OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE NON LINÉAIRE

ET ÉQUATIONS DE MAXWELL-BLOCH *

Jean-Luc JOLY

MAB, Université de Bordeaux I
33405 Talence, FRANCE

Guy METIVIER

IRMAR, Université de Rennes I
35042 Rennes, FRANCE

Jeffrey RAUCH

Department of Mathematics, University of Michigan
Ann Arbor 48109 MI, USA

* Research partially supported by the U.S. National Science Foundation, U.S. Office of Naval Research, and the NSF-CNRS cooperation program under grants number NSF-DMS-9803296 and OD-G-N0014-92-J-1245 NSF-INT-9314095 respectively, and the CNRS through the Groupe de Recherche G1180 POAN.

1. Introduction

Les équations de Maxwell-Bloch sont couramment utilisées pour modéliser l'interaction lumière matière et décrire la propagation d'un faisceau laser dans un milieu nonlinéaire (cf [BW], [NM], [Bo] ou [PP]). Elles vont nous servir à motiver l'introduction d'un problème d'optique géométrique non linéaire. Un des objectifs est de justifier certains calculs formels de [Do] de solutions BKW. Ce problème échappe aux résultats connus de l'optique géométrique non linéaire (voir par exemple [JMR1], [JMR2] et leurs références). En effet, les théorèmes généraux ne tiennent pas compte des propriétés particulières des non-linéarités et dans certains cas leur application se révèle décevante, par exemple lorsque les coefficients d'interaction s'annulent, rendant linéaires les équations de transport. Ce phénomène est applelé *transparence* dans [Do]. Pour atteindre les comportements non linéaires, on augmente les amplitudes (ou les énergies) des solutions, ce qui permet d'atteindre les régimes attendus pour les équations de Maxwell-Bloch. Ceci introduit de nouvelles difficultés. La théorie générale considérait les non linéarités comme des perturbations "de degré zéro" (pour des systèmes hyperboliques du premier ordre). En augmentant les amplitudes, les termes non linéaires viennent lutter avec le propagateur et on ne peut plus les considérer comme des perturbations. On verra que ces termes ne sont dangereux qu'aux *résonances* et que celles ci apparaissent comme des croisements de valeurs propres (pour un système ad hoc). Le problème est analogue à un problème de multiplicité variable. On sait bien que pour ce type de problème il faut imposer des conditions sur les termes d'ordre inférieur. Dans notre contexte, ces conditions se lisent comme des conditions de *compatiblitité* dont la transparence n'est que le premier volet.

Nous exposons ici les grandes lignes de [JMR 3] où l'analyse esquissée ci-dessus est menée à bien pour une classe d'équations que nous préciserons plus loin. Deux questions sont posées :

1) quelles sont les conditions qui permettent de construire des solutions formelles BKW ?

2) quand elles existent, sont-elles stables, i.e. sont-elles les développements asysmptotiques de solutions exactes?

L'analyse repose sur l'étude des interactions résonantes qui, à cause des (plus) grandes amplitudes, peuvent être la source d'instabilités *fortes* (voit un exemple §9) . De tels mécanismes d'instabilités sont bien connus en physique et notamment en optique. Ils sont attendus pour des non linéarités générales. Les *conditions de compatibilité* expriment l'annulation des coefficients d'interaction pour les résonances potentiellement instables. Notons qu'il y a beaucoup plus d'interactions à contrôler pour la question 2) que pour la question 1), et on donnera des exemples de solutions BKW fortement instables.

Dans la classe d'équations que nous considérons, les équations de Maxwell-Bloch vérifient les conditions de compatiblités les plus fortes. En fait, il existe un choix canonique d'inconnues qui les transforme en un système où les résultats standards de l'optique géométrique peuvent être appliqués. Si on ne s'intéresse qu'à ces équations particulières, l'histoire s'arrête là. Pour nous, c'est plutôt le point de départ de l'analyse. On veut comprendre ce qui se passe pour des systèmes plus généraux comme par exemple des systèmes couplés d'équations de Klein-Gordon. Ils nous serviront à illustrer les différents niveaux de compatibilité. Au bout du compte, on montrera comment l'existence d inconnues canoniques est relié aux hypothèses de compatibilité.

2. Équations de Maxwell-Bloch

Les équations de Maxwell-Bloch modélisent l'interaction d'un champ électro-magnétique avec un milieu électronique ([BW], [NM], [Bo] , [PP]). Le champ vérifie les équations de Maxwell :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \partial_t B \ + \ \mathrm{rot} E = \ 0\,, & \mathrm{div} B \ = \ 0, \\ \partial_t E \ - \ \mathrm{rot} B = \ -\partial_t P\,, & \mathrm{div}(E+P) \ = \ 0, \end{cases}$$

où P est la polarisation qui est reliée à l'état électronique du milieu traversé. Les équations de divergence sont propagées par l'évolution et nous les oublions totalement dans la suite. Les équations de Bloch donnent l'évolution de l'état électronique sous l'action du champ électromagnétique. Elles utilisent le formalisme quantique des matrices densité qui est pratique pour tenir compte par exemple de phénomènes statistiques dus au grand nombre d'électrons. Dans l'approximation dipolaire (cf [PP]), la matrice densité ρ et P vérifient

$$i\varepsilon\,\partial_t \rho \,=\, [\Omega, \rho] \,-\, [E\cdot\Gamma, \rho]\,, \quad P \,= \mathrm{tr}(\Gamma\rho) \tag{2.2}$$

où Ω est l'Hamiltonien électronique en absence de champ externe et Γ l'opérateur moment dipolaire. Il est à valeurs vectorielles et il crée le potentiel $-E\cdot\Gamma$.

Les ouvrages de physique mentionnés ci-dessus, ne retiennent qu'un nombre fini d'états propres de Ω qui représentent les niveaux électroniques qui peuvent être effectivement excités par le champ. Dans ce cas, Ω et Γ sont des matrices $N\times N$ à symétrie hermitienne. Les coefficients de Ω sont scalaires, ceux de Γ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^3$. La "matrice" densité ρ est elle aussi une matrice hermitienne $N\times N$. La réduction à un Hamiltonien en dimension finie est argumentée dans [PP]. Elle se fait au prix de l'introduction de termes supplémentaires d'amortissement dans l'équation (2.2) dont l'effet est par exemple de relaxer l'évolution de ρ vers un état d'équilibre thermodynamique en l'absence de champ extérieur. Pour simplifier, nous oublions ces termes d'amortissement : les grands ne feraient que diminuer la taille du système effectif et les petits n'introduisent que des perturbations qui ne modifient pas substanciellement l'analyse (cf [Do]). Les ouvrages de physique introduisent aussi des "corrections de champ local" pour tenir compte du champ electro-magnétique créé par les électrons. Au bout du compte, ces corrections aboutissent à modifier la valeurs de certaines constantes, ce qui ne change pas la teneur de la discussion.

Le petit paramètre ε dans (2.2) joue un rôle crucial dans l'énoncé du problème qui nous intéresse. Il intervient à trois endroits.

1) Le problème rentre dans la classe des équations *dispersives* (cf [Do], [DR]) :

$$\mathcal{L}(\varepsilon\partial_x)\,U \,=\, F(U)\,. \tag{2.3}$$

2) En désignant par ω_j les valeurs propres de Ω, les quantités $\omega_{j,k}/\varepsilon := (\omega_j - \omega_k)/\varepsilon$, représentent les fréquences caractéristiques des transitions entre les niveaux d'énergie. L'interaction lumière-matière est pensée comme un phénomène d'excitation/desexcitation des électrons par le champ. En particulier, les énergies d'excitation sont comparables aux énergies des photons. Si l'on normalise Ω pour qu'il soit de taille ≈ 1, alors $1/\varepsilon$ est comparable à la fréquence du champ. Avec la normalisation de la vitesse de la lumière faite en (2.1), cela veut dire que les champs qui nous intéressent sont de longueur d'onde $\approx \varepsilon$.

3) Les équations de Maxwell-Bloch concernent des champs *faibles* se propageant dans des milieux *peu excités*, c'est-à-dire voisin de l'état fondamental. L'amplitude (ou l'énergie) de la perturbation par rapport à ε est un élément important de la discussion.

En résumé, on s'intéresse à des solutions de (2.3) de la forme

$$U^\varepsilon(x) \,\sim\, \underline{U} \,+\, \varepsilon^p \sum_{n\geq 0} \varepsilon^{np}\,\mathbf{U}_n(x, \beta\cdot x/\varepsilon) \tag{2.4}$$

où $\underline{U}$ est une solutions constante, les $\mathbf{U}_n(x,\theta)$ sont de fonctions périodiques de $\theta\in\mathbb{T}^m$ et β est une matrice $m\times(1+d)$, m désignant le nombre de phases présentes.

Pour les équations (2.2) un concept important est celui de parité des états propres de Ω. Par exemple, l'Hamiltonien associé à un électron agit dans un espace $L^2(\mathbb{R}^3)$ et les fonctions propres de Ω sont des fonctions φ_j d'une variable $\tilde{y} \in \mathbb{R}^3$. L'opérateur de moment dipolaire est $-e\,\tilde{y}$ où e est la charge de l'électron. Dans la base $\{\varphi_j\}$ la matrice Γ est donnée par

$$\Gamma_{j,k} \;=\; e \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{y}\, \varphi_j(\tilde{y}) \overline{\varphi_k(\tilde{y})}\, d\tilde{y}\,. \tag{2.5}$$

(voir [PP]). Pour des raisons physiques, Ω est souvent invariant par le changement $\tilde{y} \mapsto -\tilde{y}$ et les fonctions propres φ_j peuvent souvent être choisies paires ou impaires. Dans ce cas, les coefficients $\Gamma_{j,k}$ associés à des états de même parité s'annulent.

Exemple 2.1. *Les équations en dimension un d'espace.*

Elle décrivent la propagation d'une onde unidimensionelle. E a une direction constante, orthogonale à la direction de propagation. B est perpendiculaire à E et à l'axe de propagation. P est parallèle à E. Les équations s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t b + \partial_y e \;=\; 0\,, \\ \partial_t e + \partial_y b \;=\; -\partial_t \mathrm{tr}(\Gamma\rho)\,, \\ i\varepsilon \partial_t \rho \;=\; [\Omega, \rho] \;-\; e\,[\Gamma, \rho]\,, \end{cases} \tag{2.6}$$

où e et b sont scalaires, Ω, Γ et ρ sont des matrices hermitiennes.

Exemple 2.2. *Les équations à deux niveaux en dimension un.*

Les matrices sont de taille 2×2. On peut diagonaliser Ω, de valeurs propres $\omega_1 < \omega_2$. Avec

$$p \;:=\; \gamma_{1,2}\rho_{2,1} \;+ \gamma_{2,1}\rho_{1,2}\,, \quad q \;:=\; \frac{1}{i}\left(\gamma_{1,2}\rho_{2,1} \;- \gamma_{2,1}\rho_{1,2}\right), \quad n \;:=\; \rho_{1,1} \;-\; \rho_{2,2}\,.$$

on obtient les équations

$$\begin{cases} \varepsilon\partial_t b + \varepsilon\partial_y e \;=\; 0\,, & \varepsilon\partial_t p \;=\; \omega_{2,1} q \;+\; (\gamma_{1,1} - \gamma_{2,2})\, e\, q\,, \\ \varepsilon\partial_t e + \varepsilon\partial_y b \;=\; -\,\omega_{2,1} q\,, & \varepsilon\partial_t q \;=\; -\omega_{2,1} p \;+\; (\gamma_{2,2} - \gamma_{1,1})\, p\, e \;+\; 2|\gamma_{2,1}|^2\, n\, e\,, \\ \varepsilon\partial_t n \;=\; -2\, e\, q\,. & \end{cases} \tag{2.7}$$

Quand les états 1 et 2 ont une parité définie alors $\gamma_{1,1} = \gamma_{2,2} = 0$ et les équations se simplifient. Plus généralement, quand $\gamma_{1,1} = \gamma_{2,2}$, on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t b + \partial_y e \;=\; 0\,, & \varepsilon^2\, \partial_t p \;+\; (\omega_{2,1})^2 p = \; 2\omega_{2,1} |\gamma_{2,1}|^2 \; n\, e\,, \\ \partial_t e + \partial_y b \;=\; -\partial_t p\,, & \partial_t n = \;-\; \dfrac{2}{\omega_{2,1}}\, e\, \partial_t p\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Exemple 2.3. *Un modèle à deux niveaux en dimension 3.*

Il s'agit de l'extension de (2.8) à $\mathbb{R}^3$, invariante par rotation (voir [PP], [Bo] , [Do]).

$$\begin{cases} \partial_t B \;+\; \mathrm{rot}\, E \;=\; 0\,, & \varepsilon^2\, \partial_t P \;+\; \Omega^2 P \;=\; \gamma_1\; N\, E\,, \\ \partial_t E \;-\; \mathrm{rot}\, B \;=\; -\partial_t P\,, & \partial_t N \;=\; -\,\gamma_2\, \partial_t P \cdot E\,. \end{cases} \tag{2.9}$$

Ce système est à rapprocher d'autres modèles en optique, comme celui de l'oscillateur anharmonique ([DR]) :

$$\begin{cases} \partial_t B \;+\; \mathrm{rot}\, E = \; 0\,, & \varepsilon^2\, \partial_t P \;+\; \Omega^2 P \;+ \gamma_1 |P|^2\, P \;=\; \gamma_2\, E\,. \\ \partial_t E \;-\; \mathrm{rot}\, B = \; -\partial_t P\,. & \end{cases} \tag{2.10}$$

Pour $\gamma_1 = 0$, on retrouve le modèle linéaire de Lorentz.

EXEMPLE 2.4. *Un autre modèle à deux niveaux, isotrope.*

On considère des matrices 4×4, Ω et Γ telles que

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 Id_{3\times 3} \end{pmatrix} , \quad E \cdot \Gamma \begin{pmatrix} n \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^t E \cdot \psi \\ n\,\overline{\gamma} E & i\,\delta E \wedge \psi \end{pmatrix} , \tag{2.11}$$

où les blocs correspondent à une décomposition de $\mathbb{C}^4$ en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^3$. L'Hamiltonien Ω a deux valeurs propres, $\omega_1 < \omega_2$. L'état fondamental est simple et l'état excité est triple. Le groupe des rotations $SO(3)$ agit de façon évidente sur les champs. Il agit aussi sur $\mathbb{C}^4$, de façon triviale sur l'état fondamental et par rotation sur les états excités. Il agit sur ρ par conjugaison. On vérifie que les équations (2.1) (2.2) sont invariantes par cette action de $SO(3)$. Le modèle est donc isotrope.

EXEMPLE 2.5. *Un modèle pour l'effet Raman.*

Un modèle pour la description de l'effet Raman en dimension un, s'obtient comme cas particulier de (2.6) (cf [Bo], [NM], [PP]). C'est un système à trois niveaux simples, $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3$. Les états 1 et 2 ont la même parité et l'état 3 est de parité opposée. On a donc :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3 \end{pmatrix} , \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_{1,3} \\ 0 & 0 & \gamma_{2,3} \\ \gamma_{3,1} & \gamma_{3,2} & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.12}$$

Comme $\gamma_{1,2} = 0$, la transition $1 \to 2$ est en principe interdite. Mais on l'obtient par effet non linéaire résonant comme succession des transitions permises $1 \to 3 \to 2$.

3. Optique géométrique pour les équations de Maxwell-Bloch

3.1. Hyperbolicité. Nous cherchons des solutions $U = (B, E, \rho)$ proches de $\underline{U} = (0, 0, \underline{\rho})$ où l'état fondamental $\underline{\rho}$ est le projecteur spectral de Ω associé à la plus petite valeur propre ω_1. Dans la décomposition $\mathbb{C}^N = \underline{\rho}\mathbb{C}^N \oplus (Id - \underline{\rho})\mathbb{C}^N$, on décompose les matrices en

$$\rho = \rho^I + \rho^{II} , \quad \rho^I = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{1,2} \\ \rho_{2,1} & 0 \end{pmatrix} , \quad \rho^{II} = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} \end{pmatrix} , \tag{3.1}$$

En particulier, $\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 Id & 0 \\ 0 & \Omega_{2,2} \end{pmatrix}$, $\underline{\rho} = \underline{\rho}^{II} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $G := [\Gamma, \underline{\rho}] = G^I = \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma_{1,2} \\ \Gamma_{2,1} & 0 \end{pmatrix}$.

On note $u := (B, E, \rho^I)$ et $v = \rho^{II}$. Alors, le linéarisé de (2.1) (2.2) autour de $\underline{U}$ a la structure suivante :

$$\begin{cases} L(\varepsilon\partial_x)u \,+\, Nv \\ M(\varepsilon\partial_x)\, v \end{cases} \tag{3.2}$$

avec :

a) $M(\varepsilon\partial_x) := \varepsilon\partial_t + i\,\mathrm{ad}\,\Omega$. L'identité $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}([\Omega, \rho]\rho^*) = 0$ implique que M est conservatif..

b)

$$L(\varepsilon\partial_x)u := \begin{cases} \varepsilon\partial_t B \,+\, \varepsilon\,\mathrm{rot} E \\ \varepsilon\partial_t E \,-\, \varepsilon\,\mathrm{rot} B \,-\, i\,\mathrm{tr}\big(\Gamma^I[\Omega, \rho^I]\big) \,+\, i\,\mathrm{tr}\big(\Gamma^I(E \cdot G)\big) \\ \varepsilon\partial_t\, \rho^I \,+ i\,[\Omega, \rho^I] \,- i\,E \cdot G \end{cases} \tag{3.3}$$

$L(\varepsilon\partial_x)$ est hyperbolique symétrique au sens où, pour les solutions de $L(\varepsilon\partial_x)u = 0$, l'énergie définie positive suivante est conservée :

$$|E|^2 + |B|^2 \,+\, \sum_k (\omega_k - \omega_1)\,\mathrm{tr}(\rho_{1,k}\,\rho^*_{1,k}) \,+\, \sum_j (\omega_j - \omega_1)\,\mathrm{tr}(\rho_{j,1}\,\rho^*_{j,1})\,.$$

On a désigné par $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ les valeurs propres de Ω et par $\rho_{j,k}$ la décomposition par blocs de ρ dans la résolution spectrale de Ω. Il est crucial ici que ω_1 soit la plus petite valeur propre de Ω.

c) $Nv = -i\,\mathrm{tr}(\Gamma^{II}[\Omega, \rho^{II}])$.

Le but est de construire des solutions vérifiant (2.4).

1) Quand $\Gamma^{II} \neq 0$, la difficulté vient du manque d'hyperbolicité des équations. En effet, le système (3.2) n'est pas conservatif. Il n'est pas non plus fortement hyperbolique, au sens où il n'y a pas d'estimations d'énergie L^2 indépendantes de ε, puisque le terme de couplage Nv introduit un bloc de Jordan aux points d'intersection des variétés caractéristiques de L et M. On ne peut donc appliquer les résultats connus de l'optique géométrique non linéaire.

2) Quand $\Gamma^{II} = 0$, (3.2) et (2.9) sont hyperboliques symétriques. La théorie de l'optique géométrique dispersive de [DR] s'applique aux solutions de taille $O(\varepsilon)$ mais conduit à des équations de propagation linéaires (transparence). Par ailleurs, pour le modèle cubique (2.10), l'optique géométrique standard s'applique aux solutions de taille $O(\sqrt{\varepsilon})$. Pour le modèle (2.9) qui est sensé être un raffinement de (2.10), il est donc naturel de rechercher des solutions d'amplitude $\sqrt{\varepsilon}$ (cf [Do] pour la recherche de solutions BKW).

3.2. Mise à l'échelle des amplitudes. On cherche des solutions dont les composantes sont d'amplitudes différentes :

$$E = \varepsilon^p\,\widetilde{E}\,,\quad B = \varepsilon^p\,\widetilde{B}\,,\quad \rho^I = \varepsilon^p\,\tilde{\rho}^I\,,\quad \rho^{II} = \underline{\rho} + \varepsilon^{2p}\,\tilde{\rho}^{II}\,. \tag{3.4}$$

Ce choix est motivé par trois raisons. D'abord, quand $\Gamma^{II} = 0$, les solutions BKW de [Do] sont de ce type avec $p = 1/2$. Ensuite, quand $\Gamma^{II} \neq 0$, le système linéarisé (3.2) est toujours faiblement hyperbolique et on a toujours des estimations d'énergie en temps $O(1)$ pour la norme $\varepsilon^2|u|^2 + |v|^2$. Pour des ondes $U = (u, v)$ d'amplitude $O(\varepsilon)$ cela suggère de de poser $u = \varepsilon\tilde{u}$ et $v = \varepsilon^2\tilde{v}$, c'est-à-dire (3.4) avec $p = 1$. La troisième motivation est plus profonde. L'équation (2.2) implique que les propriétés spectrales de ρ sont propagées en temps. Donc, si on pense que l'interaction démarre au temps $t = 0$ et que $\rho(0, y)$ est l'état fondamental $\underline{\rho}$, alors pour tout temps $\rho(t, y)$ est un projecteur (spectral) orthogonal. Par suite, les perturbations $O(\varepsilon^p)$ de $\underline{\rho}$ sont nécessairement de la forme $\rho^I = O(\varepsilon^p)$ et $\rho^{II} = \underline{\rho} + O(\varepsilon^{2p})$.

On obtient pour $u = (\widetilde{B}, \widetilde{E}, \tilde{\rho}^I)$ et $v = \tilde{\rho}^{II}$, un système de la forme :

$$\begin{cases} L(\varepsilon\partial)u \,+\, \varepsilon^p f_1(u,v) \,+\, \varepsilon^{2p} f_2(u,v) \,=\, 0\,, \\ M(\varepsilon\partial)\,v \,+\, q(u) + \varepsilon^p g_1(u,v) \,+\, \varepsilon^{2p} g_2(u,v) \,=\, 0\,. \end{cases} \tag{3.5}$$

où le "mauvais terme" est maintenant $q(u) := -i\,[\widetilde{E}\cdot\Gamma^I, \tilde{\rho}^I]$. De même, en posant $(E, B, P) = \sqrt{\varepsilon}(\widetilde{E}, \widetilde{B}, \widetilde{P})$, $\widetilde{Q} := \varepsilon\partial_t\widetilde{P}$ et $N = N_0 + \varepsilon\widetilde{N}$, les équations (2.9) deviennent

$$\begin{cases} \varepsilon\,\partial_t\widetilde{B} \,+\, \varepsilon\,\mathrm{rot}\,\widetilde{E} = \;0\,, & \varepsilon\,\partial_t\widetilde{E} \,-\, \varepsilon\,\mathrm{rot}\,\widetilde{B} = \;-\widetilde{Q}\,, \\ \varepsilon\,\partial_t\widetilde{P} \,-\, \widetilde{Q} \,=\, 0\,, & \varepsilon\,\partial_t\widetilde{Q} \,+\, \Omega^2\,P \,=\, \gamma_1\,N_0\,\widetilde{E} \,+\, \varepsilon\,\gamma_1\,\widetilde{N}\,\widetilde{E}, \\ \varepsilon\partial_t\widetilde{N} \,=\, -\,\gamma_2\,\widetilde{Q}\cdot\widetilde{E}\,. & \end{cases} \tag{3.6}$$

3.3. Changement d'inconnues. Introduisons les variables

$$\sigma^{II} := \tilde\rho^{II} + \tilde\rho^{I} J \tilde\rho^{I}\,, \quad J := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Ce choix est lui aussi motivé par les calculs formels. On peut aussi noter que si ρ est un projecteur orthogonal tel que $\rho - \underline{\rho} = O(\varepsilon^p)$, alors $\sigma^{II} = O(\varepsilon^{4p})$ est d'ordre inférieur. On notera aussi que le changement (3.7) est compatible avec le choix d'échelles (3.4).

La deuxième équation de (3.5) devient

$$\varepsilon\partial_t \sigma^{II} + i\,[\Omega, \sigma^{II}] - i\,\varepsilon^p\,[\widetilde E\cdot\Gamma^{II}, \sigma^{II}] - i\,\varepsilon^{2p}\left[[\widetilde E\cdot\Gamma^{I}, \sigma^{II} - \tilde\rho^{I} J \tilde\rho^{I}]\, J\,\tilde\rho^{I}\right] = 0\,. \tag{3.8}$$

Par conséquent, u et $w := \sigma^{II}$ sont solutions d'un système (3.5) où le mauvais terme $q(u,u)$ a disparu. On peut donc maintenant appliquer les résultats de [DR]. De même, pour le système (3.6), on introduit

$$n = \widetilde N + \frac{\gamma_2}{2\gamma_1 N_0}\,(\widetilde Q^2 + \Omega^2 \widetilde P^2)\,. \tag{3.9}$$

et la dernière équation devient

$$\varepsilon\partial_t n = \varepsilon\frac{\gamma_2}{N_0}\,\widetilde N\,\widetilde Q\cdot\widetilde E = \varepsilon\left(c_1 n - c_2(\widetilde Q^2 + \Omega^2\widetilde P^2)\right)\widetilde Q\cdot\widetilde E\,. \tag{3.10}$$

3.4. Applications. On renvoit à [JMR 3] pour plus de détails.

1) *Le cas $\Gamma^{II} = 0$, asymptotique en temps $O(1)$ de champs $O(\sqrt{\varepsilon})$* .

Si $\Gamma^{II} = 0$, les termes f_1 et g_1 dans (3.5) sont nuls. On choisit $p = 1/2$ et on vérifie que $u = (\widetilde B, \widetilde E, \tilde\rho^{I})$ et $w = \sigma^{II}$ sont solutions d'un système de la forme :

$$\begin{cases} L(\varepsilon\partial)u + \varepsilon f(u,w) = 0\,, \\ M(\varepsilon\partial)\,w + \varepsilon g(u,w) = 0\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

[DR] construit des solutions exactes de (3.11), de taille $O(1)$ et ayant un développement asymptotique (2.4). Il ne reste plus qu'à revenir aux inconnues initiales. Cette démarche s'applique au système (2.9), justifiant ainsi les calculs formels de [Do].

2) $\Gamma^{II} = 0$, *diffraction en temps $O(1/\varepsilon)$ de solutions $O(\varepsilon)$.*

Si l'on choisit $p = 1$, on obtient pour $u = (\widetilde B, \widetilde E, \tilde\rho^{I})$ et $w = \sigma^{II}$ le système

$$\begin{cases} L(\varepsilon\partial)u + \varepsilon^2 f(u,w) = 0\,, \\ M(\varepsilon\partial)\,w + \varepsilon^2 g(u,w) = 0\,. \end{cases} \tag{3.12}$$

On peut alors appliquer les résultats de [Lan] pour la diffraction en temps $O(1/\varepsilon)$ (voir aussi [DJMR] et [JMR 4] dans le cas des équations non dispersives). Les solutions sont de la forme

$$U(x) \sim \sum \varepsilon^n U_n(\varepsilon t, x - v_g t, \beta\cdot x/\varepsilon) \tag{3.13}$$

En particulier, on justifie ainsi la stabilité en temps T_*/ε des solutions BKW correspondant à (3.13) pour les équations (2.9) calculées dans [Do].

3) *Le cas $\Gamma^{II} \neq 0$, solutions $O(\varepsilon)$ en temps $O(1)$, effet Raman stimulé.*

Dans le cas général, on choisit $p = 1$. Les équations pour u et $w = \sigma^{II}$ sont de la forme

$$
(3.12) \qquad \begin{cases} L(\varepsilon\partial)u \,+\, \varepsilon f_1(u,w) \,+\, \varepsilon^2 f_2(u,w) \,=\, 0\,, \\ M(\varepsilon\partial)\, w \,+ \varepsilon g_1(u,w) \,+\, \varepsilon^2 g_2(u,w) \,=\, 0\,. \end{cases}
$$

À nouveau, [DR] fournit en temps $O(1)$ des solutions exactes de taille $O(1)$ ayant un développement asymptotique (2.4). La théorie des développements résonants multiphases de [JMR 5] [JMR 6] [JMR 7] s'étend au cas dispersif.

Appliquons ces résultats au système (2.12). Parce que le coefficient $\gamma_{1,2}$ s'annule, la variété caractéristique de L est la réunion de

$$
(3.13) \qquad \begin{cases} \mathcal{C}_{L_1} \,=\, \{\xi = (\tau,\eta) \in \mathbb{R}^2\,;\, \eta^2 \,=\, \tau^2(1+\chi(\tau)\}\,, \quad \chi(\tau) \,:=\, \dfrac{2\omega_{3,1}|\gamma_{1,3}|^2}{(\omega_{3,1})^2 - \tau^2}\,, \\ \mathcal{C}_{L_2} \,=\, \{\xi = (\tau,\eta) \in \mathbb{R}^2\,;\, \tau = \pm\omega_{2,1}\}\,. \end{cases}
$$

L'effet Raman est l'interaction d'une onde électromagnétique de nombre d'onde $\beta_L = (\omega_L, \kappa_L) \in \mathcal{C}_{L_1}$ avec une excitation électronique $\beta_E = (\omega_{2,1}, \kappa_E) \in \mathcal{C}_{L_2}$ pour diffuser une onde électromagnétique $\beta_S = (\omega_S, \kappa_S) \in \mathcal{C}_{L_1}$ via la relation de résonance $\beta_L = \beta_E + \beta_S$. En particulier, la fréquence lumineuse incidente ω_L est déplacée vers la fréquence ω_S, avec un décalage $\omega_L - \omega_S$ égal à la fréquence $\omega_{2,1}$ de transition électronique.

Sous certaines conditions, le profil $\mathbf{U}_0$ n'a que les fréquences $\pm\beta_L, \pm\beta_S, \pm\beta_E$. Il est déterminé par sa composante de champ e et son élément de matrice $\rho_{1,2}$. On obtient :

$$
(3.14) \quad \begin{cases} e^\varepsilon(x) \,=\, \varepsilon\Big(e_L(x)e^{i\beta_L x/\varepsilon} \,+\, e_S(x)e^{i\beta_S x/\varepsilon} \,+\, \overline{e_L}(x)e^{-i\beta_L x/\varepsilon} \,+\, \overline{e_S}(x)e^{-i\beta_S x/\varepsilon}\Big) \,+\, O(\varepsilon^2) \\ \rho^\varepsilon_{1,2}(x) \,=\, \varepsilon\sigma_E(x)(x)e^{i\beta_E x/\varepsilon} \,+\, O(\varepsilon^2)\,. \end{cases}
$$

Les coefficients sont reliés par des équations de la forme :

$$
(3.15) \qquad \begin{cases} (\partial_t + v_L\partial_y)e_L \,\,+ i\, c_1\, e_S\, \sigma_E \,=\, 0\,, \\ (\partial_t + v_S\partial_y)e_S \,+\, ic_2\,\, e_L\,\overline{\sigma_E} \,=\, 0\,, \\ \partial_t\sigma_E \,+\, i\, c_3\,\, e_L\,\overline{e_S} \,=\, 0\,, \end{cases}
$$

où v_L et v_S sont les vitesses de groupe associées à β_L et β_S. On retrouve la forme habituelle des équations d'interaction de trois ondes. On renvoie à [Bo], [NM] pour un calcul explicite des constantes d'interaction c_j et pour une discussion des propriétés d'amplification de ce système.

4. Une classe d'équations

En s'inspirant de (3.5), on note $x = (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et on considère un système

$$
(4.1) \qquad \begin{cases} L(\varepsilon\,\partial_x)\, u \,\,+\,\, \varepsilon\, f(u,v) \,\,=\, 0\,, \\ M(\varepsilon\partial_x)\, v \,\,+\,\, q(u,u) \,\,+\,\, \varepsilon\, g(u,v) \,\,=\,\, 0\,, \end{cases}
$$

où f et g sont des polynômes nuls à l'origine, q est bilinéaire et les opérateurs

$$
(4.2) \qquad \begin{cases} L(\varepsilon\,\partial) \,:=\, \varepsilon\,\partial_t \,+\, A(\varepsilon\,\partial_y) \,:= \varepsilon\,\partial_t \,+\, \sum \varepsilon\, A_j\partial_{y_j} \,+\, L_0 \,:=\, \varepsilon L_1(\partial_x) \,+\, L_0 \\ M(\varepsilon\,\partial) \,:=\, \varepsilon\,\partial_t \,+\, B(\varepsilon\,\partial_y) \,:= \varepsilon\,\partial_t \,+\, \sum \varepsilon\, B_j\partial_{y_j} \,+\, M_0 \,:=\, \varepsilon M_1(\partial_x) \,+\, M_0 \end{cases}
$$

sont hyperboliques symétriques, i.e. A_j et B_j sont auto-adjoints alors que L_0 et M_0 sont anti-adjoints. On devrait aussi considérer des formes quadratiques plus générales, $q_1(u,u)+q_2(\overline{u},u)+q_3(\overline{u},\overline{u})$ mais pour simplifier on se limitera au cas où q est $\mathbb{C}$-bilinéaire et symétrique.

On cherche des solutions ayant des développements asymptotiques

$$u^\varepsilon(x) \ \sim\ \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n\, \mathbf{u}_n(x, \beta\cdot x/\varepsilon)\,, \quad v^\varepsilon(x) \ \sim\ \sum_{n\geq 0} \varepsilon^n\, \mathbf{v}_n(x, \beta\cdot x/\varepsilon)\,. \tag{4.3}$$

où $\beta := (\beta_1, \ldots, \beta_m) \in (\mathbb{R}^{1+d})^m$, $\mathbf{u}_n(x,\theta)$ et $\mathbf{v}_n(x,\theta)$ sont 2π-periodiques en $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \mathbb{T}^m := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^m$. On note $\beta_j = (\omega_j, \kappa_j) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$, $\omega := (\omega_1, \ldots, \omega_m)$ et $\kappa := (\kappa_1, \ldots, \kappa_m)$.

À cause du terme $q(u,u)$, le régime *standard* de l'optique géométrique non linéaire pour des équations (4.1) concerne des solutions d'ordre $O(\varepsilon)$, ce qui revient à faire $\mathbf{u}_0 = 0$ et $\mathbf{v}_0 = 0$ dans (4.3). Notre but est donc de comprendre dans quelles conditions on peut construire des solutions d'ordre $O(1)$. On cherche d'abord à construire des solutions BKW et on étudie ensuite leur stabilité.

On utilisera les notations suivantes. Pour $\xi = (\tau, \eta) \in \mathbb{R}^{1+d}$, $L(i\xi) := i\tau Id + \sum i\eta_j A_j + L_0 = i\tau Id + A(i\eta)$ et $P(\xi)$ est le projecteur orthogonal sur $\ker L(i\xi)$. La variété caractéristique de L est $\mathcal{C}_L := \{\xi \,:\, \det L(i\xi) = 0\}$. Un point $\underline{\xi} \in \mathcal{C}_L$ est *régulier*, si au voisinage de $\underline{\xi}$, $\mathcal{C}_L$ est le graphe $\{\tau = -\lambda(\eta)\}$ où λ est une valeur propre de $\underline{\eta}$ de $A(i\eta)$ de multiplicité constante au voisinage . De même $Q(\xi)$ désigne le projecteur orthogonal sur $\ker M(i\xi)$ et $\mathcal{C}_M$ la variété caractéristique de M.

À cause du couplage $q(u,u)$, les *résonances* dangeureuses sont les couples $(\xi,\xi') \in \mathcal{C}_L\times\mathcal{C}_L$ tels que $\xi+\xi' \in \mathcal{C}_M$. On dira que la résonance est *régulière en* ξ lorsque ξ et $\xi+\xi'$ sont des points réguliers respectivement de $\mathcal{C}_L$ et $\mathcal{C}_M$ et que $\nabla_\eta\lambda(\eta) \neq \nabla_\eta\mu(\eta+\eta')$, en notant λ et μ les valeurs propres qui définissent $\mathcal{C}_L$ et $\mathcal{C}_M$ près de ξ et $\xi+\xi'$. Dans ce cas, l'ensemble des η tels que $(-\lambda(\eta),\eta)$ est en résonance avec ξ' est une variété lisse de codimension un.

5. Solutions BKW

En reportant (4.3) dans le membre de gauche de (4.1) on obtient une série formelle $\sum \varepsilon^n\ \mathbf{\Phi}_n$. On dit que $\sum \varepsilon^n(\mathbf{u}_n, \mathbf{m}_n)$ est une solution formelle quand $\mathbf{\Phi}_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.

5.1 *L'équation* $\mathbf{\Phi}_0 = 0$ Elle s'écrit

$$L(\beta\partial_\theta)\mathbf{u}_0 \ =\ 0\,, \quad M(\beta\partial_\theta)\mathbf{v}_0 \ +\ q(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) \ =\ 0\,, \tag{5.1}$$

où $L(\beta\partial_\theta) := \sum_j L_1(\beta_j)\partial_{\theta_j} + L_0$ et $M(\beta\partial_\theta) := \sum_j M_1(\beta_j)\partial_{\theta_j} + M_0$. On analyse ces équations en développant les fonctions en séries de Fourier en θ. La première équation équivaut à $\mathbf{u}_0 = \mathbb{P}\mathbf{u}_0$ où $\mathbb{P}$ est le projecteur sur $\ker L(\beta\partial_\theta)$ défini par

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^m} a_\nu e^{i\nu\theta}\Big) \ :=\ \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^m} P(\nu\beta)\, a_\nu\, e^{i\nu\theta}\,, \tag{5.2}$$

où $\nu\beta := \sum_j \nu_j\beta_j \in \mathbb{R}^{1+d}$. Pour avoir $\mathbf{u}_0 \neq 0$, un au moins des $P(\nu\beta)$ doit être non nul. Pour simplifier, on suppose dans toute la suite que

$$\det L(i\nu\beta) \neq 0 \quad \text{et} \quad \det M(i\nu\beta) \neq 0 \quad \text{quand } |\nu| \text{ est grand}\,. \tag{5.3}$$

Par exemple pour décrire la propagation d'une seule onde, on ne considère qu'un seul nombre d'onde $\beta \in \mathcal{C}_L$. Pour une équation dispersive, on a $L_0 \neq 0$ et $\mathcal{C}_L$ n'est pas homogène. En général, on a donc $\det L_1(i\beta) \neq 0$ et aussi (5.3).

On définit de même le projecteur $\mathbb{Q}$ sur le noyau de $M(\beta\partial_\theta)$. La seconde équation de (5.1) demande que $\mathbb{Q}q(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0) = 0$. L'hypothèse de *transparence* assure que cette condition est satisfaite dès que $\mathbf{u}_0$ vérifie $\mathbb{P}\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0$.

Hypothèse 5.1. (*Transparence.*) *Pour tous ν and ν' in $\mathbb{Z}^m$ et pour tous u and u', on a*

$$Q((\nu+\nu')\beta)\, q\Big(P(\nu\beta)u\,,\, P(\nu'\beta)u'\Big) \;=\; 0\,. \tag{5.4}$$

Il revient au même de demander que pour tous polynômes trigonométriques $\mathbf{u}$ et $\mathbf{u}'$, on a

$$\mathbb{Q}q\big(\mathbb{P}\mathbf{u}\,,\,\mathbb{P}\mathbf{u}'\big) \;=\; 0\,. \tag{5.5}$$

La condition (5.4) est triviale quand $P(\nu\beta)$ ou $P(\nu'\beta)$ ou $Q(\nu\beta+\nu'\beta)$ s'annule, c'est-à-dire en dehors des résonances. D'après (5.3), il n'y a donc qu'un nombre fini de conditions (5.4) à vérifier.

On introduit un inverse partiel de $\mathbb{M} := M(\beta\partial_\theta)$ par la formule

$$\mathbb{M}^{(-1)}\Big(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^m} a_\nu e^{i\nu\theta}\Big) \;:=\; \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^m} M^{(-1)}(i\nu\beta)\, a_\nu\, e^{i\nu\theta}\,. \tag{5.6}$$

où $M^{(-1)}(i\xi)$ vérifie $M^{(-1)}(i\xi)M(i\xi) = I - Q(\xi)$ et $M^{(-1)}(\xi)\, Q(\xi) = 0$. $\mathbb{M}^{(-1)}$ agit sur les séries de Fourier formelles et sur les polynômes trigonométriques. $\mathbb{L}^{(-1)}$ est défini de façon similaire. L'hypothèse 5.1, implique que (5.1) équivaut à

$$\mathbf{u}_0 \;=\; \mathbb{P}\mathbf{u}_0\,, \quad (\mathbb{I}-\mathbb{Q})\mathbf{v}_0 \;=\; -\mathbb{M}^{(-1)}q(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_0)\,. \tag{5.7}$$

5.2. *L'équation* $\Phi_1 = 0$. Elle s'écrit

$$\begin{cases} L(\beta\partial_\theta)\mathbf{u}_1 + L_1(\partial_x)\mathbf{u}_0 + f(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0) \;=\; 0\,, \\ M(\beta\partial_\theta)\mathbf{v}_1 + M_1(\partial_x)\mathbf{v}_0 + 2q(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1) + g(\mathbf{u}_0,\mathbf{v}_0) \;=\; 0\,. \end{cases} \tag{5.8}$$

L'hypothèse 5.1 et (5.7) impliquent que $q(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_1) = q(\mathbf{u}_0,(\mathbb{I}-\mathbb{P})\mathbf{u}_1)$. On tire $(\mathbb{I}-\mathbb{P})\mathbf{u}_1$ de la première équation et $(\mathbb{I}-\mathbb{Q})\mathbf{v}_0$ de (5.7). Il en résulte que (5.8) équivaut à un système

$$\begin{cases} \mathbb{P}L_1(\partial_x)\mathbb{P}\mathbf{u}_0 + \mathbb{P}\widetilde{f}(\mathbb{P}\mathbf{u}_0,\mathbb{Q}\mathbf{v}_0) \;=\; 0\,, \\ \mathbb{Q}M_1(\partial_x)\mathbb{Q}\mathbf{v}_0 - \mathbb{D}(\mathbf{u}_0,\partial_y)\mathbf{u}_0 + \mathbb{Q}\widetilde{g}(\mathbb{P}\mathbf{u}_0,\mathbb{Q}\mathbf{v}_0) \;=\; 0\,, \end{cases} \tag{5.9}$$

complété de formules donnant $(\mathbb{I}-\mathbb{P})\mathbf{u}_1$ et $(\mathbb{I}-\mathbb{Q})\mathbf{v}_1$. Le terme quasilinéaire est

$$\mathbb{D}(\mathbf{u}_0,\partial_y)\mathbf{u}_0 \;:=\; \mathbb{Q}M_1(\partial_x)\mathbb{M}^{(-1)}q(\mathbf{u}_0,\mathbf{u}_0) \;+\; 2\,\mathbb{Q}q\big(\mathbf{u}_0,\mathbb{L}^{(-1)}L_1(\partial_x)\mathbf{u}_0\big)\,. \tag{5.10}$$

(les termes en ∂_t du membre de droite s'annulent). Notons $\mathcal{P}$ [resp $\mathcal{Q}$] l'espace des polynômes trigonométriques $\mathbf{u}$ [resp. $\mathbf{v}$] tels que $\mathbb{P}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ [resp. $\mathbb{Q}\mathbf{v} = \mathbf{v}$]. Ils sont de dimension finie par (5.3). Le système (5.9) agit sur les fonctions à valeurs dans $\mathcal{P}\times\mathcal{Q}$. Sa partie principale s'écrit

$$\partial_t \;+\; \mathcal{A}(\mathbf{u}_0(x),\partial_y) \;=\; \partial_t \;+\; \sum_{j=1}^{d}\mathcal{A}_j(\mathbf{u}_0)\partial_{y_j}\,. \tag{5.11}$$

L'hypothèse 5.1 ne dit rien sur la résolubilité de (5.9). On est donc amené à supposer que (5.11) est hyperbolique.

Hypothèse 5.2. *Le système* (5.9) *est fortement hyperbolique, i.e. pour tout* $\mathbf{a} \in \mathcal{P}$*, les matrices* $e^{it\mathcal{A}(\mathbf{a},\eta)}$ *sont uniformément bornées pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $\eta \in \mathbb{R}^d$*.*

On renvoie à [JMR 3] pour une discussion de cette hypothèse. Elle s'exprime à l'aide des résonances pour les opérateurs $\mathbb{P}L_1(\partial_x)\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}M_1(\partial_x)\mathbb{Q}$. On a aussi la propriété suivante.

Proposition 5.3. *Pour que l'Hypothèse* 5.2 *soit satisfaite, il suffit qu'il existe une constante* C *telle que pour tout* ν*, tout* $\xi = (\tau, \eta)$ *voisin de* $\mathbb{Z}^m\beta$ *et tout* $\xi' = (\tau', \nu\kappa + \eta)$*, on ait*

$$\Big| Q(\xi')q\big(P(\nu\beta)u\,,\,P(\xi)u'\big)\Big| \;\leq\; C\,|\,\tau' - \tau - \nu\omega\,|\,|\,u\,|\,|\,u'\,|\,. \tag{5.12}$$

Près des résonances $(\nu\beta, \nu'\beta)$ régulières, il suffit de vérifier (5.12) pour $\tau' = \tau + \nu\omega$, i.e.

$$Q(\xi + \nu\beta)q\big(P(\nu\beta)u\,,\,P(\xi)u'\big) \;=\; 0 \quad \text{pour } \xi \text{ voisin de } \nu'\beta\,. \tag{5.13}$$

5.3. *Existence de solutions formelles.*

Sous l'Hypothèse 5.2, le système (5.9) est symétrisable, mais le symbole $\mathcal{S}(\mathbf{u}_0, \eta)$ du symétriseur n'est pas nécessairement lisse en η. Cependant, dans le cas présent, le manque de régularité n'est pas un obstacle à la résolution de (5.9). L'analyse des équations $\mathbf{\Phi}_n = 0$ pour $n > 1$ est similaire. Par récurrence, on détermine $(\mathbb{P}\mathbf{u}_n, \mathbb{Q}\mathbf{v}_n)$ en résolvant une équation linéaire similaire à (5.9), de partie principale (5.11). On en déduit :

Théorème 5.4. *Sous les Hypothèses* 5.1 *et* 5.2*, pour toute suite de données initiales pour* $\mathbb{P}\mathbf{u}_n \in \mathbb{P}H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$ *et* $\mathbb{Q}\mathbf{v}_n \in \mathbb{Q}H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$ *il existe* $T > 0$ *et une solution formelle* $\sum \varepsilon^n(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)$ *de* (4.1) *avec* $(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) \in C^0([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m))$*.*

6. Stabilité linéaire

Considérons une solution formelle sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m$. Pour $k \geq 2$, on définit

$$U^\varepsilon_{app}(x) = \mathbf{U}^\varepsilon_{app}(x, x\cdot\beta/\varepsilon)\,, \quad \mathbf{U}^\varepsilon_{app} := \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^n(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n)\,. \tag{6.1}$$

C'est une *solution approchée* de (4.1), au sens où le membre de gauche évalué sur U^ε_{app} est $O(\varepsilon^{k+1})$ dans $L^\infty \cap L^2$ et que ses dérivées d'ordre j sont d'ordre $O(\varepsilon^{k+1-j})$. La stabilité linéaire de U^ε_{app} est liée à l'étude du linéarisé de (4.1) qui est de la forme

$$\widetilde{L}^\varepsilon U \,+\, \varepsilon F'(U^\varepsilon_{app})U \;:=\; \begin{pmatrix} L_1(\varepsilon\partial_x)u \\ M(\varepsilon\partial_x)v \,+\, 2q(u^\varepsilon_{app}, u) \end{pmatrix} \,+\, \varepsilon F'(U^\varepsilon_{app})U \;\; = \varepsilon F\,, \tag{6.2}$$

avec $U = (u,v)$, $F(U) := (f(U), g(U))$ et $u^\varepsilon_0(x) := \mathbf{u}_0(x, \beta x/\varepsilon)$. Le problème de Cauchy est *stable* s'il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, les solutions de (6.2) vérifient :

$$\forall t \in [0,T]\,:\quad \|U(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \;\leq\; C\,\|U(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \,+\, C\int_0^t \|F(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,ds \tag{6.3}$$

Par Gronwall, cette propriété ne dépend que du premier terme $\mathbf{u}_0$ du développement de u^ε_{app}.

6.1. *Conditions necessaires.*

Proposition 6.1. *Si le problème* (6.2) *est stable, il existe C tel que pour tout $\nu \in \mathbb{Z}^m$, tout $\xi = (\tau, \eta) \in \mathcal{C}_L$ tout $\xi' = (\tau', \nu\kappa + \eta) \in \mathcal{C}_M$, tout $x \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ et tout vecteur u*

$$\Big| Q(\xi') q\big(\mathbf{u}_{0,\nu}(x)\,,\, P(\xi)u\big) \Big| \;\le\; C\,|\,\tau' - \tau - \nu\omega\,|\,|\,u\,|\,, \tag{6.4}$$

où $\mathbf{u}_{0,\nu}(x)$ désigne le ν-ième coefficient de Fourier de $\mathbf{u}_0(x, \theta)$.

On néglige les termes en $\varepsilon F' U$. On écrit la solution de $L(\varepsilon\partial)u = 0$ comme superposition d'onde planes $\hat{u}e^{i\xi x/\varepsilon}$. L'idée est *toutes* les fréquences $\xi \in \mathcal{C}_L$ peuvent être présentes. L'équation pour v a pour terme source $-q(\mathbf{u}_{0_\nu}(x), \hat{u})\, e^{i(\nu\beta+\xi)x/\varepsilon}$ qui contribue pour un terme non borné en $1/\varepsilon$ à la résonance $\xi + \nu\beta \in \mathcal{C}_M$, si $Q(\xi + \nu\,\beta)q\big(\mathbf{u}_{0,\nu}(x)\,,\hat{u}\big) \neq 0$.

6.2. *Conditions suffisantes.* Sous les hypothèses 5.1 et 5.2, on peut construire des solutions approchées avec $\mathbf{u}_0$ arbitraire pourvu que $\mathbf{u}_0 = \mathbb{P}\mathbf{u}_0$. Cela conduit à formuler l'hypothèse suivante :

Hypothèse 6.2. *Pour tout $\nu \in \mathbb{Z}^m$, il existe une constante C tel que tout $\xi = (\tau, \eta) \in \mathcal{C}_L$ tout $\xi' = (\tau', \nu\kappa + \eta) \in \mathcal{C}_M$, et tout couple de vecteurs u et u'*

$$\Big| Q(\xi') q\big(P(\nu\beta)u\,,\, P(\xi)u'\big) \Big| \;\le\; C\,|\,\tau' - \tau - \nu\omega\,|\,|\,u\,|\,|\,u'\,|\,. \tag{6.5}$$

En particulier, cette hypothèse requiert que

$$Q(\xi + \nu\,\beta) q\big(P(\nu\beta)u\,,\, P(\xi)u'\big) = 0\,. \tag{6.6}$$

Inversement, si (6.6) est vrai près d'une résonance $(\nu\beta, \underline{\xi})$ régulière en ξ, alors (6.5) a lieu pour ξ près de $\underline{\xi}$. Il suffit en effet de factoriser l'équation de la résonance dans $Q(\xi')q\big(P(\nu\beta)u\,,\,P(\xi)u'\big)$.

Dans l'analyse esquissée après l'énoncé de la Proposition 6.1, (6.5) permet de contrôler la propagation des termes d'interaction près des résonances. On en déduit le résultat suivant.

Proposition 6.3. *Sous l'Hypothèse* 6.2, *toutes les solutions approchées* (6.1), *sont linéairement stables.*

6.3. *Comparaison des hypothèses.* La Proposition 5.3 et (6.6) impliquent

Proposition 6.4. *L'Hypothèse* 6.2 *implique les Hypothèses* 5.1 *and* 5.2.

L'Hypothèse 6.2 est strictement plus forte, comme le montre l'exemple simple suivant.

Exemple 6.5. En dimension $d = 1$, considérons le couplage d'une équation de Klein-Gordon et d'un champ :

$$L(\varepsilon\partial_x) \;:=\; \begin{pmatrix} \varepsilon\partial_t - \varepsilon\partial_y & m \\ -m & \varepsilon\partial_t + \varepsilon\partial_y \end{pmatrix}\,, \quad M(\varepsilon\partial_x) := \varepsilon\partial_t\,. \tag{6.7}$$

Pour $\xi = (\tau, \eta) \in \mathcal{C}_L = \{\tau^2 = \eta^2 + m^2\}$ le vecteur $e(\xi) := (m, i(\eta - \tau))$ est une base de $\ker L(i\xi)$. Soit $\beta = (\omega, \kappa) \in \mathcal{C}_L$ avec $\kappa \neq 0$. Alors, $\nu\beta \in \mathcal{C}_L$ si et seulement si $\nu = \pm 1$ et $\nu\beta \in \mathcal{C}_M$ si et seulement si $\nu = 0$. Considérons la forme bilinéaire

$$q(u, u') \;:=\; u_1\, u_2' \,+\, u_1'\, u_2 \tag{6.8}$$

Pour tout ξ, on a $q(e(\xi), e(-\xi)) = 0$. Appliqué à $\pm\beta$ cela montre que l'hypothèse de transparence 5.1 est satisfaite. Comme la résonance est régulière et que $d = 1$, la Proposition 5.3 implique que l'Hypothèse 5.2 est elle aussi satisfaite. Par contre, pour $\xi = (-\omega, \kappa) \in \mathcal{C}_L$, on a $\beta+\xi = (0, 2\kappa) \in \mathcal{C}_M$ et $q(e(\beta), e(\xi)) = 2\,i\,m\kappa \neq 0$. Donc (6.6) n'est pas vérifié et l'Hypothèse 6.2 n'est pas satisfaite.

7. Stabilité non linéaire et solutions exactes

On suppose que l'Hypothèse 6.2 est satisfaite et on se donne une solution formelle $\sum \varepsilon^n \mathbf{U}_n$ sur $[0,T_a] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m$. Pour $k \geq 2$, on définit $\mathbf{U}^\varepsilon_{app}$ et U^ε_{app} comme en (6.1).

THÉORÈME 7.1 *Pour tout $T < T_a$, il existe C et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ le système (4.1) avec donnée de Cauchy $U^\varepsilon_{app}(0,\,.\,)$ a une solution unique $U^\varepsilon = (u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ et*

$$\forall t \in [0,T] \ : \quad \big\| \, U^\varepsilon(t) \, - \, U^\varepsilon_{app}(t) \, \big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \, \leq \, C \, \varepsilon^k \, . \tag{7.1}$$

On obtient un résultat plus précis en cherchant les solutions (u,v) de (4.1) sous la forme

$$u(x) \, = \, \mathbf{u}(x, \beta \cdot x / \varepsilon) \, , \quad v(x) \, = \, \mathbf{v}(x, \beta \cdot x / \varepsilon) \tag{7.2}$$

avec $\mathbf{u}(x,\theta)$ et $\mathbf{v}(x,\theta)$ périodiques en θ. Pour que (u,v) soit solution de (4.1), il suffit que

$$\begin{cases} L(\varepsilon\partial_x + \beta\partial_\theta)\mathbf{u} \, + \, \varepsilon \, f(\mathbf{u},\mathbf{v}) \, = \, 0 \, , \\ M(\varepsilon\partial_x + \beta\partial_\theta)\mathbf{v} \, + q(\mathbf{u},\mathbf{u}) \, + \varepsilon \, g(\mathbf{u},\mathbf{v}) \, = \, 0 \, . \end{cases} \tag{7.3}$$

Avec $\mathbf{U} := (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et des notations évidentes, on écrit ce système sous la forme

$$\mathbf{L}^\varepsilon \mathbf{U}^\varepsilon \, + \, \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{U}^\varepsilon) \, = \, 0 \, . \tag{7.4}$$

On résout (7.4) avec les données initiales

$$\mathbf{U}^\varepsilon{}_{|t=0} \, = \, \mathbf{U}^\varepsilon_{app|t=0} \, + \, \varepsilon^k \, \mathbf{R}^\varepsilon_0 \tag{7.5}$$

La construction des solutions formelles montre que $\mathbf{U}^\varepsilon_{app}$ est une solution approchée de (7.3) au sens où pour tout entier σ, il existe C tel que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et tout $t \in [0, T_a]$

$$\big\| \big(\mathbf{L}^\varepsilon \mathbf{U}^\varepsilon_{app} \, + \, \mathbf{F}^\varepsilon(\mathbf{U}^\varepsilon_{app}) \big)(t,\,.\,) \, \big\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)} \, \leq \, C \, \varepsilon^{k+1} \, . \tag{7.6}$$

Le Théorème 7.1 est un corollaire du résultat suivant.

THÉORÈME 7.2. *Soit $\sigma > (d+m)/2$. On suppose que la famille $\{\mathbf{R}^\varepsilon_0\}$ est bornée dans $H^\sigma(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$. Alors, pour tout $T < T_a$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et C tels que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ le problème de Cauchy (7.4) (7.5) a une solution unique $\mathbf{U}^\varepsilon = (\mathbf{u}^\varepsilon, \mathbf{v}^\varepsilon) \in C^0([0,T]; H^\sigma(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m))$ et*

$$\forall t \in [0,T] \, , \quad \big\| \, \mathbf{U}^\varepsilon(t) \, - \, \mathbf{U}^\varepsilon_{app}(t) \, \big\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)} \, \leq \, C \, \varepsilon^k \, . \tag{7.7}$$

Négligeant les termes de degré zéro en $O(\varepsilon)$, les équations linéarisés de (7.4) s'écrivent

$$\begin{cases} L(\varepsilon\partial_x + \beta\partial_\theta) \, \mathbf{u} \, = \, \varepsilon \, \mathbf{f} \, , \\ M(\varepsilon\partial_x + \beta\partial_\theta) \, \mathbf{v} \, + \, 2q(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}) \, = \, \varepsilon \, \mathbf{g} \, . \end{cases} \tag{7.8}$$

L'Hypothèse 6.2 permet de construire des familles d'opérateurs $\mathbf{S}^\varepsilon$ et $\mathbf{T}^\varepsilon$ uniformément bornées de $H^\sigma(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$ dans lui même et tels que

$$\mathbf{S}^\varepsilon L(\varepsilon\partial_x + \beta\partial_\theta) \, - \, M(\varepsilon\partial_x + \beta\partial_\theta) \, \mathbf{S}^\varepsilon \, = \, q(\mathbf{u}_0, \,\cdot\,) \, + \, \varepsilon \, \mathbf{T}^\varepsilon \, . \tag{7.9}$$

Ils sont de la forme

$$\mathbf{S}^\varepsilon \mathbf{u} \,=\, \mathbf{S}^\varepsilon\Big(\sum_\mu e^{i\mu\theta} u_\mu\Big) := \sum_{\nu,\mu} e^{i(\mu+\nu)\theta} S_\nu(x, \varepsilon D_y + \mu\kappa)\, u_\mu \,. \tag{7.10}$$

où $\{S_\nu(x,\eta)\}$ est une famille finie de symboles qui sont somme finie de produits $a(x)\,p(\eta)$ avec $a \in H^\infty([0,T_a]\times\mathbb{R}^d)$ et $p \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On introduit $\mathbf{w} := \mathbf{v} + 2\mathbf{S}^\varepsilon\mathbf{u}$. Alors, avec (7.9), la deuxième équation de (7.8) équivaut à

$$M(\varepsilon\partial_x + \beta\partial_\theta)\,\mathbf{w} \,=\, \varepsilon\,\mathbf{g} \,+\, 2\,\varepsilon\,\mathbf{S}^\varepsilon\mathbf{f} \,+\, 2\,\varepsilon\,\mathbf{T}^\varepsilon\mathbf{u}\,. \tag{7.11}$$

Comme $L(\varepsilon\partial_x + \beta\partial_\theta)$ et $M(\varepsilon\partial_x + \beta\partial_\theta)$ sont hyperboliques symétriques avec coefficient de ∂_t égal à ε, on en déduit des estimations d'énergie H^σ pour $(\mathbf{u},\mathbf{w})$, donc pour $(\mathbf{u},\mathbf{v})$. On en déduit des estimations semblables pour le linéarisé de (7.4) et le Théorème 7.2 en résulte.

8. Non linéarités compatibles.

Toutes les fréquences β donnent lieu à des oscillations stables sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 8.1. *Il existe C tel que pour tout $\xi = (\tau,\eta) \in \mathcal{C}_L$, $\xi' = (\tau',\eta') \in \mathcal{C}_L$, tout $\xi'' = (\tau'', \eta+\eta') \in \mathcal{C}_M$ et tout vecteurs u and u'*

$$\Big| Q(\xi'') q\big(P(\xi)u\,,\, P(\xi')u'\big) \Big| \;\leq\; C\,|\,\tau'' - \tau - \tau'\,|\,|\,u\,|\,|\,u'\,|\,. \tag{8.1}$$

8.1. *Formes normales.* La formule d'entrelacement (7.9) s'étend de la façon suivante.

Théorème 8.2 *Sous l'Hypothèse* 8.1, *il existe une famille d'applications bilinéaires J^ε de $H^\infty(\mathbb{R}^d)\times H^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $H^\infty(\mathbb{R}^d)$ et tels que pour tout $u \in C^1([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}^d))$,*

$$q(u(t),u(t)) \,=\, M(\varepsilon\partial_x) J^\varepsilon\big(u(t),u(t)\big) \,-\, 2J^\varepsilon\big(L(\varepsilon\partial_x)u(t),u(t)\big)\;. \tag{8.2}$$

Les J^ε sont définis à l'aide d'une famille bornée $\{J(\eta,\eta';\,\cdot\,,\,\cdot\,)\}$ de formes bilinéaires :

$$J^\varepsilon(u,u')(y) \,=\, (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} e^{iy(\eta+\eta')} J(\varepsilon\eta, \varepsilon\eta'; \widehat{u}(\eta), \widehat{u'}(\eta'))\, d\eta d\eta'\,. \tag{8.3}$$

L'explicitation de (8.2) conduit à

$$J\big(\eta,\eta'; u, u'\big) \,:=\, \sum_{j,k,l} \big(\mu_l(\eta+\eta') - \lambda_j(\eta) - \lambda_k(\eta')\big)^{-1} Q_l(\eta+\eta') q\big(P_j(\eta)u, P_k(\eta')u'\big)\,. \tag{8.4}$$

où les $\lambda_j(\eta)$ et $P_j(\eta)$ [resp. $\mu_l(\eta)$ et $Q_l(\eta)$] sont les valeurs propres et projecteurs spectraux de $A(i\eta)$ [resp. $B(i\eta)$]. L'Hypothèse 8.1 est précisément celle qui permet la division dans (8.4).

On étend la définition de J^ε aux fonctions $\mathbf{u}(x,\theta)$ en posant

$$\mathbf{J}^\varepsilon\Big(\sum u_\nu e^{i\nu\theta}, \sum u_\nu e^{i\nu\theta}\Big) \,=\, \sum J^\varepsilon_{\nu,\nu'}(u_\nu, u'_\nu)\, e^{i(\nu+\nu')\theta}\,, \tag{8.5}$$

où les $J^\varepsilon_{\nu,\nu'}$ sont définis comme en (8.3) avec les symboles $J_{\nu,\nu'}(\eta,\eta') \,=\, J(\eta+\nu\kappa, \eta'+\nu'\kappa)$.

Proposition 8.3. *Les $\mathbf{J}^\varepsilon$ sont uniformément bornées de $H^\sigma(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^m)\times H^\sigma(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^m)$ dans $H^\sigma(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T})$ pour $\sigma>(d+m)/2$ et pour tout $\mathbf{u}\in C^1([0,T];H^\sigma(\mathbb{R}^d\times\mathbb{T}^m))$,*

$$q\big(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\big) \;=\; M(\varepsilon\partial_x+\beta\partial_\theta)\mathbf{J}^\varepsilon\big(\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\big)\;-\;2\,\mathbf{J}^\varepsilon\big(L(\varepsilon\partial_x+\beta\partial_\theta)\mathbf{u}(t),\mathbf{u}(t)\big)\,. \tag{8.6}$$

Corollaire 8.4. *Considérons le changement d'inconnues*

$$\tilde{\mathbf{v}} := \mathbf{v}+\mathbf{J}^\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{u})\,; \tag{8.7}$$

Alors, pour les solutions régulières, le système (7.3) est équivalent à

$$\begin{cases} L(\varepsilon\partial_x+\beta\partial_\theta)\mathbf{u}\,+\,\varepsilon\,f(\mathbf{u},\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{J}^\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{u}))\;=\;0\,,\\ M(\varepsilon\partial_x+\beta\partial_\theta)\tilde{\mathbf{v}}\;+\varepsilon\,\mathbf{J}^\varepsilon(\mathbf{u},f(\mathbf{u},\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{J}^\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{u})))\;+\varepsilon\,g(\mathbf{u},\tilde{\mathbf{v}}-\mathbf{J}^\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{u}))\;=\;0\,.\end{cases} \tag{8.8}$$

On voit donc que $U^\sharp\;=\;(u,\tilde v)$ vérifie un système (7.3) sans terme $q(\mathbf{u},\mathbf{u})$. Cependant les opérateurs bilinéaires J^ε sont nonlocaux et on ne peut pas vraiment se référer aux résultats connus pour justifier l'existence et la stabilité des solutions BKW de taille $O(1)$.

Pour les équation de Maxwell-Bloch, l'opérateur bilinéaire J^ε a un symbole indépendant de (η,η'). Il agit ponctuellement en y :

$$J^\varepsilon(u,u)(y)=\widetilde{J}(u(y),u(y)) \tag{8.9}$$

où $\widetilde{J}$ est une application bilinéaire sur $\mathbb{C}^N\times\mathbb{C}^N$. C'est la formule (3.7).

8.2. *Les multiplicateurs de Fourier sont nécessaires.*

Exemple 8.5. Avec $(m^2-4)\,(c^2-1)\;>\;4$, on considère

$$L(\varepsilon\partial_x)\;:=\;\begin{pmatrix}\varepsilon\partial_t-\varepsilon\partial_y-i & 0\\ 0 & \varepsilon\partial_t+\varepsilon\partial_y+i\end{pmatrix}\,,\quad M(\varepsilon\partial_x):=\begin{pmatrix}\varepsilon\partial_t-\varepsilon c\partial_y & m\\ -m & \varepsilon\partial_t+\varepsilon c\partial_y\end{pmatrix}\,. \tag{8.10}$$

$\mathcal{C}_M\;=\;\{\tau^2\;=\;c^2\eta^2+m^2\}$ et $\mathcal{C}_L$ est la réunion des droites $\mathcal{C}_\pm\;:=\;\{\tau\;=\;\pm(\eta+1)\}$. Les directions propres sont $e_+=(1,0)$ et $e_-=(0,1)$. On note (u_1,u_2) les composantes de u et on suppose que

$$q(u,u)\;=\;\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}u_1^2\,. \tag{8.11}$$

Alors $q(e_+,e_-)=0$ et l'analyse des résonances montre que l'Hypothèse 8.1 est satisfaite.

En outre, l'opérateur J^ε ne dépend que de u_1 :

$$J^\varepsilon(u,u)\;=\;\frac{1}{2\pi}\int e^{i(\eta+\eta')y}\begin{pmatrix}\rho(\eta,\eta')\\ \sigma(\eta,\eta')\end{pmatrix}\widehat{u_1}(\eta)\,\widehat{u_1}(\eta')\,d\eta\,d\eta'\,, \tag{8.12}$$

où ρ et σ vérifient

$$\begin{cases} i(\eta+\eta'+2-\,c(\eta+\eta'))\rho\;+\;m\,\sigma\;=\;b_1\,,\\ -\,m\rho\;+\;i(\eta+\eta'+2+\,c(\eta+\eta'))\sigma\;=\;b_2\,.\end{cases} \tag{8.13}$$

Les conditions sur m et c impliquent que ce système a une solution $\big(\rho(\eta,\eta'),\sigma(\eta,\eta')\big)$ borné. La définition de ρ et σ fait intervenir des fractions rationnelles.

8.3. *Autres exemples vérifiant l'Hypothèse* 8.1

EXEMPLE 8.6. *Le cas non résonant.* Considérons deux équations de Klein-Gordon couplées :

$$L(\varepsilon\partial_x) := \begin{pmatrix} \varepsilon\partial_t - \varepsilon\partial_y & m_1 \\ -m_1 & \varepsilon\partial_t + \varepsilon\partial_y \end{pmatrix}, \quad M(\varepsilon\partial_x) := \begin{pmatrix} \varepsilon\partial_t - \varepsilon\partial_y & m_2 \\ -m_2 & \varepsilon\partial_t + \varepsilon\partial_y \end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

Quand $m_2 < 2m_1$, $(\mathcal{C}_L + \mathcal{C}_L) \cap \mathcal{C}_M = \emptyset$, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de résonances. En outre,

$$\Big| \pm \sqrt{(\eta+\eta')^2 + m_2^2} \pm \sqrt{\eta^2 + m_1^2} \pm \sqrt{\eta'^2 + m_1^2} \Big| \geq c > 0 .$$

Il en résulte que l'Hypothèse 8.1 est satisfaite quelle que soit la forme bilinéaire q.

EXEMPLE 8.7. *Équations de Klein Gordon résonante.* On suppose que L lui même est fait de deux opérateurs de Klein-Gordon :

$$L_1(\varepsilon\partial_x) := \begin{pmatrix} \varepsilon\partial_t - \varepsilon\partial_y & m_1 \\ -m_1 & \varepsilon\partial_t + \varepsilon\partial_y \end{pmatrix}, \quad L_2(\varepsilon\partial_x) := \begin{pmatrix} \varepsilon\partial_t - \varepsilon\partial_y & m_2 \\ -m_2 & \varepsilon\partial_t + \varepsilon\partial_y \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

On note $u = (u_1, u_2)$ de sorte que L_j agit sur u_j. En outre,

$$M(\varepsilon\partial_x) := \begin{pmatrix} \varepsilon\partial_t - \varepsilon\partial_y & m \\ -m & \varepsilon\partial_t + \varepsilon\partial_y \end{pmatrix}. \tag{8.16}$$

On suppose que $m_2 < m_1$ et que $\min(m_1 - m_2, 2m_2) < m < 2m_1$. Cela implique que

$$(\mathcal{C}_{L_1} + \mathcal{C}_{L_1}) \cap \mathcal{C}_M = \emptyset, \quad (\mathcal{C}_{L_1} + \mathcal{C}_{L_2}) \cap \mathcal{C}_M = \emptyset, \quad (\mathcal{C}_{L_2} + \mathcal{C}_{L_2}) \cap \mathcal{C}_M \neq \emptyset .$$

Il y a donc des résonances, mais seulement entre fréquences de $\mathcal{C}_{L_2}$. En particulier, pour une forme quadratique de la forme

$$q(u,u) \;=\; q_1(u_1,u_1) \;+\; b(u_1,u_2)$$

on a $Q(\xi+\xi')q(P(\xi)\,.\,, P(\xi')\,.\,) = 0$ aux résonances. On montre que l'Hypothèse 8.1 est satisfaite.

8.4. *L'Hypothèse* 8.1 *est strictement plus forte que l'Hypothèse* 6.2. L'hypothèse de stabilité 6.2 peut n'être vérifiée que pour certaines fréquences β. Il est facile de donner des exemples où elle est vérifiée en des points β isolés. Mais il se peut aussi qu'elle le soit pour β dans une partie ouverte de $\mathcal{C}_L$.

EXEMPLE 8.8. Considérons

$$L(\varepsilon\partial_x) := \begin{pmatrix} \varepsilon\partial_t - \varepsilon\partial_y & m_1 \\ -m_1 & \varepsilon\partial_t + \varepsilon\partial_y \end{pmatrix}, \quad M(\varepsilon\partial_x) := \begin{pmatrix} \varepsilon\partial_t - \varepsilon c\partial_y & m \\ -m & \varepsilon\partial_t + \varepsilon c\partial_y \end{pmatrix}. \tag{8.17}$$

avec $c > 1$ et $m > 2m_1$.

Pour $\beta_0 = (m_1, 0) \in \mathcal{C}_L$, $(\mathcal{C}_L \pm \beta) \cap \mathcal{C}_M = \emptyset$. Pour β près de β_0, cette propriété reste vraie, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de résonances et l'Hypothèse 6.2 est satisfaite pour tout choix de q.

Soit maintenant $\beta \in \mathcal{C}_L$ est tel que $\omega > m/2$. Alors les fonctions $\varphi_1(\eta) := \omega + \sqrt{m_1^2 + (\eta-\kappa)^2}$ et $\varphi_2(\eta) := \sqrt{m^2 + c^2\eta^2}$ vérifient $\varphi_2(0) < \varphi_1(0)$ et $\varphi_2(\eta) > \varphi_1(\eta)$ quand $\eta \to +\infty$. Il en résulte que les graphes de φ_1 etφ_2 se coupent et $(\mathcal{C}_L \pm \beta) \cap \mathcal{C}_M \neq \emptyset$. Il y a donc une résonance et la condition $Q(\xi+\beta)q(P(\beta)\,.\,, P(\xi)\,.\,) \neq 0$ est certainement remplie pour un choix approprié de q, auquel cas l'Hypothèse 6.2 n'est pas satisfaite. .

EXEMPLE 8.9. L'exemple ci-dessus est aisément modifié pour incorporer des résonances aux fréquences β stables. On considère $L = (L_1, L_2)$ comme en (8.15) et M comme en (8.17). On suppose que $c > 1$ et $2m_1 > m > m_1 + m_2$.

Pour $\beta \in \mathcal{C}_{L_1}$ près de $\beta_0 = (m_1, 0)$, on a $(\mathcal{C}_{L_1} \pm \beta) \cap \mathcal{C}_M \neq \emptyset$ et $(\mathcal{C}_{L_2} \pm \beta) \cap \mathcal{C}_M = \emptyset$. Il y a donc des résonances mais elles ne concernent pas les fréquences de $\mathcal{C}_{L_2}$. On montre alors que l'Hypothèse de stabilité 6.2 est satisfaite pour toute forme quadratique

$$q(u,u) \;=\; q_2(u_2,u_2) \;+\; b(u_1,u_2)\,. \tag{8.18}$$

Quand β est grand, $(\mathcal{C}_{L_2} \pm \beta) \cap \mathcal{C}_M \neq \emptyset$ et pour $\xi \in \mathcal{C}_{L_2} \cap (\mathcal{C}_M - \beta)$ on peut faire en sorte que $Q(\xi+\beta) q(P(\beta)\,.\,, P(\xi)\,.\,) \neq 0$ par un choix approprié de q, auquel cas l'Hypothèse 6.2 n'est pas satisfaite.

9. Un exemple d'instabilité forte

L'exemple ci-dessous s'inspire de l'Exemple 6.5. Il est plus simple dans la mesure où il n'y a qu'une seule résonance. En dimension $d = 1$, on considère le système

$$\begin{cases} \varepsilon\,(\partial_t - \partial_y)\,u_1 \;-\, i\,u_1 \;=\; 0\,, \\ \varepsilon\,(\partial_t - \partial_y) u_2 \;+\; \varepsilon\,\delta\,\overline{u_1}\,v \;=\; 0\,, \\ \varepsilon \partial_t v \;+\; u_1\,u_2 \;=\; 0\,, \end{cases} \tag{9.1}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient un système (4.1). Dans la seconde équation, δ est un paramètre. On renvoie à [JMR 1] pour une systématisation de cet exemple.

La variété caractéristique $\mathcal{C}_L$ est l'union des droites $\mathcal{C}_1 := \{\tau = \eta + 1\}$ et $\mathcal{C}_2 := \{\tau = \eta\}$. En outre, $\mathcal{C}_M = \{\tau = 0\}$. On choisit $\beta = (2,1) \in \mathcal{C}_1$. Alors, $\nu\beta \in \mathcal{C}_L$ pour $\nu = 1$ et $\nu = 0$. On vérifie que les Hypothèses 5.1 et 5.2 sont satisfaites.

Par ailleurs, $\xi_0 := (-2,-2) \in \mathcal{C}_2$ est en résonance avec β et comme le coefficient de $u_1 u_2$ est non nul, l'Hypothèse 6.2 n'est pas satisfaite pour cette résonance.

Considérons une famille de solutions de la première équation

$$u_1^\varepsilon(x) \;=\; a(x)\, e^{i\beta\cdot x/\varepsilon}\,, \quad \text{avec} \quad (\partial_t - \partial_y) a = 0\,. \tag{9.2}$$

On suppose que a est constante sur le domaine $\Omega := \{(t,y) \,:\, |y| \leq 4 - t\}$

Quand les données initiales de u_2 et v s'annulent, la solution de (9.1) est $(u_1^\varepsilon, 0, 0)$. On étudie la stabilité de ces solutions. On montre que pour des perturbations des données initiales :

1) il existe de des solutions BKW et donc des familles uniformément bornées de solutions approchées,

2) les solutions exactes ayant les mêmes données de Cauchy divergent en $e^{\gamma t/\sqrt{\varepsilon}}$ des solutions approchées.

9.1. *Solutions BKW.*

Comme les Hypothèses 5.1 et 5.2 sont satisfaites, on peut construire des solutions formelles. Ici on trouve

$$u_2^\varepsilon(x) \sim \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n b_n(x)\Big) e^{-i\beta\cdot x/\varepsilon}\,, \quad v^\varepsilon(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x)\,. \tag{9.3}$$

Les coefficients sont déterminés par les équations suivantes : pour $n \geq 0$,

$$b_{n+1} \;=\; i\big((\partial_t - \partial_y) b_n + \overline{a} v_n\big)\,, \quad \partial_t v_n \;=\; a\, b_{n+1}\,. \tag{9.4}$$

On en déduit

Proposition 9.1. *Pour toute suite* $v_n^0 \in H^\infty(\mathbb{R})$, *le système* (9.1) *a une unique solution formelle de la forme* (9.2)(9.3), *avec* b_n *et* v_n *dans* $H^\infty([0,1]\times\mathbb{R})$ *et vérifiant* $v_{n|t=0} = v_n^0$.

Étant donnée une solutions formelle, on considère la solutions approchée

$$u^\varepsilon_{1,app} = u^\varepsilon_1\,, \quad u^\varepsilon_{2,app} = \sum_{n=1}^{k+1} \varepsilon^k b_n\, e^{-i\beta\cdot x/\varepsilon}, \quad v^\varepsilon_{app} = \sum_{n=0}^{k} \varepsilon^k v_n\ . \tag{9.5}$$

Alors,

$$e^{i\beta\cdot x/\varepsilon}\Big(\varepsilon(\partial_t - \partial_y)u^\varepsilon_{2,app} + \varepsilon\overline{u^\varepsilon_1}\, v^\varepsilon_{app}\Big) \quad \text{et} \quad \varepsilon\partial_t v^\varepsilon_{app} + u^\varepsilon_1\, u^\varepsilon_{2,app}$$

sont $O(\varepsilon^{k+2})$ dans $H^\infty([0,1]\times\mathbb{R}^d)$.

9.2. *Solutions exactes*

On suppose maintenant que v_0^0 *est à support dans* $[-1,1]$ *et que pour* $n>0$, $v_n^0 = 0$. Étant donnée la solution approchée (9.5) correspondante, on considère maintenant la solution exacte de (9.1) qui a les mêmes données de Cauchy. u_1^ε est inchangé et on obtient pour $u^\varepsilon := u_2^\varepsilon\, e^{i\beta x/\varepsilon}$ et v^ε le système linéaire suivant

$$\begin{cases} \varepsilon\,(\partial_t - \partial_y)u \,-\, i\,u \,+\, \varepsilon\,\delta\,\overline{a}\,v \,=\, 0\,,\\ \varepsilon\partial_t v \;+\, a\,u_2 \,=\, 0\,. \end{cases} \tag{9.6}$$

Les formules (9.4) montrent que les $b_n(0,\,.\,)$ et donc les données initiales de $(u_2^\varepsilon, v^\varepsilon)$ sont supportés dans $[-1,1]$. Comme a est constant sur Ω qui contient le domaine d'influence de $[-1,1]$, on peut supposer dans (9.6) que a est une constante, non nulle. Ce système s'analyse directement par transformation de Fourier.

$$\begin{pmatrix} \hat u(t,\eta)\\ \hat v(t,\eta)\end{pmatrix} \;=\; e^{\frac{t}{\varepsilon}\,\mathcal{A}(\varepsilon,\varepsilon\eta)}\begin{pmatrix} \hat u(0,\eta)\\ \hat v(0,\eta)\end{pmatrix}\,, \quad \mathcal{A}(\varepsilon,\eta) := \begin{pmatrix} i\,\eta\,+\,i & -\varepsilon\,\overline{a}\,\delta\\ -a & 0\end{pmatrix}.$$

Pour $\eta = -1$, $\mathcal{A}(0,\eta)$ a une valeur double. C'est la traduction exacte pour le système (9.6) du fait que (β,ξ_0) est une résonance.

On suppose maintenant que δ *est un réel strictement positif.* On laisse au lecteur le soin de vérifier que la condition utile est que δ *n'est pas un réel négatif ou nul.* On voit alors que pour $|\eta+1| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\delta}|a|$, $\mathcal{A}(\varepsilon,\eta)$ a une valeur propre de partie réelle $\sqrt{\varepsilon\delta|a|^2 - (\eta+1)^2} > 0$. En suivant les projecteurs spectraux de $\mathcal{A}$, on montre le résultat suivant.

Lemme 9.2. *Pour tout* $C \ge 0$ *et* $h \in]0, \sqrt{\delta}|a|[$ *il existe* $\gamma > 0$, *et* $c > 0$ *tels que :*

pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, *tout* η *tel que* $|\varepsilon\eta + 1| \le \sqrt{\varepsilon}h$, *tout* $t \in [0,1]$ *et tout vecteur* $U = (u,v)$ *vérifiant* $|u| \,\le\, C\varepsilon\,|v|$, *on a :*

$$\big|\, e^{-\frac{t}{\varepsilon}\mathcal{A}(\varepsilon,\varepsilon\eta)}\, U \,\big| \;\ge\; c\, e^{\gamma t/\sqrt{\varepsilon}}\,|v|. \tag{9.7}$$

Grâce à (9.4), on vérifie que $|\widehat{b_{n+1}}(0,\eta)| \leq C_n(1+|\eta|)^n|\widehat{v_0^0}(\eta)|$. Par conséquent,

$$|\widehat{u^\varepsilon}(0,\eta)| \leq C\,\varepsilon\,(1+\varepsilon|\eta|)^k\,|\widehat{v_0^0}(\eta)|\,. \tag{9.8}$$

On peut donc appliquer l'estimation (9.7). On en déduit que, si la famille $U^\varepsilon(t)$ est bornée dans L^2 sur un intervalle de temps $[0,T]$ indépendant de ε, alors il existe $\gamma' > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma'\sqrt{|\eta|}}\;\; |\widehat{v_0^0}(\eta)|^2\,d\eta \,<\, \infty$$

Ceci demande que v_0^0 soit dans la classe de Gevrey d'ordre 2, G^2. Par conséquent, si $v_0^0 \notin G^2$, $\|U^\varepsilon(t)\|_{L^2}$ et $\|U^\varepsilon(t) - U^\varepsilon_{app}\|_{L^2}$ ne peuvent pas rester bornés sur un intervalle fixe. Le résultat suivant donne un taux de divergence.

Théorème 9.3. *Outre les hypothèses précédentes, on suppose que v_0^0 vérifie :*

$$\exists s < 1/2\,,\ \exists c_1 > 0\,,\ \exists c_2 > 0\,,\ \forall \eta\,,\quad |\widehat{v_0^0}(\eta)| \,\geq\, c_1\,e^{-c_2|\eta|^s}\,. \tag{9.9}$$

Alors il existe $c > 0$ et $r \geq 0$ tels que la solution exacte de (9.1) avec les données de Cauchy U^ε_{app} vérifie

$$\|U^\varepsilon(t) - U^\varepsilon_{app}\|_{L^2} \,\geq\, c\,e^{\gamma t/2\sqrt{\varepsilon}}\,,\quad \text{pour}\quad t \in [r\,\varepsilon^{\frac{1}{2}-s}, 1]\,. \tag{9.10}$$

L'hypothèse (9.9) exprime que v_0^0 n'est pas dans la classe $G^{1/s}$ pour un $s < 1/2$, sur aucune bande de fréquence. Pour finir, on vérifie que le théorème n'est pas vide

Lemme 9.4. *Il existe des fonctions à support compact vérifiant* (9.9)

Soit $\chi(y)$ la transformée de Fourier inverse de $e^{-(1+|\eta|^2)^{s/2}}$. Cette fonction est dans la classe de Gevrey $G^{1/s}$. Soit $\chi_1 \neq 0$ une fonction C^∞ à support compact, réelle et paire. Sa transformée de Fourier $\widehat{\chi_1}$ est réelle et paire. Donc $\chi_2 = \chi_1 * \chi_1 \in C_0^\infty$ et $\widehat{\chi_2}$ est réelle et positive ou nulle. Alors $v = \chi\chi_2$ vérifie (9.9). En effet, $v \in C_0^\infty$ et

$$\widehat{v}(\eta) \,\geq\, \int_{-1}^{1} e^{-|\eta-\zeta|^s}\;\; \widehat{\chi_2}(\zeta)\,d\zeta$$

Comme $\widehat{\chi_2}$ est analytique et positive ou nulle, son intégrale sur $[-1,1]$ est strictement positive et (9.9) en résulte. On remarque que $v \in G^{1/s}$ si on choisit χ_1 dans cette classe de Gevrey.

Références

[Bl] N.Bloembergen, *Nonlinear Optics*, W.A. Benjamin Inc., New York, 1965.

[BW] M.Born and E.Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, 1959.

[Bo] R.Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, 1992.

[Do] P.Donnat, *Quelques contributions mathématiques en optique non linéaire*, Thèse, École Polytechnique, 1994.

[DJMR] P.Donnat, J.L.Joly, G.Métivier and J.Rauch, *Diffractive Nonlinear Optics*, Séminaire E.D.P., École Polytechnique 1995-96.

[DR] P.Donnat and J. Rauch, *Dispersive Nonlinear Geometric Optics*, J.Math.Physics, 38 (1997) pp 1484-1523.

[JMR 1] J.L.Joly, G.Métivier and J.Rauch, *Several Recent Results in Nonlinear Geometric Optics*, in Partial Differential Equations and Mathematical Physics. The Danish-Swedish Analysis Seminar 1995, L.Hörmander and A.Melin Ed. Birkhauser, 1996..

[JMR 2] J.L.Joly, G.Métivier and J.Rauch, *Recent Results in Nonlinear Geometric Optics*, Proceedings 7-th International Conference on Hyperbolic Problems, Zürich, 1998.

[JMR 3] J.L.Joly, G.Métivier and J.Rauch, *Transparent Nonlinear Geometric Optics and Maxwell-Bloch Equations*, en préparation.

[JMR 4] J.L.Joly, G.Métivier and J.Rauch, *Diffractive nonlinear geometric optics with rectification*, Indiana J. Math., to appear.

[JMR 5] J.L.Joly, G.Métivier and J.Rauch, *Coherent and focusing multidimensional nonlinear geometric optics*, Annales de L'École Normale Supérieure de Paris, 28 (1995), pp 51-113.

[JMR 6] J.L.Joly, G.Métivier and J.Rauch, *Coherent nonlinear waves and the Wiener algebra*, Ann. Inst. Fourier, 44, 1994, pp 167-196.

[JMR 7] J.L.Joly, G.Métivier and J.Rauch, *Generic rigorous asymptotic expansions for weakly nonlinear geometric optics*, Duke. Math. J., 70, 1993, pp 373-404.

[JR] J.L.Joly and J.Rauch, *Justification of multidimensional single phase semilinear geometric optics*, Trans. Amer. Math. Soc. 330 (1992), 599-625.

[Lan] D.Lannes, *Dispersive effects for nonlinear geometrical optics with rectification,* Asymptotic Anal., 18 (1998), ppp 111-146..

[Lax] P.Lax, *Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems*, Duke Math. Journal, 24 (1957) pp 627-645.

[NM] A. Newell and J. Moloney *Nonlinear Optics*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1992.

[PP] R.Pantell and H.Puthoff, *Fundamentals of Quantum Electronics*, J.Wiley&Sons Inc., New York, et *Électronique quantitique en vue des applications*, Dunod, 1973.