

# Sur l'espace des configurations d'une araignée\*

Pierre Mounoud

## Abstract

We study the configuration space of the linkages called “spiders”. Let  $g$  be a non negative integer and  $r$  be the greatest integer such that  $2^r$  divide  $g - 1$ . We show that there exists a spider whose configuration space is diffeomorphic to an orientable compact surface of gender  $g$  if and only if  $\frac{1}{2^r}(g - 1) \leq 6r + 12$ . Afterward we give a method that allows to describe a large family of singular configuration spaces.

## Résumé

On étudie les espaces des configurations des systèmes articulés appelés « araignées ». Soit  $g$  un entier positif et  $r$  le plus grand entier tel que  $2^r$  divise  $g - 1$ . On montre qu'il existe une araignée dont une composante connexe de l'espace des configurations est difféomorphe à une surface compacte orientable de genre  $g$  si et seulement si  $\frac{1}{2^r}(g - 1) \leq 6r + 12$ . On donne ensuite un méthode permettant de décrire complètement une large famille d'espaces de configurations singuliers.

## 1 Introduction

On appelle « araignée à  $n$  pattes » le système articulé réalisé de la façon suivante. On considère  $2n$  barres rigides de longueurs quelconques (non nulles). On les attache ensemble par paire de façon à obtenir  $n$  « pattes ». On choisit une extrémité de chacune de ces pattes que l'on appelle « pied ». On se donne  $n$  points (fixes) et on attache un pied en chacun de ces points. Enfin, on identifie entre elles les  $n$  extrémités libres des pattes de façon à former le « corps » de l'araignée (il faut donc que les pattes soient suffisamment longues). Le système articulé obtenu ressemble à une araignée ayant  $n$  pieds collés au sol. On suppose bien sûr que les pattes peuvent se croiser librement.

Nous allons nous intéresser à l'espace des configurations de ce système mécanique que l'on va noter  $\mathcal{C}_A$ . Cet espace est naturellement un fermé de  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Pour le voir, nous allons préciser les choses. On identifie le plan au corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . On désigne par  $\omega_1, \dots, \omega_n$  les points du plan où sont collés les pieds. On désigne par  $l_i$  la longueur de la barre attachée à  $\omega_i$ , par  $z_i$  l'extrémité libre de la barre (le « genou » en quelque sorte), par  $L_i$  la longueur de la barre attachée en  $z_i$  et par  $z_0$  le corps. On a clairement :

$$\mathcal{C}_A = \{(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}; \forall i \in \{1, \dots, n\}, |z_i - \omega_i| = l_i \text{ et } |z_0 - z_i| = L_i\}$$

Le but de ce papier est de déterminer quelles sont les araignées dont l'espace des configurations est lisse et surtout de déterminer quelle est alors la topologie de cet espace.

Les araignées ont déjà donné lieu à des travaux, citons ici l'article de Schvalb, Shoham et Blanc [4] (qui contient un analogue de la proposition 3.1) et l'article de J. O'Hara [3] (qui répond aux

---

\*2000 Mathematics Subject Classification: 57M20,70B15

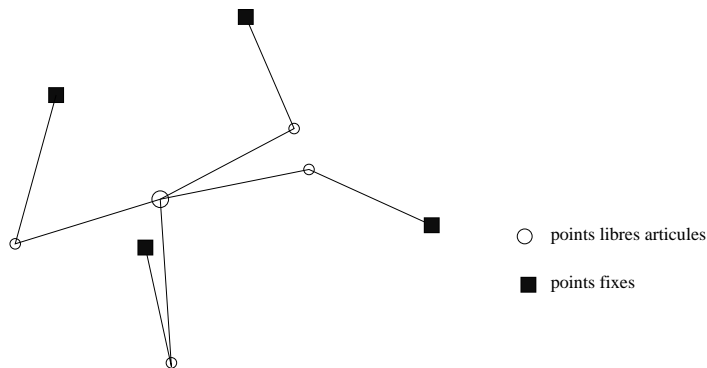


FIG. 1 – Une araignée à 4 pattes.

questions posées plus haut pour une araignée très symétrique). Les araignées sont des cas particuliers d’espaces des configurations de systèmes articulés, espaces étudiés dans de nombreux travaux citons notamment [2]. Dans cet article Kapovich et Millson montrent que toute variété compacte orientable peut être vue comme une composante connexe de l’espace des configurations d’un système articulé, donnant même un algorithme permettant d’associer, à une équation algébrique, un système articulé. Malgré cela, il serait intéressant de connaître explicitement une famille simple de systèmes articulés réalisant toutes les surfaces compactes orientables.

Les araignées forment une famille de systèmes articulés simple mais riche dont les espaces de configurations sont de dimension (réelle) 2. Le principal résultat de ce papier est :

**Théoreme 1.1** *Soit  $g$  un nombre entier et  $r$  le plus grand entier tel que  $2^r$  divise  $g - 1$ . Une surface compacte orientable lisse de genre  $g$  est difféomorphe à (une composante connexe de) l’espace des configurations d’une araignée si et seulement si  $\frac{1}{2^r}(g - 1) \leq 6r + 12$ .*

Ainsi toutes les surfaces compactes et orientables ne sont pas réalisables en tant que composantes connexes de l’espace des configurations d’une araignée. On voit que la surface la plus simple qui n’est pas réalisable est la sphère à 14 anses.

La suite du papier est consacrée à l’étude des espaces de configurations singuliers. Les singularités de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  se voient sur le projeté de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  sur  $\mathbb{C}$  obtenu par l’application « première coordonnée », c’est-à-dire sur l’ensemble des positions que peut prendre le corps de l’araignée. Nous nous sommes limité au cas où les singularités se projettent sur un ensemble discret de  $\mathbb{C}$ . En particulier nous détaillons une méthode permettant de décrire complètement  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  lorsque son lieu singulier se projette sur un point de  $\mathbb{C}$ .

Je remercie Charles Boubel pour son idée d’utiliser la sphère  $\mathbf{S}^2$  lors de la preuve de la proposition 4.4. Il m’a permis de raccourcir considérablement la preuve.

## 2 Premières propriétés.

On désigne par  $\Pi$  la projection de  $\mathbb{C}^{n+1}$  dans  $\mathbb{C}$  qui à  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$  associe  $z_0$ ,  $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$  est l’ensemble des points du plan où le corps de l’araignée peut se rendre. On va étudier  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  via son image par  $\Pi$ .

Soient  $r_i = |L_i - l_i|$ ,  $R_i = l_i + L_i$  et  $A_i$  la couronne fermée centrée en  $\omega_i$  de petit rayon  $r_i$  (éventuellement nul) et de grand rayon  $R_i$  (c’est-à-dire  $A_i = \overline{D}(\omega_i, R_i) \setminus D(\omega_i, r_i)$ ). Il est facile de voir que  $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) = \bigcap_{i=1}^n A_i$ . On désignera par  $\Gamma_i$  le grand cercle bordant  $A_i$  et par  $\gamma_i$  le petit cercle bordant  $A_i$ .

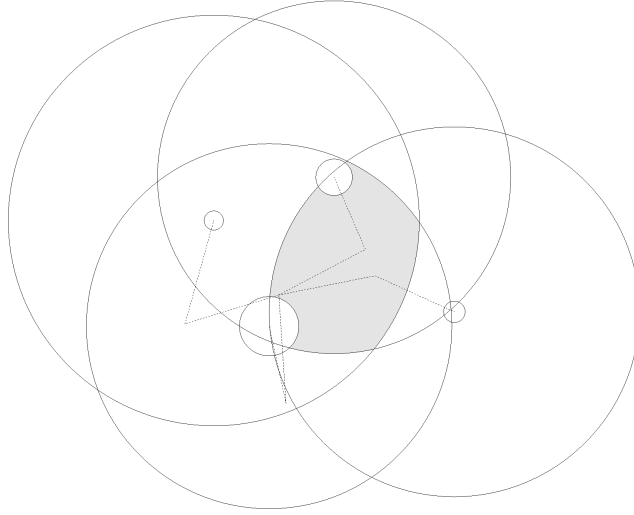


FIG. 2 –  $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}})$  lorsqu'on  $\mathcal{A}$  est l'araignée de la figure 1.

**Définition 2.1** Soit  $U$  une composante connexe de  $\Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) = \bigcap_{i=1}^n A_i$ . On définit  $\partial U$ , le bord de  $U$ , par  $\partial U = \bigcup_{i=1}^n (U \cap \partial A_i)$ . On appelle côtés de  $\partial U$  les arcs de cercles (de longueur possiblement nulle) formant le bord de  $U$  (ie les composantes connexes des  $U \cap \Gamma_i$  et des  $U \cap \gamma_i$ ). On appelle sommets de  $\partial U$  les points appartenant à l'intersection de deux côtés de  $\partial U$ .

On dira qu'un sommet  $s$  de  $\partial U$  est un point de tangence (resp. un point triple, resp. un point spécial) si tous les côtés se coupant en  $s$  sont tangents deux à deux en  $s$  (resp. si  $s$  appartient à au moins trois côtés non tous tangents, resp. si  $s$  appartient à au moins deux côtés dont l'un est réduit à un point).

On dira qu'un sommet  $s$  est un point singulier s'il est un point de tangence ou un point triple ou un point spécial.

Les cercles considérés pouvant être de rayon nul, les côtés peuvent être réduit à un point, ce point pouvant aussi être considéré comme un sommet (on a alors un point spécial). Lorsqu'il existe une composante connexe du bord de  $U$  réduite à un cercle-point,  $\partial U$  n'est pas le bord topologique.

**Définition 2.2** On dira que la patte  $i$ , c'est-à-dire le triplet  $(\omega_i, z_i, z_0)$ , est tendue, (totalement) repliée, tournée vers la gauche ou tournée vers la droite selon que l'argument de  $\frac{z_0 - z_i}{z_i - \omega_i}$  appartienne à  $\{\pi\}, \{0\}, ]0, \pi[$  ou  $]-\pi, 0[$ .

L'araignée  $\mathcal{A}$  en position  $x \in \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  a une patte tendue ou repliée si et seulement si  $\Pi(x) \in \partial U$ . Plus précisément sa  $i^{\text{ème}}$  patte est tendue (resp. repliée) si et seulement si  $\Pi(x)$  appartient au cercle  $\Gamma_i$  (resp.  $\gamma_i$ ).

**Remarque 2.3** Si l'on se donne  $\Pi(x)$  (c'est-à-dire la position du corps) et si  $\Pi(x) \notin \partial A_i$ , on voit, par un argument de géométrie élémentaire, que  $z_i$  peut prendre exactement deux valeurs, l'une correspondant à une patte tournée vers la gauche, l'autre à une patte tournée vers la droite. Si  $\Pi(x) \in \gamma_i$  et si  $r_i \neq 0$  ou si  $\Pi(x) \in \Gamma_i$  alors il n'y a plus qu'une valeur de  $z_i$  possible. Enfin si  $\Pi(x) = \omega_i$  (donc  $r_i = 0$ ) alors  $z_i$  peut être n'importe quel point du cercle de centre  $\omega_i$  et de rayon  $l_i$ .

Si  $y \in \Pi(\mathcal{C}_{\mathcal{A}}) \setminus \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  et si  $y$  appartient à  $l \geq 0$  côtés de  $\partial \mathcal{C}_{\mathcal{A}}$  alors  $\Pi^{-1}(y)$  contient  $2^{n-l}$  éléments.

**Nota Bene.** Dans la suite on indexera souvent par des vecteurs de  $\mathbb{Z}_2^n$  ou d'espaces vectoriels quotients de cet espace. On désigne par  $e_1, \dots, e_n$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{Z}_2^n$ . Si  $x \in \mathcal{C}_A$  correspond à une position où  $\mathcal{A}$  n'a aucune jambe tendue ni repliée on peut associer à  $x$  le vecteur  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ , déterminé par  $u_i = 1$  si et seulement si la  $i^{\text{ème}}$  patte de  $\mathcal{A}$  est tournée vers la gauche. De la même façon on indexe les parties connexes de  $\mathcal{C}_A$  sur lesquelles l'araignée n'a aucune jambe tendue ni repliée. On raffine ce procédé : si  $L$  est une partie de  $\mathcal{C}_A$  sur laquelle seules les pattes  $i_1, \dots, i_m$  se retournent (c'est-à-dire sont parfois tournées vers la gauche et parfois vers la droite) alors on attribuera à  $L$  un vecteur de  $\mathbb{Z}_2^n / \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$ . Dans ce qui suit tout indice appartenant à  $\mathbb{Z}_2^n$  ou à un quotient se rapportera à la position des pattes.

On peut aussi remarquer que si l'on se donne deux points proches dans  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  alors on peut toujours trouver deux points proches dans  $\mathcal{C}_A$  se projetant sur eux. On en déduit que l'image d'une composante connexe de  $\mathcal{C}_A$  par  $\Pi$  est égale à une composante connexe de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$ .

**Proposition 2.4** *Soit  $\mathcal{A}$  une araignée à  $n$  pattes et soient  $A_1, \dots, A_n$  les  $n$  couronnes lui étant associées. On désigne par  $U_1, \dots, U_l$  les composantes connexes de  $\Pi(\mathcal{C}_A) = \bigcap_{i=1}^n A_i$ . Soit  $O_j = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \partial A_i \cap U_j = \emptyset\}$ .*

*Pour tout  $j \in \{1, \dots, l\}$ ,  $\Pi^{-1}(U_j)$  a  $2^{o_j}$  composantes connexes deux à deux homéomorphes, où  $o_j = \text{card} O_j$ . Ainsi  $\mathcal{C}_A$  a  $\sum_{j=1}^l 2^{o_j}$  composantes connexes.*

*De plus si  $o_j > 0$  et si  $i \in O_j$ , on désigne par  $\mathcal{A}'$  l'araignée obtenue en enlevant la patte  $(\omega_i, z_i, z_0)$  à  $\mathcal{A}$ . Alors chaque composante connexe de  $\mathcal{C}_A$  se projetant sur  $U_j$  est homéomorphe à une composante connexe de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}'}$ .*

**Preuve.** À chacune des  $2^n$  composantes connexes de  $\Pi^{-1}(U_j \setminus \partial U_j)$  on associe  $v \in \mathbb{Z}_2^n$  comme indiqué ci-dessus. La composante d'indice  $v$  et celle d'indice  $v'$  peuvent être reliées si et seulement pour tout  $i \in O_j$  les  $i^{\text{èmes}}$  coordonnées de  $v$  et  $v'$  sont égales. Ce qui donne le premier résultat.

Si  $o_j > 0$ , il existe deux composantes connexes distinctes  $K$  et  $K'$  se projetant sur  $U_j$ . Cela signifie qu'il existe un certain nombre  $e_j \leq o_j$  de pattes de  $\mathcal{A}$  qui pour tout  $x \in K$  sont toujours tournées vers la gauche (resp. vers la droite) et pour tout  $x \in K'$  sont toujours tournées vers la droite (resp. vers la gauche). À une configuration  $x \in K$ , on peut associer la configuration  $y \in K'$  obtenue en retournant ces  $e_j$  pattes et en ne touchant pas aux autres pattes. On définit ainsi un difféomorphisme d'un voisinage de  $K$  dans un voisinage de  $K'$  envoyant  $K$  sur  $K'$ .

Soit  $i \in O_j \neq \emptyset$ . Soit  $\mathcal{A}'$  l'araignée obtenue en enlevant la  $i^{\text{ème}}$  patte de  $\mathcal{A}$ . L'application de  $\mathbb{C}^{n+1}$  dans  $\mathbb{C}^n$  qui à  $(z_0, z_1, \dots, z_n)$  associe  $(z_0, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_n)$  envoie une composante connexe se projetant sur  $U_j$  dans une composante connexe de  $\mathcal{C}_{\mathcal{A}'}$ . Comme  $i \in O_j$ , la remarque 2.3 nous dit que l'on peut calculer  $z_i$  en fonction de  $z_0$  et trouver une application réciproque lisse.  $\square$

La proposition nous dit donc que, si l'on s'intéresse à la topologie des composantes connexes de  $\mathcal{C}_A$ , on peut supposer (en reprenant les notations de la proposition) que pour tout  $j \in \{1, \dots, l\}$ , on a  $o_j = 0$ . Ce qui nous amène à la définition suivante :

**Définition 2.5** *Soit  $\mathcal{A}$  une araignée et  $K$  une composante connexe de  $\mathcal{C}_A$ . On dira que la patte  $i$  est utile à  $K$  si  $\gamma_i$  ou  $\Gamma_i$  rencontre  $\partial \Pi(K)$ .*

Ainsi la proposition 2.4 dit notamment que toutes les pattes de  $\mathcal{A}$  sont utiles à  $K$  si et seulement si  $\Pi^{-1}(\Pi(K)) = K$ .

La première question concernant les composantes connexes de  $\mathcal{C}_A$  est de savoir s'il s'agit ou non de sous-variétés lisses.

**Proposition 2.6** *Soit  $K$  une composante connexe de  $\mathcal{C}_A$  non réduite à un point.  $K$  est lisse au voisinage de  $x$  si et seulement si  $\Pi(x)$  n'est pas un point singulier (ce qui justifie a posteriori la terminologie).*

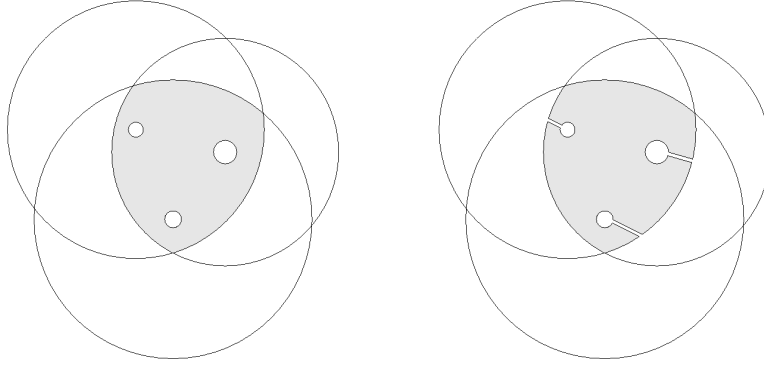


FIG. 3 – Une brique  $B_v$  et sa modification simplement connexe.

**Preuve.** Dans [4] les auteurs montrent que si  $\Pi(x)$  n'est pas un point singulier alors l'application définissant  $\mathcal{C}_A$  est une submersion, ce qui montre une implication (on peut aussi construire à la main des coordonnées au voisinage de  $x$ ). L'implication réciproque est une conséquence de la section 6.  $\square$

### 3 Topologie des composantes lisses.

**Proposition 3.1** *Soit  $K$  une composante connexe lisse de  $\mathcal{C}_A$ . On note  $p$  le nombre de sommets de  $\partial\Pi(K)$ ,  $k$  son nombre de composantes connexes et  $n$  le nombre de pattes de  $\mathcal{A}$  utiles à  $K$ . Alors  $K$  est difféomorphe à une surface compacte connexe orientable de genre  $g = 1 + 2^{n-3}(p + 4k - 8)$ .*

**Preuve.** Il est évident que  $K$  est compacte et orientable (car  $K$  est globalement définie par une submersion). Pour simplifier les notations on suppose que  $n$  correspond au nombre de pattes de  $\mathcal{A}$ . L'application  $\Pi$  étant une submersion (au voisinage de  $K$ ) à fibres compactes, une petite perturbation des longueurs des pattes de l'araignée ne change pas la topologie de  $K$ . On peut donc supposer que  $\partial\Pi(K)$  ne contient pas de cercles-points. On pose  $U = \Pi(K)$ . On a vu que  $\Pi^{-1}(U \setminus \partial U)$  a  $2^n$  composantes connexes. On les note  $B_v$  avec  $v \in \mathbb{Z}_2^n$ ,  $v$  indiquant dans quel sens est tourné chaque patte. On note  $\overline{B}_v$  l'adhérence de  $B_v$ . La restriction de  $\Pi$  à  $\overline{B}_v$  est un homéomorphisme sur  $U$  (on utilise la remarque 2.3 pour définir la réciproque). On définit les sommets et les côtés de  $B_v$  comme étant les sous-ensembles de  $\overline{B}_v$  qui se projettent sur les sommets et les côtés du bord de  $U$ .

On constate aussi que  $\bigcup_{v \in \mathbb{Z}_2^n} \overline{B}_v = K$  et que si  $\overline{B}_v \cap \overline{B}_w \neq \emptyset$  alors cette intersection est égale à une réunion de côtés ou de sommets de  $\partial B_v$ . Autrement dit on a affaire à un pavage de  $K$ .

La proposition 2.6 nous dit que le long d'un côté de  $B_v$  une seule patte est tendue ou repliée et qu'en un sommet de  $B_v$  exactement deux pattes sont tendues ou repliées. Ainsi deux pavés ont un côté (respectivement un sommet) en commun si et seulement si leurs indices ont  $n - 1$  (resp.  $n - 2$ ) coordonnées identiques. On voit donc que les sommets des pavés sont recollés 4 à 4 afin d'obtenir les sommets du pavage (il part donc quatre arêtes de chaque sommet du pavage).

Les  $2^n$  pavés sont deux à deux difféomorphes mais ne sont pas, a priori, simplement connexes (i.e. n'ont pas qu'une seule composante de bord). Aussi, lorsque  $k$ , le nombre de composantes connexes de bord, est supérieur à 1, on coupe chaque  $B_v$  de façon à relier ses composantes connexes de bord entre elles (voir figure 3). Le pavé obtenu a donc  $4(k - 1)$  nouveaux sommets et qu'une seule composante de bord. Ainsi, le nouveau pavé a autant de sommets que de côtés ( $p + 4(k - 1)$ ). De plus, ces nouveaux sommets sont aussi recollés 4 à 4. On peut donc exprimer le nombre d'arêtes du pavage et le nombre de sommets du pavage en fonction du nombre de pavés et du nombre de sommets d'un pavé. Le calcul de la caractéristique d'Euler de  $K$  est donc facile :

$$\begin{aligned}
\chi(K) &= 2^n - 2^{n-1}(p + 4(k-1)) + 2^{n-2}(p + 4(k-1)) \\
&= 2^{n-2}(p + 4(k-1) - (2p + 8(k-1)) + 4) \\
&= -2^{n-2}(p + 4k - 8).
\end{aligned}$$

Donc  $K$  est du genre annoncé.  $\square$

La proposition 3.1 dit en fait que pour déterminer la topologie d'une composante connexe lisses  $K$  de  $\mathcal{C}_A$ , il suffit d'estimer le nombre de sommets et de composantes connexes du bord de  $\Pi(K)$ . C'est ce qui est fait à la section suivante. On déduit directement des propositions 4.4, qui sera démontrée à la section 4, et 3.1 le théorème suivant :

**Théorème 3.2** *Une surface compacte orientable lisse de genre  $g$  est difféomorphe à (une composante connexe de) l'espace des configurations d'une araignée si et seulement s'il existe  $(k, p, n) \in \mathbb{N}^3$  tels que  $1 \leq k \leq n+1$ ,  $n-k+1 \leq p \leq 4n-2k$ ,  $p \neq 1$ , si  $n = 2$   $p$  est pair et  $g = 1 + 2^{n-3}(p+4k-8)$ .*

Qui a pour corollaires :

**Corollaire 3.3** *Si  $\mathcal{A}$  a  $n$  pattes, si  $K$  est une composante connexe lisse de  $\mathcal{C}_A$  et si toutes les pattes de  $\mathcal{A}$  sont utiles à  $K$  alors le genre de  $K$  est compris entre  $1 + 2^{n-3}(n-4)$  et  $1 + 2^{n-3}(6n-6)$ .*

**Corollaire 3.4** *Soit  $g$  un entier et  $r$  plus grand entier tel que  $2^r$  divise  $g-1$ . La surface compacte orientable de genre  $g$  est réalisable si et seulement si  $(g-1)/2^r \leq 6r+12$ .*

**Preuve.** On commence par remarquer que, à  $n$  fixé,  $n \neq 2$ , lorsque  $p$  et  $k$  prennent toutes les valeurs permises alors  $(p+4k-8)$  prend toutes les valeurs comprises entre  $n-4$  et  $6n-6$ . Ce qui montre le corollaire 3.3 ainsi que le « seulement si » du corollaire 3.4. Il nous reste à montrer que : si  $(g-1)/2^r \leq 6r+12$ , alors la surface compacte orientable de genre  $g$  est réalisable.

Si  $r-1 \leq (g-1)/2^r \leq 6r+12$ , le théorème 3.2 nous dit qu'il existe une araignée à  $r+3$  pattes dont l'espace des configurations est une surface compacte orientable de genre  $g$ .

Si  $1 \leq (g-1)/2^r < r-1$ , on remarque que si  $(g-1)/2^j < j-1$ , alors  $(g-1)/2^{j-1} \leq 6(j-1)+12$  donc il existe  $s \leq r-2$  tel que  $r-s-1 \leq (g-1)/2^{r-s} < 6(r-s)+12$  et donc il existe une araignée à  $r-s+3$  bras donc l'espace des configurations est une surface compacte orientable de genre  $g$ .  $\square$

Le théorème ne dit rien sur le nombre de composantes connexes, ni sur la somme des genres des composantes connexes. On se contentera juste de donner un exemple d'araignée à cinq pattes dont l'espace des configurations a un grand nombre de composantes connexes. Soit  $\mathcal{A}$  l'araignée donnée par la figure 4. Les composantes connexes se projetant sur les triangles grisés sont des sphères d'après la proposition 3.1. L'image réciproque de chacun de ces triangles a 4 composantes connexes d'après la proposition 2.4. Ce qui fait déjà 16 composantes connexes. L'image réciproque de chacun des quadrilatères grisés a deux composantes connexes et chacune d'elles est difféomorphe à un tore. L'image réciproque de chacun des pentagones est connexe et difféomorphe à une sphère à cinq anses. Ce qui donne 22 composantes connexes de trois types différents.

## 4 Description du bord d'une intersection finie de couronnes.

Si l'on se donne  $n$  couronnes dans le plan, leur intersection (en excluant les points singuliers) peut être assez compliquée à décrire. La situation avec 2 couronnes, bien qu'incomparablement plus simple, comporte déjà 14 cas (on laisse la vérification au lecteur, ces 14 cas sont représentés figure 5). La liste équivalente pour trois couronnes est déjà beaucoup plus longue. Toutefois ces listes contiennent plus d'information que nécessaire.

Pour étudier les problèmes d'intersection de couronnes, il est plus pratique de ramener le problème sur la sphère  $\mathbf{S}^2$  via une projection stéréographique.

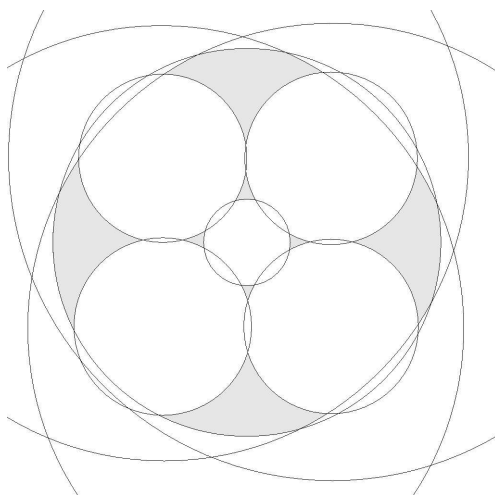


FIG. 4 – Araignée à cinq pattes telle que  $\mathcal{C}_A$  a 22 composantes connexes.

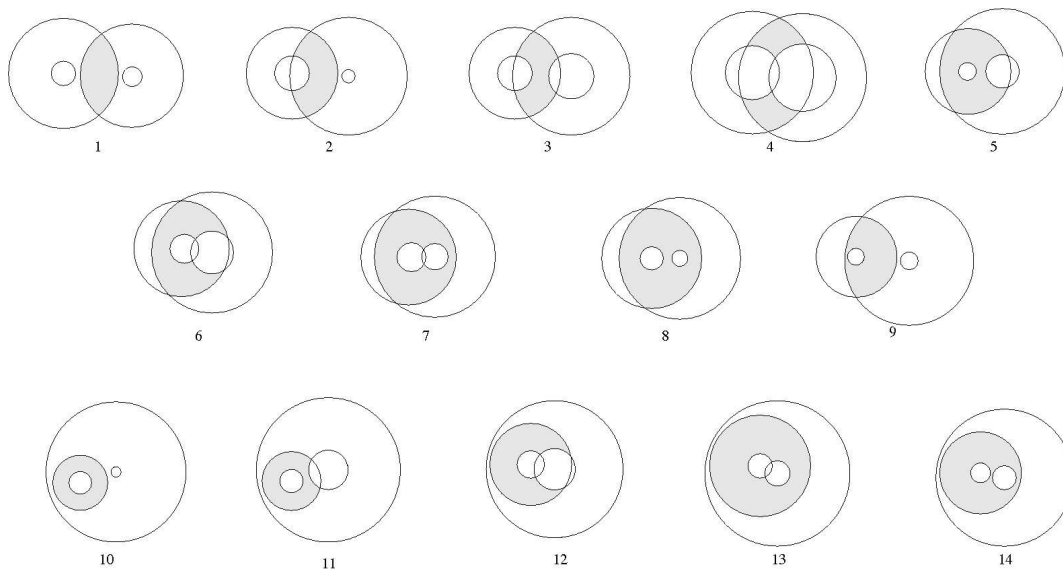


FIG. 5 – Les 14 positions relatives de deux couronnes non tangentes.

**Définition 4.1** Sur la sphère  $\mathbf{S}^2$ , appelons disque une des deux composantes connexes de  $\mathbb{S}^2$  privé d'un cercle.

On commence par montrer le résultat suivant :

**Proposition 4.2** Soient  $(D_i)_{i=1}^n$  des disques de  $\mathbf{S}^2$  et  $O$  une composante connexe de  $K = \cap_{i=1}^n D_i$ . La frontière  $\partial O$  de  $O$  est une union finie d'arcs de cercles juxtaposés en leurs extrémités, appelés sommets. On note  $p$  le nombre de sommets de  $\partial O$  et  $k$  le nombre de composantes connexes de  $\partial O$ . Alors  $p \leq 2(n - k)$ .

Tout repose sur le lemme suivant.

**Lemme 4.3** Il existe un  $i \leq n$  tel que  $(\partial O) \cap D_i$  est connexe.

**Preuve du lemme.** Soit  $D_{i_0}$  l'un des disques dont le bord rencontre celui de  $O$ . Si  $\gamma_{i_0}$  (on note  $\gamma_i$  le bord de  $D_i$ ) ne contient pas de sommets alors  $(\partial O) \cap D_{i_0} = \gamma_{i_0}$  et le lemme est vérifié. Supposons donc qu'il existe un sommet de  $O$  sur  $D_{i_0}$ , et notons le  $s_0$ . Ce sommet est sur deux arcs de cercle contenus dans le bord de  $O$ . On va longer  $O$  en partant de  $s_0$  en gardant  $O$  à notre droite (i.e. on oriente le bord de  $O$ ). Si on suit l'arc  $a_1$  partant de  $s_0$ , on obtient un sommet  $s_1$  dont part un arc  $a_2$ . En itérant, on obtient une suite (périodique) de sommets  $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et d'arcs de cercles  $(a_i)_i$ . On définit une application  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$  par  $s_i \in D_{\sigma(i)} \cap D_{\sigma(i+1)}$  (on a  $a_i \subset D_{\sigma(i)}$ ). On trouve facilement deux entiers  $d$  et  $f$  tels que  $f > d$ , que  $\sigma(d) = \sigma(f + 1)$  et que la restriction de  $\sigma$  à  $\{d, \dots, f\}$  est injective.

Soit  $\lambda$  la courbe (fermée) donnée par la concaténation des arcs  $a_{d+1}, \dots, a_f$  et de  $\alpha$ , l'arc du cercle  $\gamma_{\sigma(d)}$  partant de  $s_d$  et arrivant à  $s_f$  (on suit donc  $\gamma_{\sigma(d)}$  de façon à quitter  $\partial O$ ). On note  $\Lambda$  le domaine ouvert délimité par  $\lambda$  (voir figure 6) et contenu dans  $D_{\sigma(d)}$ . Comme  $O$  est connexe, on voit que  $O \subset D_{\sigma(d)} \setminus \Lambda$  (et donc que  $\alpha \cap \partial O = \{s_d, s_f\}$ ).

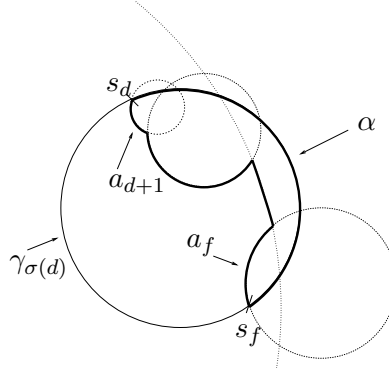


FIG. 6 – Le domaine délimité par  $\lambda$ .

Soit  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $d < i < f + 1$ . Supposons que le cercle  $\gamma_{\sigma(i)}$  rencontre  $\partial O \setminus a_i$ . Comme  $O$  est contenu dans  $D_{\sigma(d)} \setminus \Lambda$ , il coupe alors  $\gamma_{\sigma(d)} \setminus \alpha$ . Deux cas se présentent : soit  $s_{i-1}$  et  $s_i$  appartiennent à  $\alpha$  ; soit  $\gamma_{\sigma(i)} \cap \text{int}(\Lambda) \neq \emptyset$  mais alors  $\gamma_{\sigma(i)}$  doit sortir de  $\Lambda$ , forcément en coupant  $\alpha$  en deux points. On obtient dans les deux cas trois points d'intersections entre  $\gamma_{\sigma(i)}$  et  $\gamma_{\sigma(d)}$ . C'est absurde, donc  $\gamma_{\sigma(i)} \cap \partial O = a_i$  et donc  $\gamma_{\sigma(i)} \cap \partial O$  est connexe.  $\square$

**Preuve prop. 4.2** On suppose  $K \neq \emptyset$ . On procède par récurrence. La proposition est évidente si  $n = 2$ . On la suppose vraie au rang  $n - 1$ . Soit  $p_n$  le nombre de sommets de  $\partial O$  et  $k_n$  son nombre de composantes connexes. D'après le lemme et quitte à permuter les indices,  $(\partial O) \cap D_n$  est connexe. Quitte à repermurer les indices, il existe  $m$  tel que  $i \leq m - 1$  si et seulement si  $\partial D_i \cap D_n = \emptyset$ . Ce



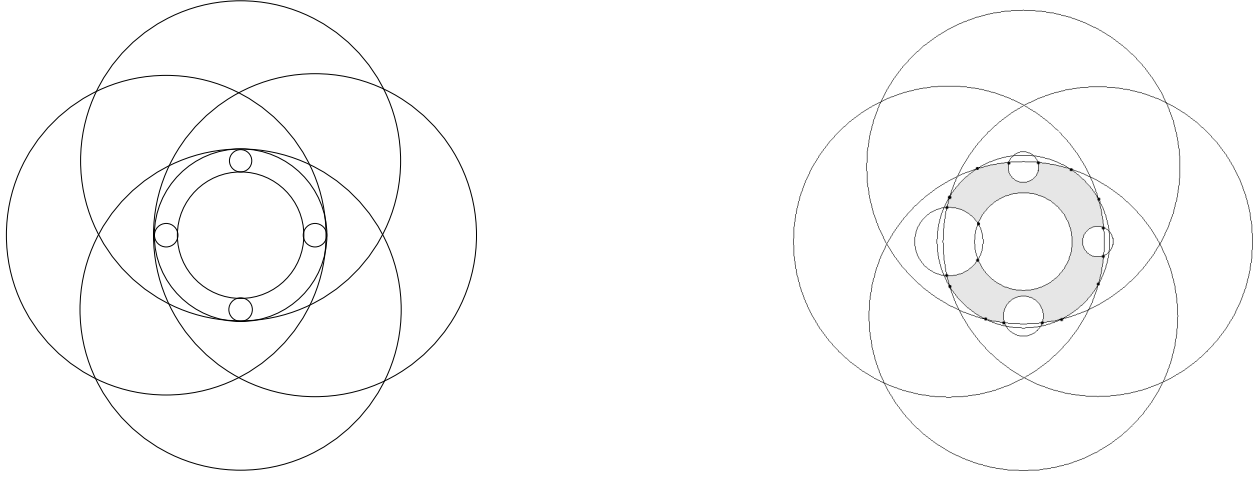


FIG. 7 – Configuration de départ avec 5 couronnes et sa perturbation donnant  $n = 5$ ,  $k = 1$ ,  $p = 18$ .

qui implique notamment que  $\cap_{i=m}^n D_i = \cap_{i=1}^n D_i$ . Soit  $O'$  la composante connexe de  $K' = \cap_{i=m}^{n-1} D_i$  contenant  $O$ ,  $s_{n-1}$  le nombre de sommets de  $\partial O'$  et  $k_{n-1}$  son nombre de composantes de bord. L'hypothèse de récurrence s'écrit  $s_{n-1} \leq 2(n-1-k_{n-1})$

Deux cas sont possibles :

- i)  $(\partial O) \cap D_n = \partial D_n$
- ii)  $(\partial O) \cap D_n$  a deux extrémités  $e_0$  et  $e_1$ .

Dans le cas (i), on a  $\partial O' \subset D_n$  et donc  $s_{n-1} = s_n$  et  $k_n = k_{n-1} + 1$ . Dans le cas (ii),  $s_n \leq s_{n-1} + 2$  et, comme toutes les composantes connexes de  $\partial O'$  rencontre  $D_n$ ,  $k_n = k_{n-1}$ . Dans tous les cas on a  $s_n \leq 2(n - k_n)$ .  $\square$

On en déduit le résultat qui nous intéresse :

**Proposition 4.4** Soient  $n \geq 2$  et  $A_1, \dots, A_n$  des couronnes de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $U$  une composante connexe de  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  telle que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\partial A_i \cap \partial U \neq \emptyset$  et soient  $k$  le nombre de composantes connexes du bord de  $U$  et  $p$  le nombre de sommets de  $\partial U$ .

Alors  $1 \leq k \leq n + 1$ ,  $n - k + 1 \leq p \leq 4n - 2k$ . De plus toutes les combinaisons sont réalisables sans points singuliers (même si on impose à  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  d'être connexe), sauf  $p = 1$  et  $p$  impair lorsque  $n = 2$ .

**Preuve.** Par projection stéréographique, on identifie  $\mathbb{R}^2$  à  $\mathbf{S}^2$  privé d'un point. Les disques du plan mais aussi les complémentaires des disques du plan sont envoyés sur des disques de  $\mathbf{S}^2$ . Une intersection de couronnes est donc envoyée sur une intersection de disques de la sphère. La proposition 4.2 donne donc la première partie de l'énoncé

Il reste plus qu'à montrer que lorsque  $n \geq 3$  toutes les combinaisons sont réalisables. Commençons par les configurations maximales, c'est-à-dire celles pour lesquelles  $p = 4n - 2k$ . On identifie le plan à  $\mathbb{C}$ , on place un point  $c_n$  en 0 et  $n - 1$  points  $c_1, \dots, c_{n-1}$  en les racines  $(n - 1)^{\text{ème}}$  de l'unité. On trace des disques disjoints centrés en chacun des  $c_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  de même rayon. On rajoute les deux disques centrés en  $c_n$  et tangents à tous ces petits disques, que l'on note  $D_n$  et  $d_n$ . Enfin on trace les disques  $D_i$  centrés en chacun des  $c_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$  tangents à  $D_n$  (voir figure 7, pour le cas  $n = 5$ ).

On va maintenant perturber cette configuration pour obtenir toutes les configurations maximales. Pour cela on va simplement faire des variations aussi petites que l'on veut sur les rayons des disques,



FIG. 8 – Perturbations donnant  $n = 5$ ,  $k = 6$ ,  $p = 8$  et  $n = 5$ ,  $k = 1$ ,  $p = 17$ .

en faisant attention à la parité de  $n$ . Commençons par  $k = 1$  et donc  $p = 4n - 2$ . Pour l'obtenir, on commence par dilater les  $d_i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  de façon à ce qu'ils ne soient plus tangents à  $D_n$  (cette étape n'est utile que si  $n$  est pair), et on dilate un peu plus  $d_1$ . Puis on rétrécit  $d_n$  de telle sorte qu'il n'intersecte plus que  $d_1$ . Enfin pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  on rétrécit tous les  $D_i$  si  $n$  est impair on rétrécit juste assez pour que les points d'intersection du bord de  $D_i$  et du bord de  $D_n$  sortent de  $d_i$  mais suffisamment peu pour que tous les  $c_i$  appartiennent à  $\bigcap_{i=1}^n D_i$  (utile pour la suite). On obtient la configuration de droite de la figure 7 (toujours pour  $n = 5$ ). Ce qui donne bien la configuration souhaitée. Pour faire varier  $k$  il suffit de diminuer un par un les rayons des disques  $d_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  jusqu'à ce que  $d_i \subset \bigcap_{i=1}^n D_i$ . On note les configurations obtenues  $M_{n,k}$  (la figure 8 représente  $M(5,6)$ ). On construit une deuxième famille d'exemples, qui réalise  $p = 4n - 2k - 1$  pour  $n \geq 3$ . Partant de la configuration  $M_{n,k}$ , on déplace  $c_1$  de telle sorte à ne changer ni  $p$  ni  $k$  mais à ne plus avoir  $c_1$  sur la médiatrice de  $[c_{n/2}, c_{n/2+1}]$  si  $n$  est pair et à ne plus avoir  $c_1, c_n, c_{(n-1)/2}$  alignés si  $n$  est impair. On dilate alors  $d_1$  jusqu'à ce qu'il absorbe un sommet donnant ainsi la configuration voulue (voir figure 8).

Par ailleurs, on construit facilement les 7 combinaisons possibles avec  $n = 2$  (voir figure 5, où on voit de plus que presque chaque combinaison a plusieurs réalisations).

Enfin donnons deux procédés pour produire de nouvelles configurations. Si on a une configuration  $U$  avec  $n$  couronnes,  $p$  sommets et  $k$  composantes connexes de bord, il suffit de centrer une nouvelle couronne en un des côtés de  $U$  dont le petit rayon est vraiment petit et dont le grand rayon est vraiment grand pour avoir une configuration  $U'$  avec  $n+1$  couronnes,  $p+2$  sommets et  $k$  composantes connexes de bord. La même construction avec  $A_n$  centrée en un sommet donne une configuration  $U''$  avec  $n+1$  couronnes,  $p+1$  sommets et  $k$  composantes connexes de bord.

Une simple récurrence nous assure maintenant que toutes les configurations sont réalisables. Ce qui termine la preuve de la proposition.  $\square$

## 5 Les araignées à deux pattes

Il est facile de voir que la figure 5 donne bien tous les cas possibles d'intersections de deux couronnes (si on exclut les cas vides ou réduit à un point et les cas singuliers au sens de la définition 2.1). On peut remarquer, comme l'a déjà fait June O'Hara dans [3], que les espaces des configurations des araignées à deux pattes coïncide avec les espaces de configurations des pentagones dont les

longueurs des côtés et un sommet sont fixés. La proposition 3.1 nous permet donc de retrouver le théorème Kapovich et Millson (cf. [1]) décrivant cet espace, à savoir :

**Théoreme 5.1** *Si l'espace des configurations d'un pentagone (ie d'une araignée à deux pattes) est lisse et connexe alors il est difféomorphe à une surface compacte orientable de genre 0 (cas 1 de la figure 5), 1 (cas 2 et 12), 2 (cas 3, 5, 6,9, 11 et 13), 3 (cas 7 et 14) ou 4 (cas 8). S'il est lisse mais pas connexe il est difféomorphe à deux copies d'une surface de genre 1 (cas 4 et 10).*

La donnée d'une araignée à deux pattes, revient en fait à la donnée de 5 nombres positifs :  $l_1, l_2, L_1, L_2$  et  $|\omega_1 - \omega_2|$ . Pour avoir un énoncé vraiment équivalent à celui de Kapovich et Millson, il faudrait encore expliciter le lien entre ces cinq nombres et les 14 cas de la figure 5. Il s'agit clairement d'inégalité faciles à obtenir, mais fastidieuses à écrire. On paye ici le fait d'avoir privilégié un côté du pentagone lorsque l'on a fixé les pieds de l'araignée.

## 6 Singularités

L'espace des configurations peut avoir un certain nombre de singularités, celles-ci donnent sur  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  ce qu'on a appelé des points singuliers. On se propose maintenant de décrire topologiquement les images réciproques par  $\Pi$  d'un petit voisinage d'un point singulier isolé.

### 6.1 Points singuliers non isolés

Les points singuliers non isolés apparaissent lorsque qu'il existe  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tels que  $\omega_i = \omega_j$  et  $L_i + l_i = L_j + l_j$  ou  $|L_i - l_i| = |L_j - l_j| \neq 0$  ou  $L_i + l_i = |L_j - l_j|$ . En l'absence de points spéciaux, le pavage défini dans le cas régulier est toujours bien défini. La brique  $B$  possède un côté le long duquel  $l > 1$  pattes sont tendues. Cela entraîne que  $2^l$  briques seront recollées le long de l'arête. On voit donc l'allure des singularités de  $\mathcal{C}_A$ . Cependant lorsque l'on rajoute des points spéciaux la présence de telles courbes multiplie le nombre de cas à considérer et rend l'exposé fastidieux. Nous supposons donc dans la suite que les points singuliers de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  sont isolés.

### 6.2 Points singuliers isolés, pas de points spéciaux.

Dans [4], les auteurs ont regardé les singularités les plus simples, ils montrent :

**Proposition 6.1** *Soit  $x \in \mathcal{C}_A$  tel que  $\Pi(x)$  est un point triple ou de tangence. Soit  $l$  le nombre de pattes tendues ou repliées en  $x$ . Alors  $\Pi(x)$  possède un voisinage dans le plan  $D$  tel que  $\Pi^{-1}(D)$  est homéomorphe à  $2^{n-l}$  copies disjointes d'un bouquet de  $2^{l-1}$  disques (ie  $2^{l-1}$  disques dont les centres sont identifiés deux à deux) si  $\Pi(x)$  est un point de tangence ou d'un bouquet de  $2^{l-2}$  disques sinon.*

Nous allons faire une remarque supplémentaire. Commençons par attribuer les numéros  $1, \dots, l$  aux pattes tendues ou repliées en  $\Pi(x)$ . Distinguons ensuite trois cas. Premier cas, au voisinage de  $\Pi(x)$ , le bord de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  est donné par un cercle (on a alors un point de tangence et  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  est inclus dans le plus petit disque ou dans le complémentaire du plus grand disque). Deuxième cas, au voisinage de  $\Pi(x)$ , le bord de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  est donné par deux cercles sécants (on a un point triple). Troisième cas, au voisinage de  $\Pi(x)$ , le bord de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  est donné par deux cercles tangents (on a alors un point de tangence et  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  est compris entre deux cercles).

Dans le premier cas, il existe une patte, disons la première, qui est tendue ou repliée sur le cercle du bord passant par  $\Pi(x)$ . Les images par  $\Pi$  des disques qui forment  $\Pi^{-1}(D)$  sont égales à  $\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D$  et donc intersectent ce cercle. Par contre, si on choisit  $D$  petit, ces images ne rencontrent aucun autre côté. Ainsi à chacun des disques de  $\Pi^{-1}(D)$  on peut associer un vecteur  $v$  dans  $\mathbb{Z}_2^n / \text{Vect}(e_1)$

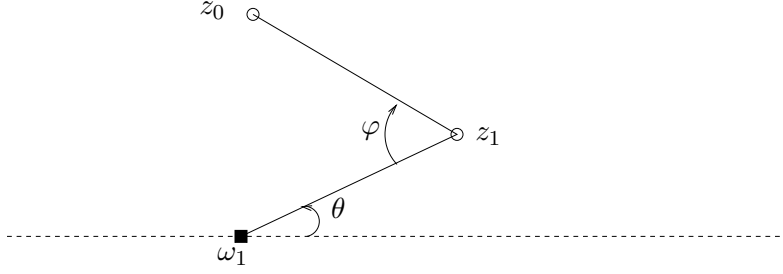


FIG. 9 – les angles  $\theta$  et  $\varphi$ .

donné par le sens dans lequel sont pliées les  $n - 1$  autres pattes. En fait il y a bijection entre les vecteurs de  $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1)$  et les disques de  $\Pi^{-1}(D)$ . On peut donc les désigner, sans ambiguïté,  $\Delta_v^1$ . Remarquons maintenant que deux disques  $\Delta_v^1$  et  $\Delta_{v'}^1$  appartiennent au même bouquet si et seulement si  $v = v' + w$  avec  $w \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_l)$ . Autrement dit on peut indexer les bouquets par les vecteurs de  $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_l)$  et deux disques appartiennent au même bouquet si et seulement si leurs indices se projettent sur le même indice de bouquet.

Dans le deuxième cas, on peut supposer, quitte à permuter les indices, que  $\partial\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$ . Tout marche ensuite de la même façon, en remplaçant  $\text{Vect}(e_1)$  par  $\text{Vect}(e_1, e_2)$ , on note  $\Delta_v^2$  les disques obtenus.

Dans le troisième, on peut faire la même construction mais il n'y a plus bijection entre les disques de  $\Pi^{-1}(D)$  et les vecteurs de  $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1, e_2)$ . À chaque position des  $n - 2$  dernière pattes correspond *deux* disques. C'est dû au fait que, dans ce cas,  $D \cap \Pi(\mathcal{C}_A)$  est lui même homéomorphe à un bouquet de deux disques. On note  $\Delta_v^3$  la réunion des *deux* disques ayant le même indice. La suite marche alors comme dans le premier cas.

### 6.3 Points spéciaux avec une unique patte centrée.

On suppose maintenant que  $\omega_1$  est le pied d'une unique patte centrée (i.e.  $l_1 = L_1$  et si  $\omega_j = \omega_1$  alors  $L_j \neq l_j$ ). Commençons par définir des coordonnées sur un voisinage de  $\Pi^{-1}(\omega_1)$ .

Soit  $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  donnés par la figure 9, on a donc  $e^{i\theta} = (z_1 - \omega_1)/l_1$  et, après un petit calcul,  $e^{i\varphi} = \frac{1}{l_1}(\omega_1 - z_0)e^{-i\theta} + 1$ .

Soit  $\rho \in ]0, \pi]$ . On remarque que lorsque  $\theta$  parcourt  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et  $\varphi$  parcourt  $[-\rho, \rho]$  le corps  $z_0$  parcourt le disque de centre  $\omega_1$  et de rayon  $2l_1 \sin(\rho/2)$  que l'on notera  $D_\rho$ . On se donne dorénavant  $\rho \in ]0, \pi]$  tel que  $\omega_1$  soit le seul sommet de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  contenu dans  $D_\rho$ .

Il est clair que la donnée de  $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et  $\varphi \in [-\rho, \rho]$  détermine  $z_0$ , la position du corps de l'araignée, et  $z_1$ . Or  $z_0$  appartient à  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  il est donc naturel de définir l'ensemble  $T$  suivant :

$$T = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-\rho, \rho] \mid z_0 = \omega_1 + l_1 e^{i\theta}(1 - e^{i\varphi}) \in \Pi(\mathcal{C}_A) \cap D_\rho\}.$$

Posons  $f(\theta, \varphi) = \omega_1 + l_1 e^{i\theta}(1 - e^{i\varphi})$ , ce qui nous permet d'écrire  $T = f^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D_\rho)$ . Ainsi, pour peu que l'on décide dans quel sens sont pliées les  $n - 1$  autres pattes, un point de  $T$  détermine un point de  $\mathcal{C}_A$  (une patte tendue ou repliée étant considérée comme pliée dans les deux sens). On définit ainsi  $2^{n-1}$  applications  $f_u$  ( $u \in \mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1)$ ) de  $T$  dans  $\mathcal{C}_A$ . Ces applications possèdent des inverses évidents, il s'agit donc d'homéomorphismes sur leurs images. Comme la réunion des  $f_u(T)$  est égale à  $\Pi^{-1}(D_\rho)$ , on obtient donc que  $\Pi^{-1}(D_\rho)$  est homéomorphe à  $2^{k-1}$  copies de  $T$  recollées entre elles. Il nous faut donc faire deux choses : déterminer à quoi ressemble  $T$  et comprendre comment se recollent entre elles ces différentes copies.

### 6.3.1 Description de $T$ .

Le domaine  $D_\rho \cap \Pi(\mathcal{C}_A)$  est délimité par des cercles (les côtés de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$ ) passant par  $\omega_1$  et par le cercle  $\{\varphi = \rho\}$ .

Soit  $\Gamma$  un cercle de centre  $\omega$  passant par  $\omega_1$ , et soit  $E = \{(\theta, \varphi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mid f(\theta, \varphi) \in \Gamma \cap D_\rho\}$ . Soit  $\alpha$  l'argument de  $\omega_1 - \omega$ ,  $R$  le rayon de  $C$  et  $D$  le disque délimité par  $\Gamma$ . Par un calcul direct, on voit que

$$E = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \{0\} \cup \{(\theta_R^1(\varphi), \varphi) \mid \varphi \in [-\rho, \rho]\} \cup \{(\theta_R^2(\varphi), \varphi) \mid \varphi \in [-\rho, \rho]\},$$

où  $\theta_R^1(\varphi) = \arcsin(\frac{1}{R} \sin(\frac{\varphi}{2})) - \frac{\varphi}{2} + \alpha$ ,  $\theta_R^2(\varphi) = -\theta_R^1(\varphi) - \varphi + \pi$  et  $\rho$  est choisi suffisamment petit pour que tout soit bien défini. On remarque que  $\theta_R^1(0) = \alpha$  et  $\theta_R^2(0) = \pi + \alpha$ . De plus

$$\varphi > 0 \Rightarrow [(\theta_R^1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_R^2(\varphi)) \Leftrightarrow f(\theta, \varphi) \in D]$$

et inversement

$$\varphi < 0 \Rightarrow [\theta_R^2(\varphi) \leq \theta \leq \theta_R^1(\varphi) \Leftrightarrow f(\theta, \varphi) \in D].$$

**Les modèles.** On veut montrer qu'il n'y a, topologiquement, que trois possibilités pour  $T$ . Pour cela on commence par construire trois modèles. Soit  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  deux rectangles pleins. On appelle  $T^1$  l'espace obtenu en identifiant  $A$  et  $A'$  puis  $B$  et  $B'$ . On appelle  $T^2$  l'espace obtenu en reliant  $A$  et  $A'$  puis  $B$  et  $B'$  par un segment.

Soit  $CDEF$  (respectivement  $C'D'E'F'$ ) un quadrilatère croisé plein dont les côtés  $ED$  (resp.  $E'D'$ ) et  $FC$  (resp.  $F'C'$ ) se croisent en  $A$  (resp.  $A'$ ). On appelle  $T^3$  l'espace obtenu en reliant  $A$  et  $A'$  par deux segments distincts.

Dans les trois cas on a formé un cercle que l'on notera  $\nu$ .

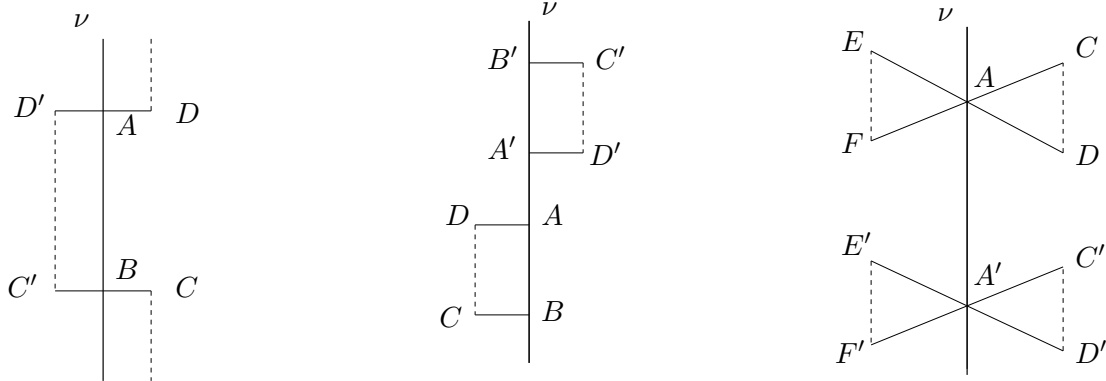


FIG. 10 – les trois modèles  $T^1$ ,  $T^2$  et  $T^3$ .

**Premier cas.** On suppose qu'il n'existe qu'un côté non réduit à un point de  $\partial\Pi(\mathcal{C}_A)$  passant par  $\omega_1$ . Notons  $\Gamma_2$  ce cercle,  $\omega_2$  son centre,  $R_2$  son rayon et  $D_2$  le disque qu'il délimite. Cela définit naturellement trois courbes dans  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-\rho, \rho]$  : le cercle d'équation  $\varphi = 0$  et les graphes des fonctions  $\theta_{R_2}^1$  et  $\theta_{R_2}^2$ . Ces courbes délimitent 4 domaines (cf. figure 11) dans  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-\rho, \rho]$  :

$$\begin{aligned} \beta_{+,ij} &= \{(\theta, \varphi) \mid \varphi \geq 0 \text{ et } \theta_{R_2}^i(\varphi) \leq \theta \leq \theta_{R_2}^j(\varphi)\} \\ \beta_{-,ij} &= \{(\theta, \varphi) \mid \varphi \leq 0 \text{ et } \theta_{R_2}^i(\varphi) \leq \theta \leq \theta_{R_2}^j(\varphi)\}. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède

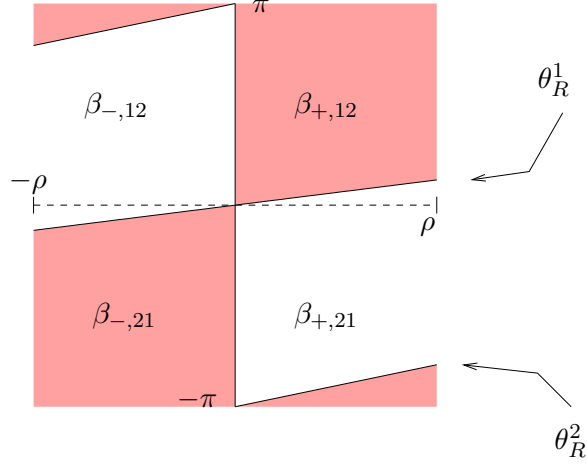


FIG. 11 – Les quatre domaines  $\beta_{\pm,ij}$ , avec  $R_2/l_1 > 1$  et  $\alpha_2 = 0$ .

$$f(\beta_{+,12} \cup \beta_{-,21}) = D_2 \cap D_\rho$$

$$\text{et } f(\beta_{-,12} \cup \beta_{+,21}) = D_\rho \setminus D_2.$$

On en déduit que

$$T = \beta_{+,12} \cup \beta_{-,21}$$

$$\text{ou } T = \beta_{-,12} \cup \beta_{+,21} ,$$

selon que la patte 2 soit tendue ou repliée le long de  $\Gamma_2$ .

Dans les deux cas et quelles que soient les valeurs de  $R_2$ ,  $l_1$  et  $\alpha_2$ ,  $T$  est homéomorphe à  $T^1$ .

**Deuxième cas.** Supposons maintenant que  $\partial\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D$  est formé de deux arcs de cercles transverses. On note  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  ces deux cercles,  $\omega_2$  et  $\omega_3$  leurs centres,  $R_2$  et  $R_3$  leurs rayons,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  les arguments de  $\omega_2 - \omega_1$  et de  $\omega_3 - \omega_1$  et  $D_2$  et  $D_3$  les disques qu'ils délimitent.

On définit, pour  $\rho$  suffisamment petit, pour  $k \in \{2, 3\}$  :

$$E_k = \{(\theta, \varphi) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \mid f(\theta, \varphi) \in \Gamma_k \cap D_\rho\}$$

Ces deux ensembles sont décrits comme précédemment par les fonctions  $\theta_{R_k}^i$  avec  $i \in \{1, 2\}$  et  $k \in \{2, 3\}$ . On définit comme ci-dessus les domaines  $\beta_{\pm,ij}^k$  par :

$$\beta_{\pm,ij}^k = \{(\theta, \varphi) \mid \varphi \geq 0 \text{ (resp. } \leq 0) \text{ et } \theta_{R_k}^i(\varphi) \leq \theta \leq \theta_{R_k}^j(\varphi)\}.$$

Pour tout  $k \in \{2, 3\}$ , on a encore

$$f(\beta_{+,12}^k \cup \beta_{-,21}^k) = D_\rho \cap D_k \text{ et } f(\beta_{-,12}^k \cup \beta_{+,21}^k) = D_\rho \setminus D_k.$$

On peut résumer dans le tableau suivant les différentes possibilités.

$\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D_\rho$	$T$
$D_\rho \cap D_2 \cap D_3$	$(\beta_{+,12}^2 \cap \beta_{+,12}^3) \cup (\beta_{-,21}^2 \cap \beta_{-,21}^3)$
$(D_\rho \cap D_2) \setminus D_3$	$(\beta_{+,12}^2 \cap \beta_{+,21}^3) \cup (\beta_{-,21}^2 \cap \beta_{-,12}^3)$
$(D_\rho \setminus D_2) \cap D_3$	$(\beta_{+,21}^2 \cap \beta_{+,12}^3) \cup (\beta_{-,12}^2 \cap \beta_{-,21}^3)$
$(D_\rho \setminus D_2) \setminus D_3$	$(\beta_{+,21}^2 \cap \beta_{+,21}^3) \cup (\beta_{-,12}^2 \cap \beta_{-,12}^3)$

Ayant supposé les cercles transverses (i.e.  $\alpha_2 \neq \alpha_3$  modulo  $\pi$ ), il est facile de voir que les quatre cas sont possibles (i.e.  $D_\rho \cap \Pi(\mathcal{C}_A)$  peut être n'importe lequel des quadrants que découpent les cercles  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$ ).

Lorsque  $\Pi(\mathcal{C}_A) \cap D_\rho = D_\rho \cap D_2 \cap D_3$  (ce qui correspond à une araignée ayant les pattes 2 et 3 tendues en  $\omega_1$ ), le bord de  $T$  est composé du cercle  $\nu$ , des deux segments  $[\theta_{R_3}^2(-\rho), \theta_{R_2}^1(-\rho)] \times \{-\rho\}$  et  $[\theta_{R_3}^1(\rho), \theta_{R_2}^2(\rho)] \times \{\rho\}$ , des restrictions à  $[-\rho, 0]$  des graphes des fonctions  $\theta_{R_2}^1$  et  $\theta_{R_3}^2$  et enfin des restrictions à  $[0, \rho]$  des graphes des fonctions  $\theta_{R_2}^2$  et  $\theta_{R_3}^1$ .

Quels que soient les paramètres, si  $\rho$  est suffisamment petit, les graphes ne s'intersectent pas et donc  $T$  est homéomorphe à  $T^2$ . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que dans les trois autres cas l'espace obtenu est toujours homéomorphe à  $T^2$ .

**Toisième cas.** On regarde maintenant le cas où deux cercles *tangents* de  $\partial\Pi(\mathcal{C}_A)$  passent par  $\omega_1$ . On conserve les notations définies ci-dessus.

Si  $\alpha_2 = \alpha_3$  (c'est-à-dire si  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont tangents intérieurement), alors, quitte à permuter les indices 2 et 3,  $D_\rho \cap \Pi(\mathcal{C}_A) = (D_\rho \cap D_3) \setminus D_2$ . Si  $\alpha_2 = \alpha_3 + \pi$  (c'est-à-dire si  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont tangents extérieurement) alors  $D_\rho \cap \Pi(\mathcal{C}_A) = (D_\rho \setminus D_3) \setminus D_2$ .

Dans ces deux cas,  $T$  est délimité par les graphes des fonctions  $\theta_{R_k}^i$ , le cercle d'équation  $\varphi = 0$  et 4 segments contenus dans les cercles d'équations  $\varphi = \pm\rho$ . Quels que soient les paramètres, si  $\rho$  est suffisamment petit, les graphes ne s'intersectent que sur la courbe  $\varphi = 0$  et donc l'ensemble obtenu est homéomorphe à  $T^3$ .

### 6.3.2 Collages.

On part donc de  $2^{n-1}$  exemplaires de  $T$  (les  $f_u(T)$ ) qu'il nous reste à recoller. Chaque exemplaire a un indice  $u$  dans  $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1)$  indiquant dans quel sens sont pliées les  $n-1$  dernières pattes. Pour savoir recoller ces exemplaires de  $T$  il suffit de savoir quelles sont les pattes éventuellement tendues ou repliées sur  $\Pi^{-1}(D_\rho)$ . On regroupe les pattes en 4 ensembles :

**Définition 6.2** Soit  $P_0$  l'ensemble des pattes centrées issues de  $\omega_1$  (pour le moment  $P_0$  est réduit à la première patte),  $P_1$  l'ensemble des pattes qui sont tendues ou repliées sur  $D_\rho$  le long d'un bout de cercle,  $P_2$  celui des pattes non issues de  $\omega_1$  qui ne sont tendues ou repliées sur  $D_\rho$  qu'en  $\omega_1$  et enfin  $P_3$  l'ensemble des pattes qui ne sont ni tendues ni repliées sur  $D_\rho$ .

On note  $n_i$  le cardinal de  $P_i$  (on a  $n_1 = 1$  ou 2 car au plus deux arcs de cercles de  $\partial\Pi(\mathcal{C}_A)$  se rencontrent en un sommet). On numérote les pattes dans l'ordre suivant : tout d'abord les pattes de  $P_0$  ensuite celles de  $P_1$  puis celles de  $P_2$  et enfin celles de  $P_3$ .

On fera l'abus de langage qui consiste à identifier une patte et son numéro. En particulier on pose  $V_i = \text{Vect}(e_j)_{j \in P_i}$  (les exemplaires de  $T$  sont donc indexés dans  $\mathbb{Z}_2^n/V_0$ ).

**Premier cas.** Supposons que  $n_1 = 1$ . En composant (implicitement) par un homéomorphisme de  $T$  dans  $T^1$ , on identifie  $T$  et  $T^1$ . Soit  $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$  et  $x \in f_u(T^1)$ . Si  $x \in f_u([CC'])$  ou  $f_u([DD'])$  alors la patte 2 est tendue ou repliée donc  $x \in f_u(T^1) \cap f_{u+e_2}(T^1)$ . On en déduit que

$$f_u(T^1) \cap f_{u+e_2}(T^1) \supset (f_u([CC']) \cup f_u([DD'])).$$

De plus si  $x \in f_u(\nu)$  les trois pattes de  $P_1$  et de  $P_2$  sont tendues ou repliées. On en déduit

$$\forall w \in V_1 \oplus V_2, f_u(T^1) \cap f_{u+w}(T^1) \supset f_u(\nu).$$

Enfin si  $x \in \Pi^{-1}(D_\rho)$  n'est pas sur une de ces courbes, alors aucune patte n'est ni tendue ni repliée. On a donc là toutes les intersections.

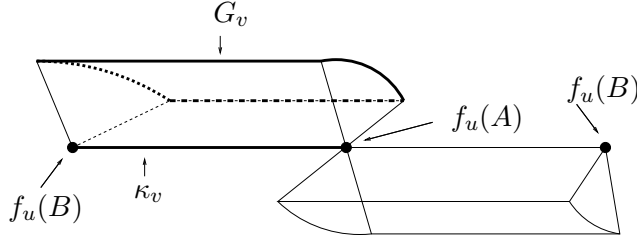


FIG. 12 – Collage : premier cas.

Ainsi pour tout  $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$ ,  $f_u(T^1) \cup f_{u+e_2}(T^1)$  est obtenu en recollant deux exemplaires de  $T^1$  le long du cercle  $\nu$ , puis du segment  $[CC']$  et enfin de  $[DD']$ . Le résultat (cf. figure 12) est homéomorphe à deux disques recollés en deux points ( $f_u(A)$  et  $f_u(B)$ ). Son bord est composé de deux cercles  $f_u([CD]) \cup f_{u+e_2}([CD])$  et  $f_u([C'D']) \cup f_{u+e_2}([C'D'])$ . Le cercle  $f_u(\nu)$  passe donc par ces deux points. En découpant en  $f_u(A)$  et  $f_u(B)$ , on décompose  $f_u(T^1) \cup f_{u+e_2}(T^1)$  en deux composantes chacune homéomorphe à un disque. L'une contient  $f_u([AB])$ , l'autre  $f_u([BA])$ .

Remarquons que ces composantes sont obtenues en recollant deux moitiés gauches (ou droites) de  $T^1$  ensemble, c'est donc que la première patte reste pliée dans le même sens sur chaque composante. Par contre elle n'est pas pliée dans le même sens sur les deux composantes. On peut donc attribuer un vecteur  $v$  de  $\mathbb{Z}_2^n/V_1$  à chaque composante, on les baptise donc  $\text{Comp}_v^1$ . On note  $G_v$  le cercle qui borde  $\text{Comp}_v^1$  et on note  $\kappa_v$  l'intersection de  $f_u(\nu)$  et de  $\text{Comp}_v^1$ .

Clairement,  $\Pi^{-1}(D_\rho) = \bigcup_{v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1} \text{Comp}_v^1$ . Or, on a vu que  $f_u(\nu) = f_{u'}(\nu)$  si et seulement s'il existe  $w \in V_1 \oplus V_2$  tel que  $u' = u + w$  (ie les composantes de  $\Pi^{-1}(\omega_1)$  sont indexées par  $\mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)$ ). On en déduit que  $\kappa_v = \kappa_{v'}$  si et seulement s'il existe  $w \in V_2$  tel que  $v' = v + w$ . Ainsi deux composantes  $\text{Comp}_v^1$  et  $\text{Comp}_{v'}^1$  sont disjointes si les projetés de  $v$  et de  $v'$  dans  $\mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)$  sont différents, elles s'intersectent le long du segment  $\kappa_v$  si leurs projetés dans  $\mathbb{Z}_2^n/(V_1 \oplus V_2)$  sont les mêmes et enfin elles s'intersectent en deux points ( $f_u(A)$  et  $f_u(B)$ ), les extrémités de  $\kappa_v$ ) sinon.

**Deuxième cas.** Maintenant  $n_1 = 2$  et  $\alpha_2 \neq \alpha_3(\pi)$ . On identifie cette fois  $T$  et  $T^2$ . Soit  $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$  et  $x \in f_u(T^2)$ . Par le même raisonnement qu'au premier cas, on voit que

$$\begin{aligned} f_u(T^2) \cap f_{u+e_2}(T^2) &\supset (f_u([AD]) \cup f_u([A'D'])), \\ f_u(T^2) \cap f_{u+e_3}(T^2) &\supset (f_u([BC]) \cup f_u([B'C'])), \\ f_{u+e_3}(T^2) \cap f_{u+e_3+e_2}(T^2) &\supset (f_{u+e_3}([AD]) \cup f_{u+e_3}([A'D'])), \\ f_{u+e_2}(T^2) \cap f_{u+e_2+e_3}(T^2) &\supset (f_{u+e_2}([BC]) \cup f_{u+e_2}([B'C'])). \end{aligned}$$

De plus

$$\forall w \in V_1 \oplus V_2, f_u(T^2) \cap f_{u+w}(T^2) \supset f_u(\nu).$$

Ainsi pour tout  $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$ ,  $f_u(T^2) \cup f_{u+e_2}(T^2) \cup f_{u+e_3}(T^2) \cup f_{u+e_2+e_3}(T^2)$  est donc obtenu en recollant quatre exemplaires de  $T^2$  tout d'abord le long de  $\nu$  (on obtient alors deux sortes de roues à quatre aubes), ensuite en recollant le premier et le deuxième exemplaire le long de  $[AD]$ ,  $[A'D']$ , le premier et le troisième le long de  $[BC]$  et  $[B'C']$ , le deuxième et le quatrième le long de  $[BC]$  et  $[B'C']$  et enfin le troisième et le quatrième le long de  $[AD]$  et  $[A'D']$  (on recolle une « aube » à sa voisine une fois d'un côté une fois de l'autre cf. figure 13).

L'ensemble obtenu est naturellement indexé par  $\mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1)$ . Le bord de cet ensemble est constitué de deux cercles obtenus à partir de  $[CD]$  et  $[C'D']$ . Comme pour le premier cas, on découpe  $f_u(T^2) \cup f_{u+e_2}(T^2) \cup f_{u+e_3}(T^2) \cup f_{u+e_2+e_3}(T^2)$  aux points  $f_u(A)$  et  $f_u(A')$ . On obtient



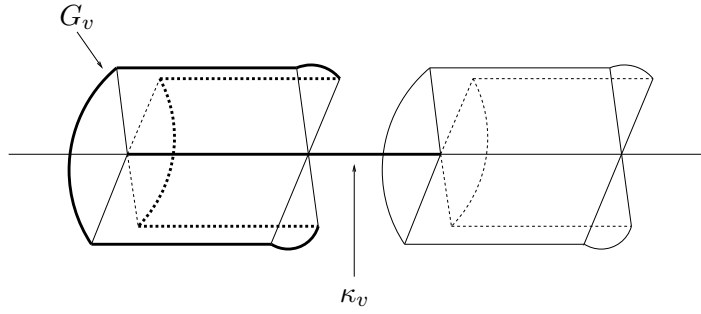


FIG. 13 – Collage : deuxième cas.

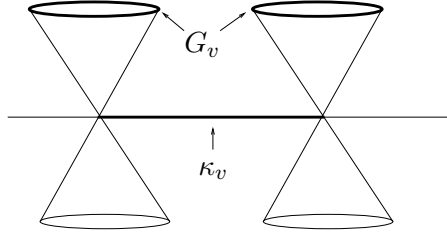


FIG. 14 – Collage : troisième cas.

encore deux composantes connexes, on peut attribuer comme précédemment un vecteur  $v$  de  $\mathbb{Z}_2^n/V_2$  à chaque composante. On les note donc  $\text{Comp}_v^2$ . Chaque composante contient un cercle  $G_v$  inclus dans le bord de  $\Pi^{-1}(D_\rho)$  et un segment  $\kappa_v$  joignant  $f_u(A)$  et  $f_u(A')$ .

Pour décrire  $\Pi^{-1}(D_\rho)$  il ne reste plus qu'à recopier mot à mot la fin du paragraphe précédent.

**Troisième cas** Maintenant  $n_1 = 2$  et  $\alpha_2 \equiv \alpha_3[\pi]$ . On vérifie facilement que les conditions de recollement sont les mêmes que pour le deuxième cas. Ainsi pour tout  $u \in \mathbb{Z}_2^n/V_0$ ,  $f_u(T^3) \cup f_{u+e_2}(T^3) \cup f_{u+e_3}(T^3) \cup f_{u+e_2+e_3}(T^3)$  est homéomorphe à deux portions de cônes dont les origines sont sur le cercle  $f_u(\nu)$  (cf. figure 14).

Le bord de cet ensemble est cette fois constitué de quatre cercles. Si on enlève les points  $f_u(A)$  et  $f_u(A')$  on obtient 4 demi-cônes et 2 segments. La première patte est tournée vers la gauche sur deux demi-cônes (qui ne sont pas sur un même cône) et vers la droite sur les deux autres. On relie par l'un des segments les deux demi-cônes sur lesquels la première patte est tournée du même côté. On obtient ainsi des composantes qui ont toutes les propriétés des précédentes. Elles peuvent toujours être indexées par  $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_2$ , on les note  $\text{Comp}_v^3$ . On note encore  $G_v$  la courbe du bord de  $\Pi^{-1}(D_\rho)$  qui est contenue dans  $\text{Comp}_v^3$ , mais elle est cette fois formée de deux cercles. La définition de  $\kappa_v$  ne change pas.

Pour décrire  $\Pi^{-1}(D)$  il ne reste plus qu'à recopier mot à mot la fin du premier paragraphe.

**Cas zéro.** On se place dans le cas où  $n_1 = n_2 = 0$ . Il n'y a pas de singularités mais pour fixer des notations communes, nous traitons tout de même ce cas. Dans ce cas  $\Pi^{-1}(D_\rho)$  est homéomorphe à  $2^{n_3}$  couronnes. Chacune de ces couronnes contient aussi une composante connexe de  $\Pi^{-1}(\omega_1)$  (l'analogue des cercles  $f_u(\nu)$ ). En coupant le long de ce cercle on obtient les composantes  $\text{Comp}_v^0$ . Elles contiennent chacune un des cercles qui bordent  $\Pi^{-1}(D_\rho)$ , on le note encore  $G_v$ . Il n'y a pas ici d'analogue aux segments  $\kappa_v$ .

## 6.4 Points spéciaux : cas général.

On ne suppose plus  $n_0 = 1$ . Pour tout  $r \in \{1, \dots, n_0\}$ , on définit comme précédemment les angles  $\theta_r$  et  $\varphi_r$  et un voisinage  $D_\rho$ . Il est clair que  $\Pi^{-1}(\omega_1)$  est difféomorphe à  $2^{n_3}$  tores de dimension  $n_0$  notés  $\mathbb{T}_h^{n_0}$  et paramétrés par les angles  $\theta_r \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et indexés par  $h \in \mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)$ .

Considérons une courbe  $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}_A$  continue telle que  $\Pi(\delta(0)) = \omega_1$  et pour tout  $t \neq 0$ ,  $\Pi(\delta(t)) \neq \omega_1$ . Pour  $t \neq 0$ , connaissant  $\Pi(\delta(t))$  et le sens dans lequel est pliée la patte  $r$ , les fonctions  $\theta_r(t)$  sont facilement calculables. Si on fait tendre  $t$  vers 0 on voit alors que les  $\theta_r(0)$  sont tous égaux modulo  $\pi$ . Autrement dit pour que le corps de l'araignée quitte  $\omega_1$  il faut tout d'abord aligner les pattes de  $P_0$ . Il faut donc étudier ce qu'il se passe le long de  $\mathcal{Z}_h$  la courbe de  $\mathbb{T}_h^{n_0}$  d'équation  $\theta_1 = \dots = \theta_{n_0} \pmod{\pi}$ . On remarque que cette équation définit  $2^{n_0-1}$  cercles sur chaque tore.

On peut être plus précis et montrer que  $\theta_r(0) = \theta_{r'}(0)$  si et seulement si les pattes  $r$  et  $r'$  sont tournées du même côté le long de  $\delta(t)$ . On voit aussi que le sens dans lequel sont tournées les pattes de  $P_1$  et de  $P_2$  n'a aucune influence sur  $\delta(0)$ . On peut donc attribuer un vecteur de  $\mathbb{Z}_2^n/(\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2)$  à chacun des  $2^{n_3+n_0-1}$  cercles composant  $\mathcal{Z} = \sqcup_{h \in \mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)} \mathcal{Z}_h$ . Il s'agit clairement d'une bijection. On peut donc noter  $\zeta_w$  avec  $w \in \mathbb{Z}_2^n/(\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2)$  les composantes connexes de  $\mathcal{Z}$ .

Pour chaque  $u \in \mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0})$ , on définit une fonction  $f'_u$  (analogue des fonctions  $f_u$  définies à la section 6.3) qui, sachant dans quel sens sont tournées les pattes de  $P_1, P_2$  et  $P_3$  et quelles sont les pattes de  $P_0$  tournées dans le même sens que la première patte, associe à  $(\theta_1, \varphi_1)$  un point de  $\mathcal{C}_A$ . Grâce à ces fonctions, on peut refaire toute la construction de la section 6.3 (en commençant par  $T$ ). On définit de la même façon les composantes  $\text{Comp}_v^i$ ,  $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ . On voit que si  $w$  est le projeté de  $u$ , alors  $f_u(\{\varphi_1 = 0\}) = \zeta_w$ . On en déduit que si  $w$  est le projeté de  $v$ , alors  $\text{Comp}_v^i \cap \zeta_w = \kappa_v$ .

Tout point de  $\Pi^{-1}(D_\rho \setminus \{\omega_1\})$  appartient à un  $f_u(T)$  ainsi  $\Pi^{-1}(D_\rho)$  peut être vu comme une réunion de tores et de composantes  $\text{Comp}_v^i$ . Le recollement des uns et des autres se lit simplement sur les indices, on le résume dans la proposition suivante.

**Proposition 6.3** *Il existe  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  tel que*

$$\Pi^{-1}(D_\rho) = \bigcup_{v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1} \text{Comp}_v^i \quad \bigcup_{h \in \mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)} \mathbb{T}_h^{n_0}.$$

Soit  $\text{Comp}_v^i$  et  $\text{Comp}_{v'}^i$ , deux composantes de  $\Pi^{-1}(D_\rho)$ .

1.  $\text{Comp}_v^i$  et  $\text{Comp}_{v'}^i$ , sont recollés à un même tore si et seulement si les projetés de  $v$  et  $v'$  sur  $\mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)$  sont les mêmes.
2.  $\text{Comp}_v^i$  et  $\text{Comp}_{v'}^i$ , sont recollés à un même cercle  $\zeta_w$  si et seulement si les projetés de  $v$  et  $v'$  sur  $\mathbb{Z}_2^n/(V_0 \oplus V_1 \oplus V_2)$  sont les mêmes.
3.  $\text{Comp}_v^i$  et  $\text{Comp}_{v'}^i$ , sont recollés l'un à l'autre le long d'un même segment  $\kappa_v$  si et seulement si les projetés de  $v$  et  $v'$  sur  $\mathbb{Z}_2^n/(V_1 \oplus V_2)$  sont les mêmes.
4.  $\text{Comp}_v^i$  et  $\text{Comp}_{v'}^i$ , s'intersectent en deux points (ie les extrémités de  $\kappa_v$  et de  $\kappa_{v'}$  sont les mêmes) si et seulement si les projetés de  $v$  et  $v'$  sur  $\mathbb{Z}_2^n/(\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2)$  (cette intersection est réduite à ces deux points si de plus les projetés sur  $\mathbb{Z}_2^n/(V_1 \oplus V_2)$  sont différents).

## 7 Espaces des configurations avec un point singulier.

Soit  $\mathcal{A}$  une araignée et  $\mathcal{C}_A$  son espace des configurations. On suppose que  $\mathcal{C}_A$  est connexe (ou si on veut on ne regarde qu'une composante connexe), en particulier toutes les pattes sont donc utiles

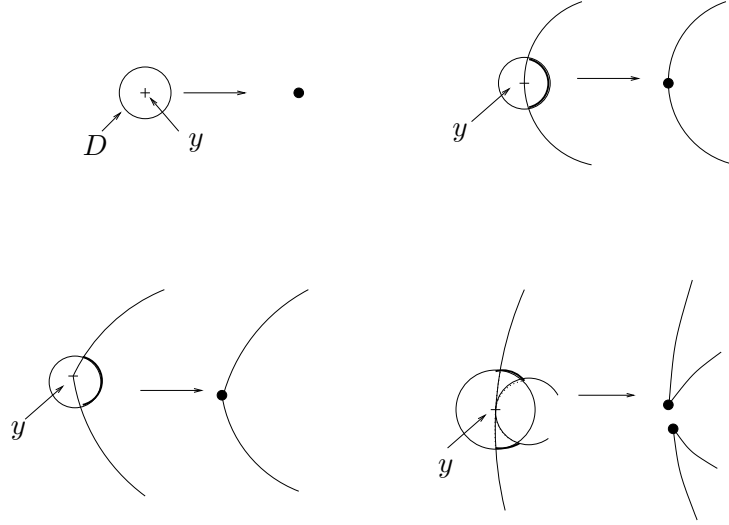


FIG. 15 – la transformation de  $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D$  en  $B$  (au voisinage de  $y$ ).

et  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  est connexe. On suppose aussi que  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  possède un seul point singulier que l'on note  $y$ . On se donne  $D$  un voisinage de  $y$  tel que  $y$  soit le seul sommet de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  inclus dans  $D$ .

### 7.1 Description de $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$

Remarquons que  $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D$  peut avoir deux composantes connexes. Lorsque ce sera le cas, on traitera séparément les images réciproques de chaque composante. On notera  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)^+$  l'image réciproque de l'une et  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)^-$  l'image réciproque de l'autre.

On commence par modifier  $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D$  en remplaçant (comme pour la proposition 2.6) les éventuels cercles-points par des cercles et surtout en identifiant entre elles les extrémités de chaque arc de  $\partial D$  inclus dans  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  (si  $D$  est inclus dans  $\Pi(\mathcal{C}_A)$  on rebouche simplement  $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D$ ). On remarque que cette opération crée deux points si  $y$  est un point de tangence et un seul point dans les autres cas (cf. figure 15). On note  $B$  la brique obtenue. On désignera les points créés par le terme *points marqués* de  $B$ . Si  $B$  a deux composantes connexes, on les notera  $B^+$  et  $B^-$ . On note  $p$  (resp.  $p^+$ , resp.  $p^-$ ) et  $k$  (resp.  $k^+$ , resp.  $k^-$ ) le nombre de sommets et de composantes de bord de  $B$  (resp. de  $B^+$ , resp. de  $B^-$ ). les côtés de  $B$  sont toujours associés à des pattes.

On a déjà réparti les pattes de  $\mathcal{A}$  en 4 familles. Pour décrire l'espace tout entier ce n'est pas suffisant.

**Définition 7.1** *On dit qu'une patte de  $P_i$  appartient à  $Q_i$  (resp.  $Q_i^+$ , resp.  $Q_i^-$ ) si  $B$  (resp. à  $B^+$ , resp. à  $B^-$ ) ne possède pas de côtés associés à cette patte. On note  $q_i$  (resp.  $q_i^+$ , resp.  $q_i^-$ ) le cardinal de  $Q_i$  (resp.  $Q_i^+$ , resp.  $Q_i^-$ ). On note  $W_i$  (resp.  $W_i^+$ , resp.  $W_i^-$ ) le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{Z}_2^n$  engendré par les  $e_m$  avec  $m \in P_i \setminus Q_i$  (resp.  $m \in P_i \setminus Q_i^+$ , resp.  $m \in P_i \setminus Q_i^-$ ).*

On peut maintenant décrire  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ .

**Proposition 7.2** *Soit  $B$  la brique obtenue à partir de  $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D$  en identifiant les extrémités des segments de  $\partial D$  inclus dans  $\Pi(\mathcal{C}_A)$ .*

1. *Si  $y$  n'est pas un point de tangence, alors  $B$  est connexe,  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  a  $2^{q_0+q_2}$  composantes connexes indexées par  $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$  chacune est diffeomorphe à une surface compacte à bord de genre  $1 + 2^{n-q_0-q_2-3}(p + 4k - 8)$  dont le bord est constitué de  $2^{n-q_0-q_2-n_1}$  cercles. Le bord de  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  est constitué de  $2^{n-n_1}$  cercles indexés dans  $\mathbb{Z}_2^n/V_1$ .*

2. Si  $y$  est un point de tangence deux cas se présentent :

(a) Si  $B$  est connexe,  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  a  $2^{q_0+q_2}$  composantes connexes indexées par  $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$ , chacune est difféomorphe à une surface compacte à bord de genre  $1 + 2^{n-q_0-q_2-3}(p+4k-8)$  dont le bord est constitué de  $2^{n-q_0-q_2-n_1+1}$  cercles.

Le bord de  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  est constitué de  $2^{n-1}$  cercles. Ces cercles sont regroupés par paire appartenant à une même composante connexe de  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$ . Ces paires de cercles sont indexées par  $\mathbb{Z}_2^n/V_1$ .

(b) Si  $B$  n'est pas connexe alors  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)^\pm$  a  $2^{q_0^\pm+q_2^\pm+q_3^\pm}$  composantes connexes indexées par  $\mathbb{Z}_2^n/W_0^\pm \oplus V_1 \oplus W_2^\pm \oplus W_3^\pm$ , chacune est difféomorphe à une surface compacte à bord de genre  $1 + 2^{n-q_0^\pm-q_2^\pm-q_3^\pm-3}(p^\pm+4k^\pm-8)$  dont le bord est constitué de  $2^{n-q_0^\pm-q_2^\pm-q_3^\pm-n_1}$  cercles.

Le bord de  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  est constitué de  $2^{n-1}$  cercles. Ces cercles sont regroupés par paires l'un appartenant à  $\partial\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)^+$  l'autre à  $\partial\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)^-$ . Ces paires de cercles sont indexées par  $\mathbb{Z}_2^n/V_1$ .

**Preuve.** On suppose  $B$  connexe. Les propositions 2.4 et 2.6 disent que  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  est une surface compacte lisse à bord ayant  $2^{q_0+q_2}$  composantes connexes indexées par  $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$ . À partir de la composante connexe de  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  d'indice  $u$ , on fabrique une surface fermée  $\Sigma_u$  en collant simplement un disque sur chaque cercle du bord. Le pavage de  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  se prolonge naturellement en un pavage de  $\Sigma_u$ . Les briques de ce nouveau pavage sont homéomorphes à  $B$  et sont indexées par  $\mathbb{Z}_2^{n-q_0-q_2}$  (on n'a conservé que les pattes vraiment utiles). On a une surface connexe pavée par des briques toutes identiques et dont les sommets sont recollés quatre à quatre. Le genre de  $\Sigma_u$  est donc donné par la formule de la proposition 3.1.

La surface  $\Sigma_u$  contient les points provenant des points marqués de  $B$  (que l'on continue d'appeler points marqués). Selon le cas les points marqués de  $B$  appartiennent à zéro, un ou deux côtés de  $B$  (cf figure 15), les points marqués de la surface appartiennent donc à un, deux ou quatre pavés. Si  $y$  n'est pas un point de tangence, il y a un point marqué sur  $B$ , et chaque point marqué de  $\Sigma_u$  appartient à  $2^{n_1}$  briques. On a donc  $2^{n-q_0-q_2-n_1}$  points marqués sur  $\Sigma_u$ . Si  $y$  est un point de tangence, il y a deux points marqués sur  $B$  et chaque point marqué de  $\Sigma_u$  appartient à  $2^{n_1}$  briques. On a donc  $2^{n-q_0-q_2-n_1+1}$  points marqués sur  $\Sigma_u$ .

Les côtés de  $B$  passant par les points marqués sont, par définition, ceux associés aux pattes appartenant à  $P_1$ . On peut donc associer un vecteur de  $\mathbb{Z}_2^{n-q_0-q_2}/V_1$  à chaque point marqué de  $\Sigma_u$ . Si  $y$  est un point de tangence les points marqués de  $\Sigma_u$  sont indexés par paires, sinon ils sont bien indexés.

Les (paires de) points marqués de  $\cup_u \Sigma_u$  sont donc indexé(e)s par  $\mathbb{Z}_2^n/V_1$ . On remarque maintenant que  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  est obtenu en ôtant un voisinage de chacun des points marqués de  $\cup_u \Sigma_u$ . En transmettant au cercle ainsi créé l'indice du point marqué on prouve les parties 1 et 2.a de la proposition. Il reste le cas où  $B$  n'est pas connexe, il est similaire et laissé au lecteur.  $\square$

## 7.2 Collages bis

Il ne reste plus qu'à recoller  $\Pi^{-1}(\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D)$  et  $\Pi^{-1}(D)$ . On conserve dans ce qui suit les notations du paragraphe précédent.

### 7.2.1 Cas non tangents.

Si  $y$  est un point isolé du bord de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$ ,  $B$  est connexe,  $n_1 = n_2 = 0$  (donc  $q_2 = 0$ )  $n_0 > 1$  et  $\Pi^{-1}(D)$  est donné par la proposition 6.3 avec  $i = 0$ .

S'il ne passe qu'un seul côté non réduit à un point par  $y$ ,  $B$  est connexe,  $n_1 = 1$  et  $\Pi^{-1}(D)$  est donné par la proposition 6.3 avec  $i = 1$  si  $n_0 \neq 0$  et par la discussion qui suit la proposition 6.1 si  $n_0 = 0$ .

S'il passe deux côtés sécants par  $y$ ,  $B$  est connexe,  $n_1 = 2$  et  $\Pi^{-1}(D)$  est donné par la proposition 6.3 avec  $i = 2$  si  $n_0 \neq 0$  et par la discussion qui suit la proposition 6.1 si  $n_0 = 0$ .

Pour ces trois cas, on a  $i = n_1$  et on peut construire  $\mathcal{C}_A$  de la même façon : on part de  $2^{q_0+q_2}$  surfaces compactes de genre  $1 + 2^{n-q_0-q_2-3}(p + 4k - 8)$  dont le bord est constitué de  $2^{n-q_0-q_2-n_1}$  cercles. On attribue ensuite à chacune des composantes de bord un vecteur  $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$  de telle façon que le projeté de  $v$  sur  $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$  soit constant sur chaque composante connexe. Pour tout  $v \in \mathbb{Z}_2^n$ , on recolle un exemplaire de  $\text{Comp}^{n_1}$  (ou de  $\Delta^{n_1}$  si  $n_0 = 0$ ) sur chaque cercle et on lui attribue l'indice correspondant. Enfin, on recolle les  $\text{Comp}_v^{n_1}$  (ou les  $\Delta_v^{n_1}$ ) entre eux selon les règles données par la proposition 6.3 :

Si  $v$  et  $v'$  se projettent sur le même vecteur de  $\mathbb{Z}_2^n/V_1 \oplus V_2$  alors on identifie  $\kappa_v$  et  $\kappa_{v'}$ . Ensuite si  $v$  et  $v'$  se projettent sur le même vecteur de  $\mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2$  on identifie les extrémités de  $\kappa_v$  et  $\kappa_{v'}$  de façon à former un cercle. On obtient ainsi  $2^{n_3+n_0-1}$  cercles que l'on note  $\zeta'_w$  avec  $w \in \mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2$ . On se donne de plus  $2^{n_3}$  tores  $\mathbb{T}^{n_0}$  indexés par  $\mathbb{Z}_2^n/V_0 \oplus V_1 \oplus V_2$ , chaque tore étant muni des  $2^{n_0-1}$  courbes  $\zeta_w$ ,  $w \in \mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2$ , définies au paragraphe 6.4. Pour tout  $w \in \mathbb{Z}_2^n/\text{Vect}(e_1 + \dots + e_{n_0}) \oplus V_1 \oplus V_2$ , on identifie  $\zeta_w$  et  $\zeta'_w$ .

La construction est terminée. Les différents choix donnant des surfaces homéomorphes, la surface singulière obtenue est bien homéomorphe à  $\Pi(\mathcal{C}_A)$ .

## 7.2.2 S'il passe deux côtés tangents par $y$ .

**Si  $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D$  est connexe.** La brique  $B$  est connexe,  $n_1 = 2$  et  $\Pi^{-1}(D)$  est donné par la proposition 6.3 avec  $i = 3$ .

Pour construire  $\mathcal{C}_A$  on part de  $2^{q_0+q_2}$  surfaces compactes de genre  $1 + 2^{n-q_0-q_2-3}(p + 4k - 8)$  dont le bord est constitué de  $2^{n-q_0-q_2-3}$  cercles. On regroupe par deux les composantes de bord de chaque surface. On attribue à chaque paire de cercles un vecteur  $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$  de telle façon que le projeté de  $v$  sur  $\mathbb{Z}_2^n/W_0 \oplus V_1 \oplus W_2 \oplus V_3$  soit constant sur chaque composante connexe. Pour tout  $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ , on recolle un exemplaire de  $\text{Comp}^3$  sur chaque couple de cercles et on lui attribue l'indice correspondant. On recolle enfin les  $\text{Comp}_v^3$  entre eux selon les règles données par la proposition 6.3.

Les différents choix donnant des surface homéomorphes, on voit que la surface singulière obtenue est homéomorphe à  $\Pi(\mathcal{C}_A)$ .

**Si  $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus D$  n'est pas connexe.** Pour construire  $\mathcal{C}_A$  on part de  $2^{q_0^++q_2^++q_3^+}$  surfaces compactes de genre  $g = 1 + 2^{n-q_0^+-q_2^+-q_3^+-3}(p^+ + 4k^+ - 8)$  dont le bord est constitué de  $2^{n-q_0^+-q_2^+-q_3^+-2}$  cercles et de  $2^{q_0^-+q_2^-+q_3^-}$  surfaces compactes de genre  $1 + 2^{n-q_0^- -q_2^- -q_3^- -3}(p^- + 4k^- - 8)$  dont le bord est constitué de  $2^{n-q_0^- -q_2^- -q_3^- -2}$  cercles. On a donc deux familles de cercles. On indexe les cercles de chaque famille par  $\mathbb{Z}_2^n/V_1$  de telle sorte que les projetés de  $v$  sur  $\mathbb{Z}_2^n/W_0^\pm \oplus V_1 \oplus W_2^\pm \oplus W_3^\pm$  soient constants sur chaque composante connexe. Pour tout  $v \in \mathbb{Z}_2^n/V_1$ , on note  $G_v$  la paire de cercles dont l'indice est  $v$  (les deux cercles n'appartiennent jamais à la même famille, on pourrait les noter  $G_v^+$  et  $G_v^-$ ). On colle sur chaque  $G_v$  un exemplaire de  $\text{Comp}^3$ . On recolle enfin les  $\text{Comp}_v^3$  entre eux selon les règles données par la proposition 6.3.

Les différents choix donnant des surface homéomorphes, on voit que la surface singulière obtenue est homéomorphe à  $\Pi(\mathcal{C}_A)$ .

### 7.3 Espace des configurations avec un nombre fini de points singuliers

On note  $y_1, \dots, y_s$  les points singuliers de  $\Pi(\mathcal{C}_A)$ . Il s'agit simplement de refaire la construction de la section précédente en ajoutant l'indice correspondant à la singularité à chaque étape (principalement il faut définir les analogues des familles  $P_i, Q_i, Q_i^\pm$  pour chaque singularité ce qui alourdit considérablement les notations). On modifie  $\Pi(\mathcal{C}_A) \setminus (\cup_{1 \leq i \leq s} D_i)$  comme précédemment pour obtenir un pavé  $B$  (qui peut avoir beaucoup de composantes connexes) ayant  $s$  familles de points marqués. Cela nous permet de construire une surface à bord dont les composantes de bord sont regroupées en  $s$  familles. Pour chacune de ces familles on reproduit la construction de la section 7.2. L'espace singulier obtenu est homéomorphe à  $\mathcal{C}_A$ .

## Références

- [1] Kapovich, Michael ; Millson, John, *On the moduli space of polygons in the Euclidean plane.*, J. Differential Geom. 42 (1995), no. 2, 430–464.
- [2] Kapovich, Michael ; Millson, John, *Universality theorems for configuration spaces of planar linkages.*, Topology 41 (2002), no. 6, 1051–1107.
- [3] O'Hara, June, *The configuration space of planar spidery linkage*, Topology Appl. 154 (2007), no. 2, 502–526
- [4] Shvalb, N. ; Shoham, M. ; Blanc, D., *The configuration space of arachnoid mechanisms*. Forum Math. 17 (2005), no. 6, 1033–1042.

Address : Université Bordeaux 1, Institut de Mathématiques de Bordeaux,  
351, cours de la libération, F-33405 Talence, France

E-mail : pierre.mounoud@math.u-bordeaux1.fr