Sujets Mémoire Master 1 2019/2020

Michel Bonnefont
michel.bonnefont@math.u-bordeaux.fr

Sujet A: Inégalités de Poincaré pour de systèmes de spin.

Le but de ce sujet est de comprendre la méthode présentée dans l'article de Michel Ledoux pour obtenir des inégalités de Poincaré pour certains systèmes de spin et ce indépendamment du nombre de particules. Le début du sujet sera l'étude de l'inégalité de Poincaré et de certaines méthodes classiques pour l'obtenir. Ensuite, le sujet se concentrera sur les systèmes de spin. L'étude des inégalités de Sobolev logarithmiques pourra éventuellement être aussi abordée.

Réference: *Ledoux, M. Logarithmic Sobolev inequalities for unbounded spin systems revisited.* Séminaire de Probabilités, XXXV, 167–194, Lecture Notes in Math., 1755, Springer, Berlin, 2001.

Sujet B: Corrélation gaussiene.

Le but de ce mémoire est de comprendre la preuve récente et remarquable (et dont l'histoire est assez surprenante) de Thomas Royen de la conjecture de corrélation gaussienne :

Soit γ une mesure de probabilité gaussienne sur $\mathbb{R}^n$, de moyenne 0. Pour tous les sous-ensembles A, B convexes et symétriques par rapport à l'origine, on a

$$\gamma(A \cap B) \geq \gamma(A)\gamma(B).$$

Références:

Royen, Thomas A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to some multivariate gamma distributions. Far East J. Theor. Stat. 48 (2014), no. 2, 139–145.

Barthe, Franck L'inégalité de corrélation Gaussienne [d'après Thomas Royen]. (French) [Gaussian correlation inequality [following Thomas Royen]] Séminaire Bourbaki. Vol. 2016/2017. Exposés 1120–1135. Astérisque No. 407 (2019), Exp. No. 1124, 117–133.

Latała, Rafał; Matlak, Dariusz: Royen's proof of the Gaussian correlation inequality. Geometric aspects of functional analysis, 265–275, Lecture Notes in Math., 2169, Springer, Cham, 2017.

Stages proposés par L. Michel

1 Introduction à l'analyse microlocale

Dans ce stage on se propose d'étudier la classe des opérateurs pseudo-différentiels. Le première partie du stage consistera à étudier les principales propriétés de ces opérateurs : définition, action sur les espace de Sobolev, composition, calcul symbolique. Dans un second temps on appliquera cette théorie à la résolution d'équations aux dérivées partielles. On se basera sur le livre de G.B. Folland [1]. Pour ce stage il est nécessaire d'avoir des bases de théorie des distributions et d'analyse de Fourier.

2 Solutions fondamentales d'opérateurs différentiels à coefficients constants

Dans ce stage on propose de démontrer que tout opérateur différentiel à coefficients constants $P(D)$ possède une solution fondamentale :

$$P(D)f = \delta.$$

On se basera sur le livre de L. Hörmander [2]. Pour ce stage il est nécessaire d'avoir des bases de théorie des distributions et d'analyse de Fourier.

3 Théorème spectral et théorie ergodique

Le théorème spectral affirme que tout opérateur auto-adjoint est unitairement equivalent à un opérateur de multiplication sur un espace $\oplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$ pour une certaine collection de mesures $\mu_1, \ldots, \mu_N$. Le but de ce stage est de démontrer ce théorème d'en déduire des applications à l'étude de systèmes dynamiques. On se basera sur le livre de Reed-Simon [3]. De bonnes bases d'analyse fonctionnelle sont requises pour ce stage.

Contact : Laurent Michel, Bureau 281, laurent.michel@math.u-bordeaux.fr

Références

[1] Gerald B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, second ed., Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[2] Lars Hörmander, *Linear partial differential operators*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 116, Academic Press, Inc., Publishers, New York ; Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963. MR 0161012

[3] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. I*, second ed., Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1980, Functional analysis.

Nombres premiers en progression arithmétique

sujet de TER, M1 mathématiques fondamentales

Direction : Florent Jouve
e-mail florent.jouve@math.u-bordeaux.fr

Depuis Euclide, on sait que l'ensemble des nombres premiers est infini. Étant donné un entier $q \geq 2$ et un entier a premier à q, on peut raffiner cette question en s'interrogeant sur la taille de l'ensemble $\Pi(x; q, a) := \{p \leq x \colon p \text{ premier}, \, p \equiv a (\operatorname{mod} q)\}$ lorsque x croît. Un théorème dû à Dirichlet affirme que l'ensemble $\Pi(x; q, a)$ est encore infini (ce fait est démontré dans le cadre du cours de théorie des nombres au second semestre du M1). L'objectif principal du projet proposé est d'étudier la preuve de la forme forte suivante de ce résultat :

$$\sum_{p \in \Pi(x;q,a)} \frac{1}{p} \sim \frac{1}{\varphi(q)} \log \log x \,, \qquad x \to \infty \,.$$

Les outils utilisés incluent la théorie élémentaire des fonctions arithmétiques et des caractères de Dirichlet ainsi que quelques arguments d'analyse complexe. Si le temps le permet, on pourra étudier également la question plus difficile de donner une asymptotique pour la quantité $\#\Pi(x; q, a)$ elle-même.

Références

[1] A. Hildebrand, Introduction to analytic number theory, notes disponibles en ligne https://faculty.math.illinois.edu/~hildebr/ant/.

Proposition des projets TER, Master 1
Maths. Fonda – Analyse-EDP-Probabilités, 2019

S. Kupin, ***skupin@math.u-bordeaux.fr***

Familles normales et le théorème d'uniformization. On dit qu'une famille de fonctions holomorphes sur un domaine est *normale*, si elle contient une sous-suite qui converge uniformement sur tout compact. Il se trouve que "la méthode de familles normales" permet de construire des fonctions holomorphes aux propriétés spécifiques voulues. Nous allons l'utiliser pour démontrer le théorème d'uniformisation que affiirme, grosso modo, que, d'un certain point de vue, les domaines non-triviaux (*i.e.,* leur "structures holomorphes") coïncident et ils sont les mêmes qu'un disque ouvert dans $\mathbf{C}$.

Références : J. Conway, Functions of one complex variable, Ch. 7, Springer, New York, 1978; notes du cours "Analyse complexe" de M1, Université de Bordeaux.

La formule de Poisson-Jensen pour des fonctions entières et quelques applications. Le projet consiste à obtenir la formule classique de Poisson-Jensen pour les fonctions entières. En outre d'être une formule intégrale "du type de Cachy" d'intêret indépendant, elle permet de relier la croissance d'une fonction entière à la caractéristique de la distribution de ses zéros. Nous en donnerons aussi quelques applications.

Références : B. Levin, Lectures on entire functions, Ch. 2, AMS, Providence, 1996.

Fonction maximale et convergence presque partout

Philippe Jaming
Institut Mathématique de Bordeaux
Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr
http://www.math.u-bordeaux.fr/p̃jaming/

Le but de ce mémoire est d'étudier le principal outil pour la convergence presque partout : les fonctions maximales.

Une des difficultés de l'analyse est la suivante : si on veut utiliser la théorie de Lebesgue (par exemple pour des propriétés de continuité d'intégrales) alors on ne peut plus évaluer ponctuellement une fonction : les éléments de $L^p(\mathbb{R})$ ne sont pas des fonctions, mais des classes de fonctions et ne sont donc définies que presque partout.

Pour remédier à cela, on peut considérer les moyennes des fonctions sur un intervalle

$$f_R(x) := \frac{1}{2R}\int_{x-R}^{x+R} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et remarquer que

— $f_R(x)$ ne dépend pas du représentant de la classe de fonctions (si on remplace f par $\tilde f$ tel que $\tilde f = f$ presque partout, alors $\tilde f_R(x) = f_R(x)$ pour tout x)

— si f est continue, alors $f_R(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Un résultat remarquable de Lebesgue est le suivant :

Théorème de différentiation de Lebesgue. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ alors $f_R \to f$ presque partout lorsque $R \to 0$.*

L'objectif de ce mémoire est de démontrer ce résultat ce qui nous conduira à étudier plusieurs outils fondamentaux en analyse :

— la *fonction maximale de Hardy-Littlewood* : $Mf = \sup_{R>0} \frac{1}{2R}\int_{x-R}^{x+R} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Nous verrons que le point clé consiste à montrer que M est un opérateur (sous-linéaire) continu sur L^p. Pour cela nous développerons plusieurs outils

— l'interpolation des opérateurs : il s'agit de voir ce qui se passe si un opérateur T est continu $L^{p_1} \to L^{q_1}$ et $L^{p_2} \to L^{q_2}$ alors il est aussi continu $L^p \to L^q$ pour $p_1 < p < p_2$ et un q qu'on déterminera

— un outil géométrique : les lemmes de recouvrement.

Tout cela se fera dans $\mathbb{R}^d$ où les intervalles $[x-R, x+R]$ seront remplacés par des boules $B(x,R)$. En fonction de l'avancement du TER, on pourra ensuite se demander ce qui se passe lorsque les boules seront remplacés par des sphères. Cela nécessitera de nouveaux outils : le principe de la phase stationnaire et les décomposition de Littlewood-Paley.

Références

[1] L. Grafakos *Classical and Modern Fourier Analysis.*

Baire non-Baire

Philippe Jaming
Institut Mathématique de Bordeaux
Philippe.Jaming@math.u-bordeaux.fr
http://www.math.u-bordeaux.fr/~pjaming/

Le théorème de Baire est un outil puissant de l'analyse. Il permet de montrer (de façon non-constructive) qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en en point (et même en un ensemble dense de points) et que de telles fonctions sont même denses dans l'ensemble des fonctions continues. Il en va de même pour les fonctions continues nulle-part dérivables. Les choses se compliquent lorsqu'on veut explicitement construire de telles fonctions et, bien que de telles fonctions soient denses, il n'est pas évident d'en construire explicitement. Ceci est l'objet de ce mémoire.

Pour une construction d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point, on utilisera le livre de Katznelson "Introduction to harmonic analysis"

Pour une fonction continue nulle part dérviable (par les séries de Fourier), on consultera Jon Johnsen "Simple Proofs of Nowhere-Differentiability for Weierstrass's Function and Cases of Slow Growth" Journal of Fourier Analysis and Applications February 2010, Volume 16, Issue 1, pp 17–33

Le théorème de Baire fait partie du cours d'analyse fonctionnelle du second semestre (mais pas du programme de l'agrégation, bien qu'il puisse être présenté en développement de leçon). Toutefois, ce mémoire est accessible, même en ne suivant pas l'option analyse fonctionnelle.

TOPOLOGIE, COMBINATOIRE ET ARITHMÉTIQUE DES REVÊTEMENTS DE LA SPHÈRE MOINS TROIS POINTS

JEAN-MARC COUVEIGNES

RÉSUMÉ. On étudiera les revêtements de la sphère de Riemann privée de trois points. Comme le groupe fondamental de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) - \{0, 1, \infty\}$ est un groupe libre à deux générateurs, ces revêtements admettent des descriptions combinatoires très explicites (paires de permutations, décompositions cellulaires de surfaces de Riemann, dessins, etc.) et sont énumérés par des méthodes combinatoires souvent élégantes. On sait grâce à Grothendieck et à Belyi que le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}$ agit fidèlement sur ces revêtements. Leur étude constitue une introduction accessible à la théorie inverse de Galois.

RÉFÉRENCES

[1] Claude GODBILLON : *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, Paris, 1971.

[2] I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON : The combinatorial relationship between trees, cacti and certain connection coefficients for the symmetric group. *European J. Combin.*, 13(5):357–365, 1992.

[3] Régine DOUADY et Adrien DOUADY : *Algèbre et théories galoisiennes. 1*. CEDIC, Paris, 1977. Algèbre.

[4] Régine DOUADY et Adrien DOUADY : *Algèbre et théories galoisiennes. 2*. CEDIC, Paris, 1979. Théories galoisiennes.

[5] Jean-Pierre SERRE : *Topics in Galois theory*, volume 1 de *Research Notes in Mathematics*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, second édition, 2008. With notes by Henri Darmon.

[6] Gunter MALLE et B. Heinrich MATZAT : *Inverse Galois theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2018. Second edition.

[7] Alexandre GROTHENDIECK : *Esquisse d'un programme*. `http://matematicas.unex.es/~navarro/res/esquissefr.pdf`, 1984.

JEAN-MARC COUVEIGNES, UNIV. BORDEAUX
Email address: `Jean-Marc.Couveignes@u-bordeaux.fr`

Date: 13 novembre 2019.

Encadrant : Olivier Brinon
olivier.brinon@math.u-bordeaux.fr

Groupes simples de petit ordre

Si G est un groupe fini, il est facile de montrer qu'il existe une suite de sous-groupes

$$\{e\} \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_r = G$$

telle que N_{i-1} soit distingué dans N_i et N_i/N_{i-1} soit simple pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$: les groupes finis sont donc « extensions » successives de groupes simples, qui apparaîssent comme les « briques » élémentaires des groupes finis. On sait bien sûr que les groupes simples abéliens sont cycliques d'ordre premier : on aimerait « comprendre » les groupes simples non abéliens. On en connaît déjà une infinité : les groupes alternés $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geq 5$. La question de la classification générale des groupes finis simples est un problème très difficile (qui n'a été complètement résolu que relativement récemment). Le but du TER est de comprendre pourquoi les seuls ordres possibles pour un groupe simple non abélien d'ordre ≤ 1000 sont $60, 168, 360, 504$ et 660. Pour cela, on démontrera une série de petits lemmes (certains ayant déjà étés vus en TD) s'appuyant sur les résultats du cours (théorèmes de Sylow, *etc*) qui permettent de montrer la non simplicité de groupes pour beaucoup d'ordres, ainsi que la simplicité des groupes $\mathsf{PSL}(n, \mathbf{F}_q)$ (sauf si $n =$ et $q \in \{2, 3\}$). Chemin faisant, on pourra éventuellement prouver des isomorphismes exceptionnels, voire des résultats d'unicité à isomorphisme près.

Références : I. Martin Isaacs, *Finite group theory*, Graduate studies in mathematics **92**, AMS.
D. Perrin, *Cours d'algèbre*, Ellipses.

Formes quadratiques sur Q

On sait que les formes quadratiques sur $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$, resp. les corps finis) sont classifiées par le rang (resp. la signature, resp. le rang et le discriminant). Le but du mémoire est de comprendre la classification sur $\mathbf{Q}$. Une forme quadratique sur $\mathbf{Q}$ peut bien sûr être vue comme une forme quadratique réelle : elle a une signature, mais cette information est très insuffisante pour la classification. Pour garder des informations arithmétiques, on considère en outre d'autres complétions de $\mathbf{Q}$: les corps $\mathbf{Q}_p$ des nombres p-adiques pour tout p premier. La classification des formes quadratiques sur $\mathbf{Q}_p$ pour tout p fournit une infinité d'invariants, qui permettent de classifier les formes quadratiques sur $\mathbf{Q}$.

Référence : J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, PUF.

Équations différentielles : le point de vue corporel

La théorie des extensions de corps permet facilement de montrer que certaines constructions géométriques (trisection d'un angle, quadrature du cercle) sont impossibles en utilisant seulement une règle (non graduée) et un compas. De façon analogue, il est possible de montrer que la fonction $x \mapsto \exp(x^2)$ n'admet pas de primitive s'exprimant avec « les fonctions élémentaires ». On travaille pour cela avec des extensions de corps différentiels (*i.e.* des corps munis d'une dérivation). Le but du TER est de présenter les rudiments de cette théorie et de démontrer le résulté mentionné ci-dessus.

Références : van der Put, Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Springer (2003).
Sujet du concours d'entrée aux Écoles normales supérieures (Lyon-Cachan) 1995.

GROUPES LINÉAIRES ET ALTERNATIVE DE TITS.

PIERRE MOUNOUD

On appelle alternative de Tits un théorème montré par Jacques Tits en 1972 qui affirme que tout sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ contient soit un sous-groupe d'indice fini résoluble (on dit qu'il est virtuellement résoluble) soit un groupe libre à deux générateurs.

L'exemple typique de sous-groupe résoluble de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ est donné par le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures n'ayant que des 1 sur la diagonale. Il n'est pas difficile de construire des sous-groupes libres de $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$, par exemple le sous-groupe engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est libre.

La preuve, de façon assez inattendue, utilise les corps p-adiques $\mathbf{Q}_q$ ie les complétés de $\mathbf{Q}$ pour la valeur absolue $|.|_p$ définie par $|p^n \frac{a}{b}|_p = p^{-n}$ si a et b sont premiers à p. Ce sera donc l'occasion de manipuler ces corps. Les autres ingrédients sont le « lemme du ping-pong » et la topologie de Zariski.

RÉFÉRENCES

[1] Y. Benoist, *Sous groupes discrets des groupes de Lie*, 1997 European Summer School in Group Theory *https ://www.math.u-psud.fr/ benoist/prepubli/0097luminy.pdf*

[2] S. Katok, *p-adic analysis compared with real*. Student Mathematical Library, 37. American Mathematical Society, Providence, RI ; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2007.

[3] P. Samuel, *Theorie algébrique des nombres*, Hermann Paris (1971).

[4] J. Tits, *Free subgroups in linear groups*, Jour. of Algebra 20 (1972) p.250-270.

E-mail address: pierre.mounoud@u-bordeaux.fr