

Chapitre introductif.

Magali Rocher.

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$ et C une courbe algébrique projective lisse connexe définie sur k et de genre $g \geq 2$. Soit G un groupe (nécessairement fini) de k -automorphismes de C . L'objet de cette thèse est d'étudier l'action de G sur C en caractéristique positive $p > 0$ lorsque G est un p -groupe tel que $|G| > \frac{2p}{p-1}g$. Ce chapitre introductif vise principalement à replacer notre travail dans un contexte plus général et à justifier notre problématique : nous rappelons ainsi un certain nombre de résultats déjà connus mais aussi de questions ouvertes, et actuellement en discussion, autour des G -actions de courbes, en caractéristique nulle et en caractéristique positive $p > 0$ dans le cas d'une action modérée (paragraphe 1), puis en caractéristique positive $p > 0$ lorsque p divise l'ordre de G et qu'apparaît de la ramification sauvage (paragraphe 2). Dans le paragraphe suivant, nous expliquons les motivations initiales et les applications possibles, en particulier la recherche de groupes de monodromie maximaux (paragraphe 3). Nous terminons ce chapitre préliminaire par une présentation des résultats obtenus dans les trois chapitres suivants de la thèse (paragraphe 4).

1 La caractéristique nulle et le cas modéré.

1.1 Définitions et notations préliminaires.

On commence ici par donner quelques définitions et notations qui, sauf mention explicite du contraire, seront conservées tout au long de ce chapitre introductif. On note k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, C une courbe algébrique projective lisse, connexe, définie sur k , de genre $g \geq 2$ et $\text{Aut}_k(C)$ le groupe des k -automorphismes de C . Fixons G un groupe fini. L'action (supposée fidèle) du groupe G sur la courbe C est la donnée d'un morphisme injectif $\phi : G \rightarrow \text{Aut}_k(C)$. On peut donc toujours identifier G à un sous-groupe de $\text{Aut}_k(C)$. Le couple (C, ϕ) est appelé une G -courbe. Deux G -courbes (C, ϕ) et (C', ϕ') sont équivalentes s'il existe un G -isomorphisme $f : C \rightarrow C'$, i.e. un isomorphisme tel que, pour tout $s \in G$ et tout $x \in C$, $f(\phi(s)x) = \phi'(s)f(x)$. Dans la suite, on omettra de mentionner le morphisme ϕ . Ainsi, pour alléger les notations, l'action sera notée de manière abrégée : $(s, x) \rightarrow sx$ et on parlera de la G -courbe C au lieu de la G -courbe (C, ϕ) .

Soit $\pi : C \rightarrow C/G$ le revêtement galoisien de groupe G associé à la G -courbe C . Si $p > 0$, on suppose, dans cette première partie uniquement, que p ne divise pas l'ordre de G . Ceci implique en particulier que l'action est modérée, i.e. que p ne divise pas l'ordre des groupes d'inertie, le groupe d'inertie au point $x \in C$ étant le sous-groupe stabilisateur $G_x := \{s \in G, sx = x\}$. Un point $x \in C$ est appelé point de ramification si son groupe d'inertie G_x est non trivial. L'orbite d'un tel point est appelé orbite singulière. A tous les points de ramification d'une même orbite singulière, correspond exactement un point de branchement $y \in C/G$. Le nombre de points de branchement coïncide donc avec le nombre d'orbites singulières. Soit $x \in C$ un point de ramification. Le groupe d'inertie G_x est un groupe cyclique dont l'ordre est l'indice de ramification de x , lequel est premier à p . On note désormais $\{x_1, \dots, x_r\}$ un système de représentants des orbites singulières de la G -courbe C , $\{y_1, \dots, y_r\}$ les points de branchement correspondants et $\{n_1, \dots, n_r\}$ les indices de ramification, i.e. les ordres des groupes d'inertie. On suppose les n_i rangés par ordre croissant. Le r -uplet (n_1, \dots, n_r) est alors appelé signature de la G -courbe C .

1.2 Introduction à l'étude des groupes d'automorphismes des surfaces de Riemann compactes.

Avec Schwarz, Klein, Hurwitz, Wiman et d'autres, le XIX ième siècle a vu émerger bon nombre de travaux consacrés à l'étude des groupes d'automorphismes des surfaces de Riemann compactes. Sans être exhaustif, nous rappelons ici quelques-uns des jalons qui ont marqué cette histoire.

Dans ce paragraphe, k est le corps des nombres complexes \mathbb{C} . Pour tout $g_0 \geq 0$, il existe, à homéomorphisme près, une unique surface réelle X_{g_0} compacte, connexe et orientée de genre g_0 (cf. [Se92] § 6.2). Cette surface X_{g_0} admet une présentation standard comme polygone à $2g_0$ arêtes notées $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_{g_0}, b_{g_0}, a_{g_0}^{-1}, b_{g_0}^{-1}$ identifiées de manière adéquate. De cette description, on déduit une présentation du groupe fondamental

$\pi_1(X_{g_0})$ donnée par $2g_0$ générateurs $a_1, b_1, \dots, a_{g_0}, b_{g_0}$ liés par la relation :

$$\prod_{i=1}^{g_0} [a_i, b_i] = 1,$$

où $[a_i, b_i]$ désigne le commutateur de a_i et de b_i , i.e. $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ ([Se92] 6.2). Soit $\{y_1, \dots, y_r\}$ un ensemble de $r \geq 0$ points de X_{g_0} . Soit $\pi_1(g_0, r)$ le groupe fondamental de la courbe $X_{g_0} - \{y_1, \dots, y_r\}$. Chaque point y_i définit dans $\pi_1(g_0, r)$ une classe de conjugaison C_i correspondant au lacet entourant le point y_i dans une direction fixée. On montre que le groupe fondamental $\pi_1(g_0, r)$ admet une présentation donnée par $2g_0 + r$ générateurs $a_1, b_1, \dots, a_{g_0}, b_{g_0}, c_1, \dots, c_r$ liés par la relation :

$$\prod_{j=1}^{g_0} [a_j, b_j] \prod_{i=1}^r c_i = 1, \quad (1)$$

où chaque c_i appartient à C_i ([Se92], § 6.2).

1.3 Finitude du groupe des automorphismes et borne d'Hurwitz.

Désormais, C est une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$, $\text{Aut}(C)$ le groupe des automorphismes (analytiques, ou, de manière équivalente, algébriques) de C et G un sous-groupe de $\text{Aut}(C)$. Les courbes C (resp. C/G) sont homéomorphes à X_g (resp. X_{g_0}) comme définis ci-dessus. En reliant les caractéristiques d'Euler des surfaces X_g et X_{g_0} (cf. [FaKa92] p.21), on obtient la formule dite de Riemann-Hurwitz reliant le genre g de C , le genre g_0 de la courbe quotient C/G et la signature (n_1, \dots, n_r) :

$$2(g-1) = 2|G|(g_0-1) + |G| \sum_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{n_i}\right). \quad (2)$$

Un groupe fini G est alors groupe d'automorphismes d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$ si et seulement si G est image d'un groupe $\pi_1(g_0, r)$ admettant une présentation comme celle donnée par la formule (1). Dans ce cas, g_0 est le genre de la courbe quotient C/G , y_1, \dots, y_r correspondent aux points de branchement du revêtement : $C \rightarrow C/G$ et les images des éléments c_i sont les générateurs des groupes d'inertie G_{x_i} ([Se92] Thm. 6.3.2).

Un autre résultat capital est la finitude du groupe des automorphismes d'une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. En effet, le groupe $\text{Aut}(C)$ agit sur l'ensemble fini des points de Weierstrass de C . Cette action est fidèle, sauf lorsque C est hyperelliptique, auquel cas le noyau de l'action est d'ordre 2, engendré par l'involution hyperelliptique de C . Schwarz démontre ainsi que le groupe $\text{Aut}(C)$ est fini. De la formule de Riemann-Hurwitz, Hurwitz ([Hu92]) déduit ensuite une borne linéaire pour l'ordre de ce groupe :

$$|\text{Aut}(C)| \leq 84(g-1). \quad (3)$$

Cette borne est optimale et les courbes atteignant la borne d'Hurwitz sont appelées courbes d'Hurwitz et leur groupe d'automorphismes des groupes d'Hurwitz. Un groupe fini est groupe d'Hurwitz si et seulement s'il admet un système de générateurs : a, b, c , d'ordre respectif 2, 3 et 7 avec $abc = 1$. Les groupes d'Hurwitz ont encore fait l'objet de nombreux travaux dont un aperçu est donné dans [Con90].

On ne sait classifier les courbes d'Hurwitz que pour de petits genres. Ainsi, la seule courbe d'Hurwitz de genre $g \leq 3$ est la quartique de Klein (cf. [Kl79] et [El99]). Son groupe d'automorphismes est isomorphe à $\text{PSL}_3(\mathbb{F}_2)$. Fricke a montré que la courbe d'Hurwitz suivante apparaissait pour $g = 7$ et que son groupe d'automorphismes était isomorphe à $\text{SL}_2(\mathbb{F}_8)$. En 1965, Macbeath ([Mc65]) a donné des équations du plongement canonique de la courbe correspondante. La quartique de Klein et la courbe de Fricke-Macbeath sont les deux seules courbes d'Hurwitz dont les équations sont connues. Les courbes d'Hurwitz suivantes apparaissent pour $g = 13$ et $g = 17$. En 2001, Larsen ([Lar01]) a démontré que la suite des genres g des courbes d'Hurwitz se comportait asymptotiquement comme le cube des entiers.

1.4 Groupes d'automorphismes dits "larges" et "super-larges".

Soit C une surface de Riemann compacte de genre $g \geq 2$. Si l'on cherche à réaliser une classification des groupes G d'automorphismes de C , une idée, déjà suggérée par l'étude des courbes d'Hurwitz, est de considérer des groupes G suffisamment larges : grâce à la formule de Riemann-Hurwitz, ceci permet en effet

de rigidifier la situation de ramification. Ainsi, si G est un groupe "large", i.e. d'ordre strictement supérieur à $4(g-1)$, la courbe quotient C/G est de genre $g_0 = 0$ et le nombre de points de branchements r du revêtement $C \rightarrow C/G$ est 3 ou 4 (cf. [Ku91]). Kulkarni dresse alors la liste des signatures (n_1, n_2, \dots, n_r) possibles ([Ku91], Prop. 4.2). Si l'on considère à présent un groupe "super-large", c'est-à-dire d'ordre strictement supérieur à $12(g-1)$, Kulkarni montre que $g_0 = 0$, $r = 3$ et donne les signatures possibles ([Ku91], Prop. 4.6). Breuer fait de même lorsque G vérifie $|G| \geq 24(g-1)$ (cf. [Br00] Lemme 3.18).

1.5 Action de $\text{Aut}(C)$ sur le module des différentielles.

Le choix de groupes d'automorphismes suffisamment larges permet ainsi de rigidifier la situation de ramification en imposant de fortes restrictions sur le genre g_0 de la courbe quotient et les données de ramification du revêtement $C \rightarrow C/G$. Grâce aux résultats rappelés dans le paragraphe 1.2, on sait de plus que ces groupes sont quotients des groupes fondamentaux $\pi_1(g_0, r)$ dont une présentation est donnée par (1). Pour dresser une classification de ces groupes d'automorphismes, on considère les représentations associées à l'action fidèle de ces groupes sur $H^0(C, \Omega_C)$, l'espace vectoriel, de dimension g sur \mathbb{C} , des formes différentielles holomorphes de C (cf. [FaKa92] p. 270 ou [Br00] p. 41). En effet, les sous-groupes finis de $\text{GL}_g(\mathbb{C})$ résultant de cette action satisfont un certain nombre de conditions étudiées par I. Kuribayashi, A. Kuribayashi, Kimura, Ohmori, Kobayashi... A. Kuribayashi et Kimura ([KuKi90]) ont ainsi dressé une liste complète de ces groupes linéaires finis jusqu'au genre $g \leq 5$. A l'aide du logiciel de calcul GAP, Breuer ([Br00]) a étendu cette classification jusqu'au genre 48, listant tous les caractères des représentations induites par l'action des groupes, et par suite les groupes correspondants.

Dans la liste de Breuer, on trouve des groupes d'automorphismes $\text{Aut}(C)$ mais aussi tous leurs sous-groupes. Magaard et alii ([MSSV02]) ont identifié dans la liste les groupes qui sont exactement des groupes d'automorphismes d'une surface de Riemann de genre g . Ils obtiennent ainsi la liste des groupes d'automorphismes $\text{Aut}(C)$ en genre 3 et donnent les équations des courbes correspondantes. Ils poursuivent la liste des groupes d'automorphismes jusqu'au genre 10 sous l'hypothèse supplémentaire que le groupe est large, i.e. $|\text{Aut}(C)| > 4(g-1)$. Ils précisent de plus la dimension et le nombre des composantes connexes du lieu correspondant dans l'espace de modules des courbes de genre g .

Le fait que le groupe des automorphismes opère de manière fidèle sur l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes, reste vrai en caractéristique $p > 0$ (cf. [HKT08] Lemme 11.12 et Théorème 11.23). D'autre part, un résultat dû à Chevalley-Weil, généralisé par Nakajima (1984) et Kani (1986) dans le cas modéré puis par Kock (2004) dans le cas de la ramification faible, i.e. dans le cas où le deuxième groupe de ramification en tout point est trivial, permet de décrire la structure du G -module $H^0(C, \Omega_C)$ (cf. [Bor01]). Borne ([Bor06]) et Kontogeorgis ([Kon06]) ont tenté de généraliser cela au cas de caractéristique $p > 0$.

1.6 Action de $\text{Aut}(C)$ sur le premier groupe d'homologie.

Soit C une surface de Riemann compacte, connexe, de genre $g \geq 1$. On étudie ici l'action fidèle de $\text{Aut}(C)$ sur $H_1(C)$ le premier groupe d'homologie (cf. [FaKa92] § V.3), afin d'identifier $\text{Aut}(C)$ à un sous-groupe fini du groupe symplectique $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$. En effet, le groupe $H_1(C)$ est muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée, à valeurs dans \mathbb{Z} , liée à l'intersection des cycles. Cette forme bilinéaire est conservée par les éléments de $\text{Aut}(C)$. On en déduit un homomorphisme $h : \text{Aut}(C) \rightarrow \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ (cf. [FaKa92] p. 287), où $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ désigne le groupe des matrices symplectiques de $\text{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$, i.e. les matrices $S \in \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$ vérifiant : $S J_0 {}^t S = J_0$ avec

$$J_0 := \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}.$$

Cet homomorphisme est injectif pour $g \geq 2$. Ceci nous permet en particulier d'identifier les groupes $\text{Aut}(C)$ avec des sous-groupes finis de $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$.

Si $g \geq 2$ et $n \geq 3$, l'homomorphisme $h_n : \text{Aut}(C) \rightarrow \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, déduit de h par réduction modulo n , est encore injectif ([FaKa92] p. 293). Nous verrons au paragraphe 2.2 que ces résultats se généralisent au cas de la caractéristique $p > 0$, en considérant cette fois l'action du groupe des automorphismes d'une courbe lisse (ou simplement stable, sans partie torique) C de genre g sur les points de ℓ -torsion du schéma de Picard : $\text{Pic}^0(C)$, pour ℓ un nombre premier distinct de 2 et de p .

1.7 Les données d'Hurwitz.

Revenons à présent au cas général d'une courbe algébrique C projective lisse, connexe, définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, et de genre $g \geq 2$. Soit G un groupe d'automorphismes de C . Si $p > 0$, on suppose comme précédemment que p ne divise pas l'ordre de G . Pour mener l'étude des déformations de la G -courbe C , il est utile d'introduire les données d'Hurwitz (cf. [BeRo08]). Soit x

un point de ramification de C . Le groupe d'inertie G_x , comme défini dans les préliminaires, est muni d'une représentation fidèle de degré 1 :

$$\chi_x : G_x \rightarrow \mathrm{GL}(M_x/M_x^2) \simeq k^*$$

du groupe cyclique G_x dans l'espace cotangent de C au point x , M_x désignant l'idéal maximal de l'anneau local $O_{C,x}$. Le caractère de la représentation, lui aussi noté χ_x , est primitif, i.e. d'ordre $|G_x|$. Ceci nous amène à considérer l'ensemble des couples (H, χ) , où H est un sous-groupe cyclique de G et χ un caractère primitif de H . Deux couples (H, χ) et (H', χ') sont dits conjugués s'il existe $s \in G$ tel que :

$$H' = sHs^{-1} \quad \text{et} \quad \chi'(sts^{-1}) = \chi(t) \quad \forall t \in H.$$

Ainsi, si $y = sx$, avec $s \in G$, alors (G_y, χ_y) et (G_x, χ_x) sont conjugués. Ceci permet de définir le G -type d'une orbite singulière, disons l'orbite de x , comme étant la classe de conjugaison de (G_x, χ_x) , désormais notée $[G_x, \chi_x]$. Décomposons à présent l'ensemble des points de ramification F en une réunion d'orbites (les orbites singulières correspondant chacune à un point de branchement) : $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_r$, et notons $[H_i, \chi_i]$ le type de F_i . On appelle donnée d'Hurwitz de l'action de G sur C la collection des classes de conjugaison $\{[H_i, \chi_i], 1 \leq i \leq r\}$, de type distincts ou non, des r orbites singulières. Lorsque $r = 0$, c'est à dire lorsque le revêtement $C \rightarrow C/G$ est étale, la donnée d'Hurwitz correspondante est dite vide. On dit qu'une G -courbe C est de type (g, G, ξ) si C est de genre g et a pour donnée d'Hurwitz ξ . Autrement dit, si l'on note $\{x_1, \dots, x_r\}$ un système de représentants des orbites singulières de la G -courbe C et si ξ s'écrit $\xi = \{[H_i, \chi_i], 1 \leq i \leq r\}$, alors $[G_{x_i}, \chi_{x_i}] = [H_i, \chi_i]$.

Fixons $g \geq 2$ et ξ une donnée d'Hurwitz. D'après Bertin [Be96], il existe un schéma quasi projectif des modules $H_{g,G,\xi}$ sur k pour les G -courbes lisses de type (g, G, ξ) . Les composantes connexes sont précisément les composantes irréductibles de $H_{g,G,\xi}$. Leur nombre, appelé nombre de Nielsen, ne dépend pas du corps de base k algébriquement clos. Soit $H_{g,G,r}$ le module des G -courbes C de genre g et de signature (n_1, n_2, \dots, n_r) : celui-ci est réunion disjointe des espaces d'Hurwitz $H_{g,G,\xi}$, où ξ parcourt les données d'Hurwitz de cardinal r ([BeRo08], § 6.2). Si C est une G -courbe de type (g, G, ξ) , la formule (2) nous assure que le genre g_0 de C/G ne dépend que de g , de l'ordre de G et de la signature : (n_1, \dots, n_r) . En particulier, g_0 ne dépend pas de la composante connexe.

Nous avons vu également dans la partie 1.2 que $H_{g,G,\xi}$ est non vide si et seulement si G est engendré par des éléments $a_1, b_1, \dots, a_{g_0}, b_{g_0}, c_1, \dots, c_r$ tels que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, H_i = \langle c_i \rangle \quad \text{et} \quad \prod_{j=1}^{g_0} [a_j, b_j] \prod_{i=1}^r c_i = 1.$$

On remarque en particulier que lorsque $g_0 = 0$, la condition se limite au fait que chaque H_i soit engendré par c_i et que $\prod_{i=1}^r c_i = 1$.

On considère à présent deux morphismes : le morphisme d'oubli de l'action de G :

$$\Phi : H_{g,G,\xi} \rightarrow M_g,$$

où M_g désigne l'espace des modules des courbes de genre g et le morphisme discriminant :

$$\Psi : H_{g,G,\xi} \rightarrow M_{g_0,r},$$

où $M_{g_0,r}$ désigne l'espace des modules des courbes de genre g_0 avec r points distincts marqués. Le morphisme Ψ envoie ainsi une G -courbe C sur la classe de la courbe quotient C/G marquée par les r points de branchement du revêtement $C \rightarrow C/G$. Ces deux morphismes sont finis. De plus, si $H_{g,G,\xi}$ est non vide, le morphisme discriminant envoie chaque composante connexe de $H_{g,G,\xi}$ sur $M_{g_0,r}$. Ainsi, chacune de ces composantes connexes a la même dimension

$$\delta_{g,G,\xi} := \dim M_{g_0,r} = 3g_0 - 3 + r. \quad (4)$$

L'image de Φ , notée $M_{g,G,\xi}$, coïncide avec le lieu dans M_g des courbes de genre g admettant une G -action de type (g, G, ξ) . Comme Φ est fini, si $M_{g,G,\xi}$ est non-vide, alors chacune de ses composantes a aussi pour dimension $\delta_{g,G,\xi}$, nombre qui ne dépend finalement que de g , de l'ordre de G et de la signature (n_1, \dots, n_r) .

2 La caractéristique $p > 0$ et le cas de ramification sauvage.

2.1 La finitude du groupe des automorphismes.

Dans toute cette seconde partie, sauf mention explicite du contraire, k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et C une courbe algébrique projective lisse, connexe, définie sur k , de genre $g \geq 2$. On note $\text{Aut}_k(C)$ le groupe des k -automorphismes de C et G un sous-groupe de $\text{Aut}_k(C)$. Si p est premier avec l'ordre de G , celui-ci est encore majoré par la borne d'Hurwitz ([Gro63]). Par contre, si p divise l'ordre de G , la borne d'Hurwitz n'est plus valable. Cependant, le groupe des automorphismes est encore un groupe fini ([Sch38]), dont l'ordre est borné par un polynôme en g (cf. [St73], [Sin74]).

2.2 Action de $\text{Aut}_k(C)$ sur le groupe $\text{Pic}^0(C)[\ell] \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g}$.

Dans ce paragraphe, on montre que l'on peut identifier le groupe des automorphismes $\text{Aut}_k(C)$ à un sous-groupe fini de $\text{GL}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$. En effet, $\text{Aut}_k(C)$ s'injecte dans le groupe des k -automorphismes du schéma de Picard : $\text{Aut}_k(\text{Pic}^0(C))$ (cf. [DeMu69]). Pour décrire $\text{Aut}_k(C)$, on peut donc considérer son action sur les points de $\text{Pic}^0(C)$. Ainsi, soit ℓ un nombre premier distinct de p et de 2 et soit $[\ell]$ la multiplication par ℓ dans $\text{Pic}^0(C)$. Le noyau de $[\ell]$ est traditionnellement noté $\text{Ker}[\ell] = \text{Pic}^0(C)[\ell] \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g}$. On obtient ainsi un homomorphisme injectif (cf. [Se60]) :

$$h_\ell : \text{Aut}_k(C) \hookrightarrow \text{Aut}_k(\text{Pic}^0[\ell]) \simeq \text{GL}_{2g}(\mathbb{F}_\ell).$$

On peut donc identifier $\text{Aut}_k(C)$ à un sous-groupe fini de $\text{GL}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$. L'homomorphisme h_ℓ est aussi utilisé par Bertin et Mézard ([BeMe00], § 5) pour construire un espace de modules fin $\mathcal{M}_{g,\ell}[G]$ avec structure de niveau $G \hookrightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$ pour les revêtements galoisiens de groupe G . Si l'on introduit le pairing de Weil (cf. [Mi80], § 16), on généralise ainsi au cas de la caractéristique $p > 0$ l'injection de $\text{Aut}(C)$ dans le groupe symplectique $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{F}_\ell)$ obtenue en caractéristique nulle (voir § 1.6).

Cette action est susceptible de nous fournir une nouvelle borne sur l'ordre de $\text{Aut}_k(C)$. Ainsi, en faisant varier ℓ , on obtient une borne sur la valuation p -adique v_p de $|\text{Aut}_k(C)|$, et par suite sur l'ordre des p -sous-groupes de Sylow de $\text{Aut}_k(C)$. Plus précisément, pour $p > 2$, Lehr et Matignon ([LM06b], § 3.3) montrent que :

$$v_p(|\text{Aut}_k(C)|) \leq a + \left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a}{p^2} \right\rfloor + \dots \quad \text{avec} \quad a := \left\lfloor \frac{2g}{p-1} \right\rfloor.$$

La notation $[x]$ désigne ici la partie entière du réel x . On renvoie à [LM06b] pour une formule analogue lorsque $p = 2$. La borne obtenue sur l'ordre des p -sous-groupes de Sylow de $\text{Aut}_k(C)$ est ainsi exponentielle en g . Cette borne est très mauvaise pour les courbes lisses, si on la compare par exemple avec les bornes polynomiales de Stichtenoth (cf. [St73]). La raison en est que les énoncés précédents, en particulier l'injection, restent valables pour les courbes stables sans partie torique, i.e. les arbres de courbes lisses (cf. [DeMu69]). Lehr et Matignon ([LM06b], § 3.3) montrent d'ailleurs que cette borne exponentielle est optimale puisqu'elle est atteinte pour certaines courbes stables ayant beaucoup de composantes irréductibles.

2.3 La conjecture d'Abhyankar : l'existence de revêtements galoisiens de groupe G .

On se demande à présent quels groupes G peuvent apparaître comme groupe d'automorphismes. Dans ce paragraphe, k est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et X une courbe algébrique projective lisse, connexe, définie sur k et de genre g quelconque. On fixe $\{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble de r points de X . Soit Y une courbe projective lisse et connexe et $\phi : Y \rightarrow X$ un revêtement galoisien de groupe G , dont les points de branchement sont les x_i . Un problème important est de déterminer les groupes G pour lesquels un tel revêtement ϕ existe et, dans ce cas, de préciser la filtration de ramification associée à chaque point x_i . L'existence d'un tel revêtement dans le cas $r > 0$ fait l'objet de la conjecture d'Abhyankar ([Ab57]) formulée comme suit. Soit G un groupe fini et soit $p(G)$ le sous-groupe de G engendré par les p -sous-groupes de Sylow de G . Soit X une courbe projective lisse et connexe de genre g définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit $\{x_1, \dots, x_r\}$ un ensemble fini de $r \geq 1$ points de X . Alors, il existe un revêtement $\phi : Y \rightarrow X$ galoisien de groupe G de courbes projectives lisses, étale sur $X - \{x_1, \dots, x_r\}$ si et seulement si le groupe quotient $G/p(G)$ peut être engendré par au plus $2g + r - 1$ générateurs.

Raynaud ([Ray94]) a démontré la conjecture pour la droite affine, i.e. pour $X = \mathbb{P}_k^1$ et $r = 1$. Harbater ([Har94]) en a déduit la preuve dans le cas général. Un problème non résolu demeure cependant celui de la détermination de la filtration de ramification correspondante. Ce problème a fait l'objet de travaux récents, notamment ceux de R. Pries ([Pr06]).

Examinons à présent le cas $r = 0$. Un p -groupe G est groupe de Galois d'un revêtement étale connexe de

X si et seulement si G est engendré par h éléments, où h est le p -rang de la jacobienne de X , autrement dit l'invariant de Hasse-Witt de X . Dans le cas plus général d'un groupe G dont l'ordre est divisible par p , on ne dispose pour l'heure que de résultats partiels (cf. [PaSt00]).

2.4 Classification des courbes avec de gros groupes d'automorphismes.

On reprend désormais les notations du paragraphe 2.1. La borne linéaire d'Hurwitz n'étant plus valable en caractéristique $p > 0$, on voit apparaître des courbes qui, à genre donné, ont de plus gros groupes d'automorphismes qu'en caractéristique nulle, phénomène qui s'explique par l'apparition de ramification sauvage. De nombreux travaux ont pour objet de classifier de telles courbes et de préciser leur groupe d'automorphismes. Sans être exhaustif, on peut citer [Roq70], [St73], [Hen78], [HaPe93], [HKT08] (Chap. 11.12)...

Lorsque $2 \leq g < p - 1$, Roquette ([Roq70]) montre que la borne d'Hurwitz connaît une seule exception : la courbe d'équation $W^p - W = X^2$ avec $p \geq 5$. Dans cette situation, $g = \frac{1}{2}(p - 1)$ et le groupe des automorphismes est extension centrale du groupe cyclique d'ordre 2 par $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_p)$. Ainsi, $|\mathrm{Aut}_k(C)| = 2p(p^2 - 1)$. Stichtenoth ([St73]) établit ensuite qu'en caractéristique $p > 0$, les seules courbes C pour lesquelles

$$|\mathrm{Aut}_k(C)| \geq 16g^4$$

sont les courbes hermitiennes :

$$X^{1+q} + Y^{1+q} + Z^{1+q} = 0 \quad \text{avec} \quad q = p^n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad p^n \geq 3.$$

Dans ce cas, $g = \frac{1}{2}q(q - 1)$ et $\mathrm{Aut}_k(C) \simeq \mathrm{PGU}_3(\mathbb{F}_{q^2}) \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_{q^2})$, i.e. le groupe unitaire lié à la forme hermitienne $(x, y, z) \rightarrow x x^F + y y^F + z z^F$, le Frobenius

$$F : \begin{cases} \mathbb{F}_{q^2} \rightarrow \mathbb{F}_{q^2} \\ x \rightarrow x^q \end{cases}$$

étant une involution sur \mathbb{F}_{q^2} (cf. [Leo96]). Ainsi, $|\mathrm{Aut}_k(C)| = q^3(q^3 + 1)(q^2 - 1)$. Enfin, Henn ([Hen78])¹ donne une classification des courbes C telles que $|\mathrm{Aut}_k(C)| \geq 8g^3$. Celles-ci sont isomorphes soit à des courbes hyperelliptiques, soit à des courbes hermitiennes, soit à des courbes de Deligne-Lusztig (on renvoie à [Hen78] ou à [GK07] pour les équations de ces courbes et la description des groupes d'automorphismes correspondants).

2.5 La filtration de ramification.

La possibilité d'obtenir de plus gros groupes d'automorphismes en caractéristique positive s'explique par l'apparition de ramification sauvage. Mais l'apparition de ramification sauvage a aussi d'autres incidences. Ainsi, nous avons vu dans la première partie (§ 1.3) qu'en caractéristique nulle comme dans le cas d'une action modérée, le genre g_0 de la courbe quotient C/G ne dépend que de g , de l'ordre du groupe G et de la signature (n_1, \dots, n_r) , i.e. des ordres des groupes d'inertie (cf. formule (2)). En particulier, g_0 ne dépend pas de la composante connexe de $H_{g,G,r}$. Ce résultat n'est plus vrai en caractéristique $p > 0$, lorsque p divise l'ordre de G et plus précisément l'ordre des groupes d'inertie. Pour obtenir une formule analogue, il faut introduire la filtration de ramification inférieure du groupe G . Ainsi, si $x \in C$ est un point de ramification, on définit une suite décroissante de sous-groupes de G , appelés groupes de ramification inférieure de G en x ([St93] Def. III.8.5) :

$$\forall i \geq -1, \quad G_i(x) := \{\sigma \in G, v_x(\sigma(t_x) - t_x) \geq i + 1\},$$

où t_x est un paramètre uniformisant au point x et v_x est la valuation en x . On appelle $G_{-1}(x)$ le groupe de décomposition de G en x , $G_0(x)$ le groupe d'inertie et $G_1(x)$ le groupe d'inertie sauvage. Ce dernier est l'unique p -sous-groupe de Sylow du groupe d'inertie. Comme k est algébriquement clos, le groupe de décomposition et le groupe d'inertie coïncident avec le stabilisateur G_x . En caractéristique nulle, comme en caractéristique positive $p > 0$ lorsque p ne divise pas l'ordre de G , les groupes de ramification $G_i(x)$ sont triviaux dès que $i \geq 1$. Mais lorsque $p > 0$ divise l'ordre de G , ces groupes interviennent dans la formule donnant le genre g_0 de la courbe quotient C/G . Si l'on note x_1, \dots, x_r les points de ramification de C , avec $r \geq 0$, la formule d'Hurwitz devient ([St93] Thm. III.4.12 et Thm. III.8.8) :

$$2(g - 1) = 2|G|(g_0 - 1) + \sum_{j=1}^r \sum_{i=0}^{\infty} (|G_i(x_j)| - 1). \quad (5)$$

¹Nakajima ([Na87a]) avait constaté un oubli dans la preuve de Henn : "Stichtenoth's result was improved by Henn. But his proof contains a gap (last paragraph of p. 104). I do not know if the gap can be covered." Ce manquement est comblé dans [GK08]- (voir aussi [HKT08], Chapitre 11.12).

2.6 Préliminaires à l'étude des déformations.

Au paragraphe 1.7, nous avons défini des espaces de modules $H_{g,G,\xi}$ permettant de décrire les déformations d'une G -courbe C de genre g et de donnée d'Hurwitz ξ , en caractéristique nulle et en caractéristique positive lorsque l'action est modérée. En particulier, nous avons vu (cf. formule (4)) que chacune des composantes connexes de $H_{g,G,\xi}$ avait la même dimension $\delta_{g,G,\xi}$ ne dépendant que du genre g_0 de la courbe quotient C/G et du nombre r de points de branchement de $C \rightarrow C/G$.

Lorsque k est de caractéristique positive $p > 0$ et que G est un groupe d'ordre divisible par p , les résultats précédents ne sont plus valables à cause de l'apparition de ramification sauvage. Pour pouvoir décrire les déformations d'une G -courbe en toute généralité, il est donc nécessaire d'introduire de nouveaux espaces de modules. Suivant les travaux de Tufféry ([Tu93]), Maugeais [Mau08] et autres, étant donné un groupe fini G et un entier g , on appelle $\mathcal{M}_g[G]$ l'espace de modules des courbes propres et lisses de genre $g : C \rightarrow S$, S étant un schéma quelconque, munies d'une action de G fidèle dans chaque fibre.

Si C est une G -courbe de genre g définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, le revêtement $\pi : C \rightarrow C/G$ induit un point x de $\mathcal{M}_g[G]$ qui appartient à la fibre spéciale $\mathcal{M}_g[G] \times \mathbb{F}_p$. Etudier les déformations de π revient donc à étudier l'anneau local complété de $\mathcal{M}_g[G]$ en x , voire l'anneau local complété de $\mathcal{M}_g[G] \times \mathbb{F}_p$ en x si l'on se restreint aux déformations en égale caractéristique $p > 0$ (cf. [BeMe00] § 5). Dans cette déformation, n'intervient que la composante connexe de $\mathcal{M}_g[G]$ contenant x le long de laquelle le genre des courbes quotients par G est constant, égal à $g_0 = g(C/G)$. En effet, le genre des courbes quotients est déterminé, via la formule d'Hurwitz (5), par le degré δ du diviseur de ramification : $\delta = 2(g-1) - 2|G|(g_0-1)$, degré qui reste constant au cours de la déformation. Par contre, les autres données de ramification du revêtement π comme le nombre de points de ramification et la filtration en chacun de ces points, peuvent varier au cours de la déformation.

Les $\mathcal{M}_g[G]$ sont des espaces de modules fins, même si ce ne sont pas des schémas mais des champs algébriques. Si l'on veut travailler avec des espaces de modules fins représentables par des schémas, on peut introduire les espaces de modules $\mathcal{M}_{g,\ell}[G]$ faisant intervenir la structure de niveau ℓ (cf. § 2.2).

2.7 Bornes sur les p -sous-groupes de Sylow de $\text{Aut}_k(C)$.

L'importance de la ramification sauvage incite à s'intéresser plus particulièrement aux p -sous-groupes de $\text{Aut}_k(C)$. Stichtenoth ([St73]) donne une borne quadratique sur l'ordre du p -sous-groupe de Sylow $G_1(x)$ du groupe d'inertie G_x en tout point x de C :

$$|G_1(x)| \leq \frac{4p}{p-1} g^2.$$

Il démontre de plus que seules trois situations sont possibles, situations qui s'excluent l'une l'autre :

1. La courbe quotient $C/G_1(x)$ n'est pas rationnelle et $|G_1(x)| \leq g$.
2. La courbe quotient $C/G_1(x)$ est rationnelle, le revêtement $C \rightarrow C/G_1(x)$ se ramifie ailleurs qu'au point x et

$$|G_1(x)| \leq \frac{p}{p-1} g.$$

3. Les courbes quotients $C/G_1(x)$ et $C/G_2(x)$ sont rationnelles, le revêtement $C \rightarrow C/G_1(x)$ se ramifie seulement au point x et

$$|G_1(x)| \leq \frac{4|G_2(x)|}{(|G_2(x)|-1)^2} g^2 \leq \frac{4p}{(p-1)^2} g^2.$$

Les résultats de Stichtenoth soulèvent tout naturellement la question de la classification des groupes d'automorphismes $G \subset \text{Aut}_k(C)$ satisfaisant la condition suivante :

$$\text{Il existe un point } x \text{ de } C \text{ tel que } |G_1(x)| > \frac{p}{p-1} g. \tag{6}$$

Une réponse à ce problème est apportée par Giuletti et Korchmáros ([GK07].) Lorsque la condition (6) est vérifiée, ceux-ci montrent que le groupe G fixe le point x , i.e. $G = G_x$ ou bien que la courbe C est isomorphe soit à une courbe hyperelliptique, soit à une courbe hermitienne, soit à une courbe de Deligne-Lusztig (on renvoie à [GK07] pour les équations des courbes et la description des groupes correspondants).

2.8 Sous-groupes de Sylow de $\text{Aut}_k(C)$ dans le cas d'un revêtement p -cyclique de la droite projective, ramifié en un seul point.

Lehr et Matignon [LM05] caractérisent les p -sous-groupes de Sylow du groupe des automorphismes $\text{Aut}_k(C)$ dans le cas où $C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ est un revêtement p -cyclique de la droite projective, ramifié en exactement un point.

Supposons ainsi que C soit définie par l'équation : $W^p - W = f(X)$, où $f(X)$ un polynôme de $k[X]$ de degré m premier à p , $m \geq 2$ et $\{m, p\} \neq \{2, 3\}$. Notons $A_{\infty,1}$ le groupe d'inertie sauvage du groupe des automorphismes $\text{Aut}_k(C)$ au point $X = \infty$. Alors, $A_{\infty,1}$ est un p -sous groupe de Sylow de $\text{Aut}_k(C)$ et il est normal sauf lorsque $f(X) = X^m$ avec $m < p$ et m divisant $1 + p$. De plus, $A_{\infty,1}$ est extension centrale d'un groupe cyclique d'ordre p par un p -groupe abélien élémentaire $V \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$, $t \geq 0$, lequel correspond à un sous-groupe de translations de la droite affine : $X \rightarrow X + y$, $y \in V$.

Réciproquement, toute extension de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par un p -groupe abélien élémentaire $V \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^t$, $t \geq 0$, peut être réalisé de cette façon ([LM05] Thm. 1.1). Par [St73], on obtient également des bornes sur l'ordre du p -Sylow $|A_{\infty,1}|$ puis sur le quotient $\frac{|A_{\infty,1}|}{g^2}$:

$$|A_{\infty,1}| \leq p(m-1)^2 \quad \text{et} \quad \frac{|A_{\infty,1}|}{g^2} \leq \frac{4p}{(p-1)^2}.$$

Dans la seconde borne, le cas d'égalité se produit lorsque $f(X)$ admet une écriture particulière en terme de polynômes additifs, i.e. de polynômes de $k\{F\}$, le k -sous-espace vectoriel de $k[X]$ engendré par les puissances positives du Frobenius F (cf. [Go96] chap. 1). Ainsi, si l'on suppose $f(X)$ réduit modulo $(F - id)(k[X])$, i.e. si les exposants des monômes de $f(X)$ sont tous premiers à p et si

$$\frac{|A_{\infty,1}|}{g} > \frac{p}{p-1} \quad \left(\frac{2}{3} \text{ pour } p = 2\right),$$

alors $f(X) = cX + XS(X) \in k[X]$, où $S(X)$ est un polynôme additif de $k[X]$ de degré p^s ([LM05] Prop. 8.3). Dans ce cas,

$$\frac{|A_{\infty,1}|}{g} = \frac{2p^{s+1}}{(p-1)} \quad \text{et} \quad \frac{|A_{\infty,1}|}{g^2} = \frac{4p}{(p-1)^2}.$$

2.9 Les grosses actions.

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et C une courbe algébrique projective lisse, connexe, définie sur k , de genre $g \geq 1$. Pour poursuivre cette étude, nous allons remplacer la condition (6) par deux hypothèses plus contraignantes :

1. $G \subset \text{Aut}_k(C)$ est lui-même un p -groupe.
2. L'inégalité $|G_1(x)| > \frac{p}{p-1}g$ devient :

$$|G| > \frac{2p}{p-1}g. \tag{7}$$

Sous ces deux hypothèses, nous dirons que le couple (C, G) constitue une *grosse action*.

Notre première tâche va être de justifier la pertinence de ces nouvelles hypothèses. Pour donner une première idée, on peut dire que l'intérêt de la borne (7) est de rigidifier la situation de ramification du revêtement : $C \rightarrow C/G$, comme il a été fait en caractéristique nulle avec les groupes d'automorphismes dits "larges" et "super-larges". Plus précisément, en comparant nos hypothèses aux résultats de Nakajima ([Na87a], Thm. 1), on démontre que la borne (7) impose la nullité de l'invariant de Hasse-Witt de la courbe C . Dans cette situation, la formule de Deuring-Shafarevitch (cf. [Bou00]) implique qu'il existe un seul point x de C qui soit ramifié. Il suit qu'en ce point, la ramification est totale. Dès lors, puisque G est un p -groupe :

$$G = G_x = G_0(x) = G_1(x).$$

Le point de ramification x étant unique, on note désormais les groupes de ramification G_i à la place de $G_i(x)$. On se trouve donc dans le dernier des trois cas de figure décrit par Stichtenoth (voir § 2.7) si bien que les courbes quotient C/G et C/G_2 sont rationnelles. Par conséquent, G_2 ne peut pas être trivial. La formule du genre d'Hurwitz (cf. (5)) appliquée au revêtement $C \rightarrow C/G$ donne à présent :

$$2g = \sum_{i \geq 2} (|G_i| - 1).$$

En particulier, la condition (7) se réécrit :

$$|G| > \frac{2g}{p-1} p \quad \text{avec} \quad \frac{2g}{p-1} \in \mathbb{N}^*.$$

L'apparition du 2 au numérateur de la borne (7) présente un autre avantage majeur par rapport à la borne (6) : dans le cas d'une grosse action, G_2 est strictement inclus dans G_1 ([LM05]). Ceci n'est plus vrai si l'on prend un p -groupe $G \subset \text{Aut}_k(C)$ vérifiant seulement l'inégalité large $|G| \geq \frac{2p}{p-1} g$, comme en témoigne le contre-exemple lié à la courbe $W^p - W = X^2$, avec $p > 2$. Dès lors, le groupe quotient G/G_2 agit comme un p -groupe d'automorphismes de la courbe rationnelle C/G_2 , si bien que ce groupe quotient s'identifie à un groupe de translations de la droite affine : $X \rightarrow X + y$, où y décrit un \mathbb{F}_p -sous espace vectoriel V de k de dimension finie $v > 0$. Ceci relie l'étude des grosses actions au problème de plongement lié à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G = G_1 \xrightarrow{\pi} V \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^v \longrightarrow 0,$$

avec

$$\pi : \begin{cases} G \rightarrow V \\ g \rightarrow g(X) - X. \end{cases}$$

2.10 Grosses actions (C, G) avec un G_2 cyclique d'ordre p .

Dans l'étude des grosses actions, un premier cas crucial est celui des grosses actions dont le G_2 est cyclique d'ordre p . On peut en effet se ramener à ce cas par quotient en utilisant la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Soit (C, G) une grosse action de genre $g \geq 2$. Soit H un sous-groupe normal de G tel que $g_{C/H} > 0$ (ce qui est vrai en particulier lorsque H est strictement inclus dans G_2 comme nous l'établirons plus loin). Alors, le couple $(C/H, G/H)$ est encore une grosse action (cf. [LM05] Prop. 8.5) et son deuxième groupe de ramification est G_2/H (voir § 4.1).*

Les résultats décrivant une grosse action dont le G_2 est cyclique d'ordre p sont regroupés dans le théorème ci-dessous. Ils sont issus en droite ligne des travaux de Lehr et Matignon [LM05] évoqués au paragraphe 2.8. Précisons que, dans toute la suite de ce paragraphe, si $f \in k[X] - (F - id)(k[X])$, on notera C_f la courbe projective lisse définie par l'équation affine : $W^p - W = f(X)$.

Théorème 2.2. *Soit (C, G) une grosse action de genre $g \geq 2$ telle que G_2 est cyclique d'ordre p .*

1. *La courbe C est isomorphe à une courbe C_f d'équation affine :*

$$W^p - W = f(X) = cX + X S(X) \in k[X],$$

où $S(X) = a_0 X + a_1 X^p + \dots + a_{s-1} X^{p^{s-1}} + a_s X^{p^s}$ est un polynôme additif de $k[X]$ de degré p^s , avec $s \geq 1$. De plus, après une translation et une homothétie sur X , on peut supposer $c = 0$ et $a_s = 1$.

2. *Suivant Elkies ([El97], section 4), on définit un polynôme additif lié à f , appelé le polynôme palindromique de f :*

$$\text{Ad}_f := \frac{1}{a_s^{p^s}} F^{p^s} \left(\sum_{j=0}^s a_j F^j + F^{-j} a_j \right),$$

où F désigne l'opérateur Frobenius. L'ensemble de ses racines $Z(\text{Ad}_f)$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2s}$.

3. *Le sous-groupe d'inertie sauvage $A_{\infty,1}$ de $\text{Aut}_k(C)$ au point $X = \infty$ est extension de son centre $Z(A_{\infty,1})$, groupe cyclique d'ordre p égal à son groupe dérivé $D(A_{\infty,1})$, par le p -groupe abélien élémentaire $Z(\text{Ad}_f)$, i.e.*

$$0 \longrightarrow Z(A_{\infty,1}) = D(A_{\infty,1}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow A_{\infty,1} \xrightarrow{\pi} Z(\text{Ad}_f) \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2s} \longrightarrow 0,$$

où

$$\pi : \begin{cases} A_{\infty,1} \rightarrow Z(\text{Ad}_f) \\ g \rightarrow g(X) - X. \end{cases}$$

Pour $p > 2$, $A_{\infty,1}$ est l'unique groupe extraspécial d'exposant p et d'ordre p^{2s+1} .

4. *Il existe un sous \mathbb{F}_p -espace vectoriel V de $Z(\text{Ad}_f)$ tel que $G = \pi^{-1}(V)$.*
5. *La filtration de ramification inférieure de G au point ∞ s'écrit :*

$$G = G_0 = G_1 \supsetneq G_2 = \dots = G_{i_0} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \supsetneq \{0\}, \quad (8)$$

avec $i_0 = 1 + p^s$.

6. La filtration de ramification supérieure de G s'écrit :

$$G = G^0 = G^1 \supsetneq G^2 = \dots = G^{\phi(i_0)} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \supsetneq \{0\}, \quad (9)$$

où ϕ désigne la fonction de Herbrand (cf. [Se68] § IV,3). Ici, $\phi(i_0) = 1 + \frac{1}{p^s}$.

Lehr et Matignon [LM05] établissent également la réciproque :

Proposition 2.3. Soit C_f la courbe projective lisse définie sur k par l'équation affine :

$$W^p - W = f(X) := cX + XS(X) \in k[X],$$

où S est un polynôme additif de degré p^s , avec $s \geq 1$. Soit $A_{\infty,1}$ le sous-groupe d'inertie sauvage de $\text{Aut}_k(C_f)$ au point ∞ . Alors $(C_f, A_{\infty,1})$ est une grosse action dont le deuxième groupe de ramification est cyclique d'ordre p .

On s'intéresse à présent aux déformations d'une telle action. Pour cela, on introduit $\mathcal{A} := k[c, a_0, \dots, a_s]_{[\frac{1}{a_s}]}$ le localisé de l'anneau des polynômes à $s+2$ indéterminées. La famille

$$\text{Spec} \left(\frac{\mathcal{A}[X, W]}{W^p - W - f(X)} \right) \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{A}$$

où $f(X) := cX + X(a_0X + a_1X^p + \dots + a_sX^{p^s}) \in \mathcal{A}[X]$, est une famille affine lisse. Elle peut être compactifiée par :

$$\text{Proj} \left(\frac{\mathcal{A}[X, W, Z]}{W^p Z^{p^s - p + 1} - W Z^{p^s} - Z^{1+p^s} f\left(\frac{X}{Z}\right)} \right) \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{A},$$

laquelle est une famille projective avec une forte singularité en $Z = 0$. On peut montrer (communication de Sylvain Maugeais) que la normalisation induit une famille lisse projective :

$$\mathcal{C} \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{A} \simeq \mathbb{A}^{s+1} \times \mathbb{G}_m.$$

La fibre au point $(c, a_0, a_1, \dots, a_s \neq 0) \in \text{Spec } \mathcal{A}$ est isomorphe à la courbe C_f , avec $f(X) := cX + X(a_0X + a_1X^p + \dots + a_sX^{p^s})$. On suppose désormais que $p > 2$ et on note G le groupe extrasécial d'ordre p^{2s+1} et d'exposant p . La famille \mathcal{C} est munie d'une G -action qui induit, en chaque fibre, l'action $(C_f, A_{\infty,1}(C_f))$, où $A_{\infty,1}(C_f) \simeq G$ désigne le sous-groupe d'inertie sauvage de $\text{Aut}_k(C_f)$ au point ∞ . On en déduit le morphisme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A}^{s+1} \times \mathbb{G}_m \subset \mathbb{A}^{s+2} \longrightarrow \\ (c, a_0, a_1, \dots, a_s \neq 0) \longmapsto \end{array} \right. \begin{array}{l} \mathcal{M}_g[G] \times \mathbb{F}_p \\ \text{classe d'équivalence de } (C_f, G) \\ \text{avec } f(X) := cX + X(a_0X + a_1X^p + \dots + a_sX^{p^s}). \end{array}$$

Le corps k étant algébriquement clos, on montre que deux G -courbes C_{f_1} et C_{f_2} sont équivalentes si et seulement s'il existe (λ, μ) dans $k^\times \times k$ tels que $f_2(X) = f_1(\lambda X + \mu)$ (cf. [LM05] § 8.2). Il suit que l'espace des modules grossier associé à $\mathcal{M}_g[G] \times \mathbb{F}_p$ est quotient de l'ouvert $\mathbb{A}^{s+1} \times \mathbb{G}_m$ par un groupe cyclique. Ainsi, $\mathcal{M}_g[G] \times \mathbb{F}_p$ est irréductible de dimension s . La dimension obtenue sera comparée plus loin aux bornes données par Pries pour l'espace des déformations (cf. § 2.12).

Remarquons tout d'abord que, dans notre situation, les déformations sont équiramifiées, puisque la filtration de ramification inférieure (resp. supérieure) du groupe est fixée par (8) (resp. (9)).

On constate également que dans notre exemple, $(\mathcal{M}_g[G])_{\text{red}} = (\mathcal{M}_g[G] \times \mathbb{F}_p)_{\text{red}}$. En effet, supposons que (C_η, G) soit une déformation de (C_f, G) en caractéristique nulle. Alors, la courbe quotient C_η/G_2 s'identifierait à la droite projective et $G_1/G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2s}$ s'identifierait à un sous-groupe de $\text{PGL}_2(K)$, avec K corps de caractéristique nulle. Il suit de [Su82] (Thm. 6.17) que $p = 2$, $s = 2$, d'où $g = \frac{p-1}{2} p^s = 1$, ce qui est une contradiction.

On généralise ce résultat en montrant que pour toute grosse action (C, G) de genre $g \geq 2$, l'anneau de déformations est de caractéristique $p > 0$ lorsque $p \geq 2$. En effet, le couple $(C/G_2, G/G_2)$ est une action faiblement ramifiée, i.e. de second groupe de ramification trivial. Il suit de plus de la Proposition 2.1 et du Théorème 2.2 que p^2 divise l'ordre du p -groupe abélien élémentaire G/G_2 . La théorie des déformations de telles actions faiblement ramifiées est connue d'après les travaux de [CoKa03], [CoMe06] et [ByCo08]. On en déduit le résultat annoncé.

2.11 Début de classification pour les grosses actions.

Si les grosses actions sont définies via la valeur du quotient $\frac{|G|}{g}$, on s'aperçoit que c'est un autre quotient, en l'occurrence $\frac{|G|}{g^2}$, qui joue un rôle de crible pour leur classification, l'idée étant qu'une borne inférieure sur $\frac{|G|}{g^2}$ induit une borne supérieure sur l'ordre de G_2 ([LM05] section 8.4). Par [Na87a] (Thm. 1), on sait déjà que

$$\frac{|G|}{g^2} \leq \frac{4p}{(p-1)^2}.$$

Lehr et Matignon ([LM05] Thm. 8.6) obtiennent une caractérisation des grosses actions (C, G) vérifiant :

$$\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p-1)^2}. \quad (10)$$

Théorème 2.4. *Soit (C, G) une grosse action de genre $g \geq 2$. La condition (10) est vérifiée si et seulement si G_2 est cyclique d'ordre p , i.e. si et seulement si C est birationnelle à une courbe d'équation $W^p - W = cX + XS(X) \in k[X]$, où S est un polynôme additif de $k[X]$ de degré p^s , avec $s \geq 1$.*

Deux cas sont alors possibles :

1. Soit $G = A_{\infty,1}$ et $V = Z(\text{Ad}_f)$, auquel cas, $\frac{|G|}{g^2} = \frac{4p}{(p-1)^2}$.
2. Soit G est un sous-groupe d'indice p de $A_{\infty,1}$ et V un hyperplan de $Z(\text{Ad}_f)$, auquel cas $\frac{|G|}{g^2} = \frac{4}{(p-1)^2}$.

2.12 Etude des déformations via le formal patching.

R. Pries consacre une série de travaux ([Pr05], [Pr06], [PrOb08]) aux déformations équiramifiées de courbes en caractéristique positive.

Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et \mathcal{X} une courbe algébrique, projective, lisse, connexe définie sur k . Soit $\varphi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un revêtement galoisien de groupe G fini, ramifié en un ensemble fini B de points de \mathcal{X} . Par des méthodes de patching formel (cf. [Har03]), l'étude des déformations de φ se ramène à celle du I -revêtement de germes de courbes $\phi : Y \rightarrow X$, où X est le germe de \mathcal{X} en b , i.e. $X = \text{Spec } \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{X},b}$, Y le germe de \mathcal{Y} en $\eta := \varphi^{-1}(b)$ et I le groupe d'inertie de φ en η (cf. [Pr05] § 4.4). Dans ce cas, I est isomorphe au produit semi-direct $P \rtimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, où P est un p -groupe d'ordre p^e et m un entier non divisible par p . Nous verrons également au paragraphe suivant que Bertin et Mézard ([BeMe00]) ramènent, par des méthodes cohomologiques, l'étude des déformations globales à celles des déformations locales, ce qui peut aussi se montrer par des méthodes de recollement analytique (cf. [HarSt99].)

Pries traite le cas des déformations en égale caractéristique d'un I -revêtement ϕ de germes de courbes. Pour cela, elle introduit un foncteur F_ϕ paramétrisant les déformations non obstruées de ϕ , ce qui signifie que le lieu de branchement et la filtration de ramification ne changent pas ([Pr05] § 3.1). Elle établit en particulier l'existence d'un espace de module M_ϕ représentant le foncteur F_ϕ dans une certaine catégorie. De plus, par passage à un quotient, M_ϕ est un sous-schéma d'un produit de schémas, chacun d'eux étant un espace de modules pouvant être explicitement décrit en fonction de la ramification de filtration de ϕ . Elle en déduit des bornes inférieures et supérieures pour la dimension de Krull d_ϕ de M_ϕ , bornes qui ne dépendent que de la filtration de ramification de ϕ en numérotation supérieure.

Par la théorie du corps de classes, Pries étudie plus particulièrement le cas où I est un p -groupe abélien ([Pr05] § 4.3). Dans ce cas, M_ϕ est produit direct de copies de \mathbb{G}_a modulo l'action de \mathbb{F}_p^\times : elle en déduit une formule exacte pour d_ϕ en terme des sauts dans la filtration de ramification supérieure de ϕ . De plus, dans cette situation, la borne supérieure sur d_ϕ est atteinte.

La borne supérieure sur d_ϕ est encore atteinte lorsque I est produit semi-direct d'un p -groupe abélien élémentaire $P := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^e$ par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ([Pr05] § 3.5). On retrouve ainsi le résultat de Cornelissen-Kato dans le cas où \mathcal{Y} est ordinaire, i.e. d'invariant de Hasse-Witt égal à son genre (cf. [CoKa03]). Dans [PrOb08], Pries et Obus calculent la valeur de d_ϕ lorsque I est produit semi-direct de $P := (\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})$ par $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

La borne supérieure sur d_ϕ trouvée par Pries n'est cependant pas toujours atteinte. Considérons par exemple le cas où I est un p -groupe d'ordre p^e , i.e. $m = 1$. Notons $(\sigma_i)_{1 \leq i \leq e}$ les sauts en ramification supérieure de ϕ comptés avec leur multiplicité ℓ_i , i.e. :

$$\sigma_1 = \dots = \sigma_{\ell_1} < \sigma_{\ell_1+1} = \dots = \sigma_{\ell_1+\ell_2} < \dots < \sigma_{\ell_{r-1}+1} = \dots = \sigma_{\ell_1+\ell_2+\dots+\ell_r},$$

où

$$\frac{G^j}{G^{j+1}} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\ell_j}.$$

Alors, d'après les bornes trouvées dans [Pr05], la dimension de Krull d_ϕ est encadrée comme suit :

$$n_1 \leq d_\phi \leq \sum_{i=1}^e n_i \quad \text{avec} \quad n_i = \lfloor \sigma_i \rfloor - \lfloor \frac{\sigma_i}{p} \rfloor,$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière inférieure du réel x .

En reprenant les notations du paragraphe 2.10, on considère la courbe projective lisse C_{f_0} d'équation affine :

$$W^p - W = f_0(X) := X^{1+p^s}$$

avec $s \geq 1$ et $p \geq 3$. On prend alors pour G le sous-groupe d'inertie sauvage $A_{\infty,1}$ de $\text{Aut}_k(C)$ au point $X = \infty$. On déduit du paragraphe 2.10 que (C, G) est une grosse action dont le deuxième groupe de ramification est cyclique d'ordre p , que G est le groupe extraspécial d'exposant p et d'ordre p^{2s+1} et que les σ_i définis ci-dessus prennent les valeurs suivantes : $\sigma_1 = \dots = \sigma_{2s} = 1$ et $\sigma_{2s+1} = 1 + \frac{1}{p^s}$. D'où :

$$1 \leq d_\phi \leq 2s + 1.$$

Comme $\dim(\text{Aut}(\mathbb{P}^1 - \{\infty\})) = 2$ et que les déformations sont non obstruées, il suit des travaux de Pries ([Pr05] § 4.4) que :

$$d_\phi = \dim(\mathcal{M}_g[G] \times \mathbb{F}_p) + 2.$$

Or, les résultats du paragraphe 2.10 indiquent que $\dim(\mathcal{M}_g[G] \times \mathbb{F}_p) = s$, d'où $d_\phi = s + 2$. La borne maximale donnée par Pries n'est donc pas atteinte dans ce cas, lorsque $s \geq 2$.

2.13 Etude des déformations via les méthodes cohomologiques.

2.13.1 Utilisation des déformations dans les problèmes de relèvement en inégale caractéristique.

Les méthodes de déformations interviennent également pour étudier les problèmes de relèvement en inégale caractéristique. Bertin et Mézard ([BeMe00]) utilisent ainsi les méthodes cohomologiques des déformations pour traiter du problème de relèvement en caractéristique nulle des revêtements galoisiens de courbes lisses sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$.

Soit C une courbe complète, lisse et connexe définie sur k et $\pi : C \rightarrow C/G$ un revêtement galoisien de groupe G . Un problème difficile est celui du relèvement de π en caractéristique zéro, i.e. le relèvement galoisien à un anneau de valuation discrète R dominant l'anneau des vecteurs de Witt $W(k)$. On sait déjà que, dans certains cas, les bornes d'Hurwitz ou de Stichtenoth sur l'ordre du groupe des automorphismes rendent ce relèvement impossible. Bertin et Mézard abordent ce problème de relèvement des revêtements galoisiens en utilisant les déformations, le caractère galoisien étant conservé au cours de la déformation. Lorsque la ramification est modérée, il n'y a pas d'obstruction au relèvement infinitésimal des déformations (cf. [Gro63]). L'anneau versel de déformation est alors une algèbre de séries formelles sur $W(k)$. Mais, dans le cas général, il existe des obstructions qui sont localisées aux points de ramification sauvage.

Bertin et Mézard définissent tout d'abord les foncteurs des déformations globales D_{gl} et des déformations locales D_G d'un revêtement galoisien ([BeMe00], § 2). Ces foncteurs admettent des anneaux de déformations versels R_{gl} et R_G et leurs espaces tangents peuvent être identifiés à certains premiers groupes de cohomologie équivariants.

Plus précisément, soit Λ un anneau de valuation discrète complet de caractéristique nulle et soit k son corps résiduel de caractéristique p . On peut par exemple choisir $\Lambda = W(k)$, l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k . Soit $C \rightarrow C/G$ un revêtement galoisien, où C est une courbe algébrique projective lisse définie sur k et G un sous-groupe fini de $\text{Aut}_k(C)$. Bertin et Mézard montrent que le foncteur des déformations infinitésimales D_{gl} de (C, G) admet une déformation verselle et que son espace tangent $D_{gl}(k[\epsilon])$ s'identifie à $H^1(G, \mathcal{T}_C)$, où \mathcal{T}_C est le faisceau tangent à la courbe C .

On considère à présent $x \in C$ un point de ramification sauvage de C , i.e. un point tel que son groupe d'inertie G_x est d'ordre divisible par p . On note $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x} \simeq k[[T]]$ l'anneau local complété de la courbe C au point x et $\widehat{\mathcal{T}}_{C,x}$ la fibre complétée du faisceau tangent au point x . Bertin et Mézard prouvent que le foncteur D_G des déformations infinitésimales d'une représentation $\rho : G \hookrightarrow \text{Aut } k[[T]]$ admet une déformation verselle et que l'espace tangent $D_G(k[\epsilon])$ s'identifie à $H^1(G, \Theta)$, où $\Theta = k[[T]] \frac{d}{dT}$ est le $k[[T]]$ -module des champs de

vecteurs formels.

Bertin et Mézard démontrent ensuite un principe local-global qui relie les déformations globales aux déformations locales et qui établit que les obstructions sont de nature locale ([BeMe00], §3). Pour préciser les énoncés, il est tout d'abord nécessaire de rappeler certaines définitions de cohomologie équivariante (cf. [Gro57]). Soient C et G définis comme ci-avant. Soit F un (G, \mathcal{O}_C) -module. Si π est le revêtement $C \rightarrow \Sigma : C/G$, on peut alors considérer le faisceau $\pi_*^G(F)$ sur Σ défini par :

$$V \rightarrow \Gamma(V, \pi_*(F))^G = \Gamma(\pi^{-1}(V), F)^G,$$

où V est un ouvert de Σ . On définit alors deux foncteurs covariants sur la catégorie des (G, \mathcal{O}_C) -modules : π_*^G et $\Gamma^G(C, \cdot)$, avec $\Gamma^G(C, F) = \Gamma(C, F)^G$. Les foncteurs dérivés sont respectivement un faisceau de modules sur Σ noté $R^q \pi_*^G(C, F)$ et un groupe noté $H^q(G, F) = R^q \Gamma^G(C, F)$. Le k -espace vectoriel $H^q(G, F)$ est le groupe de cohomologie équivariante de G à coefficients dans le G -faisceau F .

Soient $y_1, y_2, \dots, y_r \in C/G$ les images des points de ramification sauvage de $C \rightarrow C/G$. Pour $1 \leq i \leq r$, on note x_i un point au-dessus de y_i . Soit le foncteur des déformations locales $D_{loc} = \prod_i D_{G_{x_i}}$, où $D_{G_{x_i}}$ est le foncteur des déformations infinitésimales de l'action induite par G_{x_i} sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C, x_i} \simeq k[[T]]$. Le choix du point x_i est sans importance, car si on prend un autre point x'_i dans l'orbite de x_i sous G , on obtient un foncteur $D_{G_{x'_i}}$ isomorphe à $D_{G_{x_i}}$. Par localisation en ces points, on définit un morphisme :

$$\varphi : D_{gl} \rightarrow D_{loc}.$$

Comme l'espace tangent au foncteur $D_{G_{x_i}}$ vérifie :

$$D_{G_{x_i}}(k[\epsilon]) \simeq H^1(G_{x_i}, \mathcal{T}_{C, x_i}),$$

l'espace tangent au foncteur D_{loc} satisfait :

$$D_{loc}(k[\epsilon]) \simeq \bigoplus_{i=1}^r H^1(G_{x_i}, \widehat{\mathcal{T}}_{C, x_i}).$$

On a de plus la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(C/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)) \longrightarrow H^1(G, \mathcal{T}_C) \longrightarrow H^0(C/G, R^1 \pi_*^G(\mathcal{T}_C)) \longrightarrow 0,$$

avec

$$H^0(C/G, R^1 \pi_*^G(\mathcal{T}_C)) \simeq \bigoplus_{i=1}^r H^1(G_{x_i}, \widehat{\mathcal{T}}_{C, x_i}).$$

L'application de localisation $H^1(G, \mathcal{T}_C) \rightarrow \bigoplus H^1(G_{x_i}, \widehat{\mathcal{T}}_{C, x_i})$ est donc surjective. Le noyau $H^1(C/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C))$ est l'espace tangent au foncteur $\text{Ker } \varphi$. Ce foncteur peut être interprété comme le foncteur des déformations équivariantes localement triviales, c'est-à-dire celles qui induisent une déformation triviale sur un voisinage formel de chaque x_i . On montre alors que le morphisme $\varphi : D_{gl} \rightarrow D_{loc}$ est lisse. De plus, si on note R_i l'anneau de déformations versel de $D_{G_{x_i}}$ et R_{gl} celui de D_{gl} , alors $R_1 \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} R_r$ est l'anneau de déformations versel de D_{loc} et

$$R_{gl} = (R_1 \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} R_r)[[U_1, \dots, U_N]],$$

avec $N = \dim_k H^1(C/G, \pi_*^G(\mathcal{T}_C))$. Ainsi, l'anneau local complet qui supporte une déformation formelle verselle globale est formellement lisse sur le produit tensoriel des anneaux locaux complets R_i qui supportent les déformations verselles localisées aux points de ramification sauvage x_i .

Bertin et Mézard se concentrent donc sur les déformations locales au voisinage formel d'un point x de ramification sauvage ([BeMe00], §4). Ils étudient plus particulièrement le cas où le groupe d'inertie $G_x = \langle \sigma \rangle$ est cyclique d'ordre p , première étape d'une étude par dévissage d'un groupe d'inertie plus compliqué. Dans ce cas, où l'existence d'un relèvement en caractéristique nulle est établie ([OSS89], [GrMa98]), ils donnent une description de l'anneau versel R_{G_x} et calculent sa dimension de Krull, comme expliqué ci-dessous.

Soit R_σ l'anneau de déformation versel local associé à l'automorphisme σ de $k[[T]]$, d'ordre p et de conducteur m , avec $p > 2$ et $m > 1$, $(p, m) \neq (3, 2)$. Le groupe cyclique d'ordre p , $G := \langle \sigma \rangle$, s'identifie au groupe d'inertie à l'infini d'un G -revêtement $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, défini sur k et étale sur \mathbb{A}^1 . Les conditions sur p et m assurent de plus que le genre du revêtement π est supérieur ou égal à 2. On fixe une structure de niveau ℓ sur la courbe C , où $\ell \geq 3$ est un premier distinct de p (cf. § 2.2 et § 2.6). Le revêtement π s'identifie alors

à un point x d'un espace modulaire $\mathcal{M}_{g,\ell}[G]$. Le point x appartient alors à la fibre spéciale de $\mathcal{M}_{g,\ell}[G]$ et l'anneau R_{gl} de déformations versel de (C, G) est relié à $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{g,\ell}[G]$ par la relation :

$$R_{gl} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M},x}.$$

Bertin et Mézard calculent la dimension de Krull de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M},x}$, c'est-à-dire la dimension de \mathcal{M} :

$$\dim_{\text{Krull}} \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{M},x} = m - 1.$$

Ils en déduisent la dimension de l'anneau de déformation versel local R_σ associé à l'automorphisme σ défini précédemment. Par le principe local-global, l'anneau de déformations universel global vérifie en effet :

$$\dim_{\text{Krull}} R_{gl} = m - 1 = \dim_{\text{Krull}} R_\sigma + \dim_k H^1(\Sigma, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)),$$

avec

$$\dim_k H^1(\Sigma, \pi_*^G(\mathcal{T}_C)) = -3 + \lfloor \frac{(m+1)(p-1)}{p} \rfloor.$$

En écrivant $m = pq - l$, avec $q \geq 1$ et $1 \leq l \leq p - 1$, ils concluent que :

$$\dim_{\text{Krull}} R_\sigma = \begin{cases} q & \text{si } l \neq 1 \\ q + 1 & \text{si } l = 1. \end{cases}$$

2.13.2 Le cas d'égalité caractéristique.

En étudiant le relèvement à la caractéristique nulle des revêtements galoisiens, Bertin et Mézard ont établi des résultats sur les déformations infinitésimales d'une G -courbe C dans le cas où le groupe G est cyclique d'ordre p . Kontogeorgis ([Kon07]) étend le travail de Bertin et Mézard dans le cadre de l'égalité caractéristique $p > 0$. Puisque les quotients des groupes de ramification successifs : G_i/G_{i+1} sont, pour $i \geq 1$, des p -groupes abéliens élémentaires, Kontogeorgis va se concentrer sur les déformations infinitésimales équivariantes d'une G -courbe C de genre g lorsque G est un p -groupe abélien élémentaire.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Soit C une courbe algébrique projective lisse, définie sur k . Le foncteur des déformations de C indépendamment de toute action de groupe, est déjà connu et largement étudié : on sait, par exemple, que son espace tangent est $H^1(\mathcal{T}_C)$, où \mathcal{T}_C est le faisceau tangent à la courbe C . Fixons à présent un sous-groupe G du groupe des automorphismes de C . Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent avec Bertin et Mézard, on peut alors définir un nouveau foncteur des déformations et l'espace tangent de ce foncteur est donné par le groupe de cohomologie équivariante de Grothendieck $H^1(G, \mathcal{T}_C)$. De plus, sa dimension sur k mesure les directions pour déformer la G -courbe C . Dans ce cas, les points x_i de ramification sauvage contribuent, via les groupes $H^1(G_{x_i}, \widehat{\mathcal{T}}_{C,x_i})$, au calcul de la dimension de l'espace tangent du foncteur des déformations.

En appliquant la théorie des groupes de Galois des corps locaux, l'idée est de casser le groupe de ramification à chaque point de ramification sauvage en une suite d'extensions de p -groupes abéliens élémentaires. Cette décomposition est utilisée pour réduire le calcul de l'espace tangent au cas d'un p -groupe abélien élémentaire. Kontogeorgis donne alors des bornes supérieures et inférieures à la dimension de l'espace tangent du foncteur des déformations. En particulier, si le groupe d'inertie G_x du point de ramification sauvage x est produit semi-direct d'un p -groupe abélien élémentaire par un groupe cyclique tel qu'il y ait seulement un saut en i ème position dans la suite de ramification inférieure, Kontogeorgis donne la valeur exacte de la dimension de la contribution locale $H^1(G_x, \mathcal{T}_{C,x})$. Dans le cas $i = 1$, il retrouve ainsi les résultats de [CoKa03] sur les déformations de courbes ordinaires. Il compare aussi ses résultats aux bornes de Pries (cf. § 2.12).

En guise d'application, revenons au cas des déformations de la courbe :

$$C_{f_0} : W^p - W = f_0(X) := X^{1+p^s} \quad \text{avec } p \geq 3, \quad s \geq 1$$

munie de l'action du groupe d'inertie sauvage $G := A_{\infty,1}$ (voir § 2.10 et § 2.12). Les formules de Kontogeorgis donnent les bornes suivantes :

$$s + 1 \leq \dim H^1(G, \widehat{\mathcal{T}}_{C,\infty}) = \dim H^1(G, \mathcal{T}_C) \leq s + 2 + p^{s-1}.$$

3 Motivation et application : la monodromie arithmétique.

L'étude des grosses actions trouve également son origine dans des problèmes de monodromie, en particulier la recherche des groupes de monodromie (sauvage) maximaux. Nos références sont ici [Liu02] et [Ma06].

Soient (K, v) un corps complet (ou hensélien) muni d'une valuation discrète, O_K son anneau de valuation, M_K l'idéal maximal de O_K et π une uniformisante. On suppose que le corps résiduel $k := O_K/M_K$ est algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. On commence par rappeler un résultat de Grothendieck prouvant l'existence d'une réduction semi-stable pour les variétés abéliennes. Soit A une variété abélienne sur K . Grothendieck prouve l'existence d'une extension K'/K finie et séparable telle que la composante neutre de la fibre spéciale du modèle de Néron \mathcal{A}^0 de $A' = A \times K'$ sur $O_{K'}$ soit semi-abélienne, i.e.

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow \mathcal{A}^0 \times k \longrightarrow B \longrightarrow 0,$$

où T est un tore et B une variété abélienne sur k . On dit alors que A admet une réduction semi-stable sur K' .

On introduit à présent la notion de réduction semi-stable (resp. stable) pour une courbe C définie sur K . On considère tout d'abord une courbe X connexe projective définie sur k . On dit que X est semi-stable si elle est réduite et si ses singularités sont des points doubles ordinaires. On dit que X est stable si elle est semi-stable, connexe, projective, si $p_a(X) \geq 2$ et si ses composantes irréductibles isomorphes à \mathbb{P}^1 intersectent les autres composantes irréductibles en au moins trois points. Considérons à présent une courbe C définie sur K . On dit que C admet une réduction semi-stable (resp. stable) s'il existe un modèle \mathcal{C} sur $\text{Spec } O_K$ avec une fibre spéciale \mathcal{C}_s semi-stable (resp. stable) sur k .

Le résultat suivant, dû à Deligne et Mumford ([DeMu69]), établit l'existence d'une telle réduction. Ainsi, si C est une courbe projective lisse, géométriquement connexe, de genre $g \geq 2$, définie sur K , il existe une extension K'/K finie et séparable telle que $C \times K'$ admette un unique modèle stable \mathcal{C} sur $O_{K'}$. La fibre spéciale $\mathcal{C} \times k$ ne dépend pas de l'extension K'/K : on l'appelle la réduction potentiellement stable de C . On peut alors faire le lien avec la réduction semi-stable pour les variétés abéliennes : la courbe C admet une réduction stable sur K si et seulement si sa jacobienne admet une réduction semi-stable sur K .

On cherche à présent l'extension minimale K'/K permettant d'obtenir cette réduction stable. Soit C une courbe définie sur K (voire une variété abélienne). Il existe une unique extension minimale K'/K telle que $C \times K'$ admette une réduction stable. On appelle cette extension l'extension de monodromie finie, son groupe de Galois $\text{Gal}(K'/K)$ le groupe de monodromie et son p -sous-groupe de Sylow $\text{Gal}(K'/K)_p$ le groupe de monodromie sauvage. Si l'extension K'/K est de degré $p^n e$, avec e premier à p , le groupe quotient $\text{Gal}(K'/K)/\text{Gal}(K'/K)_p$ est cyclique d'ordre e . Il correspond à l'extension cyclique modérée $K'^{te} := K(\pi^{1/e})$, appelée extension de monodromie modérée. Le groupe de monodromie $\text{Gal}(K'/K)$ est ainsi produit semi-direct d'un groupe cyclique d'ordre e premier à p et du p -groupe de monodromie sauvage. On se pose alors les problèmes suivants :

1. Identifier les groupes (resp. les p -groupes) qui peuvent apparaître comme groupe de monodromie (resp. groupes de monodromie sauvage).
2. Dans le cas des courbes, trouver les groupes de monodromie sauvage qui, à genre donné, sont de taille maximale.

De l'unicité du modèle stable \mathcal{C} , on déduit une action fidèle du groupe de monodromie sur la réduction potentiellement stable de C :

$$\text{Gal}(K'/K) \hookrightarrow \text{Aut}_k(\mathcal{C} \times k).$$

Si l'on suppose à présent que $\mathcal{C} \times k$ est lisse de genre $g \geq 2$, on peut appliquer les bornes connues pour les groupes d'automorphismes des courbes lisses de genre $g \geq 2$. En particulier, le groupe de monodromie modérée étant cyclique d'ordre e , on déduit de [Na87b] que $e \leq 4g + 2$. Par Stichtenoth [St73] et Nakajima [Na87a], on sait aussi que $|\text{Gal}(K'/K)_p| \leq \max\{4g, \frac{4p}{(p-1)^2} g^2\}$. Mais ces problèmes ont également des liens avec nos "grosses actions", comme le montre l'exemple qui suit.

Lehr et Mignion [LM06a] ont déterminé l'extension de monodromie de certains revêtements p -cycliques de la droite projective sur une extension de \mathbb{Q}_p pour lesquels le groupe de monodromie sauvage est de taille maximale à genre donné. Ainsi, soit $p \geq 2$, $s \geq 1$, $K = \mathbb{Q}_p^{nr}(p^{1/(p^s+1)}, \zeta)$, où ζ est une racine primitive p -ième de l'unité. Considérons le revêtement $C \rightarrow \mathbb{P}_K^1$ défini par l'équation :

$$Z^p = f(X) = 1 + p^{1/(p^s+1)} X^{p^s} + X^{p^s+1}.$$

Alors, C a potentiellement bonne réduction et sa fibre spéciale est birationnelle à la courbe C_{f_0} d'équation :

$$w^p - w = t^{1+p^s}.$$

L'extension de monodromie K'/K est l'extension obtenue en adjoignant au corps de décomposition d'un certain polynôme $\mathcal{L}(Y)$, appelé polynôme de monodromie, les racines p -ièmes $f(y)^{1/p}$, lorsque y parcourt les zéros de $\mathcal{L}(Y)$. De plus, le groupe de monodromie est le sous-groupe d'inertie $A_{\infty,1}$ de $\text{Aut}_k(C_{f_0})$ au point $t = \infty$. D'après ce qui précède (cf. § 2.10), lorsque $p > 2$, $A_{\infty,1}$ est le groupe extrasécial d'exposant p et d'ordre p^{2s+1} . Ce groupe de monodromie, qui coïncide avec le groupe de monodromie sauvage, est maximal pour le genre $g = \frac{(p-1)}{2} p^s$.

Dans le cas $p = 2$ et $g = 2$, Lehr et Matignon ([LM06a]) complètent dans le cas d'inégale caractéristique les travaux de Silverberg et Zarhin ([SiZa05]) concernant la monodromie des surfaces abéliennes sur un corps local.

4 Présentation des principaux résultats de la thèse.

Cette thèse est composée de trois chapitres dont le but est d'étudier les grosses actions, i.e. les couples (C, G) où C est une courbe projective lisse connexe définie sur un corps k algébriquement clos de caractéristique positive $p > 0$, de genre $g \geq 1$ et G un p -groupe de k -automorphismes de C vérifiant $\frac{|G|}{g} > \frac{2p}{p-1}$.

Pour fixer les notations, nous rappelons quelques-uns des résultats exposés au paragraphe 2.9. Si (C, G) est une grosse action, il existe un point ∞ de C tel que G coïncide avec le groupe d'inertie sauvage G_1 de G au point ∞ . De plus, la courbe quotient C/G est isomorphe à la droite projective \mathbb{P}_k^1 . Le deuxième groupe G_2 de ramification de G au point ∞ est non trivial, strictement inclus dans $G_1 = G$. La courbe quotient C/G_2 est isomorphe à la droite projective et le groupe quotient G/G_2 agit comme un groupe de translations de la droite affine $C/G_2 - \{\infty\}$. De cette manière, G apparaît comme une extension de G_2 par un p -groupe abélien élémentaire V , selon la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G = G_1 \xrightarrow{\pi} V \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^v \longrightarrow 0, \quad (11)$$

avec

$$\pi : \begin{cases} G \rightarrow V \\ g \rightarrow g(X) - X. \end{cases}$$

4.1 Chapitre 1 : étude du deuxième groupe de ramification d'une grosse action.

Le premier chapitre de la thèse (cf. [MR08]) est plus particulièrement consacré à l'étude du deuxième groupe de ramification G_2 . Il vise d'une part à donner des conditions nécessaires sur G_2 afin que (C, G) soit une grosse action et, d'autre part, à exhiber des exemples de grosses actions avec un G_2 abélien d'exposant quelconque.

Les principaux résultats obtenus sur G_2 dans la première partie du chapitre 1 sont regroupés dans le théorème suivant :

Théorème : Soit (C, G) une grosse action de genre $g \geq 2$.

1. Soit H un sous-groupe de G . Alors, C/H est de genre 0 si et seulement si $H \supset G_2$ (Lemme 2.4).
2. Soit H un sous-groupe strict de G_2 , normal dans G . Alors, $(C/H, G/H)$ est une grosse action de deuxième groupe de ramification $(G/H)_2 = G_2/H$ (Lemme 2.4).
3. Le groupe G_2 coïncide avec $D(G)$, le groupe dérivé G (Théorème 2.7).
4. Le groupe G_2 n'est cyclique que s'il est d'ordre p (Théorème 5.1).
5. Si $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$, alors G_2 est un p -groupe abélien élémentaire d'ordre divisant p^3 (Proposition 4.1).

Ces résultats mettent en lumière le rôle déterminant joué par G_2 dans l'étude des grosses actions. On voit en particulier que G_2 se définit de manière purement algébrique en tant que groupe dérivé de G . On remarque aussi qu'il n'existe pas de sous-groupe strict H de G_2 tels que C/H soit de genre nul. Le deuxième point, appelé "théorème de transfert", permet de se ramener au cas d'une grosse action avec un G_2 d'ordre inférieur, en particulier au cas connu (cf. § 2.10) d'une grosse action dont le G_2 est cyclique d'ordre p . Enfin, si l'on déduit du deuxième point que pour une grosse action, G ne peut être abélien, on ignore pour l'heure s'il existe des grosses actions avec un G_2 non abélien.

La seconde partie de ce premier chapitre donne justement des exemples de grosses actions avec des G_2 abéliens, d'exposant quelconque. Pour produire une telle grosse action, l'idée est de considérer une courbe projective lisse connexe C et un revêtement galoisien $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ de groupe H abélien, lequel jouera le rôle

du G_2 de la grosse action. Il s'agit dès lors de construire un gros p -groupe de k -automorphismes de C en relevant un groupe suffisamment large de translations, lesquelles doivent laisser invariantes les équations de l'extension L/L^H , où L est le corps de fonctions de C . On retrouve ainsi la suite exacte (11).

Dans le sixième paragraphe de ce premier chapitre, on considère ainsi l'extension abélienne maximale K_S^m de $K = \mathbb{F}_q(X)$ ($q = p^e$) qui est non ramifiée en dehors de $X = \infty$, totalement décomposée au dessus de l'ensemble des places rationnelles de K à distance finie et de conducteur inférieur à $m\infty$, avec $m \in \mathbb{N}$. Ces extensions ont été étudiées par Auer ([Au99], [Au00]) et Lauter ([Lau99]) dans leur recherche de courbes algébriques avec beaucoup de points rationnels. La théorie du corps de classe nous donne une description précise du groupe de Galois $G_S(m)$ de l'extension K_S^m/K . De l'unicité et la maximalité de K_S^m , on déduit que le groupes des translations par \mathbb{F}_q se prolongent en un p -groupe de \mathbb{F}_q -automorphismes de $K_S^m : G(m)$, ce qui donne une suite exacte semblable à (11) :

$$0 \longrightarrow G_S(m) \longrightarrow G(m) \longrightarrow \mathbb{F}_q \longrightarrow 0.$$

Ceci fournit des exemples de grosses actions avec un $G_2 = G_S(m)$ abélien d'exposant aussi grand que l'on veut. Ces exemples permettent aussi de relier le problème des grosses actions à celui des courbes algébriques avec beaucoup de points rationnels. Dans une dernière partie, on utilise enfin le théorème de Katz-Gabber pour mettre en lumière le lien entre les grosses actions sur les courbes et une condition analogue de ramification pour les p -groupes finis agissant sur $k((z))$.

4.2 Chapitre 2 : grosses actions dont le G_2 est p -abélien élémentaire.

Le deuxième chapitre de cette thèse (cf. [Ro08a]) est consacré à l'étude des grosses actions (C, G) dont le deuxième groupe de ramification G_2 est p -abélien élémentaire. Rappelons que G_2 est défini de manière purement algébrique puisqu'il coïncide avec le groupe dérivé de G .

Le cas d'une grosse action dont le G_2 est p -abélien élémentaire s'avère crucial dans l'étude et la classification des grosses actions. Ainsi, si (C, G) est une grosse action et si H est un sous-groupe de G strictement inclus dans G_2 , nous avons vu dans le premier chapitre que $(C/H, G/H)$ est encore une grosse action dont le deuxième groupe de ramification est G_2/H . Si l'on applique ce résultat à $H = \text{Fratt}(G_2)$ le sous-groupe de Frattini de G_2 , on se ramène ainsi au cas d'une grosse action dont le deuxième groupe de ramification est p -abélien élémentaire. Une seconde motivation concerne la poursuite de la classification des grosses actions initiée par Lehr et Matignon [LM05]. En effet, nous avons vu au paragraphe 2.11 que les grosses actions vérifiant que $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p-1)^2}$ correspondent aux revêtements p -cycliques étales de la droite affine paramétrés par une équation d'Artin-Schreier : $W^p - W = X S(X) + cX \in k[X]$ où S parcourt l'ensemble des polynômes additifs de $k[X]$ (cf. § 2.11, Théorème 2.4) On désire à présent poursuivre cette classification des grosses actions sous la condition $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$. Or, nous avons vu dans le premier chapitre que cette condition impose que le G_2 soit un p -groupe abélien élémentaire d'ordre divisant p^3 , d'où la nécessité de se pencher sur ce cas.

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant :

Théorème : (Théorème 3.14) Soit (C, G) une grosse action telle que $G_2 (= D(G))$ soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$, $n \geq 1$. Pour tout $t \geq 1$, on note Σ_t le sous- k -espace vectoriel de $k[X]$ engendré par 1 et le produit d'au plus t polynômes additifs. Alors, le corps de fonctions de C peut être paramétré par n équations d'Artin-Schreier de la forme :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad W_i^p - W_i = f_i(X) \in \Sigma_{i+1}.$$

En d'autres termes, chaque f_i peut s'écrire comme combinaison linéaire sur k de produits d'au plus $i + 1$ polynômes additifs de $k[X]$.

Ce résultat généralise le cas, étudié au paragraphe 2.10, d'une grosse action dont le G_2 est cyclique d'ordre p (cf. § 2.10, Thm. 2.2 et Prop. 2.3) Mais contrairement au cas $n = 1$, ce critère n'est pas une caractérisation et la réciproque n'est plus vraie dès que $n \geq 2$. Ainsi, une famille de fonctions (f_i) vérifiant ces conditions ne donnent pas nécessairement naissance à une grosse action. Les obstructions sont liées au problème de plongement évoqué dans le premier chapitre et lié à la suite exacte (voir (11)) :

$$0 \longrightarrow G_2 \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n \longrightarrow G \longrightarrow V \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^v \longrightarrow 0.$$

Pour résoudre ce problème, on étudie la représentation induite

$$\phi : G/G_2 \rightarrow \text{Aut}(G_2) \simeq \text{GL}_n(\mathbb{F}_p),$$

via la représentation duale pour le pairing d'Artin-Schreier. Cette dernière exprime l'action de V par translation sur les équations paramétrant la courbe, équations qui sont définies modulo $(F - id)(k[X])$.

On se concentre ensuite sur deux cas particuliers. Au paragraphe 4, on étudie d'abord le cas où il n'y a qu'un seul saut dans la filtration de ramification de G_2 . Dans ce cas, les représentations mentionnées ci-dessus sont triviales et chacune des fonctions f_i est dans Σ_2 . Dans le paragraphe 5, on étudie la situation que l'on pourrait qualifier d'opposée : celle où chaque f_i est dans $\Sigma_{i+1} - \Sigma_i$. On donne tout d'abord une caractérisation de ce cas au moyen d'arguments issus de la théorie des groupes. On montre alors que, sous cette condition, le nombre de sauts dans la filtration de ramification de G_2 est maximale. On calcule ensuite le degré des fonctions f_i et la dimension v du k -espace vectoriel V . Le dernier paragraphe est consacré à des exemples de familles illustrant les résultats du paragraphe 5. Pour $p = 5$, $n \leq p - 1$ et $\dim_k V = 2$, on exhibe des familles universelles, ce qui permet de discuter de l'espace des déformations. On peut en particulier comparer la dimension obtenue avec les bornes données par Pries (voir § 2.11).

4.3 Chapitre 3 : classification des grosses actions vérifiant $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$.

Le but de ce dernier chapitre (cf. [Ro08b]) est de poursuivre la classification des grosses actions amorcée au paragraphe 2.11. Nous poursuivons ici cette classification sous la condition $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$, sachant que nous avons montré dans le premier chapitre que cette borne impose que le deuxième groupe de ramification G_2 soit p -abélien élémentaire d'ordre divisant p^3 . Grâce aux résultats du deuxième chapitre, on connaît par ailleurs la forme des équations de la courbe dans un tel cas.

Ce dernier chapitre se divise en deux parties. Dans la première, on s'intéresse à la finitude du nombre de valeurs prises par les quotients $\frac{|G|}{g}$ et $\frac{|G|}{g^2}$ pour les grosses actions (C, G) satisfaisant la condition \mathcal{G}_M , i.e. les grosses actions telles que $\frac{|G|}{g^2} \geq M$, pour $M > 0$ un entier fixé. Dans la seconde partie, on réalise la classification de ces grosses actions lorsque $M = \frac{4}{(p^2-1)^2}$.

Résumons ici les principaux résultats de la première partie, qui seront autant d'outils pour la classification de la seconde partie.

Proposition : Soit $M > 0$ un entier fixé et soit (C, G) une grosse action satisfaisant \mathcal{G}_M . Alors, l'ordre de G_2 ne prend qu'un nombre fini de valeurs. (Lemme 4.1).

En s'interrogeant de même sur la finitude des valeurs prises par g , $|G|$ et donc par le quotient $\frac{|G|}{g}$ lorsque (C, G) satisfait \mathcal{G}_M , nous sommes amenés à discuter de l'inclusion $\text{Fratt}(G_2) \subset [G_2, G]$, où $\text{Fratt}(G_2)$ est le sous-groupe de Frattini de G_2 et $[G_2, G]$ le commutateur de G_2 et de G . Ces deux groupes revêtent en effet une importance particulière pour notre problème. La trivialité de $\text{Fratt}(G_2)$ caractérise le fait que G_2 soit p -abélien élémentaire. La trivialité de $[G_2, G]$ équivaut quant à elle au fait que G_2 est inclus dans le centre de G , i.e. que le représentation $\phi : G/G_2 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$ évoquée au chapitre 2 est triviale.

Proposition : Soit $M > 0$ un entier fixé et soit (C, G) une grosse action satisfaisant \mathcal{G}_M .

1. Si $\text{Fratt}(G_2) \subsetneq [G_2, G]$, le quotient $\frac{|G|}{g}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs (Proposition 4.6 et Corollaire 4.7).
2. Si $\text{Fratt}(G_2) = [G_2, G]$, le résultat précédent n'est plus vrai ; c'est seulement le quotient $\frac{|G|}{g^2}$ qui prend un nombre fini de valeurs, lorsque G_2 est abélien et lorsque $p > 2$ (Proposition 4.9 et Corollaire 4.11).

On montre en réalité un résultat plus fort que ce second point :

Théorème : Supposons que $p > 2$. Soit (C, G) une grosse action telle que $\text{Fratt}(G_2) = [G_2, G] \neq \{e\}$. Alors, G_2 est non abélien (Théorème 4.10).

Rappelons que l'on ignore encore s'il existe des grosses actions dont les G_2 soient non abéliens.

Dans la première partie de ce chapitre, on cherche d'autre part à faire le lien entre les sous-groupes G de $\text{Aut}_k(C)$ tels que (C, G) soit une grosse action et le p -sous-groupe de Sylow S_p de $\text{Aut}_k(C)$ contenant G (voir § 3). Le résultat principal est que G et S_p possèdent le même groupe dérivé, c'est-à-dire, pour une grosse action, le même deuxième groupe de ramification. Dans notre classification, on pourra donc se restreindre au cas des seuls p -Sylow de $\text{Aut}_k(C)$.

Dans la seconde partie de ce chapitre, on donne enfin la classification et la paramétrisation des grosses actions (C, G) vérifiant $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$. Selon l'ordre de G_2 et selon si l'inclusion $\{e\} = \text{Fratt}(G_2) \subset [G_2, G]$ est stricte ou non, on précise les équations des fonctions f_i , de l'espace V des translations et on décrit le groupe G . Ceci est l'occasion d'une discussion autour des espaces de déformation de telles actions. On peut à nouveau comparer la dimension obtenue avec les bornes données par Pries (voir § 2.11).

Remerciements.

Je tiens à remercier chaleureusement les relecteurs dont l'aide précieuse m'a permis d'améliorer et d'affiner ce chapitre préliminaire. Mes plus vifs mercis vont en particulier à Sylvain Maugeais et Matthieu Romagny, sans oublier mon directeur de thèse Michel Matignon.

Références

- [Ab57] S. Abhyankar, *Coverings of algebraic curves*. Amer. J. Math. **79**, (1957), 825–856.
- [Au99] R. Auer, *Ray Class Fields of Global Function Fields with Many Rational Places*. Dissertation at the University of Oldenburg, (1999), disponible à <http://www.bis.uni-oldenburg.de/dissertation/fb06.html>
- [Au00] R. Auer, *Ray class fields of global function fields with many rational places*. Acta Arith. **95**, no. 2, (2000), 97-122.
- [Be96] J. Bertin, *Compactification des schémas de Hurwitz*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322**, no. 11, (1996), 1063–1066.
- [BeMe00] J. Bertin, A. Mézard, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques*. Invent. Math. **141**, no. 1, (2000), 195–238.
- [BeRo08] J. Bertin, M. Romagny, *Champs d'Hurwitz*, (2008), disponible à <http://www.math.jussieu.fr/~romagny/>
- [Bor01] N. Borne, *Modules galoisiens sur les courbes : une introduction*. Arithmétique de revêtements algébriques (Saint-Étienne, 2000), 147–159, Sémin. Congr. 5, Soc. Math. France, Paris, (2001).
- [Bor06] N. Borne, *Cohomology of G -sheaves in positive characteristic*. Adv. Math. **201**, no. 2, (2006), 454–515.
- [Bou00] I. Bouw, *The p -rank of curves and covers of curves*. Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique (Luminy, 1998), 267–277, Progr. Math., 187, Birkhäuser, Basel, (2000).
- [Br00] T. Breuer, *Characters and automorphism groups of compact Riemann surfaces*. London Mathematical Society Lecture Note Series, 280. Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
- [ByCo08] J. Byszewski, G. Cornelissen, *Which weakly ramified group actions admit a universal formal deformation?* (2008), arXiv :0708.3279, disponible à <http://front.math.ucdavis.edu/0708.3279>
- [Con90] M. Conder, *Hurwitz groups : a brief survey*. Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **23**, no. 2, (1990), 359-370.
- [CoKa03] G. Cornelissen, F. Kato, *Equivariant deformation of Mumford curves and of ordinary curves in positive characteristic*, Duke Math. J. **116**, no. 3, (2003) 431–470.
- [CoMe06] G. Cornelissen, A. Mézard, *Relèvements des revêtements de courbes faiblement ramifiés*. Math. Z. **254** no. 2, (2006), 239–255.
- [DeMu69] P. Deligne, D. Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. no. **36** (1969), 75–109.
- [El97] N. Elkies *Linearized algebra and finite groups of Lie type. I. Linear and symplectic groups in Applications of curves over finite fields*, (Seattle, WA, 1997), Contemporary Mathematics, vol 245, American Mathematical Society, (Providence, RI, 1999)
- [El99] N. Elkies, *The Klein quartic in number theory. The eightfold way*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **35**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1999), 51–101.
- [FaKa92] H. Farkas, I. Kra, *Riemann surfaces*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York, (1992).
- [GK07] M. Giulietti, G. Korchmáros, *On large automorphism groups of algebraic curves in positive characteristic* (2007), arXiv :0706.2320, disponible à <http://front.math.ucdavis.edu/0706.2320>

- [GK08] M. Giulietti, G. Korchmáros, *Nakajima's remark on Henn's proof* (2008), arXiv :0808.4029, disponible à <http://front.math.ucdavis.edu/0808.4029>
- [Go96] D. Goss, *Basic structures of function field arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol.35, (Springer, Berlin, 1996)
- [GrMa98] B. Green, M. Matignon *Liftings of Galois covers of smooth curves*. Compositio Math. **113**, no. 3, (1998) 237–272.
- [Gro57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique* Tôhoku Math. J. (2) **9**, (1957), 119–221.
- [Gro63] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental. Fasc. I : Exposés 1 à 5. Séminaire de Géométrie Algébrique, 1960/61*. Troisième édition, corrigée Institut des Hautes Études Scientifiques, Paris (1963).
- [HaPe93] J. P. Hansen, J. P. Pedersen *Automorphism groups of Ree type, Deligne-Lusztig curves and function fields*. J. Reine Angew. Math. **440**, (1993), 99–109.
- [Har94] D. Harbater, *Abhyankar's conjecture on Galois groups over curves*. Invent. Math. **117**, no. 1, (1994), 1–25.
- [Har03] D. Harbater, *Patching and Galois theory*. Galois groups and fundamental groups, 313–424, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 41, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2003).
- [HarSt99] D. Harbater, K. Stevenson, *Patching and thickening problems*. J. Algebra **212** no. 1, (1999), 272–304.
- [Hen78] H. W. Henn, *Funktionenkörper mit grosser Automorphismengruppe*, J. Reine Angew Math **302** (1978), 96–115.
- [HKT08] J. Hirschfeld, G. Korchmáros, F. Torres, *Algebraic curves over a finite field*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- [Hu92] A. Hurwitz, *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich*. Math. Ann. **41**, no. 3, (1892), 403–442
- [KaMa85] N. Katz, B. Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves*. Annals of Mathematics Studies, 108. Princeton University Press, Princeton, NJ, (1985).
- [Kl79] F. Klein, *Über die Transformationen siebenter Ordnung der elliptischen Functionen*. Math. Annalen **14**, (1879), 428–471.
- [Kon06] A. Kontogeorgis, *Polydifferentials and the deformation functor of curves with automorphisms*. J. Pure Appl. Algebra **210**, no. 2, (2007), 551–558.
- [Kon07] A. Kontogeorgis, *On the tangent space of the deformation functor of curves with automorphisms*. Algebra & Number Theory **1**, no. 2, (2007) 119–161.
- [Ku91] R. Kulkarni, *Riemann surfaces admitting large automorphism groups*. Extremal Riemann surfaces (San Francisco, CA, 1995), 63–79, Contemp. Math., 201, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997).
- [KuKi90] A. Kuribayashi, H. Kimura, *Automorphism groups of compact Riemann surfaces of genus five*, J. Algebra **134**, no. 1, (1990), 80–103.
- [Lar01] M. Larsen, Michael, *How often is $84(g-1)$ achieved?*, Israel J. Math. **126**, (2001), 1–16.
- [Lau99] K. Lauter, *A Formula for Constructing Curves over Finite Fields with Many Rational Points*, Journal of Number Theory **74**, no. 1, (1999), 56–72.
- [Leo96] H-W Leopoldt, *Über die Automorphismengruppe des Fermatkörpers*, J. Number Theory **56**, no. 2, (1996), 256–282.
- [Liu02] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, (2002).
- [LM05] C. Lehr, M. Matignon, *Automorphism groups for p -cyclic covers of the affine line*. Compositio Math. **141**, no. 5, (2005), 1213–1237.
- [LM06a] C. Lehr, M. Matignon, *Wild monodromy and automorphisms of curves*. Duke Math. J. **135**, no. 3, (2006), 569–586.
- [LM06b] C. Lehr, M. Matignon, *Maximal wild monodromy in unequal characteristic*, (2006) preprint disponible à <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~matignon/>
- [Ma06] M. Matignon, *Semi-stable reduction and wild monodromy*, beamer slides version of a lecture given for MariusFest (Groningen, April 2007), available at <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~matignon/>

- [Mau08] S. Maugeais, *Espaces des modules des courbes équivariantes et torseurs*, (2008), arXiv :0803.4399, disponible à <http://front.math.ucdavis.edu/0803.4399>
- [MSSV02] K. Magaard, T. Shaska, S. Shpectorov, H. Völklein, *The locus of curves with prescribed automorphism group*. Communications in arithmetic fundamental groups (Kyoto, 1999/2001). Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku no. 1267 (2002), 112–141, disponible à <http://arxiv.org/abs/math/0205314>
- [Mc65] A.M. Macbeath, *On a curve of genus 7*. Proc. London Math. Soc. (3) **15** (1965), 527–542 .
- [Mi80] J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, 33, Princeton University Press, (Princeton, N.J., 1980)
- [MR08] M. Matignon, M. Rocher, *On smooth curves endowed with a large automorphism p -group in characteristic $p > 0$* (2008), version mise à jour disponible à <http://www.math.u-bordeaux.fr/~mrocher/recherche.html>, to appear in Algebra & Number Theory.
- [Na87a] S. Nakajima, *p -ranks and automorphism groups of algebraic curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **303**, no. 2, (1987), 595–607.
- [Na87b] S. Nakajima, *On abelian automorphism groups of algebraic curves*. J. London Math. Soc. (2) **36**, no. 1, (1987) 23–32.
- [Oo85] F. Oort, *Lifting algebraic curves, abelian varieties, and their endomorphisms to characteristic zero*. Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), 165–195, Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [OSS89] F. Oort, T. Sekiguchi, N. Suwa, *On the deformation of Artin-Schreier to Kummer*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **22**, no. 3, (1989), 345–375.
- [PaSt00] A. Pacheco, K. Stevenson, *Finite quotients of the algebraic fundamental group of projective curves in positive characteristic*. Pacific J. Math. **192**, no. 1, (2000), 143–158.
- [Pr02] R. Pries, *Families of wildly ramified covers of curves*. Amer. J. Math. **124**, no. 4, (2002), 737–768.
- [Pr05] R. Pries, *Equiramified deformations of covers in positive characteristic*, math.AG/0403056, (2005), disponible à <http://front.math.ucdavis.edu/0403.5056>
- [Pr06] R. Pries, *Wildly ramified covers with large genus*. J. Number Theory **119**, no. 2, (2006), 194–209.
- [PrOb08] R. Pries, A. Obus, *Wild cyclic-by-tame extensions*. (2008), arXiv :0807.4790, disponible à <http://front.math.ucdavis.edu/0807.4790>
- [Ray94] M. Raynaud, *Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d’Abhyankar*. Invent. Math. **116**, no. 1-3, (1994), 425–462
- [Ro08a] M. Rocher, *Large p -group actions with a p -elementary abelian derived group*. arXiv :0801.3834, (2008), version mise à jour disponible à <http://www.math.u-bordeaux.fr/~rocher/recherche.html>
- [Ro08b] M. Rocher, *Large p -group actions with $\frac{|G|}{g^2} \geq \frac{4}{(p^2-1)^2}$* , arXiv :0804.3494, (2008), version mise à jour disponible à <http://www.math.u-bordeaux.fr/~rocher/recherche.html>
- [Roq70] P. Roquette, *Abschätzung der Automorphismenzahl von Funktionenkörpern bei Primzahlcharakteristik*. Math. Z. **117**, (1970), 157–163.
- [Sch38] H. L. Schmid, *Über die Automorphismen eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik*, J. Reine Angew. Math. **179**, (1938), 5–15
- [Se60] J-P. Serre, *Rigidité du foncteur de Jacobi d’échelon $n \geq 3$* , appendice à l’exposé 17 du séminaire Cartan (1960-1961).
- [Se68] J-P. Serre, *Corps locaux*. Deuxième édition. Hermann, Paris, (1968).
- [Se92] J-P. Serre, *Topics in Galois theory*. Lecture notes prepared by Henri Darmon. With a foreword by Darmon and the author. Research Notes in Mathematics, 1. Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, (1992.)
- [SiZa05] A. Silverberg, Y. Zarhin, *Inertia groups and abelian surfaces*. J. Number Theory **110**, no. 1, (2005), 178–198.
- [Sin74] B. Singh, *On the group of automorphisms of function field of genus at least two*, J. Pure Appl. Algebra **4**, (1974), 205–229.
- [St73] H. Stichtenoth, *Über die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik I, II*, Arch. Math. (Basel) **24** (1973), 527–544, 615–631.

- [St93] H. Stichtenoth, *Algebraic function fields and codes*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, (1993).
- [Su82] M. Suzuki, *Group Theory I*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften , 247. (Springer-Verlag, Berlin-New York, 1982.)
- [Tu93] S. Tufféry, *Déformations de courbes avec action de groupe*. Forum Math. **5**, no. 3, (1993), 243–259.