilon=O(\varepsilon^\infty)\,. \tag{6.10}$$

On cherche une solution $\dot{u}^\varepsilon$ qui oscille selon les deux phases φ et ψ, avec une durée de vie en $O(\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|)$:

$$\dot{u}^\varepsilon(t,x)=\mathbf{u}^\varepsilon\Big(\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}},x,\frac{\varphi}{\varepsilon},\frac{\psi}{\varepsilon}\Big)\,. \tag{6.11}$$

Les profils $\mathbf{u}^\varepsilon(s,x,\theta,\omega)$ sont périodiques en les variables rapides θ et ω. L'équation pour $\mathbf{u}^\varepsilon$ s'écrit

$$\mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^m\mathbf{u}^\varepsilon,\partial_{s,x,\theta,\omega})\mathbf{u}^\varepsilon=\sqrt{\varepsilon}f^\varepsilon=O(\varepsilon^\infty) \tag{6.12}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^\varepsilon(\mathbf{v},\partial):=&\ \Sigma_0(u_a^\varepsilon+\mathbf{v})\partial_s+\sum_{j=1}^d\sqrt{\varepsilon}\,\Sigma_j(u_a^\varepsilon+\mathbf{v})\partial_{x_j}\\&+B+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}S(u_a^\varepsilon+\mathbf{v};d\varphi\partial_\theta+d\psi\partial_\omega)+\sqrt{\varepsilon}\,C^\varepsilon(\mathbf{v})\end{aligned} \tag{6.13}$$

où

$$Bv:=\big(v\cdot\nabla\underline{S}(d\varphi)\big)\partial_\theta u_1$$

et $C^\varepsilon(\mathbf{v})$ est une matrice dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de $\mathbf{v}$ et de (s,x,θ). Pour ne pas alourdir les notations, on désigne encore par u_a^ε la fonction $u_a^\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}s,x,\theta)$ (de même pour v_a^ε et l'erreur f^ε).

Etape 1. *Estimations sur le linéarisé.* On se donne $\mathbf{v}$ et $\mathbf{f}$. On considère l'équation linéaire :

$$\mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^m\mathbf{v},\partial_{s,x,\theta,\omega})\mathbf{u}=\mathbf{f}\,. \tag{6.14}$$

Proposition 6.1. *Etant donné $k > 2 + \frac{d}{2}$, il existe une constante C_0 (qui ne dépend que de u_a^ε) telle que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, tout $T \in]0, \varepsilon^{-1/2}]$ et tout $\mathbf{v} \in C^0([0,T]; H^k) \cap C^1([0,T]; H^{k-1})$ vérifiant*

$$\varepsilon^{m-\frac{1}{2}} \sup_{s\in[0,T]} \|\mathbf{v}(s)\|_{H^k} + \varepsilon^m \sup_{s\in[0,T]} \|\partial_s \mathbf{v}(s)\|_{H^{k-1}} \leq 1 \tag{6.15}$$

les solutions de (6.14) *satisfont pour tout $s \in [0,T]$:*

$$\|\mathbf{u}(s)\|_{H^k} \leq C_0 e^{sC_0} \|\mathbf{u}(0)\|_{H^k} + C_0 \int_0^s e^{(s-s')C_0} \|\mathbf{f}(s')\|_{H^k} ds' . \tag{6.16}$$

Etape 2. *Construction BKW.* On cherche une solution approchée de (6.12) sous la forme d'un développement asymptotique en ε d'ordre fini :

$$\mathbf{u}_a^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\nu+1} \varepsilon^{n/2} \mathbf{u}_n(s, x, \theta, \omega) . \tag{6.17}$$

On note $\mathbf{r}^\varepsilon$ la quantité obtenue en reportant l'expression $\mathbf{u}_a^\varepsilon$ au niveau de l'équation (6.12) :

$$\mathbf{r}^\varepsilon := \mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^m \mathbf{u}_a^\varepsilon, \partial_{s,x,\theta,\omega}) \mathbf{u}_a^\varepsilon .$$

On initialise la série (6.17) par le terme amplificateur :

$$\mathbf{u}_0(s, x, \theta, \omega) = e^{-\mu s} a(x) \big(w(\theta) e^{i\omega} + \overline{w(\theta)} e^{-i\omega} \big) . \tag{6.18}$$

Ici $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à valeurs réelles et $w \in H^\infty(\mathbb{T})$ est une fonction propre de $\mathbb{G}_1$ associée à la valeur propre μ, dont l'existence est garantie par l'hypothèse 6.1. On fixe l'entier ν de façon à ce que :

$$\gamma_0 \left(1 + \frac{\nu}{2m-1} \right) > C_0, \qquad \nu \geq m . \tag{6.19}$$

Proposition 6.2. *Il existe des profils $\mathbf{u}_n$ pour $1 \leq n \leq \nu + 1$, qui sont C^∞ en $s \in [0, \infty[$, à valeurs dans $H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^2)$, et tels que :*

i) pour tout entier k, il existe une constante D_k telle que pour tout n compris entre 0 et ν, et tout $s \in [0, \varepsilon^{-1/2}]$, on a :

$$\sup_{j\leq k} \|\partial_s^j \mathbf{u}_n(s)\|_{H^{k-j}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^2)} \leq D_k \, e^{s\gamma_0(1+\frac{n}{2m-1})} . \tag{6.20}$$

De plus, le terme $u_{\nu+1}$ se majore comme u_ν.

ii) avec $\mathbf{u}_a^\varepsilon$ défini par (6.17), pour tout k, il existe une constante E_k telle que l'expression $\mathbf{r}^\varepsilon$ vérifie pour tout $s \in [0, \varepsilon^{-1/2}]$:

$$\sup_{j\leq k} \|\partial_s^j \mathbf{r}^\varepsilon(s)\|_{H^{k-j}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^2)} \leq E_k \, \varepsilon^{\nu/2} \, e^{s\gamma_0(1+\frac{\nu}{2m-1})} . \tag{6.21}$$

On fixe désormais $k > 2 + \frac{d}{2}$. On pose :

$$\rho(s) := \sqrt{\varepsilon}\, e^{s\gamma_0/(2m-1)} .$$

La proposition 6.2 garantit l'existence d'une constante $C_1 \geq 1$ telle que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ on a :

$$\|\mathbf{u}_a^\varepsilon(s)\|_{H^k} + \|\partial_s \mathbf{u}_a^\varepsilon(s)\|_{H^{k-1}} \leq C_1 e^{s\gamma_0}\big(1 + \rho(s)^\nu\big) . \tag{6.22}$$

Etape 3. *Estimations sur la solution exacte.* On exprime la solution exacte de (6.12) sous la forme $\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}_a^\varepsilon + \varepsilon^{\nu/2}\mathbf{v}^\varepsilon$ avec $\mathbf{u}_a^\varepsilon$ donné par (6.17). L'équation pour $\mathbf{v}^\varepsilon$ se développe en :

$$\mathbf{S}^\varepsilon\big(\varepsilon^m(\mathbf{u}_a^\varepsilon + \varepsilon^{\nu/2}\mathbf{v}^\varepsilon), \partial\big)\mathbf{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\, \mathbf{S}^\varepsilon\big(\varepsilon^m(\mathbf{u}_a^\varepsilon + \varepsilon^{\nu/2}\mathbf{v}^\varepsilon), \partial\big)\mathbf{u}_a^\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1-\nu}{2}} f^\varepsilon .$$

On décompose le terme source en :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) := \varepsilon^{\frac{1-\nu}{2}} f^\varepsilon - \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\, \mathbf{S}^\varepsilon\big(\varepsilon^m(\mathbf{u}_a^\varepsilon + \varepsilon^{\nu/2}\mathbf{v}^\varepsilon), \partial\big)\mathbf{u}_a^\varepsilon &= \varepsilon^{\frac{1-\nu}{2}} f^\varepsilon - \varepsilon^{-\frac{\nu}{2}}\mathbf{r}^\varepsilon \\ &+ \varepsilon^{m-\frac{1}{2}}\mathbf{D}_1^\varepsilon(\varepsilon^m\mathbf{u}_a^\varepsilon, \varepsilon^{m+\nu/2}\mathbf{v}^\varepsilon)(\partial_{\theta,\omega}\mathbf{u}_a^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) \\ &+ \varepsilon^m\mathbf{D}_2^\varepsilon(\varepsilon^m\mathbf{u}_a^\varepsilon, \varepsilon^{m+\nu/2}\mathbf{v}^\varepsilon)(\partial_{s,x}\mathbf{u}_a^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) . \end{aligned}$$

Les $\mathbf{D}_j^\varepsilon(a,b)(\cdot,\cdot)$ pour $j = 1$ ou 2 représentent des applications qui sont bilinéaires en les deux derniers arguments et dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de (a,b) ainsi que des variables (s,x,θ,ω). On considère :

$$\mathbf{S}^\varepsilon\big(\varepsilon^m(\mathbf{u}_a^\varepsilon + \varepsilon^{\nu/2}\mathbf{v}^\varepsilon), \partial\big)\mathbf{v}^\varepsilon = \mathbf{h}^\varepsilon(\mathbf{v}^\varepsilon) . \tag{6.23}$$

Le système quasilinéaire (6.23) est hyperbolique symétrique. On sait que le problème de Cauchy pour (6.23) à données initiales nulles a une solution locale dans $C^0([0,T(\varepsilon)[; H^k) \cap C^1([0,T(\varepsilon)[; H^{k-1})$ pour un certain $T(\varepsilon) > 0$.

Proposition 6.3. *Il existe une constante $C_2 \geq 4C_1 \geq 4$ et un indice $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ on a :*

$$T(\varepsilon) > T_m(\varepsilon) := \frac{1}{\gamma_0}\Big((m - \frac{1}{2})|\ln\varepsilon| - \ln C_2\Big) > 0 . \tag{6.24}$$

De plus, pour tout $s \in [0, T_m(\varepsilon)]$ la solution $\mathbf{v}^\varepsilon$ de (6.23) associée à la donnée initiale nulle vérifie :

$$\|\mathbf{v}^\varepsilon(s)\|_{H^k} + \sqrt{\varepsilon}\, \|\partial_s\mathbf{v}^\varepsilon(s)\|_{H^{k-1}} \leq C_2 e^{s\gamma_0(1+\frac{\nu}{2m-1})} . \tag{6.25}$$

Etape 4. *Conclusion.* On suppose que les propositions 6.1, 6.2 et 6.3 sont démontrées. Soit $M \geq 1$. On examine la solution $\mathbf{u}^\varepsilon$ à l'instant :

$$\bar{s} := \frac{1}{\gamma_0}\Big((m-\frac{1}{2})|\ln\varepsilon| - \ln(C_2M)\Big) \leq T_m(\varepsilon)\,.$$

Ce choix conduit à :

$$C_1\varepsilon^{m-\frac{1}{2}}e^{\bar{s}\gamma_0} \leq C_1/C_2M \leq 1/4M, \qquad \rho(\bar{s}) = (1/C_2M)^{1/(2m-1)} \leq 1\,.$$

Avec (6.22), il vient :

$$\varepsilon^{m-\frac{1}{2}}\|\mathbf{u}_a^\varepsilon(\bar{s})\|_{H^k} + \varepsilon^m\|\partial_s\mathbf{u}_a^\varepsilon(\bar{s})\|_{H^{k-1}} \leq 2C_1/C_2M \leq 1/2M\,. \tag{6.26}$$

On a aussi :

$$\varepsilon^m\|\mathbf{u}_a^\varepsilon(\bar{s}) - \mathbf{u}_0(\bar{s})\|_{H^k} \leq \varepsilon^m C_1 e^{\bar{s}\gamma_0}\big(\rho(\bar{s}) + \rho(\bar{s})^\nu\big) \leq 2C_1\sqrt{\varepsilon}\rho(\bar{s})^{2m}\,.$$

Au contraire, on a :

$$\|\varepsilon^m\mathbf{u}_0(\bar{s})\|_{L^\infty} \geq c\varepsilon^m e^{\bar{s}\gamma_0} \geq c\sqrt{\varepsilon}\rho(\bar{s})^{2m-1}\,. \tag{6.27}$$

On en déduit que pour M assez grand, on a :

$$\|\varepsilon^m\mathbf{u}_a^\varepsilon(\bar{s})\|_{L^\infty} \geq \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{2C_2M}\,. \tag{6.28}$$

L'estimation (6.25) montre que :

$$\varepsilon^{m+\nu/2}\|\mathbf{v}^\varepsilon(\bar{s})\|_{H^k} \leq C_2\varepsilon^m e^{\bar{s}\gamma_0}\,\rho(\bar{s})^\nu \leq C_2\sqrt{\varepsilon}\rho(\bar{s})^{2m-1+\nu}\,. \tag{6.29}$$

On retranche (6.29) à (6.27). Quitte à choisir M assez grand, on obtient :

$$\|(u^\varepsilon - u_a^\varepsilon)(\bar{s})\|_{L^\infty} = \|\varepsilon^m\mathbf{u}^\varepsilon(\bar{s})\|_{L^\infty} \geq \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4C_2M}\,. \tag{6.30}$$

Par ailleurs, on a :

$$(u^\varepsilon - u_a^\varepsilon)(0) = \varepsilon^m\mathbf{u}^\varepsilon(0) = \varepsilon^m\mathbf{u}_a^\varepsilon(0), \qquad \|\mathbf{u}_a^\varepsilon(0)\|_{L^\infty} \leq C\,.$$

Le théorème 6.2 en résulte. □

Il reste à démontrer les trois propositions ci-dessus. Les preuves sont classiques. Nous ne donnerons que les arguments essentiels.

Preuve de la proposition 6.1.

L'opérateur $\mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^m \mathbf{v}, \partial)$ est de la forme

$$\mathbf{S}^\varepsilon = \Sigma_0(u_a^\varepsilon + \varepsilon^m \mathbf{v})\partial_s + \mathbf{R}^\varepsilon(\varepsilon^{m-\frac{1}{2}}\mathbf{v}, \partial_{x,\theta,\omega}) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\underline{S}(d\varphi\partial_\theta + d\psi\partial_\omega)$$

où $\mathbf{R}^\varepsilon$ est un système symétrique en $\partial_{x,\theta,\omega}$ dont les coefficients sont des fonctions C^∞ des variables $(\sqrt{\varepsilon}s, x, \theta)$ et $\varepsilon^{m-\frac{1}{2}}\mathbf{v}$. En outre :

$$\Sigma_0(u_a^\varepsilon + \varepsilon^m \mathbf{v}) = \underline{\Sigma}_0 + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{R}_0^\varepsilon(\varepsilon^{m-\frac{1}{2}}\mathbf{v})\,.$$

L'estimation (6.16) pour $k = 0$ s'en déduit à l'aide d'une intégration par partie, en utilisant la symétrie de l'opérateur. La constante C_0 ne dépend que de bornes pour les normes L^∞ des dérivés en (x, θ) des coefficients de $\mathbf{R}^\varepsilon(\varepsilon^{m-\frac{1}{2}}\mathbf{v}, \partial)$ et de la norme L^∞ de $\partial_s\Sigma_0(u_a^\varepsilon + \varepsilon^m\mathbf{v})$.

Pour obtenir les estimations H^k on dérive l'équation (6.14) en (x, θ, ω). Le point clé est que $\underline{\Sigma}_0$ et $\underline{S}(d\varphi\partial_\theta + d\psi\partial_\omega)$ commutent à ces dérivations. Le commutateur d'exprime donc à l'aide des dérivées en (x, θ, ω) et de la dérivation $\sqrt{\varepsilon}\partial_s$ qui peut être échangée, via l'équation (6.14), en des dérivées selon (x, θ, ω).

En utilisant les propriétés multiplicatives des espaces de Sobolev, comme au paragraphe 5.3, on obtient que pour $k > 2 + \frac{d}{2}$, il existe une constante C telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$ et $\mathbf{v}$ vérifiant (6.15), on a pour $|\alpha| \leq k$:

$$\big\|\mathbf{S}^\varepsilon(\varepsilon^m\mathbf{v}, \partial)\partial_{x,\theta,\omega}^\alpha \mathbf{u}(s)\big\|_{L^2} \leq C\big(\big\|\mathbf{f}(s)\big\|_{H^k} + \big\|\mathbf{u}(s)\big\|_{H^k}\big)\,.$$

Avec l'estimation L^2, la majoration (6.16) dans H^k en résulte. □

Preuve de la proposition 6.2.

En reportant (6.17) dans l'équation (6.12) on obtient une cascade de conditions. La première s'écrit :

$$\underline{S}(d\varphi\partial_\theta + d\psi\partial_\omega)\mathbf{u}_0 = 0\,.$$

Pour $n \geq 0$, on trouve :

$$\underline{S}(d\varphi\partial_\theta + d\psi\partial_\omega)\mathbf{u}_{n+1} + (\partial_s + G)\mathbf{u}_n = \mathbf{f}_{n-1}$$

où G est défini en (3.11) et $\mathbf{f}_{n-1}$ est une fonction de $(\mathbf{u}_0, \ldots, \mathbf{u}_{n-1})$, somme de monômes

$$\Phi\mathbf{u}_{n_1}\cdots\mathbf{u}_{n_{p-1}}\partial\mathbf{u}_{n_p} \quad \text{ou} \quad \Phi\mathbf{u}_{n_1}\cdots\mathbf{u}_{n_p}$$

dont les coefficients Φ sont C^∞ bornés ansi que leurs dérivées pour $s \leq \varepsilon^{-1/2}$. De plus :

$$\sup_j n_j < n \quad \text{et} \quad n_1 + \cdots + n_p \leq n + 1 - 2m(p-1)\,.$$

En particulier, $\mathbf{f}_{n-1}$ est linéaire en les $\mathbf{u}_j$ pour $n \leq 2m-2$, au plus quadratique pour $n \leq 4m-2$, etc.

On construit une solution de ces équations, partant de $\mathbf{u}_0$ donné par (6.18), en résolvant pour $n \geq 1$:

$$\begin{cases} (\mathrm{Id} - \mathbb{P})\mathbf{u}_n = \mathbb{Q}\big(\mathbf{f}_{n-2} - (\partial_s + G)\mathbf{u}_{n-1}\big)\,. \\ (\partial_s + \mathbb{G})\mathbb{P}\mathbf{u}_n = \mathbb{P}\big(\mathbf{f}_{n-1} - G(\mathrm{Id} - \mathbb{P})\mathbf{u}_n\big)\,. \\ \mathbb{P}\mathbf{u}_n = 0 \quad \text{en} \quad s = 0\,. \end{cases} \tag{6.31}$$

Pour contrôler les $\mathbf{u}_n$, on a besoin de l'information suivante :

Lemme 6.2. *Soit $\beta \in \mathbb{Z}$ fixé. Pour tout $\gamma' > \gamma_0$ et tout entier k, il existe une constante C_k telle que l'on ait :*

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_\beta \mathbf{v}(s)\|_{H^k} \leq\; & C_k e^{\gamma' s} \|\mathbb{P}_\beta \mathbf{v}(0)\|_{H^k} \\ & + C_k \int_0^s e^{\gamma'(s-s')} \|(\partial_s + \mathbb{G}_\beta)\mathbf{v}(s')\|_{H^k}\, ds'\,. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur l'entier k.

Pour $k = 0$, on utilise l'alinéa ii) de l'hypothèse 6.1 :

$$g_\beta(s) \leq g(s) \leq C e^{\gamma s}, \quad \forall \gamma > \gamma_0\,.$$

L'estimation (6.32) pour $k = 0$ s'en déduit directement.

On suppose maintenant (6.32) établie pour $0 \leq j < k$. On dérive l'équation à l'ordre k et on met à profit l'estimation L^2 pour majorer les dérivées d'ordre k. Il faut faire attention aux commutateurs. L'opérateur $\mathbb{G}_\beta$ commute aux dérivations en x. Le projecteur $\mathbb{P}_\beta$ commute aux dérivations en x et θ. A l'ordre un, on a :

$$[\partial_\theta, \mathbb{G}_\beta] = \mathbb{P}_\beta [\partial_\theta, G_\beta] \mathbb{P}_\beta = \mathbb{P}_\beta \big(i e^{i\theta} G_\beta^+ \partial_\theta - i e^{-i\theta} G_\beta^- \partial_\theta\big) \mathbb{P}_\beta\,.$$

Ce commutateur est du même type que $\mathbb{G}_\beta$. On retrouve les expressions mises en jeu dans la preuve du lemme 6.1. Il s'ensuit que $[\partial_\theta, \mathbb{G}_\beta]$ est borné sur $H^k(\mathbb{T})$ pour tout k. Il en va de même pour les commutateurs d'ordre supérieur. On en déduit, avec $\gamma'' \in]\gamma_0, \gamma'[$:

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_\beta \mathbf{v}(s)\|_{H^k} \leq\; & C_k e^{\gamma'' s} \|\mathbb{P}_\beta \mathbf{v}(0)\|_{H^k} \\ & + C_k \int_0^s e^{\gamma''(s-s')} \big(\|(\partial_s + \mathbb{G}_\beta)\mathbf{v}(s')\|_{H^k} + \|\mathbb{P}_\beta \mathbf{v}(s')\|_{H^{k-1}}\big) ds'\,. \end{aligned}$$

On applique l'hypothèse de récurence pour contrôler la norme H^{k-1} de $\mathbb{P}_\beta \mathbf{v}(s')$. L'estimation souhaitée pour la norme H^k suit. $\square$

Il s'agit maintenant d'établir l'estimation (6.20) pour les $\mathbf{u}_n$ obtenus via (6.31). On procède par récurrence sur l'entier n.

Pour $n = 0$, l'inégalité (6.20) est une conséquence du choix de $\mathbf{u}_0$. En effet, la croissance de $\mathbf{u}_0$ et de ses dérivées en s est contrôlée via l'alinéa i) de l'hypothèse 6.1.

Pour $0 < n \leq 2m-2$, le terme source $\mathbf{f}_{n-1}$ est linéaire en $\mathbf{u}_j$ avec $j < n$. Les seules harmoniques présentes en ω sont $+1$ et -1 de sorte que le système (6.31) se réduit à :

$$\begin{cases} (\mathrm{Id} - \mathbb{P}_1)\mathbf{u}_n = \mathbb{Q}_1\big(\mathbf{f}_{n-2} - (\partial_s + G_1)\mathbf{u}_{n-1}\big) . \\ (\partial_s + \mathbb{G}_1)\mathbb{P}_1\mathbf{u}_n = \mathbb{P}_1\big(\mathbf{f}_{n-1} - G_1(\mathrm{Id} - \mathbb{P}_1)\mathbf{u}_n\big) . \\ \mathbb{P}_1\mathbf{u}_n = 0 \quad \text{en} \quad s = 0 . \end{cases} \tag{6.33}$$

On suppose (6.20) vérifiée jusqu'au rang $n-1 \leq 2m-3$. Cette hypothèse de récurrence et la forme de $\mathbf{f}_{n-2}$ garantissent l'existence d'une constante $C_{n,k}$ telle que pour $s \leq \varepsilon^{-1/2}$:

$$\sup_{j\leq k} \ \big\|\partial_s^j \mathbf{f}_{n-2}(s) - \partial_s^j(\partial_s + G)\mathbf{u}_{n-1}\big\|_{H^{k-j}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T})} \leq C_{n,k} e^{s\gamma_0(1+\frac{n}{2m-1})} . \tag{6.34}$$

L'alinéa iii) de l'hypothèse 6.1 implique que l'opérateur $\mathbb{Q}$ et donc $\mathbb{Q}_1$ est borné de $H^k(\mathbb{T})$ dans lui même pour tout entier k. On voit ainsi que la composante $(\mathrm{Id} - \mathbb{P}_1)\mathbf{u}_n$ vérifie (6.20).

On se tourne vers l'équation concernant $\mathbb{P}_1\mathbf{u}_n$. Les renseignements obtenus ci-dessus indiquent que le terme source $\mathbf{g} = \mathbb{P}_1(\mathbf{f}_{n-1} - G_1(\mathrm{Id} - \mathbb{P}_1)\mathbf{u}_n)$ vérifie (6.20). On met à profit le lemme 6.2 pour contrôler les dérivées en (x,θ) de $\mathbb{P}_1\mathbf{u}_n$. Par ailleurs, les dérivées en s se récupèrent en utilisant l'équation $\partial_s\mathbb{P}_1\mathbf{u}_n = -\mathbb{G}_1\mathbf{u}_n + \mathbf{g}$.

On se donne finalement $n \geq 2m-1$. On suppose que l'estimation (6.20) est vraie jusqu'au rang $n-1$. Alors les monômes qui interviennent dans la constitution de $\mathbf{f}_{n-1}$ vérifient :

$$\max \ \big(\|\Phi\mathbf{u}_{n_1}\cdots\mathbf{u}_{n_{p-1}}\partial\mathbf{u}_{n_p}(s)\|_{H^k} \,;\, \|\Phi\mathbf{u}_{n_1}\cdots\mathbf{u}_{n_p}(s)\|_{H^k} \big) \leq C_{n,k}e^{s\gamma_0\sigma} .$$

Ici $\sigma \leq 1 + \frac{n}{2m-1}$ si $p = 1$. Pour $p \geq 2$, on obtient :

$$\sigma \leq p + \frac{n_1 + \cdots + n_p}{2m-1} \leq p + \frac{n+1-2m(p-1)}{2m-1} \leq 1 + \frac{n}{2m-1} .$$

On répète la démarche décrite ci-dessus pour estimer $(\mathrm{Id}-\mathbb{P})u_n$ puis $\mathbb{P}u_n$. A cet endroit, il est important de tenir compte des harmoniques en ω qui apparaissent par interactions non linéaire. La difficulté soulevée tient à ce que les informations délivrées par les lemmes 6.1 et 6.2 ne sont pas uniformes en β. Toutefois, comme $n \leq \nu+1$ avec ν fixé, le nombre des harmoniques créées reste fini. Du coup les arguments précédents se transposent tel quel.

L'inégalité (6.20) est prouvée pour tout n avec $0 \leq n \leq \nu$. Le terme de correction $u_{\nu+1}$ se traite à part. On prend $u_{\nu+1} = (\mathrm{Id}-\mathbb{P})u_{\nu+1}$ identifié à l'aide de la première ligne de (6.31). On retrouve ainsi sur $u_{\nu+1}$ le contrôle dont on dispose sur u_ν.

L'estimation (6.21) s'obtient par un examen du reste $\mathbf{r}^\varepsilon$. On voit que $\mathbf{r}^\varepsilon$ comporte $\varepsilon^{\nu/2}$ en facteur et met en jeu les dérivées des u_n pour $0 \leq n \leq \nu+1$. Il suffit alors d'utiliser (6.20). $\square$

Preuve de la proposition 6.3.

On résout l'équation (6.23) à l'aide du schéma itératif :

$$\mathbf{S}^\varepsilon\big(\varepsilon^m(\mathbf{u}_a^\varepsilon + \varepsilon^{\nu/2}\mathbf{v}_n^\varepsilon), \partial\big)\mathbf{v}_{n+1}^\varepsilon = \mathbf{h}^\varepsilon(\mathbf{v}_n^\varepsilon), \qquad \mathbf{v}_{n+1|s=0}^\varepsilon = 0\,. \tag{6.35}$$

On initialise ce schéma avec $\mathbf{v}_0^\varepsilon = 0$. La proposition 6.2 implique qu'il existe une constante K_0 telle que pour $s \leq \varepsilon^{-1/2}$ on a :

(6.36)
$$\|\varepsilon^{\frac{1-\nu}{2}} f^\varepsilon - \varepsilon^{\frac{-\nu}{2}} \mathbf{r}^\varepsilon(s)\|_{H^k(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^2)} \leq K_0 e^{s\gamma_1}, \quad \gamma_1 := \gamma_0\Big(1 + \frac{\nu}{2m-1}\Big)\,.$$

On montre par récurrence sur n qu'il existe un indice ε_0 et une constante $K \geq 4C_1$ tels que pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $n \geq 0$ et

$$0 \leq s \leq T_m(\varepsilon) := \frac{1}{\gamma_0}\Big((m-\frac{1}{2})|\ln\varepsilon| - \ln K\Big) \tag{6.37}$$

on a :

$$\|\mathbf{v}_n^\varepsilon(s)\|_{H^k} + \sqrt{\varepsilon}\|\partial_s \mathbf{v}_n^\varepsilon(s)\|_{H^{k-1}} \leq K e^{s\gamma_1}\,. \tag{6.38}$$

La proposition 6.3 écrite avec $C_2 = K$ s'en déduit. En effet, à ε fixé, on sait que la suite $\mathbf{v}_n^\varepsilon$ converge dans $C^0([0,T]; H^{k-1})$ vers la solution de (6.23) sur tout intervalle de temps où elle est bornée dans $C^0([0,T]; H^k)$ et dans $C^1([0,T]; H^{k-1})$. Les estimations (6.38) qui sont uniformes en n montrent que la suite $\{\mathbf{v}_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge au moins sur $[0, T_m(\varepsilon)]$. La solution de (6.23) est donc définie au moins sur cet intervalle et les majorations (6.38) impliquent que la limite $\mathbf{v}^\varepsilon$ vérifie (6.25).

Il reste finalement à démontrer les majorations (6.38). Pour $n = 0$, elles sont triviales. Supposons qu'elles sont vérifiées au rang n. On remarque d'abord que, pour $s \leq T_m(\varepsilon)$, le contrôle (6.38) et l'inégalité $\nu \geq m$ impliquent :

$$\varepsilon^{m-\frac{1}{2}} \, \|\varepsilon^{\frac{\nu}{2}} \mathbf{v}_n^\varepsilon(s)\|_{H^k} + \varepsilon^m \|\varepsilon^{\frac{\nu}{2}} \partial_s \mathbf{v}_n^\varepsilon(s)\|_{H^{k-1}} \leq K^{-\frac{\nu}{2m-1}} \leq 1/2 \, . \tag{6.39}$$

Par ailleurs, la proposition 6.2 se traduit par l'inégalité (6.26) qui pour $M = 1$ donne :

$$\varepsilon^{m-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_a^\varepsilon(s)\|_{H^k} + \varepsilon^m \|\partial_s \mathbf{u}_a^\varepsilon(s)\|_{H^{k-1}} \leq 2C_1/K \leq 1/2 \, . \tag{6.40}$$

On exploite ces renseignements pour estimer le membre de droite de (6.23). D'abord on a :

$$\|\mathbf{D}_j^\varepsilon(\varepsilon^m \mathbf{u}_a^\varepsilon, \varepsilon^{m+\nu/2} \mathbf{v}_n^\varepsilon)\|_{H^k} \leq C_4 \, .$$

On en déduit :

$$\|\varepsilon^{m-\frac{1}{2}} \mathbf{D}_1^\varepsilon(\varepsilon^m \mathbf{u}_a^\varepsilon, \varepsilon^{m+\nu/2} \mathbf{v}_n^\varepsilon)(\partial_{\theta,\omega} \mathbf{u}_a^\varepsilon, \mathbf{v}_n^\varepsilon)\|_{H^k} \leq C_5 \, K^{-\frac{\nu}{2m-1}} \, e^{\gamma_1 s} \, .$$
$$\|\varepsilon^m \mathbf{D}_2^\varepsilon(\varepsilon^m \mathbf{u}_a^\varepsilon, \varepsilon^{m+\nu/2} \mathbf{v}_n^\varepsilon)(\partial_{s,x} \mathbf{u}_a^\varepsilon, \mathbf{v}_n^\varepsilon)\|_{H^k} \leq C_5 \, K^{-\frac{\nu}{2m-1}} \, e^{\gamma_1 s} \, .$$

Et finalement :

$$\|\mathbf{h}^\varepsilon(\mathbf{v}_n^\varepsilon)\|_{H^k} \leq \big(K_0 + 2C_5 K^{-\frac{\nu}{2m-1}}\big) \, e^{\gamma_1 s} \, .$$

Ici les constantes C_4 et C_5 sont indépendantes de K, ε et n. On ajoute (6.39) et (6.40) pour retenir :

$$\varepsilon^{m-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_a^\varepsilon(s) + \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} \mathbf{v}_n^\varepsilon(s)\|_{H^k} + \varepsilon^m \|\partial_s \mathbf{u}_a^\varepsilon(s) + \varepsilon^{\frac{\nu}{2}} \partial_s \mathbf{v}_n^\varepsilon(s)\|_{H^{k-1}} \leq 1 \, . \tag{6.41}$$

Dès lors, on peut appliquer la proposition 6.1 sur (6.35) qui livre :

$$\|\mathbf{v}_{n+1}^\varepsilon(s)\|_{H^k} \leq C_0 \big(K_0 + 2C_5 K^{-\frac{\nu}{2m-1}}\big) \int_0^s e^{C_0(s-s')} e^{\gamma_1 s'} ds' \, .$$

L'entier ν a été ajusté en (6.19) de manière à ce que $C_0 < \gamma_1$. Du coup :

$$\|\mathbf{v}_{n+1}^\varepsilon(s)\|_{H^k} \leq C_0 \big(K_0 + 2C_5 K^{-\frac{\nu}{2m-1}}\big) \, e^{\gamma_1 s} / (\gamma_1 - C_0) \, .$$

On exprime $\sqrt{\varepsilon} \partial_s \mathbf{v}_{n+1}^\varepsilon(s)$ à l'aide de l'équation (6.35). La forme de l'opérateur $\mathbf{S}^\varepsilon$ et le contrôle (6.41) fournissent :

$$\sqrt{\varepsilon} \|\partial_s \mathbf{v}_{n+1}^\varepsilon(s)\|_{H^{k-1}} \leq C_6 \Big(\|\mathbf{v}_{n+1}^\varepsilon(s)\|_{H^k} + \sqrt{\varepsilon} \|\mathbf{h}^\varepsilon\big(\mathbf{v}_n^\varepsilon(s)\big)\|_{H^{k-1}} \Big) \, .$$

Pour pouvoir conclure, il faut que :

$$\big((1 + C_6) C_0 / (\gamma_1 - C_0) + C_6 \sqrt{\varepsilon}\big) \, \big(K_0 + 2C_5 K^{-\frac{\nu}{2m-1}}\big) \leq K \, .$$

Il suffit de prendre ε_0 assez petit et K assez grand pour que cette inégalité soit vraie. La démonstration de la proposition 6.3 et par conséquent celle du théorème 6.2 en découle. □

References

[1] M. Artola, A. Majda, *Nonlinear development of instabilities in supersonic vortex sheets I. The basic kink mode*, Physica D, 28 (1987), 253-281.

[2] G. Boillat, *Symétrisation des systèmes d'e.d.p. avec densité d'énergie convexe et contraintes*, C. R. A. S. 295, Sé. I, (1982) 551-554.

[3] G. Browning, H.O. Kreiss, *Problems with different time scales for nonlinear partial differential equations*, SIAM J. Appl. Math. 42 (1982) 704-718.

[4] C. Cheverry, O. Guès, G. Métivier, *Oscillations de grande amplitude*, En préparation.

[6] T. Colin, D. Lannes, *Long-wave short-wave resonance for nonlinear geometric optics*, Duke Math. J. 107 (2001), no. 2, 351–419.

[7] A. Corli, O. Guès, *Stratified solutions for systems of conservation laws*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), no. 6, 2459-2486.

[8] W. E, *Propagation of oscillations in the solutions of* $1-D$ *compressible fluid equations*, Com. P. D. E. 17 (3/4) (1992) 347-370.

[9] K-O. Friedrichs, P, Lax, *Systems of conservation laws with a convex extension*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 68 (1971), 1686-1688.

[10] S. Friedlander, W. Strauss, M. Vishik, *Nonlinear instability in an ideal fluid*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol.14, no. 2, (1997), 187-209.

[11] E, Grenier, *On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations*, Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000), no. 9, 1067–1091.

[12] O. Guès, *Ondes multidimensionnelles* $\varepsilon-$*stratifiées et oscillations*, Duke Math. J. 68 (1992), no. 3. 401-446.

[13] O. Guès, *Développement asymptotique de solutions exactes de systèmes hyperboliques quasilinéaires*, Asymptotic Anal. 6 (1993), no. 3, 241–269.

[15] A. Heibig, *Error estimates for oscillatory solutions to hyperbolic systems of conservation laws*, Com. P. D. E. 18 (1993) 281-304.

[16] P-Y. Jeanne, *Optique géométrique pour des systèmes semi-linéaires avec invariance de jauge*, Soumis pour publication aux Mémoires de la SMF.

[17] J-L Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Optique géométrique non linéaire et équations de Maxwell Bloch*, Prépublication de l'Ecole Polytechnique, exposé XI, (1999).

[18] J-L Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Justification of multidimensional single phase semilinear geometric optics*, Trans. Amer. Math. Soc. 330 (1992), no. 2, 599–623.

[19] J-L Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Recent results in non-linear geometric optics.* Hyperbolic problems : theory, numerics, applications, Vol. II (Z¸rich, 1998), 723–736, Internat. Ser. Numer. Math., 130, Birkhäuser, Basel, 1999.

[20] J-L Joly, G. Métivier, J. Rauch, *Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 28 (1995), no. 1, 51–113.

[21] A. Majda, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[22] A. Museux, *Problème de Cauchy pour des solutions stratifiées de systèmes hyperboliques de lois de conservation*, Prépublication 616 de l'université de Nice-Sophia Antipolis, 2001.

[23] S. Schochet, *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, J. Dif. Eq. 114 (1994), 476-512.

[24] D. Serre, *Oscillations nonlinéaires de haute fréquence. Dim* ≥ 2. In Marino A. and Murthy M. K. V., editors, Nonlinear variational problems and partial differential equations, volume 320 of Pitman Res. notes in Math., pages 245-294, London, 1995. Longman. Springer-Verlag, New-York, (1983).

[25] D. Serre, *Quelques méthodes d'étude de la propagation d'oscillations hyperboliques non-linéaires*, Séminaire EDP 1990-91, Ecole Polytechnique, exposé no XX.

[26] B. Sévennec, *Géométrie des systèmes hyperboliques de lois de conservation*, Société mathématique de France, Mémoire 56, Suppl. Bull. Soc. Math. France 122 (1) (1994).