Chapitre 4

Formes différentielles

4.1 Algèbre tensorielle.

4.1.1 Formes multilinéaires et produit tensoriel.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. On rappelle qu'une application L de E^k dans $\mathbb{R}$ est appelée une forme k linéaire si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on a $L(v_1, \ldots, av_i + bw_i, \ldots, v_k) = a\, L(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + b\, L(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, v_j et $w_i \in E$. On notera $\bigotimes^k E^*$ l'espace vectoriel des formes k-linéaires sur E.

Proposition-Définition 4.1.1 *Soit $L \in \bigotimes^k E^*$ et $T \in \bigotimes^l E^*$. Le produit tensoriel de L et T est la forme $k + l$ linéaire notée $L \otimes T$ définie par*

$$L \otimes T(v_1, \ldots, v_{k+l}) = L(v_1, \ldots v_k)T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}).$$

Cette opération n'est pas commutative, mais elle est associative.

Cette opération permet de donner une base de $\bigotimes^k E^*$. En effet, si on se donne une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale (c'est la base de E^*, telle que $e_i^*(e_j) = \delta_i^j$), on montre que (exercice)

$$L(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n} L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*(v_1, \ldots, v_k).$$

Comme il est facile de voir que la famille $\{e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*, 1 \leq i_j \leq n\}$ est libre on a bien une base de $\bigotimes^k E^*$ et que $\dim \bigotimes^k E^* = n^k$. La clef de ces preuves étant la simple observation du fait que $e_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k}^*(e_{j_1}, \ldots, e_{j_k})$ est non nul si et seulement si $(i_1, \ldots, i_k) = (j_1, \ldots, j_k)$.

4.1.2 Formes multilinéaires alternées et produit extérieur.

Définition 4.1.2 *Soit $L \in \bigotimes^k E^*$. On dira que L est alternée si, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots k\}$ et tout $(v_1, \ldots, v_k) \in E^k$, on a*

$$L(v_1, \ldots v_k) = \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature[1] *de σ. On notera $\bigwedge^k E^*$ l'espace vectoriel des k formes linéaires alternées.*

1. la signature est l'unique morphisme de groupe non trivial allant du groupe des permutations dans $\{-1, 1\}$

On pose $\bigwedge^0 E^* = \mathbb{R}$, une 0 forme linéaire alternée est une constante. Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$. Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$. L'application qui à n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ associe leur déterminant relativement à une base donnée appartient à $\bigwedge^n \mathbb{R}^{n*}$.

Exercice 23 Montrer que $L \in \bigotimes^k E^*$ est alternée si et seulement si $\{v_1, \dots v_k\}$ linéairement dépendants implique $L(v_1, \dots v_k) = 0$.

Proposition-Définition 4.1.3 *Si $L \in \bigotimes^k E^*$, on lui associe $\mathrm{Alt}\,(L) \in \bigwedge^k E^*$ (l'antisymétrisé de F) par*

$$\mathrm{Alt}\,(L)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)}),$$

où $\mathfrak{S}_k$ est le groupe des permutations de $\{1, \dots, k\}$. Si $L \in \bigwedge^k E^*$ alors $\mathrm{Alt}\,(L) = L$ (d'où le $\frac{1}{k!}$).

Preuve : en exercice.
Grâce à ce procédé on définit un produit sur l'espace des formes alternées.

Proposition-Définition 4.1.4 *Le produit extérieur de $L \in \bigwedge^k E^*$ et de $T \in \bigwedge^l E^*$ est la $k + l$ forme alternée $L \wedge T$ définie par*

$$L \wedge T = \frac{(k + l)!}{k!l!} \mathrm{Alt}\,(L \otimes T)$$

c'est-à-dire par

$$L \wedge T(v_1, \dots v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \dots v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots v_{\sigma(k+l)}),$$

où $\mathfrak{S}_{k+l}$ est le groupe des permutations de $\{1, \dots, k + l\}$.
Le produit extérieur est bilinéaire, associatif et vérifie $L \wedge T = (-1)^{kl} T \wedge L$.

Preuve : Il faut vérifier que $L \wedge T$ est bien $k + l$ linéaire et alterné. Soit μ une permutation.

$$\begin{aligned} L \wedge T(v_{\mu(1)}, \dots v_{\mu(k+l)}) &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\mu)^2 L(v_{\sigma\circ\mu(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\mu(k)}) T(v_{\sigma\circ\mu(k+1)}, \dots, v_{\sigma\circ\mu(k+l)}) \\ &= \varepsilon(\mu) \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \varepsilon(\sigma \circ \mu) L(v_{\sigma\circ\mu(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\mu(k)}) T(v_{\sigma\circ\mu(k+1)}, \dots, v_{\sigma\circ\mu(k+l)}) \\ &= \varepsilon(\mu) L \wedge T(v_1, \dots v_{k+l}). \end{aligned}$$

La bilinéarité est évidente.
Soit τ la permutation qui transforme $(1, \dots, k+l)$ en $(k+1, \dots k+l, 1, \dots, k)$. On a $\varepsilon(\tau) = (-1)^{k+l}$. On voit que $T \wedge L(v_1, \dots v_{k+l}) = L \wedge T(v_{\tau(1)}, \dots v_{\tau(k+l)})$, d'où $L \wedge T = (-1)^{kl} T \wedge L$.

L'associativité est plus difficile à montrer. On utilise le lemme suivant

Lemme 4.1.5 *Si $L \in \bigotimes^k E^*$, $T \in \bigotimes^l E^*$ et $\mathrm{Alt}\ T = 0$, alors*

$$\mathrm{Alt}\,(L \otimes T) = 0$$

Idée de la preuve du lemme 4.1.5 (voir Spivak p. 80) On considère la relation d'équivalence sur $\mathfrak{S}_{k+l}$ définie par $\sigma \simeq \tau$ si $\sigma(1) = \tau(1) \ldots \sigma(k) = \tau(k)$. On note C_j les classes d'équivalences de cette relation. On a pour tout j

$$\sum_{\sigma \in C_j} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \ldots v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots v_{\sigma(k+l)}) = C^{ste} \sum_{\sigma \in C_j} \varepsilon(\sigma) T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots v_{\sigma(k+l)}) = 0$$

Or $\cup_j C_j = \mathfrak{S}_{k+l}$ d'où

$$\mathrm{Alt}\,(L \otimes T) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_j \sum_{\sigma \in C_j} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \ldots v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots v_{\sigma(k+l)}) = 0.$$

□

On a :

$$\mathrm{Alt}\ (\mathrm{Alt}\,(L \otimes T)) - (L \otimes T)) = \mathrm{Alt}\,(L \otimes T)) - \mathrm{Alt}\,(L \otimes T)) = 0$$

donc par 4.1.5 on a

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Alt}\ ([\mathrm{Alt}\,(L \otimes T) - (L \otimes T)] \otimes U) \\ &= \mathrm{Alt}\ (\mathrm{Alt}\,(L \otimes T) \otimes U) - \mathrm{Alt}\ (L \otimes T \otimes U) \end{aligned}$$

On en déduit que, lorsque ces formes sont alternées,

$$(L \wedge T) \wedge U = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} \mathrm{Alt}((L \wedge T) \otimes U) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \mathrm{Alt}\,(L \otimes T \otimes U).$$

De la même façon montre

$$L \wedge (T \wedge U) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} \mathrm{Alt}\,(L \otimes T \otimes U)$$

et on a montré l'associativité. □

Si $k = l = 1$, on a $L \wedge T(v, w) = L(v)T(w) - L(w)T(v)$.

Exercice 24 Montrer que

$$L \wedge T(v_1, \ldots v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \Gamma_{k,l}} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)}),$$

où $\Gamma_{k,l}$ est le groupe des permutations de $\{1, \ldots, k+l\}$ telles que

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(k), \quad \text{et} \quad \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)$$

(on peut penser à un mélange de cartes « américain »). C'est la définition que l'on trouvera dans de nombreux livres. Elle a le mérite d'avoir un sens en caractéristique quelconque.

Exercice 25 Si $l = 1$, montrer que $L \wedge T(v_1, \ldots, v_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+k} L(v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_{k+1}) T(v_i)$. La notation $\widehat{v_i}$ indiquant que le terme v_i est absent ! En déduire, par recurrence, une preuve de la proposition suivante

Proposition 4.1.6 *Si $L_1, \ldots, L_k$ sont des formes linéaires, alors*

$$L_1 \wedge \cdots \wedge L_k(v_1, \ldots v_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) L_1(v_{\sigma(1)}) \ldots L_k(v_{\sigma(k)}) = \det((L_i(v_j))_{i,j}).$$

Exemples 4.1.7 Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E de base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. On a $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 1$ si et seulement si $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots j_k)$ et $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$ sinon.
Ainsi la famille $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \,|\, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ est libre.

Théorème 4.1.8 *Si $L \in \bigwedge^k E^*$ et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E de base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ alors*

$$L = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*.$$

Preuve On note $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

(autrement dit $L = \sum_{i_1, \dots, i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*$).

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$. S'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)}$. De plus $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) L(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}})$. D'où

$$\begin{aligned}
L(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_k^{i_{\sigma(k)}} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)}^{i_1} \dots v_{\sigma(k)}^{i_k} \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(v_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(v_1, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

Corollaire 4.1.9 *Si $k > n$ l'espace vectoriel $\bigwedge^k E^*$ est réduit à 0. La famille $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \,|\, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ est une base de $\bigwedge^k E^*$ et* $\dim\,(\bigwedge^k E^*) = \binom{n}{k}$.

Preuve : Si $k > n$ il n'existe pas de suites $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Le théorème 4.1.8 nous dit que cette famille engendre $\bigwedge^k E^*$. On a vu à l'exemple 4.1.7 qu'elle est libre. Enfin son cardinal est $\binom{n}{k}$ $\square$

4.2 Formes différentielles

Définition 4.2.1 *Une forme différentielle de degré k (ou k-forme différentielle) lisse sur un ouvert U d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est une application lisse de U dans $\bigwedge^k E^*$. L'espace vectoriel des formes de degré k sur U est noté $\Omega^k(U)$.*

Un élément de $\Omega^0(U)$ est une fonction lisse de U dans $\mathbb{R}$. La différentielle d'une fonction lisse f de U dans $\mathbb{R}$ appartient à $\Omega^1(U)$, on la notera df.
Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $\alpha \in \Omega^k(U)$, pour tout $x \in U$, il existe des réels $\alpha_{i_1, \dots, i_k}(x)$ tels que :

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(x) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*.$$

Comme e_i^* est la différentielle de l'application i^{eme} coordonnée $x \mapsto x^i$ on écrit

$$\alpha_x = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Les fonctions $\alpha_{i_1,\ldots,i_k}$ sont obtenues en composant α avec des applications coordonnées et sont donc lisses. La différentielle d'une application lisse $f : U \to \mathbb{R}$, notée df, s'écrit

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

La définition du produit extérieur s'étend aux formes différentielles. Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^l(U)$, on pose $(\alpha \wedge \beta)_x = (\alpha_x \wedge \beta_x)$. On peut vérifier que les fonctions $(\alpha \wedge \beta)_{i_1,\ldots,i_{k+l}}$ sont lisses.

Définition 4.2.2 *Soit U et V des ouverts d'espaces vectoriels et f une application lisse de U dans V. L'image réciproque par f de $\alpha \in \Omega^k(V)$, notée $f^*\alpha$, est la forme sur U définie par*

$$(f^*\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) = \alpha_{f(x)}(Df(x).v_1, \ldots, Df(x).v_k).$$

On note $y^1, \ldots, y^m$ les coordonnées sur V et $(f^1, \ldots, f^m)$ les composantes de f. On remarque que $dy^i(Df(x).v) = (df^i)_x(v)$. Ainsi si $\alpha_y = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$, alors $(f^*\alpha)_x = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \alpha_{i_1,\ldots,i_k}(f(x))(df^{i_1} \wedge \cdots \wedge df^{i_k})_x$. Il ne reste plus qu'à développer grâce à la multilinéarité du produit extérieur.

Exemples 4.2.3 Prenons $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}_+^*$ et $f(t) = e^t$. Alors $f^*(dx/x) = \frac{1}{f(t)} df(t) = dt$.
Si $U = V = \mathbb{R}^2$ et $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$, on a

$$f^*(dx^1 \wedge dx^2) = (\cos v du - u \sin v dv) \wedge (\sin v du + u \cos v dv) = u du \wedge dv.$$

Plus généralement (exercice) si U et V sont des ouverts de même dimension n

$$f^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = (\det Df(x))(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n).$$

Proposition 4.2.4 *Soit $f : U \to V$ une application lisse.*

1) Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a

$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$

2) Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$, on a

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

3) Soient $g : V \to W$ est une autre application lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$. Alors,

$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

Preuve : 1) et 2) en exercice, prouvons 3)

$$\begin{aligned}
((g \circ f)^*\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) &= \alpha_{g \circ f(x)}(D(g \circ f)(x).v_1, \ldots, D(g \circ f)(x).v_k) \\
&= \alpha_{g \circ f(x)}(Dg(f(x)).Df(x).v_1, \ldots, Dg(f(x)).Df(x).v_k) \\
&= (g^*\alpha)_{f(x)}(Df(x).v_1, \ldots, Df(x).v_k) \\
&= (g^*(f^*\alpha))_x(v_1, \ldots, v_k) \qquad \square
\end{aligned}$$

4.3 Différentielle extérieure

On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, ie on pose $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$. La différentielle permet d'associer une 1 forme à une 0 forme (ie une fonction). On étend ceci aux k formes différentielles.

Théorème 4.3.1 *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E. Il existe une application linéaire $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ et une seule ayant les propriétés suivantes :*

i) si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors $d\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$.

ii) la restriction de d à $\Omega^0(U)$ est la différentielle des fonctions.

iii) si $\alpha \in \Omega^k(U)$, alors $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \beta$.

iv) $d \circ d = 0$.

Preuve : Montrons d'abord l'unicité. Si $d \circ d = 0$ on a $d(dx^i) = 0$. En utilisant iii) on a donc $d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = 0$ pour tout $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$. On en déduit que

$$d(f\ dx^{i_1} \wedge dx^{i_k}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ s'écrit

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

en utilisant la linéarité de d on a forcément

$$d\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} d\alpha_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \qquad (\star)$$

Il faut voir maintenant que cette formule convient...

L'expression $(\star)$ est bien linéaire, elle vérifie clairement i) et ii). Pour prouver iii), il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{et} \quad \beta = g\ dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= (f\ dg + g\ df) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
d\alpha \wedge \beta &= gdf \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
\alpha \wedge d\beta &= f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\
&= (-1)^k f\ dg \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}
\end{aligned}$$

Voyons que $d \circ d = 0$. Commençons par les fonctions. On a $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. D'aprés $(\star)$, on a donc

$$d(df) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} (\frac{\partial f}{\partial x^i}) dx^j \right) \wedge dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i = 0,$$

d'aprés le théorème de Schwarz.

Toujours d'aprés $(\star)$, $d(dx^i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Donc pour toute k forme α

$$d(d\alpha) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m} d(d\alpha_{i_1,\ldots,i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = 0.$$

Ce qui termine la preuve du théorème.

Exemples 4.3.2 Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et si $\alpha = Pdx + Bdy + Cdz$, alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dz \wedge dx.$$

Si $\beta = P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy)$,

$$d\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Définition 4.3.3 *L'opérateur ainsi défini s'appelle la différentielle extérieure.*
Si $d\alpha = 0$ on dit que α est fermée. S'il existe β telle que $d\beta = \alpha$. On dit que α est exacte.

On peut donc exprimer la proposition $d \circ d = 0$ par une forme exacte est fermée. Attention, la réciproque est fausse. Comme on le verra plus tard la 1 forme sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par $\frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ est fermée mais non exacte.

Proposition 4.3.4 *La différentielle extérieure et l'image réciproque commutent, c'est-à-dire si U et V sont des ouverts d'espaces vectoriels et si φ est une application lisse de U dans V, alors pour tout $\alpha \in \Omega(V)$, on a*

$$\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha)$$

Preuve : Commençons par les 0 formes, ie les fonctions. Dans ce cas la formule devient

$$d(f \circ \varphi) = \varphi^* df,$$

où l'on reconnait le théorème de dérivation composée.

Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour les formes qui s'écrivent $f\ dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. On a vu que

$$\varphi^*\alpha = (f \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k},$$

où les φ_i sont les composantes de φ. On a donc

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\alpha) &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\varphi_{i_k}, \\ &= (\varphi^* df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) \\ &= \varphi^*(d\alpha) \qquad \square \end{aligned}$$

On peut donc dire que l'image réciproque d'une forme fermée (resp. exacte) est une forme fermée (resp. exacte).

4.4 Le lemme de Poincaré.

Définition 4.4.1 *Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est contenu dans U.*

On peut maintenant formuler le Lemme de Poincaré.

Théorème 4.4.2 (Lemme de Poincaré) *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.*

Preuve : Pour alléger les notations on suppose que U est étoilé par rapport à l'origine. Montrons ce résultat pour les 1 formes. Soit $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ vérifiant $d\alpha = 0$. Soit f la fonction définie sur U par

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 \alpha_i(tx)dt.$$

Remarquons que ceci a un sens car pour tout $x \in U$ le segment $[0, x] \subset U$.

Calculons sa différentielle

$$\begin{aligned}
df(x) &= \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx)dt\right) dx^i + \sum_{i=1}^n x^i \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt\right) dx^j && (4.1)\\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 t\, x^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx)dt\right) dx^j && (4.2)\\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 t\, x^i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}(tx)dt\right) dx^j && (4.3)\\
&= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_j(tx)dt + \int_0^1 t\, \frac{d}{dt}\alpha(tx)dt\right) dx^j && (4.4)\\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j dx^j = \alpha && (4.5)
\end{aligned}$$

Le passage de la ligne 2) à la ligne 3) se fait en utilisant $d\alpha = 0$ celui de la ligne 4) à la ligne 5) en intégrant par parties.

Pour une forme de degré quelconque, on peut aussi produire une primitive par intégration. Si $\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$, on définit une k forme $I(\alpha)$ par

$$I(\alpha) = \sum_{i_1<\cdots<i_{k+1}} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^k \alpha_{i_1,\ldots,i_{k+1}}(tx)dt\right) x^{i_j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k+1}}$$

ou

$$I(\alpha)_x(v_1, \ldots, v_k) = \int_0^1 t^k \alpha_{t\,x}(x, v_1, \ldots, v_k)\, dt$$

On peut montrer que pour toute forme différentielle α, on a $d(I(\alpha)) + I(d\alpha) = \alpha$. Lorsque $d\alpha = 0$ on a le résultat voulu ($I(0) = 0$). On pourra consulter le livre de M. Spivak : *Calculus on manifolds* p.94 pour la preuve et le livre de J. Lafontaine *introduction aux variétés différentielles* pour une explication de comment on en arrive à une telle formule. □

Corollaire 4.4.3 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \Omega^k(U)$. Si U est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et si $d\alpha = 0$ alors α est exacte.*

Preuve : Soit $f : \mathbb{R}^n \to U$ un difféomorphisme. La proposition 4.3.4 nous dit que $f^*\alpha$ est fermée. D'après le lemme de Poincaré, il existe $\beta \in \Omega^{k-1}$ telle que $d\beta = f^*\alpha$. En utilisant 4.2.4 et à nouveau 4.3.4 et , on a

$$d(f^{-1*}\beta) = f^{-1*}d\beta = f^{-1*}f^*\alpha = \alpha.$$

Ce qui montre que α est exacte.□

Si on peut montrer qu'il existe une 1-forme fermée non-exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a donc

Corollaire 4.4.4 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *n'est pas difféomorphe à* $\mathbb{R}^2$.

4.5 1-formes fermées et intégrales.

Définition 4.5.1 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Omega^1(U)$, $\gamma : [a,b] \to U$ continue et $a = t_1 < t_2 < \cdots < t_k = b$ tels que la restriction de γ à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est de classe C^1 (on dit alors que γ est de classe C^1 par morceaux). On définit alors l'intégrale de α le long de γ comme*

$$\int_\gamma \alpha := \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_i^* \alpha = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{(\gamma(t))}.\gamma_i'(t)dt,$$

où γ_i désigne la restriction de γ à $[t_i, t_i + 1]$.

Il est facile de vérifier que si on effectue un changement de paramétrage *croissant* (C^1) sur γ l'intégrale ne change pas mais qu'elle est transformée en son opposé si celui-ci est décroissant. En effet

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{(\gamma(t))}.\gamma'(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(t_i)}^{\varphi^{-1}(t_{i+1})} \alpha_{(\gamma\circ\varphi(t))}.\gamma'(\varphi(t))\ \varphi'(t)dt.$$

Si α est exacte, c'est-à-dire s'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ lisse telle que $df = \alpha$ alors cette intégrale ne dépend que des extrémités de γ :

$$\int_\gamma df = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier si $\gamma(a) = \gamma(b)$ alors

$$\int_\gamma df = 0.$$

On a donc un moyen de tester si une forme est exacte. Essayons le. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. Prenons $\gamma : [0, 2\pi] \to U$ défini par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. On a

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} (\cos t)(\cos t) - (\sin t)(-\sin t)dt = 2\pi \neq 0$$

Ainsi α n'est pas fermée, ce qui prouve 4.4.4. Il existe une réciproque :

Proposition 4.5.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs et $\alpha \in \Omega^1(U)$. La forme α est exacte si et seulement si pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux $\int_\gamma \alpha = 0$*

Preuve : On se donne un point $x_0 \in U$. Pour tout $x \in U$, il existe un chemin C^1 par morceaux γ qui relie x_0 à x. Si l'intégrale sur tout lacet est nulle alors $\int_\gamma \alpha$ ne dépend pas du choix de γ (à vérifier). Ainsi, la fonction f définie par $f(x) = \int_\gamma \alpha$ est bien définie.

On considère le chemin γ_i défini sur un voisinage de 0 par $t \mapsto x + te_i$. On désigne par $\gamma + \gamma_i$ le chemin C^1 par morceaux obtenu en mettant bout à bout les chemins γ et γ_i. On a dès lors

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+te_i) - f(x)) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\int_{\gamma+\gamma_i} \alpha - \int_\gamma \alpha\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_{\gamma_i}\alpha \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \alpha_i(x+te_i)dt = \alpha_i(x).\end{aligned}$$

□

Cette récriproque semble impossible à mettre en oeuvre, on ne peut pas intégrer sur tous les lacets de U. En fait, il suffit d'en choisir correctement un certain nombre. . .Par exemple :

Proposition 4.5.3 *Soit* $C : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *donné par* $C(t) = (\cos t, \sin t)$*. Si* $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ *vérifie* $d\alpha = 0$ *et* $\int_C \alpha = 0$*, alors* α *est exacte.*

Preuve : Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^{\pm} : U^{\pm} \to \mathbb{R}$ telles que $df^{\pm} = \alpha_{|U^{\pm}}$.

Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1*-forme diffèrent d'une constante* (ce n'est plus vrai pour les k-formes si $k > 1$).

On a $U^+ \cap U^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x \neq 0\}$ qui n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $\{(x, y) \,|x > 0\}$ et $\{(x, y) \,|x < 0\}$. Sur chacun de ces ouverts connexes, on a donc deux primitives d'une même forme.

Ainsi il existe $c_+ \in \mathbb{R}$ (resp. c_-) telle que $f^+(x, y) = f^-(x, y) + c_+$ (resp $f^+(x, y) = f^-(x, y) + c_-$) si $x > 0$ (resp. si $x < 0$). Quitte à remplacer f^- par $f^- + c_-$ on peut supposer $c_- = 0$. Dès lors α est exacte si et seulement si $c_+ = 0$.

Remarquons que la restriction de C à $[0, \pi]$ (resp. $[\pi, 2\pi]$) arrive dans U_- (resp. U^+). Ainsi

$$\begin{aligned} 0 = \int_C \alpha &= \int_0^{\pi} \alpha(C(t))C'(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} \alpha(C(t))C'(t)dt \\ &= [f^-(C(t))]_0^{\pi} + [f^+(C(t))]_{\pi}^{2\pi} = f^-(-1, 0) - f^-(1, 0) + f^+(1, 0) - f^+(-1, 0) = c_+ \end{aligned}$$

□

Exercice 26 Déduire de 4.5.3 que si α est une 1 forme fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ alors il existe un réel k et une fonction f tels que $\alpha = k\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} + df$

Comme on peut le préssentir à la lecture de la preuve, la proposition 4.5.3 est un cas particulier d'un résultat plus général.

Définition 4.5.4 *Deux lacets* C^1 *par morceaux* $\gamma_0,\ \gamma_1\ : [a, b] \to U$ *sont dit (librement) homotopes dans* U *s'il existe une application continue* $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ *telle que pour tout* $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$ *:*

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t), \quad H(a, s) = H(b, s)$$

et que les lacets γ_s *définis par* $\gamma_s(t) = H(t, s)$ *sont aussi* C^1 *par morceaux.*

Théorème 4.5.5 *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* α *une* 1 *forme fermée sur* U*. Si* γ_0 *et* γ_1 *sont deux lacets homotopes sur* U *alors*

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha.$$

Idée de preuve : Soit $s \in [0, 1]$. On peut recouvrir $\gamma_s([a, b])$ par un nombre fini de boules $B_1, \ldots, B_k$ contenues dans U. Sur chaque B_i, il existe une primitive f_i de α. Il existe donc des nombres c_i tels que pour tout $x \in B_i \cap B_{i+1}$ on a $f_{i+1}(x) = f_i(x) + c_i$. On a vu que l'intégrale de α le long de γ_s ne dépend en fait que de ces nombres. Maintenant si s' est suffisamment proche de s on peut recouvrir $\gamma_{s'}([a, b])$ par les mêmes boules et donc conserver les mêmes c_i. L'application $s \mapsto \int_{\gamma_s} \alpha$ est donc localement constante et donc constante car $[0, 1]$ est connexe.□

Corollaire 4.5.6 *Si* U *est simplement connexe (ie si tous les lacets de* U *sont homotopes à un chemin constant) alors toute* 1*-forme fermée sur* U *est exacte.*

Corollaire 4.5.7 $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *n'est pas simplement connexe. Si* $p \neq q$*, le cercle parcouru* p *fois n'est pas homotope dans* U *au cercle parcouru* q *fois.*