Université Bordeaux 1 Année 2006-2007
Licence 3 Mathématiques

Géométrie différentielle,

Feuille 3, applications entre sous-variétés.

Exercice 1. Soient a, b, c trois réels non nuls. Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$. Montrer que $f|_E$ est un difféomorphisme de E sur S^2.
Soient E et F deux espaces euclidiens de dimensions p et q. Soit $Q = \{(x, y) \in E \times F \mid \|x\|^2 - \|y\|^2 = 1\}$ une quadrique. Montrer que Q est une hypersurface lisse de $E \times F$. Montrer que Q est difféomorphe à $S^{p-1} \times \mathbb{R}^q$.

Exercice 2. a- Montrer que le groupe $\mathrm{SU}(n) = \{M \in M(n, \mathbb{C}) \mid \det M = 1 \text{ et } M^*M = Id\}$ est une sous-variété de $M(n, \mathbb{C})$ identifié à $\mathbb{R}^{2n^2}$.
b- Montrer que $SU(2)$ est difféomorphe à la sphère S^3.
c- Montrer que les applications

$$\begin{array}{ccc} SU(n) & \to & SU(n) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} SU(n) \times SU(n) & \to & SU(n) \\ (M, N) & \mapsto & MN \end{array}$$

sont lisses. En déduire que $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ sont des difféomorphismes de $SU(n)$. Quelle relation peut-on en déduire entre $T_M SU(n)$ et $T_{AM} SU(n)$.

Exercice 3. *Projections stéréographiques*
Soit S^n la sphère unité euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$. Dans la suite on identifie $\mathbb{R}^{n+1}$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, et l'on note $N = (0, 1)$ et $S = (0, -1)$ les «pôles Nord et Sud» de S^n.

(1) Pour tout point M de $S^n \setminus \{N\}$, on note $i_N(M)$ l'intersection de la droite (MN) avec l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ identifié à $\mathbb{R}^n$.
   (a) Expliciter l'application $i_N : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ ainsi définie.
   De même, définir et expliciter une application $i_S : S^n \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^n$.
   (b) Montrer que que i_N et i_S sont des difféomorphismes de la sphère privée d'un point sur R^n.
   Calculer $i_S \circ i_N^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et montrer que c'est une inversion de $\mathbb{R}^n$ (de pôle 0 et de module 1).

   i_N et i_S sont appelées les *projections stéréographiques* selon les pôles N et S. Elles définissent donc un atlas à deux cartes de la sphère.

(2) On se place dans le cas $n = 2$ et on identifie R^2 à $\mathbb{C}$. On veut prolonger « à l'infini » les polynômes. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynômiale non constante. On définit $f : S^2 \to S^2$ par

$$f(x) = i_N^{-1}(P(i_N(x))), \text{ si } x \neq N, \text{ et } f(N) = N.$$

Montrer que f est lisse (on utilisera la carte $(S^2 \setminus \{S\}, i_S)$).

Exercice 4. Soit M une sous-variété lisse compacte de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et soit f une fonction lisse de M dans $\mathbb{R}$. On note a le maximum de f. On suppose que tout les $x \in f^{-1}(a)$ sont des points critiques non dégénérés. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f^{-1}([a, a - \varepsilon[)$ est difféomorphe à une reunion finie disjointe de boules ouvertes de $\mathbb{R}^p$.
(on utilisera le lemme de Morse)

Exercice 5. Soient M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et N une sous-variété de $\mathbb{R}^p$. Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid x \in M,\, y \in N\}$ est une sous-variété que l'on notera $M \times N$.
Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\varphi(x, y, z, t) = \big((2 + z)x, (2 + z)y, t\big)$. Montrer que $\varphi(S^1 \times S^1)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ qui est C^∞-difféomorphe à $S^1 \times S^1$ (on dit que φ est un plongement de $S^1 \times S^1$). Quelle allure a t-elle ? [indication : on pourra utiliser un paramétrage de $S^1 \times S^1$]
Montrer que $S^2 \times S^2$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^6$ contenue dans une sphère euclidienne. En déduire en utilisant l'exercice 3 qu'il existe un plongement de $S^2 \times S^2$ dans $\mathbb{R}^5$.