Licence de Mathématiques, parcours mathématiques fondamentales
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Géométrie Différentielle (4TMF602U) **02/05/2018** **durée : 3h00**

Épreuve de M. Mounoud Documents interdits, calculette homologuée autorisée

Questions indépendantes

1) Montrer qu'un arc birégulier de $\mathbb{R}^3$ dont la torsion est nulle est contenu dans un plan.
2) Montrer qu'une surface connexe de $\mathbb{R}^3$ dont l'application de Gauss est constante est contenue dans un plan.
3) Montrer que 3 droites concourantes contenues dans une surface lisse de $\mathbb{R}^3$ sont forcément coplanaires.

Exercice 1

Soit V une sous-variété *compacte* de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$ ne contenant pas 0. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle x, x\rangle$, où $\langle ., .\rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on pose $S_c = f^{-1}(\{c\})$.

1) Pour tout $c > 0$, identifier S_c et décrire, sans preuve, son plan tangent en un point.
2) Montrer que $f_{|V}$, la restriction de f à V, admet un minimum et un maximum.
3) Soit x_0 un point de V tel que $f(x_0)$ est extremum local de $f_{|V}$. Montrer que x_0 est perpendiculaire à $T_{x_0}V$.
4) Soient $\rho > 0$ et $x_0 \in V$ tels que $f(x_0) = \rho^2 = \max_{x\in V}\{f(x)\}$.
Montrer que l'intersection de V et du plan <u>affine</u> tangent en x_0 à V est réduite à $\{x_0\}$. Que peut-on en déduire concernant la courbure de V en x_0 ? Faire un dessin illustrant les positions respectives de V et S_{ρ^2} (on pourra dessiner V sous la forme d'un tore).
5) Soit $\gamma\ :]-1,1[\to V$ une application lisse telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\|\gamma'(0)\| = 1$. Montrer que
$$f\circ\gamma(t) = \rho^2 + \left(1 + \langle\gamma''(0), x_0\rangle\right)t^2 + t^2\varepsilon(t),$$
où ε est une fonction qui tend vers 0 en 0. En déduire que $\langle\gamma''(0), x_0\rangle \leq -1$.
6) Soit II_{x_0} la seconde forme fondamentale de V au point x_0. Montrer que
$$|II_{x_0}(\gamma'(0), \gamma'(0))| \geq 1/\rho,$$
(on pourra remarquer que la normale unitaire à V en x_0 est égale à $\pm\frac{1}{\rho}x_0$).
7) Montrer que la courbure de Gauss de V au point x_0 est supérieure ou égale à $1/\rho^2$.

Exercice 2

1) Montrer que $F :]0, +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par $F(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), u\,v)$ est une immersion injective. Dessiner l'image de F (que l'on désignera par S).
2) Donner les expressions des deux formes fondamentales de S dans les coordonnées (u, v). En déduire la courbure de S.
3) Calculer l'aire de $F(]0, 1[\times]0, 1[)$.

Exercice 3

Soit α une 1-forme *fermée* sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Soient $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0 \text{ ou } y < 0\}$ et $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0 \text{ ou } y > 0\}$.

1) Montrer que U_1 et U_2 sont des ouverts étoilés. Déterminer $U_1 \cap U_2$.
2) Montrer que, pour tout $i \in \{1, 2\}$, il existe une application $f_i : U_i \to \mathbb{R}$ telle que df_i est égale à la restriction de α à U_i. Que peut-on dire de $f_1 - f_2$?
3) Soit $\gamma : [a, b] \to U_i$ un arc lisse. Donner une expression de $\int_\gamma \alpha$ en fonction de f_i.
4) Soit $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $c(t) = (\cos t, \sin t)$. Exprimer $\int_c \alpha$ en fonction des fonctions f_1 et f_2 (on pourra considérer les restrictions de c à $[0, \pi]$ et à $[\pi, 2\pi]$).
5) Déduire de ce qui précède que α est exacte si et seulement si $\int_c \alpha = 0$.
6) Soit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la courbe fermée lisse donnée par la figure 1 (on suppose que la restriction de γ à $]0, 1[$ est injective et que $\gamma(0) = \gamma(1) = a_1$). Soient $a_1, \ldots, a_6$ les points de $\gamma \cap (Ox)$ indiqués sur la figure 1.
   Exprimer $\int_\gamma \alpha$ en fonction des $f_i(a_j)$. En déduire que $\int_\gamma \alpha = 0$.
   Selon vous à quelle propriété de γ cela est-il dû ?

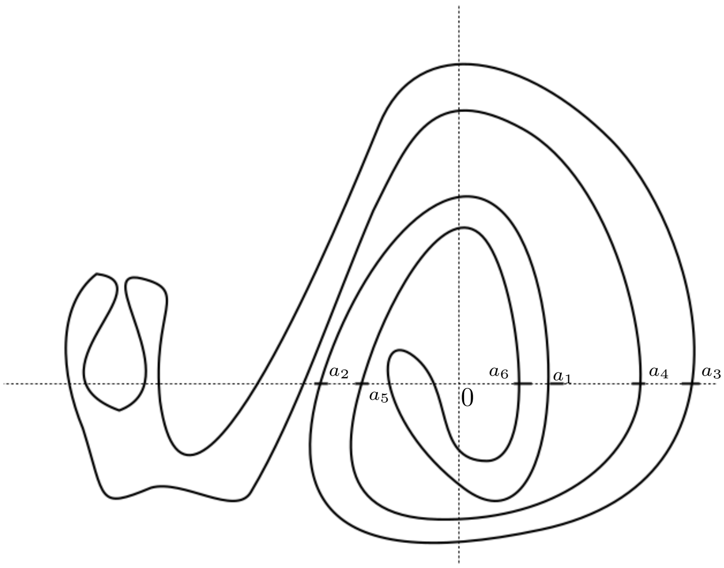

Figure 1 – la courbe γ et les axes Ox et Oy.