Stabilité des profils de chocs multidimensionnels

Olivier Gues[*], Guy Métivier[†], Mark Williams[‡], Kevin Zumbrun[§]

Résumé L'analyse des ondes de choc de Lax pour les systèmes hyperboliques multidimensionnels remonte aux travaux de A.Majda des annés 1980. Dans cet exposé, on étudie l'approximation de ces ondes de chocs par des solutions de viscosité, sous des hypothèses assez générales. L'essentiel de l'exposé est consacré à la mise en place des outils d'analyse nécessaires à l'étude de la satibilité linéaire et non linéaire des solutions: dérivation de l'équation des profils de choc, notion de transversalité, fonction d'Evans pour la stabilité spectrale, mutliplicateurs et symmétriseurs.

1 Introduction

Dans cet exposé, nous présentons les principaux résultats et méthodes d'analyse de [GMWZ1] [GMWZ2] [GMWZ3] sur la stabilité des profils de chocs de Lax lorsque la viscosité tend vers zéro. Considérons un système $N \times N$ de lois de conservation dans $\mathbb{R}^{1+d}$:

$$L(u) := \partial_t u + \sum_{j=1}^{d} \partial_j f_j(u) = 0. \tag{1.1}$$

On suppose donné un choc de Lax, uniformément stable, noté u_0, associé à un front $x = \psi(t, y)$, où l'on note $(y, x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ les variables spatiales et $y = (y_1, \ldots, y_{d-1})$. On a:

$$u_0(t, y, x) = \begin{cases} u_0^-(t, y, x), & x < \psi(t, y) \\ u_0^+(t, y, x), & x > \psi(t, y) \end{cases}$$

[*]Université de Provence, partially supported by European network HYKE, HPRN-CT-2002-00282

[†]Université de Bordeaux, partially supported by European network HYKE, HPRN-CT-2002-00282.

[‡]University of North Carolina, partially supported by NSF grant DMS-0070684.

[§]Indiana University, partially supported by NSF grant DMS-0070765.

$u_0^\pm$ sont solutions régulières jusqu'au bord de (1.1) et vérifient la condition de saut de Rankine-Hugoniot sur le front $\{x = \psi(t, y)\}$:

$$\partial_t \psi \big[u \big] + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_j \psi \big[f_j(u) \big] = \big[f_d(u) \big] . \tag{1.2}$$

De telles solutions ont été construite par A.Majda [Maj] sous une hypothèse de *stabilité spectrale*, couramment appelée condition de Lopatinski uniforme et rappelée ci-dessous (cf aussi [Mé2]).

Il est classique de considérer le système (1.1) comme limite de régularisations paraboliques:

$$L_\varepsilon(u) := L(u) - \varepsilon \sum_{1 \le j,k \le d} \partial_j \big(B_{j,k}(u) \partial_k u \big) = 0, \tag{1.3}$$

lorsque la *viscosité* ε est petite. Les motivations viennent à la fois des applications comme la dynamique des fluides et de considérations théoriques sur l'analyse des systèmes de lois de conservation (cf les travaux de Lax, Kruzhkov, etc). Dans ce contexte, un problème classique est de savoir dans quelles conditions la solution u_0 (1.1) est limite lorsque ε tend vers zéro d'une famille de solutions u_ε de (1.3). En fait, cette approche a été souvent utilisée pour *définir* des critères d'admissibilité pour les solutions faibles de (1.1) (cf [Lax], [Kru], [DiP]). Pour établir cette convergence, les hypothèses sont de deux natures: d'abord, il y a des conditions de structure sur l'hyperbolicité et la parabolicité des équations; ensuite, il y a les hypothèses de *stabilité spectrale* dont les versions fines s'expriment à l'aide de conditions sur des *fonctions d'Evans*, qui jouent le rôle des déterminants de Lopatinski dans le cas hyperbolique. Ces conditions sont plus fortes que les hypothèses de stabilité du choc hyperbolique (cf [ZS], [Zu1]). Dans ce domaine, un progrès important a été fait récemment par H.Freistühler et P.Szmolyan [FS] et R.Plaza et K.Zumbrun [PZ] qui ont montré que les conditions de stablité spectrale sont automatiquement satisfaites pour des chocs de Lax suffisamment faibles. Ceci complète les résultats de [Mé1] qui montrent que, dans le cas hyperbolique, les chocs faibles de Lax vérifient la condition de stabilité uniforme de Majda.

En dimension $d = 1$ d'espace, on dispose maintenant du résultat général obtenu par S.Bianchini et A.Bressan concernant l'approximation des solutions de (1.1) de petite variation totale par des solutions de viscosité ([Bi-Br]). Toujours en dimension 1, le problème particulier de l'approximation d'un choc hyperbolique avait été résolu par J.Goodman et Z.Xin [GX] pour des chocs suffisamment faibles (voir aussi la preuve de [GW]) et par F.Rousset [Ro2] pour des chocs d'amplitude arbitraire, satisfaisant la condition de stabilité spectrale. En dimension d quelconque, un résultat analogue est démontré en [GMWZ2], sous l'hypothèse technique supplémentaire que le front reste proche d'un plan. Le problème voisin de la stabilité en temps grand des profils de choc plan à viscosité fixée est étudié dans [GMWZ1].

Néanmoins, la fonction d'Evans introduite dans [ZS], [Zu1] et utilisée dans [Ro2], [GMWZ2] a une singularité à l'origine. Cela se traduit par l'existence d'un pôle pour la fonction de Green et des pertes en ε dans les estimations de stabilité. Ceci n'est pas naturel, les estimations paraboliques devraient être meilleures que les estimations hyperboliques et les redonner à la limite. Dans [GMWZ3], on reprend le problème en calquant l'analyse du problème parabolique sur celle du problème hyperbolique. En particulier, on introduit de force un front qui n'a pas de sens à ε fixé pour le problème parabolique, mais qui redonne le front hyperbolique à la limite. Le point clé est d'inclure les variations du front dans l'analyse de la stabilité parabolique. Cela conduit à introduire une nouvelle fonction d'Evans. Celle-ci n'est plus singulière a l'origine et cette méthode permet d'obtenir les estimations de stabilité uniformes et non singulières. Il est évidemment crucial de noter que les conditions de stabilité pour la nouvelle fonction et l'ancienne fonction d'Evans sont équivalentes.

Dans toute la suite, nous supposons satisfaites les conditions suivantes:

Hypothèses 1.1. (H0) *f_j et $B_{j,k}$ sont C^∞ sur l'ouvert $\mathcal{U}^* \subset \mathbb{R}^N$*

(H1) *Les valeurs propres de $\sum_{j,k=1}^d \xi_j\xi_k B_{j,k}(u)$ vérifient* $\mathrm{Re}\mu \geq c|\xi|^2$, *pour $u \in \mathcal{U}^*$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.*

(H2) *Les valeurs propres de $\sum \xi_j A_j(u)$ ($A_j = \nabla_u f_j$) sont réelles, semi-simples et de multiplicité constante pour $u \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}^*$ et $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.*

(H3) *Le spectre de $\sum i\xi_j A_j(u) + \sum \xi_j\xi_k B_{j,k}(u)$ vérifie* $\mathrm{Re}\mu \geq c|\xi|^2$, *pour $u \in \mathcal{U}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.*

Remarques 1.2. a) Le domaine $\mathcal{U}^*$ est le domaine de parabolicité du sytème; $\mathcal{U}$ est de domaine d'hyperbolicité. Il est important pour les applications de permettre que $\mathcal{U}$ soit strictement plus petit que $\mathcal{U}$ (penser aux transitions de phases ou aux lois d'état de van der Waals).

b) Par (H1), l'analyse se limite au cas où la perturbation est totalement parabolique. En particulier, cela exclut le cas des viscosités partielles, comme Navier-Stokes, où il n'y a pas de diffusion sur certaines composantes. La méthode présentée devrait s'adapter au cadre des viscosités partielles, modulo les bonnes reformulations de (H1) et (H3).

c) (H2) est une hypothèse d'hyperbolicité assez forte; on pourrait espérer la remplacer par une condition plus courante de symétrie, vérifiée dans toutes les applications où le système admet une entropie strictement convexe. L'hypothèse de multiplicité constante est pour le moment nécessaire à la construction de symétriseurs de type Kreiss. Elle a l'inconvénient majeur d'écarter de l'analyse des exemples importants comme la MHD.

d) L'hypothèse (H3) est une condition de compatibilité entre la partie hyperbolique et la partie parabolique. Dans le cas de la viscosité artificielle $B = \delta_{j,k}\mathrm{Id}$, (H1) est automatique et (H3) résulte de (H2).

2 Chocs plans

Un choc plan est une solution faible de (1.1), constituée de deux états constants séparés par un hyperplan:

$$u(t,y,x) = \begin{cases} u^-, & x < \sigma t + \theta y \\ u^+, & x > \sigma t + \theta y \end{cases} \tag{2.1}$$

La condition de Rankine-Hogoniot s'écrit:

$$\sigma\big[u\big] + \sum_{j=1}^{d-1} \theta_j \big[f_j(u)\big] = \big[f_d(u)\big]\,. \tag{2.2}$$

On introduit les notations suivantes pour le flux normal et la matrice de bord :

$$f_n(u,h) = f_d(u) - \sigma u - \sum_{j=1}^{d-1} \theta_j(x) f_j(u)\,,$$

$$A_n(u,h) = A_d(u) - \sigma \mathrm{Id} - \sum_{j=1}^{d-1} \theta_j(x) A_j(u).$$

Définition 2.1. *Un choc plan est $p = (u^-, u^+, h) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^d$ avec $u^- \neq u^+$ et $h = (\sigma, \theta)$ vérifiant* (2.2).

Le choc vérifie les conditions de Lax si les $A_n(u^\pm, h)$ sont inversibles (front non caractéristique) et

$$N^+ + N^- = N + 1\,,$$

où N^+ est le nombre de valeurs propres négatives de $A_n(u^+, h)$ et N^- le nombre de valeurs propres positives de $A_n(u^-, h)$.

Profils de choc. Des ondes simples

$$u^\varepsilon(t,y,x) = w\left((x-\sigma t-\theta y)/\varepsilon\right) \tag{2.3}$$

vérifient (1.3) si et seulement si

$$\partial_z\Big(B_{n,n}(w(z),h)\partial_z w\Big) - \partial_z\Big(f_n(w(z),h)\Big) = 0, \tag{2.4}$$

où

$$B_{n,n}(u,h) = \sum_{j,k=1}^{d} n_j n_k B_{j,k}(u), \qquad n = (-h_1,\dots,-h_{d-1},1),$$

est la viscosité normale. On cherche des solutions $w(z)$ telles que

$$\lim_{z\to-\infty} w(z) = u^-\,, \qquad \lim_{z\to+\infty} w(z) = u^+.$$

Définition 2.2. *Un profil est une fonction $W \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{U}^*)$, telle qu'il existe $W^\pm \in \mathcal{U}$ pour lesquels:*

$$\left|\partial_z^k(W(z)-W^\pm)\right| \le Ce^{-\delta|z|} \qquad z\to\pm\infty$$

W est un profil de choc associé à (u^-,u^+,h) si en outre W est solution de (2.4) et $W^\pm = u^\pm$.

Remarque 2.3. La convergence exponentielle des profils de choc est intimement liée aux conditions de Lax, qui impliquent que les états limites sont des point hyperboliques du système dynamique (2.4) intégré une fois.

Exemple 2.4. Pour l'équation de Burgers, $\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_x u^2 - \varepsilon\partial_x^2 u = 0$, l'équation de profil est

$$\partial_z^2 w - \frac{1}{2}\partial_z w^2 + \sigma\partial_z w = 0.$$

Les solutions *globales* sont : $w(z) = \sigma - \lambda\tanh(\lambda z/2)$.

On notera que (u^-,u^+,σ) est un choc de Lax si et seulement si $u^- > u^+$ et $\sigma = (u^- + u^+)/2$, ce implique l'existence d'un profil.

Existence de profils de choc. On intègre une fois l'équation (2.4):

$$B_{n,n}(W,h)\partial_z W = f_n(W,h) - k.$$

La condition $\partial_z W \to 0$ à l'infini nécessite

$$k = f_n(W^-,h) = f_n(W^+,h).$$

La dernière égalité est précisément la condition de Rankine-Hugoniot qui est donc aussi une condition nécessaire à l'existence d'un profil de choc. Inversement, étant donnés (u^-, u^+, h) vérifiant (2.2), les solutions bornées à $\pm\infty$ de

$$B_{n,n}(W,h)\partial_z W = f_n(W,h) - f_n(u^\pm, h)$$

convergent exponentiellement et forment une variété de dimension $N^\pm$, par le théorème de la variété centrale. L'intersection de ces variétés donne les profils de choc associés. L'équation de profil est invariante par translation, donc tous les translatés $W(z-z_0)$ d'un profil sont encore des profils de choc associés au même choc plan. Si le choc est de Lax, l'analyse dimensionnelle montre qu'on peut espérer que les variétés se coupent transversalement, et ceci est vrai au moins lorsque $u^+ - u^-$ est petit.

Transversalité. L'invariante par translation implique aussi que si W est solution de (2.4), alors $\partial_z W$ est solution de l'équation linéarisée:

$$\mathcal{P}'_W \dot w := \partial_z(B_{n,n}\partial_z \dot w) - \partial_z\big(A_n \dot w - \dot w \cdot \nabla_u B_{n,n}\partial_z W\big) = 0. \tag{2.5}$$

Définition 2.5. *Le profil de choc W est transverse si le noyau de $\mathcal{P}'_W$ dans $L^2(\mathbb{R})$ se réduit à $\mathbb{R}\partial_z W$.*

3 Stabilité des profils de choc plans, fonction d'Evans

On se donne u^ε une solution exacte (2.3) associée à un choc plan, ou plus généralement une famille de solutions approchées construites par O.Guès et M.Williams, cf [GW], de la forme:

$$u^\varepsilon_{app} = W\big(t,y,x,(x-\psi(t,y))/\varepsilon\big) + \varepsilon W_1 \dots.$$

Hypothèse 3.1. (H4) *On suppose donné un profil de choc plan W associé à un choc plan de Lax (u^-, u^+, h).*

Le problème de la *stabilité non linéaire* est de construire des solutions de (2.2) voisines de u^ε ou u^ε_{app}. On le fait par un schéma itératif qui repose sur la résolution des équations linéarisées: on linéarise (2.2) au voisinage de u^ε pour obtenir une équation de la forme:

$$L'_\varepsilon \dot u = \dot f \tag{3.1}$$

Le problème de la *stabilité linéaire* est de résoudre cette équation et d'estimer $\dot u$ en fonction de $\dot f$.

Considérons le cas le plus simple où u^ε est associé à un choc plan. Quitte à faire un changement de variables, on peut supposer que $h = 0$. Le linéarisé L'_ε est de la forme

$$L'_\varepsilon \dot u = \partial_t \dot u + \sum \partial_j (A_j \dot u) - \varepsilon \sum \partial_j \big(B_{j,k} \partial_k \dot u \big) - \sum \partial_j \big(\dot u \cdot \nabla_u B_{j,d} \partial_z W \big)$$

où les coefficients sont évalués en $u = W(x/\varepsilon)$. Ils sont indépendants de (t, y), ce qui permet de faire une analyse en ondes planes en (t, y), c'est-à-dire une transformation de Fourier-Laplace en ces variables. On obtient une équation de la forme:

$$\hat L'_\varepsilon \hat u = -\varepsilon B(x/\varepsilon) \partial_x^2 \hat u + A(x/\varepsilon, \varepsilon \hat\eta) \partial_x \hat u + \frac{1}{\varepsilon} M(x/\varepsilon, \varepsilon \hat\zeta) \hat u = \hat f \,.$$

avec

$$\begin{aligned} &B(z) = B_{d,d}(W), \\ &A(z, \eta) = A_d(W) + \sum_{j<d} i\eta_j (B_{j,d}(W) + B_{d,j}(W)), \\ &M(z, \zeta) = i\tau + \gamma + \sum_{j,k<d} \eta_j \eta_k B_{j,k} + (\partial_z W \cdot \nabla_u A_d) + \dots \end{aligned}$$

On a noté $\zeta = (\tau, \eta, \gamma)$ les variables fréquentielles. Un changement d'échelle permet d'éliminer les ε: si l'on pose

$$z = x/\varepsilon, \quad \zeta = \varepsilon \hat\zeta, \quad u = \hat u, \quad f = \varepsilon \hat f, \tag{3.2}$$

l'équation devient:

$$\mathcal{L}(z, \zeta, \partial_z) u = -B(z) \partial_z^2 u + A(z, \eta) \partial_z u + M(z, \zeta) u = f. \tag{3.3}$$

Notation. Pour $\zeta \neq 0$, $\gamma \geq 0$, $\mathbb{E}^\pm(\zeta)$ désigne l'espace des données initiales $(u(0), \partial_z u(0))$ telles que la solution correspondante de (3.3) sur $\{\pm z \geq 0\}$ est bornée (et alors elle est exponentiellement décroissante)

Il résulte des Hypothèses (H0) à (H4) que:

Lemme 3.2. *Pour $\zeta \neq 0$ avec $\gamma \geq 0$, on a $\dim \mathbb{E}^\pm(\zeta) = N$.*

Il en résulte que l'équation (3.3) est bien posée dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\mathbb{E}^-(\zeta) \cap \mathbb{E}^+(\zeta) = \{0\}$. Munissant $\mathbb{C}^N$ de la norme Hilbertienne canonique, on introduit alors la *fonction d'Evans*:

$$D(\zeta) = \det \big(\mathbb{E}^-(\zeta), \mathbb{E}^+(\zeta) \big), \tag{3.4}$$

où, par définition, le déterminant s'obtient en choisissant une base orthonormée dans chaque espace, le résultat étant indépendant de ce choix.

Remarque 3.3. La définition du déterminant n'est pas intrinsèque puisqu'elle fait intervenir le choix d'un produit scalaire sur $\mathbb{C}^N$. Néanmoins, un changement de produit scalaire ou de base dans $\mathbb{C}^N$ conduit à une nouvelle fonction $\tilde{\det}$ telle que $C^{-1}|\det(E_1, E_2)| \leq |\tilde{\det}(E_1, E_2)| \leq C|\det(E_1, E_2)|$ où C est indépendante des espaces E_1 et E_2 tels que $\dim E_1 + \dim E_2 = N$. Les conditions de stabilité spectrale énoncées ci-dessous sont donc indépendantes du choix d'un produit scalaire ou d'un choix de base dans $\mathbb{C}^N$.

Les conditions de *stabilité faible* s'écrivent : $D(\zeta) \neq 0$ pour tout $\zeta \neq 0$ tel que $\gamma > 0$. Si elles ne sont pas satisfaites, il existe des modes exponentiellement croissant conduisant à des instabilités fortes de type Hadamard. Quand elles sont vérifiées, elles permettent de résoudre l'équation (3.3) à ζ fixé. La *stabilité forte* ou *uniforme* requiert en outre des estimations uniformes (ou plutôt précisées) en ζ de $\mathcal{L}^{-1}$ qui, par Fourier-Laplace inverse, permettent ensuite de résoudre les équations linéarisées (3.1) dans des espaces de type L^2. On demande alors des estimations uniformes de D. Pour le problème voisin les couches limites, les conditions de stabilité forte demandent que pour ζ borné, on ait : $|D(\zeta)| \geq c > 0$; pour les hautes fréquences, il faut imposer une condition analoque sur une fonction renormalisée qui tient compte de la quasi-homogénéité parabolique. Dans le cas présent, les hypothèses (H0) à (H4) impliquent que les conditions de stabilité forte sont automatiquement satisfaites pour ζ grand. Les conditions de stabilité faible traitent les moyennes fréquences, et il reste à étudier les basses fréquences (ζ petit).

En $\zeta = 0$, $\mathcal{L}(z, 0, \partial_z)$ est le linéarisé (2.5) de (2.4). Il a donc un noyau qui contient $\mathbb{R}\partial_z W$, ce qui implique que la fonction d'Evans s'annule en $\zeta = 0$. C'est là que se situe la grande différence entre le problème des chocs et celui des couches limites.

Théorème 3.4 (K.Zumbrun-D.Serre, [ZS]). *Au voisinage de* 0*, on a :*

$$D(\zeta) = |\zeta|\beta\big(\Delta(\zeta/|\zeta|) + O(|\zeta|)\big) \tag{3.5}$$

avec

i) $\beta \neq 0$ *si et seulement si* W *est transverse,*

ii) Δ *est le déterminant de Lopatinski-Majda du problème de choc hyperbolique.*

Ayant constaté l'annulation de D à l'origine, la condition de stabilité uniforme pose que l'annulation est minimale:

Définition 3.5. *On dit que le profil de choc est uniformément stable si:*

i) $D(\zeta) \neq 0$ pour $\zeta \neq 0$ avec $\gamma \geq 0$,
ii) il existe $c > 0$ tel que $|D(\zeta)| \geq c|\zeta|$ pour $0 < |\zeta| \leq 1$ avec $\gamma \geq 0$.

D'après le théorème ci-dessus, on peut remplacer *ii*) par le fait que W est transverse et que le choc plan est uniformément stable au sens de Majda.

Pour le problème des couches limites, la stabilité uniforme implique que les solutions du problème linéarisé vérifient (cf [MZ1]):

$$(\gamma + \rho^2)\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \rho = |\zeta|. \tag{3.6}$$

Pour le problème des chocs, la présence d'un pôle additionnel en $\zeta = 0$ conduit à des estimations moins bonnes, de la forme (cf [GMWZ1], [GMWZ2]):

$$(\gamma + \rho^2)^{1/2}\rho\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.7}$$

Dans les variables de départ, cela correspond à des estimations:

$$\sqrt{\varepsilon}\hat{\gamma}^{3/2}\|e^{-\hat{\gamma}t}\dot{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+d})} \leq C\|e^{-\hat{\gamma}t}\dot{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+d})}\,,$$

et en localisant en temps, à des **estimations avec perte en** ε:

$$\sqrt{\varepsilon}\|\dot{u}\|_{L^2} \leq C\|\dot{f}\|_{L^2}. \tag{3.8}$$

Ces estimations sont *suffisantes* pour prouver la stabilité non linéaire, comme développé en [GMWZ2]: si on part d'une solution approchée

$$L(u^\varepsilon_{app}) = \varepsilon^m f^\varepsilon, \qquad m > 1,$$

on cherche la solution exacte sous la forme

$$u^\varepsilon = u^\varepsilon_{app} + \varepsilon^{m-1/2}v^\varepsilon, \qquad v = O(1).$$

L'équation pour v^ε s'écrit

$$L'_\varepsilon v = -\sqrt{\varepsilon}f^\varepsilon + \varepsilon^{m-1/2}O(v^2).$$

La perte en $\sqrt{\varepsilon}$ dans (3.8) est compensée par le fait que le terme source est $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Néanmoins, les estimations (3.7) et (3.8) ne sont pas satisfaisantes car elles ne redonnent pas l'estimation hyperbolique limite.

4 Introduction du front

Suivant Majda, on introduit comme dans le cas hyperbolique un “front” ψ, frontière libre, qu'on redresse par changement de variables

$$\tilde{x} = x - \psi(t, y)$$

On obtient des équations sur $\{\tilde{x} > 0\}$ et $\{\tilde{x} < 0\}$

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{d} D_j f_j(u) - \varepsilon \sum_{j,k=1}^{d} D_j \Big(B_{j,k}(u) D_k u \Big) = 0, \tag{4.1}$$

avec $D_j = \partial_j - (\partial_j \psi)\partial_{\tilde{x}}$ quand $j < d$ et $D_d = \partial_{\tilde{x}}$. La régularité parabolique impose les conditions de transmission:

$$\big[u\big] = 0\,, \quad \big[\partial_{\tilde{x}} u\big] = 0 \qquad \text{sur} \quad \{\tilde{x} = 0\} \tag{4.2}$$

On linéarise autour de $(u^\varepsilon_{app}, \psi^\varepsilon_{app})$, avec dans le cas modèle d'un choc plan:

$$u^\varepsilon_{app} = W(\tilde{x}/\varepsilon)\,, \qquad \psi^\varepsilon_{app} = \sigma t + \theta y.$$

On obtient alors l'équation :

$$L'_\varepsilon \dot{u} + L^1_\varepsilon \dot{\psi} = \dot{f}, \tag{4.3}$$

avec les conditions de transmission (4.2) pour $\dot{u}$.

Remarque 4.1. Un calcul classique montre que (4.3) équivaut à

$$L'_\varepsilon\big(\dot{u} - \dot{\psi}\partial_x u^\varepsilon_{app}\big) = \dot{f} - \dot{\psi}\partial_x f^\varepsilon_{app} = \dot{f} + O(\varepsilon^m)\dot{\psi} \tag{4.4}$$

plus les conditions de transmission pour $\dot{u} - \dot{\psi}\partial_x u^\varepsilon_{app}$. Ceci montre bien que le front est fictif : quitte à changer d'inconnues, le problème linéarisé complet (4.3) est équivalent au problème partiel (3.1), plus un choix arbitraire de $\dot{\psi}$. L'introduction du front pourrait donc sembler inutile. En fait, si l'on n'a pas changé de problème, ce qui est heureux, le front introduit un degré de liberté supplémentaire qui permet d'analyser la perte dans les estimations autour de $\zeta = 0$. Pour illustrer ce gain, rappelons l'essence de la méthode d'addition de variables de Grushin.

Méthode d'addition d'inconnue. Revenons sur une méthode classique de désingularisation des pôles par addition de variables. Considérons des matrices (ou opérateurs) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \rho\mathcal{A}_1$, inversibles pour $\rho > 0$, mais telles que

$$\ker \mathcal{A}_0 = \mathbb{R}e \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_1 e \notin R(\mathcal{A}_0).$$

On veut résoudre *sans expliciter les projecteurs spectraux* les équations

$$\mathcal{A}v = f. \tag{4.5}$$

On cherche v sous la forme $v = u - \psi e$ ce qui conduit à l'équation:

$$\mathcal{A}u - \rho\psi\mathcal{A}_1 e = f. \tag{4.6}$$

Ayant ajouté une variable, *on ajoute une équation* :

$$\ell \cdot u + \rho a \psi = 0, \quad (\ell \cdot e \neq 0). \tag{4.7}$$

Si $\rho \neq 0$ et $\ell \cdot e + \rho a \neq 0$, alors (4.6) (4.7) sont équivalents à:

$$\mathcal{A}v = f\,, \quad \ell \cdot v = -(\ell \cdot e + \rho a)\psi\,. \tag{4.8}$$

Le nœud de la discussion est que le système (4.6) (4.7) est inversible au voisinage de $\rho = 0$ dans les variables (u, φ) avec $\varphi = \rho\psi$

En conclusion, pour résoudre (4.6), on résout d'abord

$$\mathcal{A}u - \varphi\mathcal{A}_1 e = f\,, \quad \ell \cdot u + a\varphi = 0\,,$$

et on a $v = u - \rho^{-1}\varphi e$, qui explicite la partie singulière $-\rho^{-1}\varphi e$.

Par (4.4), on voit que le linéarisé partiel (3.1) est l'analogue de (4.5), alors que le linéarisé complet correspond à (4.6). Dans cette analogie, il est naturel d'ajouter une condition aux limites qui joue le rôle de (4.7):

$$\partial_t \dot{\psi} - \varepsilon \Delta_y \dot{\psi} + \ell \cdot \dot{u}_{|\tilde{x}=0} = 0\,. \tag{4.9}$$

Hypothèse 4.2. (H5) *Le vecteur $\ell \in \mathbb{R}^N$ est choisi tel que: $\ell \cdot \partial_z W(0) > 0$.*

Remarque 4.3. Il y a beaucoup de latitude dans le choix de (4.9). Le Laplacien ne joue aucun rôle particulier

5 Nouvelle fonction d'Evans

La transformée de Fourier-Laplace du linéarisé complet est de la forme:

$$\hat{L}'_\varepsilon \hat{u} + \frac{1}{\varepsilon^2}\hat{\psi}\mathcal{L}^1(x/\varepsilon, \varepsilon\zeta) = \hat{f},$$

On complète le changement d'échelles (3.2) par:

$$\hat{\psi} = \varepsilon\psi. \tag{5.1}$$

On obtient alors le système:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(z,\zeta,\partial_z)u + \psi\mathcal{L}^1(z,\zeta) = f, \\ [u(0)] = [\partial_z u(0)] = 0, \\ (i\tau + \gamma + |\eta|^2)\psi + \ell \cdot u(0) = 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Lien avec le linéarisé partiel. On a l'identité

$$\mathcal{L}(z,\zeta,\partial_z)\partial_z W = -\mathcal{L}^1(z,\zeta),$$

qui est l'analogue de l'identité de (4.4) après les mises à l'échelle. Avec $u = v + \psi\partial_z W$, on voit donc que (5.2) est équivalent à:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(z,\zeta,\partial_z)v = f, \\ [v(0)] = [\partial_z v(0)] = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

$$(i\tau + \gamma + |\eta|^2 + \ell \cdot \partial_z W(0))\psi + \ell \cdot v(0) = 0. \tag{5.4}$$

Comme annoncé à la Remarque 4.1, on a d'une part à résoudre l'équation linárisée (3.3) pour v, puis une équation pour ψ. L'introduction du front n'a donc pas changé la nature du problème et on a:

Lemme 5.1. *À $\zeta \neq 0$ fixé,* (5.2) *est bien posé si et seulement si* (3.3) *l'est.*

Notations. 1) On note $\widetilde{\mathbb{E}}(\zeta)$ l'espace des $(u^-(0), \partial_z u^-(0), u^+(0), \partial_z u^+(0), \psi)$ tels que la solution de $\mathcal{L}u - \psi\mathcal{L}^1 = 0$ sur $\{z \geq 0\}$ de données initiales $(u^+(0), \partial_z u^+(0))$ est bornée et la solution de $\mathcal{L}u - \psi\mathcal{L}^1 = 0$ sur $\{z \leq 0\}$de données initiales $(u^-(0), \partial_z u^-(0))$ est bornée.

2) On note $\ker\Gamma(\zeta)$ l'espace des $(u^-(0), \partial_z u^-(0), u^+(0), \partial_z u^+(0), \psi)$ tels que $[u(0)] = [\partial_z u(0)] = 0$ et $(i\tau + \gamma + |\eta|^2)\psi + \ell \cdot u(0) = 0$.

Lemme 5.2. *Sous les hypothèses* $(H0)$ *à* $(H5)$*, pour $\zeta \neq 0$, $\gamma \geq 0$ on a*

$$\dim \widetilde{\mathbb{E}} = 2N + 1, \quad \text{et} \quad \dim\ker\Gamma = 2N.$$

Le problème (5.2) est bien posé si $\widetilde{E} \cap \ker \Gamma = \{0\}$. Cela conduit à introduire la fonction d'Evans correspondante:

$$\widetilde{D}(\zeta) := \det \big(\widetilde{\mathbb{E}}(\zeta), \ker \Gamma(\zeta)\big) \tag{5.5}$$

On a alors:

Proposition 5.3. *Pour $\zeta \neq 0$ avec $\gamma \geq 0$, on a :*

$$\begin{aligned} &i)\ \ D(\zeta) = 0 \ \Leftrightarrow\ \widetilde{D}(\zeta) = 0, \\ &ii)\ \widetilde{D}(\zeta) = \beta \Delta(\zeta/|\zeta|) + O(|\zeta|), \qquad \zeta \to 0. \end{aligned}$$

Le premier point résulte directement du Lemme 5.1. Le second point illustre comment l'addition de la variable φ a désingularisé le problème (3.3) dans l'esprit de la méthode rappelée au paragraphe 4.

Corollaire 5.4. *i) Le problème est faiblement stable si et seulement si $\widetilde{D}(\zeta) \neq 0$ sur $\{\zeta \neq 0, \gamma \geq 0\}$.*

ii) Il est fortement stable si et seulement si il est faiblement stable et s'il existe une constante $c > 0$ telles que $|\widetilde{D}(\zeta)| \geq c$ pour $0 < |\zeta| \leq 1,\ \gamma \geq 0$.

6 Estimations maximales

Avec le Corollaire 5.4 on se retrouve dans une situation semblable à celle des couches limites étudiées en [MZ1]. Par une adaptation au cas hyperbolique-parabolique de la construction des symétriseurs de Kreiss, on obtient les estimations maximales suivantes:

Théorème 6.1. *Sous les hypothèses $(H0)$ à $(H5)$, si les conditions de stabilité uniforme, sont satisfaites, alors pour $0 < \rho = |\zeta| \leq 1$ et $\gamma \geq 0$, les solutions de (5.2) vérifient:*

$$(\gamma + \rho^2)\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + (\gamma + \rho^2)^{1/2}\rho|\psi| \leq C\|f\|_{L^2} .$$

En revenant aux variables initiales, on obtient:

Théorème 6.2. *Sous les mêmes hypothèses, les solutions de (4.3) (4.9) vérifient:*

$$\begin{aligned} \gamma\|e^{-\gamma t}\dot{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+d})} &+ \sqrt{\varepsilon\gamma}\|e^{-\gamma t}\partial_{y,x}\dot{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+d})} + \dots \\ &+ \sqrt{\gamma}\|e^{-\gamma t}\nabla_{t,y}\dot{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \dots \leq C\|e^{-\gamma t}\dot{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+d})} . \end{aligned}$$

Les ... contiennent des termes additionnels de régularité parabolique, qui disparaissent à la limite $\varepsilon = 0$. En particulier, on retrouve l'estimation *uniforme* (indépendante de ε):

$$\gamma\|e^{-\gamma t}\dot{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+d})} + \sqrt{\gamma}\|e^{-\gamma t}\nabla_{t,y}\dot{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C\|e^{-\gamma t}\dot{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^{1+d})} ,$$

qui est l'estimation hyperbolique de Majda [Maj].

La preuve du Théorème 6.1 repose sur une deuxième élimination du front: on introduit $R^\pm(z,\zeta)$ tel que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(z,\zeta,\partial_z)R^\pm = -\mathcal{L}^1(z,\zeta) \qquad \text{sur } \{\pm z \ge 0\},\\
&R^\pm(z,\zeta) = O(|\zeta|e^{-\delta|z|}) \qquad \text{quand } z \to \pm\infty,\\
&R^\pm(z,0) = 0\,, \qquad \ell \cdot R^\pm(0,\zeta) = i\tau + \gamma + |\eta|^2\,.
\end{aligned}$$

Dans (5.2) on effectue le changement d'inconnues: $v^\pm = u^\pm + \psi R^\pm$, ce qui conduit aux équations:

$$\tag{6.1} \begin{cases} \mathcal{L}(z,\zeta,\partial_z)v = f,\\ [v(0)] = \psi[R(0,\zeta)]\,,\\ [\partial_z v(0)] = \psi[\partial_z R(0,\zeta)],\\ \ell \cdot v(0) = 0. \end{cases}$$

Le vecteur $K(\zeta) = ([R(0,\zeta)],[\partial_z R(0,\zeta)])$ tend vers 0 lorsque $\zeta \to 0$, mais en coordonnées polaires $\zeta = \rho\check{\zeta}$, $|\check{\zeta}| = 1$, $\check{\gamma} \ge 0$, la direction $\check{K}(\check{\zeta},\rho) := \rho^{-1}K(\rho\check{\zeta})$ a une limite non nulle $\check{K}(\check{\zeta},0)$ lorsque ρ tend vers 0. On voit donc que (6.1) se découple en un problème uniformément bien posé

$$\tag{6.2} \begin{cases} \mathcal{L}(z,\zeta,\partial_z)v = f,\\ ([v(0)],[\partial_z v(0)]) \in \mathbb{C}\check{K},\\ \ell \cdot v(0) = 0. \end{cases}$$

et une inversion elliptique pour $\varphi = \rho\psi$

$$\tag{6.3} \varphi\check{K} = ([v(0)],[\partial_z v(0)]).$$

La condition de stabilité uniforme implique que l'on a les estimations optimales (3.6) pour les solutions de (6.2), avec une bonne estimation similaire des traces et donc du saut $([v(0)],[\partial_z v(0)])$ (cf [MZ1]). Par (6.3), on en déduit les estimations de φ.

References

[Bi-Br] S. Bianchini, A. Bressan, *Vanishing viscosity limit solutions to nonlinear hyperbolic systems*, Annals of Math., to appear.

[DiP] R. DiPerna, *Convergence of approximate solutions to conservation laws,* Arch.Rat.Mech. Anal., 82 (1983), 27–70.

[FS] H.Freistühler, P. Szmolyan, *Spectral stability of small shock waves*, Arch. Rat. Mech. Analysis., 164 (2002) 287–309.

[GX] J.Goodman, Z.Xin *Viscous limits for piecewise smooth solutions to systems of conservation laws*, Arch. Rational Mech. Analysis, 121 (1992), 235–265.

[GMWZ1] O.Guès-G.Métivier-M.Williams-K.Zumbrun *Multidimensional viscous shocks I: Degenerate symmetrizers and long time stability*, Journal A.M.S., à paraître.

[GMWZ2] O.Guès-G.Métivier-M.Williams-K.Zumbrun *Multidimensional viscous shocks II: The small viscosity limit*, Comm. Pure and Appl. Math., 57 (2004) 141–218.

[GMWZ3] O.Guès-G.Métivier-M.Williams-K.Zumbrun *A new approach to the stability of multidimensional viscous shocks*, Arch. Rat.Mech. Anal., à paraître.

[GW] O.Guès, M.Williams, *Curved shocks as viscous limits: a boundary problem approach*, Indiana Univ. Math. J., 51 (2002) 421–450.

[Kru] S. Kruzhkov, *First order quasilinear equations with several space variables,* Math.USSR Sbornik, 10 (1970), 217–243.

[Lax] P.Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), 537–566.

[Maj] A. Majda, *The stability of multi-dimensional shock fronts – a new problem for linear hyperbolic equations*, Mem. Amer. Math. Soc. 275 (1983).

[Mé1] G.Métivier, *Stabilité des chocs faibles* , Comm. in Part. Diff. Equ., 15 (1990) 983–1028.

[Mé2] G. Métivier, *Stability of multidimensional shocks*. Advances in the theory of shock waves, 25–103, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 47, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.

[MZ1] G.Métivier-K.Zumbrun, *Viscous Boundary Layers for Noncharacteristic Nonlinear Hyperbolic Problems*, Memoirs of the AMS, à paraître.

[PZ] R.Plaza, K.Zumbrun, *An Evans function approach to spectral stability of small-amplitude shock profiles*, Discrete and Cont. Dyn. Syst. Ser B, 10 (2004) 885–924.

[Ro2] F. Rousset, *Viscous approximation of strong shocks of systems of conservation laws*, SIAM J. Math. Anal. 35 (2003) 492–519

[ZS] K. Zumbrun-D.Serre, *Viscous and inviscid stability of multidimensional planar shock fronts*. Indiana Univ. Math. J. 48 (1999), 937–992.

[ZH] K. Zumbrun-P. Howard, *Pointwise semigroup methods and stability of viscous shock waves*. Indiana Mathematics Journal V47 (1998), 741–871.

[Zu1] K. Zumbrun, *Multidimensional stability of planar viscous shock waves*. Advances in the theory of shock waves, 307–516, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 47, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.