# Fonctions de plusieurs variables

1ère année

E.N.S.T.B.B.
I.P.B.

Année Universitaire 2014-15

Bordeaux INP
ENSTBB

# Plan

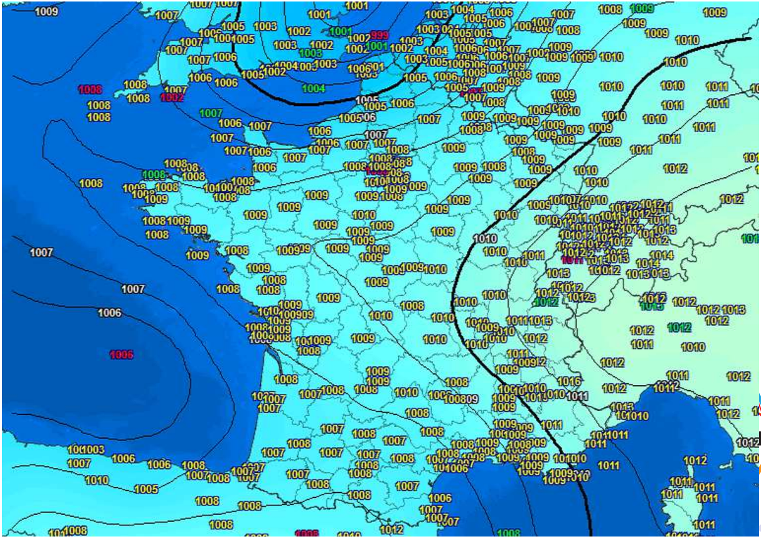


Bordeaux INP
ENSTBB

# Plan

On peut définir des fonctions d'un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. A chaque point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $D$, on associe au plus un point de $\mathbb{R}$. Ces fonctions s'appellent fonctions réelles.
C'est par exemple le cas lorsque l'on construit une carte des pressions, des altitudes, ou des températures sur un domaine à deux ou trois dimensions.

Bordeaux INP
ENSTBB



On peut aussi définir les applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, il suffit de se donner $p$ fonctions réelles $f_1, \ldots, f_p$ de $n$ variables réelles $(x_1, \ldots, x_n)$.

# Plan



Bordeaux INP ENSTBB

Comme dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des points qui ont une image par la fonction $f$ s'appelle le domaine de définition de la fonction $\mathcal{D}_f$.

**Exemple**

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$$

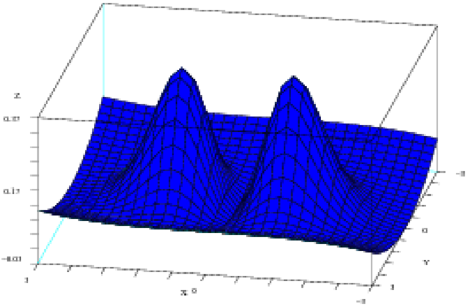
Nous pouvons représenter les fonctions de 2 variables en donnant la représentation graphique du graphe :

$$\mathrm{Graph}(f) = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} \quad f(x, y) = z\}$$

Ceci nous donne un graphique dans $\mathbb{R}^3$

## Exemple

$$f(x,y)->x^2*exp(-(x^2+y^2))+y^2/100+x^3/1000;$$



# Plan

On considèrera dans ce paragraphe :

$$E = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ \forall i \in \{1, \ldots n\}\ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

## Définition

*On appelle norme euclidienne (ou norme 2) du vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ l'application définie par*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

*La distance entre deux éléments de $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ est égale à $\|x - y\|_2$*

On considèrera dans ce paragraphe :

$$E = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ \forall\, i \in \{1, \ldots n\}\ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

## Définition

*On appelle norme euclidienne (ou norme 2) du vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ l'application définie par*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

*La distance entre deux éléments de $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ est égale à $\|x - y\|_2$*

## Définition

*On appelle norme sur $E$ toute application de $E$ dans $\mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|x\|$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :*

1. $$\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$$
2. $$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$
3. $$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Les trois normes les plus usitées sur $\mathbb{R}^n$ sont les suivantes :

1. $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2. $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

3. $$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

cas particuliers de la famille générale suivante :

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

Les trois normes les plus usitées sur $\mathbb{R}^n$ sont les suivantes :

1. $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2. $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

3. $$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

cas particuliers de la famille générale suivante :

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

### Définition

*On dit que deux normes $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes s'il existe deux constantes $c$ et $c'$ supérieures à 0 telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad cN_1(x) \leq N_2(x) \leq c'N_1(x).$$

### Théorème

*Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ (ou sur un espace vectoriel de dimension finie) sont équivalentes.*

Bordeaux INP
ENSTBB

## Définition

*On dit que deux normes $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes s'il existe deux constantes $c$ et $c'$ supérieures à 0 telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad cN_1(x) \leq N_2(x) \leq c'N_1(x).$$

## Théorème

*Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ (ou sur un espace vectoriel de dimension finie) sont équivalentes.*

# Plan



Bordeaux INP ENSTBB

# Plan

## Définition

*Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, la boule ouverte de centre $x_0$ et de rayon $r$ est l'ensemble:*

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x_0 - x\|_2 < r\}$$

Soit $S$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

**Définition**

*$S$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x$ de $S$, il existe $r > 0$ telle que la boule de centre $x$ et de rayon $r$ soit contenue dans $S$.*

**Définition**

*$S$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash S$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .*

**Définition**

*$S$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ s'il est fermé borné (contenu dans une boule de rayon $M < +\infty$).*

Soit $S$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

**Définition**

*$S$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x$ de $S$, il existe $r > 0$ telle que la boule de centre $x$ et de rayon $r$ soit contenue dans $S$.*

**Définition**

*$S$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus S$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .*

**Définition**

*$S$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ s'il est fermé borné (contenu dans une boule de rayon $M < +\infty$).*

Soit $S$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

### Définition

*$S$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x$ de $S$, il existe $r > 0$ telle que la boule de centre $x$ et de rayon $r$ soit contenue dans $S$.*

### Définition

*$S$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash S$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .*

### Définition

*$S$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ s'il est fermé borné (contenu dans une boule de rayon $M < +\infty$).*

Soit $S$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

### Définition

*$S$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x$ de $S$, il existe $r > 0$ telle que la boule de centre $x$ et de rayon $r$ soit contenue dans $S$.*

### Définition

*$S$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $\mathbb{R}^n \backslash S$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ .*

### Définition

*$S$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ s'il est fermé borné (contenu dans une boule de rayon $M < +\infty$).*

## Définition

*On dit que $f$ admet une limite $l$ au point $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in D \ \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

On ne peut pas généraliser la notion de limite droite et gauche (respectivement continuité à droite et à gauche) car il y a *a priori* **une infinité de directions possibles.**

## Définition

*On dit que $f$ est continue au point $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si :*

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \eta > 0 \;\; \forall x \in D \;\; \|x - a\| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

# Plan

# Plan

Soit $f$ une fonction définie de $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère un point $x$ dans le domaine $D$.

## Définition

*On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à $x_i$ en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ si et seulement si la limite suivante existe :*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{h}$$

*On note cette quantité :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

## Exemple

*Calculer les dérivées partielles en* $(1,1)$ *de la fonction :*

$$f(x,y) = x^2 + xy$$

$$\frac{(1+h)^2 + (1+h) - 1^2 + 1}{h} = \frac{h^2 + 3h}{h}$$

*La limite donne* $3$*.*

Pratiquement cela revient à regarder uniquement la fonction en la variable $x_i$ et à considérer les autres variables comme des constantes. Si on calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ on trouve : $2x + y$, et on retrouve la valeur 3 en prenant $(x,y) = (1,1)$.

## Définition

*Soit $f$ une fonction de $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a = (a_1, \ldots, a_n)$. On appelle gradient de $f$ en $a$ et on note $\nabla f(a)$ le vecteur ligne des dérivées partielles :*

$$\nabla f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)).$$

Bordeaux INP
ENSTBB

## Définition

*Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, le gradient est remplacé par la matrice jacobienne :*

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

## Théorème

*de Schwartz*

*Soit $f$ une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in A$. Soient $j$ et $k$ deux indices de $\{1, \dots, n\}$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ existe dans un voisinage de $a$ et est continue en $a$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ existe et on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$$

On range les dérivées partielles d'ordre 2 dans une matrice nommée matrice hessienne :

## Définition

*Soit $f$ une fonction de $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f$ admet des dérivées d'ordre 2 continues en $a$, on appelle matrice hessienne de $f$ au point $a$ la matrice suivante :*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice hessienne est symétrique.

# Plan

## Remarque

*Soit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle dérivée en a, notée $f'(a)$, la limite $\lim_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ Cette définition n'est pas extensible aux fonctions de plusieurs variables, on ne divise pas par un vecteur.*

Bordeaux INP
ENSTBB

## Remarque

*Soit une fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle dérivée en $a$, notée $f'(a)$, la limite $\lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ Cette définition n'est pas extensible aux fonctions de plusieurs variables, on ne divise pas par un vecteur.*

## Définition

*Soit $f$ une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ , soit $a \in \Omega$. On dit que $f$ est dérivable (ou différentiable) en $a$ si et seulement si*

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + ||h||\epsilon(h)$$

*où $\lim\limits_{||h|| \to 0} \epsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et $f'(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (matrice à $p$ lignes et $n$ colonnes), appelée dérivée (ou différentielle) de $f$ en $a$.*

## Remarque

*Avec une fonction f de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, $\lim_{h \mapsto 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ *équivaut à*

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + ||h||\epsilon(h)$$

*où* $\lim_{||h|| \to 0} \epsilon(h) = 0$.

## Exemple

*Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par*

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4{x_1}^2 + x_2 \\ 2x_1 - {x_2}^2 \end{pmatrix}.$$

Calculons

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) \\
&= \begin{pmatrix} 8x_1 h_1 + h_2 + 4{h_1}^2 \\ 2h_1 - 2x_2 h_2 - {h_2}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4{h_1}^2 \\ -2{h_2}^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Posons $\epsilon(h) = \frac{1}{\|h\|}\begin{pmatrix} 4{h_1}^2 \\ -2{h_2}^2 \end{pmatrix}$. En choisissant la norme euclidienne $\|h\|_2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, on montre que $\lim_{\|h\| \to 0} \epsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

On a donc

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \|h\|\epsilon(h)$$

d'où

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Posons $\epsilon(h) = \frac{1}{\|h\|}\begin{pmatrix} 4{h_1}^2 \\ -2{h_2}^2 \end{pmatrix}$. En choisissant la norme euclidienne $\|h\|_2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, on montre que $\lim\limits_{\|h\|\to 0} \epsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

On a donc

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \|h\|\epsilon(h)$$

d'où

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Posons $\epsilon(h) = \frac{1}{\|h\|}\begin{pmatrix} 4{h_1}^2 \\ -2{h_2}^2 \end{pmatrix}$. En choisissant la norme euclidienne $\|h\|_2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, on montre que $\lim_{\|h\| \to 0} \epsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

On a donc

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \|h\|\epsilon(h)$$

d'où

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Posons $\epsilon(h) = \frac{1}{\|h\|}\begin{pmatrix} 4{h_1}^2 \\ -2{h_2}^2 \end{pmatrix}$. En choisissant la norme euclidienne $\|h\|_2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, on montre que $\lim_{\|h\| \to 0} \epsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^2}$.

On a donc

$$f(x+h) - f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \|h\|\epsilon(h)$$

d'où

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

## Théorème

*Soit $f$ une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, soit $a \in \Omega$. On suppose que $f$ admet des dérivées partielles continues en $a$, alors $f$ est dérivable (ou différentiable) en $a$ et*

$$f'(a) = J_f(a).$$

## Exemple

*Soit* $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4{x_1}^2 + x_2 \\ 2x_1 - {x_2}^2 \end{pmatrix}$. *Ses dérivées partielles sont :*

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 8x_1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2. \end{array}$$

*Ces fonctions étant continues sur* $\mathbb{R}^2$, *on a donc*

$$f'(x_1, x_2) = J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

## Exemple

*Soit* $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4{x_1}^2 + x_2 \\ 2x_1 - {x_2}^2 \end{pmatrix}$. *Ses dérivées partielles sont :*

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 8x_1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2. \end{array}$$

*Ces fonctions étant continues sur* $\mathbb{R}^2$, *on a donc*

$$f'(x_1, x_2) = J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

## Exemple

*Soit* $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4{x_1}^2 + x_2 \\ 2x_1 - {x_2}^2 \end{pmatrix}$. *Ses dérivées partielles sont :*

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 8x_1, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2. \end{array}$$

*Ces fonctions étant continues sur* $\mathbb{R}^2$, *on a donc*

$$f'(x_1, x_2) = J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

## Remarque

- *La réciproque du théorème est fausse.*
- *L'existence des dérivées partielles en a n'entraine pas la dérivabilité (ou différentiabilité) de f en a.*

## Remarque

*Si f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées partielles sont continues en a alors :*

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a)h + \|h\|\epsilon(h)$$

*avec* $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$
*c'est-à-dire que* $f'(a) = \nabla f(a)$.

## Remarque

- *La réciproque du théorème est fausse.*
- *L'existence des dérivées partielles en a n'entraine pas la dérivabilité (ou différentiabilité) de $f$ en $a$.*

## Remarque

*Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées partielles sont continues en a alors :*

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a)h + \|h\|\epsilon(h)$$

*avec* $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$
*c'est-à-dire que* $f'(a) = \nabla f(a)$.

## Remarque

- *La réciproque du théorème est fausse.*
- *L'existence des dérivées partielles en a n'entraine pas la dérivabilité (ou différentiabilité) de $f$ en $a$.*

## Remarque

*Si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont les dérivées partielles sont continues en $a$ alors :*

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a)h + \|h\|\epsilon(h)$$

*avec* $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$
*c'est-à-dire que* $f'(a) = \nabla f(a)$.

## Exemple

*Soit $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2^2$. Ses dérivées partielles sont : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. Ces fonctions étant continues sur $\mathbb{R}^2$, on a donc*

$$f'(x) = \nabla f(x) = (x_2, x_1 + 2x_2)$$

### Théorème

*Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est dérivable en a, alors $f$ est continue en a, $f'(a)$ est unique et $f$ admet des dérivées partielles en a.*

## Proposition

*Soit $f$ et $g$ deux applications de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dérivables en $a$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors : $f + g$ et $\lambda f$ sont dérivables en $a$ et :*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

## Proposition

*Soit $f$ une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ et soit $g$ une application de $A$ dans $\mathbb{R}$. Si $f$ et $g$ sont dérivables en $a$ alors $gf$ est dérivable en $a$ et :*

$$(gf)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

## Proposition

*Soit $f$ une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dérivable en $a$ et soit $g$ une application définie sur un voisinage de $f(a) = b$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et dérivable en $f(a) = b$, alors $g \circ f$ est dérivable en $a$ et :*

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

*(multiplication de matrices)*

L' ordre est important

## Proposition

*Soit $f$ une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ dérivable en $a$ et soit $g$ une application définie sur un voisinage de $f(a) = b$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ et dérivable en $f(a) = b$, alors $g \circ f$ est dérivable en $a$ et :*

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a)).f'(a)$$

*(multiplication de matrices)*

L' ordre est important

# Plan



Bordeaux INP ENSTBB

Aucune mesure physique n'est infiniment précise : elle doit être accompagnée d'une marge d'erreur appelée incertitude.
Si l'on mesure une grandeur $X$ et que l'on obtient une valeur moyenne $x$ avec une incertitude $\Delta x$, on notera : $X = x \pm \Delta x$. Dans ce cas, $\Delta x$ est appelée incertitude absolue et a la même unité que $x$. On définit également l'incertitude relative : $\dfrac{\Delta x}{x}$ qui est forcément sans unité et souvent donnée en pourcent.

Aucune mesure physique n'est infiniment précise : elle doit être accompagnée d'une marge d'erreur appelée incertitude.
Si l'on mesure une grandeur $X$ et que l'on obtient une valeur moyenne $x$ avec une incertitude $\Delta x$, on notera : $X = x \pm \Delta x$.
Dans ce cas, $\Delta x$ est appelée incertitude absolue et a la même unité que $x$. On définit également l'incertitude relative : $\frac{\Delta x}{x}$ qui est forcément sans unité et souvent donnée en pourcent.

Aucune mesure physique n'est infiniment précise : elle doit être accompagnée d'une marge d'erreur appelée incertitude.
Si l'on mesure une grandeur $X$ et que l'on obtient une valeur moyenne $x$ avec une incertitude $\Delta x$, on notera : $X = x \pm \Delta x$.
Dans ce cas, $\Delta x$ est appelée incertitude absolue et a la même unité que $x$. On définit également l'incertitude relative : $\dfrac{\Delta x}{x}$ qui est forcément sans unité et souvent donnée en pourcent.

Bordeaux INP ENSTBB

### Exemple

*Une balance d'analyse de laboratoire permet de peser à* $\pm 0.1$ *mg près. Si la pesée est 10 mg, l'incertitude absolue est* $\pm 0.1$ *mg. L'incertitude relative est de 1%. Si la pesée est 1000 mg, l'incertitude absolue est* $\pm 0.1$ *mg. L'incertitude relative est de 0.01%*

## Exemple

*Une balance d'analyse de laboratoire permet de peser à* $\pm 0.1$ *mg près. Si la pesée est 10 mg, l'incertitude absolue est* $\pm 0.1$ *mg. L'incertitude relative est de 1%. Si la pesée est 1000 mg, l'incertitude absolue est* $\pm 0.1$ *mg. L'incertitude relative est de 0.01%*

**Exemple**

*Une balance d'analyse de laboratoire permet de peser à* $\pm 0.1$ *mg près. Si la pesée est 10 mg, l'incertitude absolue est* $\pm 0.1$ *mg. L'incertitude relative est de 1%. Si la pesée est 1000 mg, l'incertitude absolue est* $\pm 0.1$ *mg. L'incertitude relative est de 0.01%*

On s'intéresse maintenant au calcul d'incertitude. On dispose d'une relation expérimentale, notée $f(x_1, \cdots, x_n)$ qui lie les différentes grandeurs $x_1, \cdots, x_n$ qui ont été mesurées avec une certaine incertitude $\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n$. On va en déduire l'incertitude de mesure sur la grandeur finale $\Delta f$ en combinant les incertitudes de chaque étape.

La différentielle est utilisée pour estimer la variation de $f$ au voisinage d'un point en fonctions des variations $\Delta x_i$ des variables $x_i$. On définit $\Delta f$, l'incertitude absolue sur $f$, par

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)$$

que l'on approche par

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

et que l'on peut majorer par

$$|\Delta f| \leq |\frac{\partial f}{\partial x_1}||\Delta x_1| + \cdots + |\frac{\partial f}{\partial x_n}||\Delta x_n|.$$

La différentielle est utilisée pour estimer la variation de $f$ au voisinage d'un point en fonctions des variations $\Delta x_i$ des variables $x_i$. On définit $\Delta f$, l'incertitude absolue sur $f$, par

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)$$

que l'on approche par

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

et que l'on peut majorer par

$$|\Delta f| \leq |\frac{\partial f}{\partial x_1}||\Delta x_1| + \cdots + |\frac{\partial f}{\partial x_n}||\Delta x_n|.$$

La différentielle est utilisée pour estimer la variation de $f$ au voisinage d'un point en fonctions des variations $\Delta x_i$ des variables $x_i$. On définit $\Delta f$, l'incertitude absolue sur $f$, par

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, \cdots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)$$

que l'on approche par

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.$$

et que l'on peut majorer par

$$|\Delta f| \leq |\frac{\partial f}{\partial x_1}||\Delta x_1| + \cdots + |\frac{\partial f}{\partial x_n}||\Delta x_n|.$$

Bordeaux INP
ENSTBB

## Exemple

*Incertitude absolue*

*On prend par exemple la mesure d'une résistance électrique* $R = \frac{U}{I}$. *Pour cela on réalise un circuit électrique reliant une résistance à une pile. On mesure l'intensité* $I$ *passant dans le circuit à l'aide d'un ampèremètre et la tension* $U$ *aux bornes de la résistance à l'aide d'un voltmètre. Ces deux mesures présentent des incertitudes notées* $\Delta I$ *et* $\Delta U$. *On obtient les valeurs suivantes:*

$U = 1.5 \pm 0.01 \ V$

$I = 0.1 \pm 0.01 \ mA$

*on en déduit* $R = 15000 \pm 1600\Omega$.

## Exemple

*Incertitude absolue*

*On prend par exemple la mesure d'une résistance électrique $R = \frac{U}{I}$. Pour cela on réalise un circuit électrique reliant une résistance à une pile. On mesure l'intensité $I$ passant dans le circuit à l'aide d'un ampèremètre et la tension $U$ aux bornes de la résistance à l'aide d'un voltmètre. Ces deux mesures présentent des incertitudes notées $\Delta I$ et $\Delta U$. On obtient les valeurs suivantes:*

$U = 1.5 \pm 0.01 \ V$

$I = 0.1 \pm 0.01 \ mA$

*on en déduit* $R = 15000 \pm 1600\Omega$.

## Exemple

*Incertitude relative*

*La température, la pression et le volume d'un gaz parfait sont liés par une relation du type*

$$P = f(T, V) = k\frac{T}{V}.$$

*Si l'incertitude relative de mesure sur $T$ est majorée par $0,5\%$ et celle sur $V$ par $0,2\%$, on peut majorer celle sur $P$.*

## Exemple

*Incertitude relative*

*La température, la pression et le volume d'un gaz parfait sont liés par une relation du type*

$$P = f(T, V) = k\frac{T}{V}.$$

*Si l'incertitude relative de mesure sur $T$ est majorée par $0,5\%$ et celle sur $V$ par $0,2\%$, on peut majorer celle sur $P$.*

Bordeaux INP
ENSTBB

En effet, par hypothèse, on a les majorations

$$|\frac{\Delta T}{T}| \leq 0.005 \qquad |\frac{\Delta V}{V}| \leq 0.002$$

L'incertitude sur $P$ est alors

$$\begin{aligned} \Delta P &= f(T+\Delta T, V+\Delta V) - f(T,V) \\ \Delta P &\approx \frac{\partial f}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial f}{\partial V}\Delta V \\ \Delta P &\approx \frac{k}{V}\Delta T - \frac{kT}{V^2}\Delta V \end{aligned}$$

En effet, par hypothèse, on a les majorations

$$|\frac{\Delta T}{T}| \leq 0.005 \qquad |\frac{\Delta V}{V}| \leq 0.002$$

L'incertitude sur $P$ est alors

$$\begin{aligned} \Delta P &= f(T+\Delta T, V+\Delta V) - f(T,V) \\ \Delta P &\approx \frac{\partial f}{\partial T}\Delta T + \frac{\partial f}{\partial V}\Delta V \\ \Delta P &\approx \frac{k}{V}\Delta T - \frac{kT}{V^2}\Delta V \end{aligned}$$

De $\Delta P \approx \frac{k}{V}\Delta T - \frac{kT}{V^2}\Delta V$, en divisant par $P = k\dfrac{T}{V}$, on obtient l'incertitude relative sur $P$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta V}{V}$$

d'où la majoration de l'incertitude relative sur $P$

$$|\frac{\Delta P}{P}| \leq |\frac{\Delta T}{T}| + |\frac{\Delta V}{V}| = 0.007$$

De $\Delta P \approx \frac{k}{V}\Delta T - \frac{kT}{V^2}\Delta V$, en divisant par $P = k\dfrac{T}{V}$, on obtient l'incertitude relative sur $P$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta V}{V}$$

d'où la majoration de l'incertitude relative sur $P$

$$|\frac{\Delta P}{P}| \leq |\frac{\Delta T}{T}| + |\frac{\Delta V}{V}| = 0.007$$

De $\Delta P \approx \frac{k}{V}\Delta T - \frac{kT}{V^2}\Delta V$, en divisant par $P = k\dfrac{T}{V}$, on obtient l'incertitude relative sur $P$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx \frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta V}{V}$$

d'où la majoration de l'incertitude relative sur $P$

$$|\frac{\Delta P}{P}| \leq |\frac{\Delta T}{T}| + |\frac{\Delta V}{V}| = 0.007$$

# Plan

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles premières. Soient $x$ et $y$ deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(x(t), y(t))$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles premières. Soient $x$ et $y$ deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(x(t), y(t))$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles premières. Soient $x$ et $y$ deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(x(t), y(t))$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles premières. Soient $x$ et $y$ deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors la fonction $g$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(x(t), y(t))$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

alors $g(t) = f(x(t), y(t))$ est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

alors $g(t) = f(x(t), y(t))$ est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $x$ et $y$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $g$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & (x(u, v), y(u, v)) & \mapsto & f(x(u, v), y(u, v)). \end{array}$$

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $x$ et $y$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $g$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & (x(u, v), y(u, v)) & \mapsto & f(x(u, v), y(u, v)). \end{array}$$

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $x$ et $y$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $g$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (x(u,v), y(u,v)) & \mapsto & f(x(u,v), y(u,v)). \end{array}$$

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $x$ et $y$ sont deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $g$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (x(u,v), y(u,v)) & \mapsto & f(x(u,v), y(u,v)). \end{array}$$

Lorsque toutes les dérivées partielles qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v).
\end{aligned}$$

# Plan



Bordeaux INP
ENSTBB

Une EDP est une équation où apparaissent une ou plusieurs dérivées partielles d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Lorsque $n = 1$, les dérivées partielles sont les dérivées, on parle alors d'équation différentielle.

Dans ce qui suit $t$ désigne le temps et $x = (x_1, \cdots, x_n)$ désigne l'espace. On note $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ le laplacien.

- Equation de Laplace $\Delta f(x) = u(x)$.
  Cette équation modélise les petits déplacements f(x) d'un point $x$ d'un fil ($n = 1$) ou d'une membrane ($n = 2$) soumis à une force transversale $u$.
- Equation de la chaleur $\Delta f(t,x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = u(t,x)$.
  Cette équation modélise les variations au cours du temps de la température $f(t,x)$ du point $x$ d'une barre ($n = 1$) ou d'une plaque ($n = 2$) soumise à source de chaleur $u$.
- Equation des ondes $\Delta f(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)$.
  Cette équation modélise la propagation au cours du temps $t$ des déformations $f(t,x)$ d'un point $x$ d'une corde élastique ($n = 1$).

- Equation de Laplace $\Delta f(x) = u(x)$.
  Cette équation modélise les petits déplacements f(x) d'un point $x$ d'un fil ($n = 1$) ou d'une membrane ($n = 2$) soumis à une force transversale $u$.
- Equation de la chaleur $\Delta f(t,x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = u(t,x)$.
  Cette équation modélise les variations au cours du temps de la température $f(t,x)$ du point $x$ d'une barre ($n = 1$) ou d'une plaque ($n = 2$) soumise à source de chaleur $u$.
- Equation des ondes $\Delta f(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)$.
  Cette équation modélise la propagation au cours du temps $t$ des déformations $f(t,x)$ d'un point $x$ d'une corde élastique ($n = 1$).

Bordeaux INP
ENSTBB

- Equation de Laplace $\Delta f(x) = u(x)$.
  Cette équation modélise les petits déplacements f(x) d'un point $x$ d'un fil ($n = 1$) ou d'une membrane ($n = 2$) soumis à une force transversale $u$.
- Equation de la chaleur $\Delta f(t,x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = u(t,x)$.
  Cette équation modélise les variations au cours du temps de la température $f(t,x)$ du point $x$ d'une barre ($n = 1$) ou d'une plaque ($n = 2$) soumise à source de chaleur $u$.
- Equation des ondes $\Delta f(t,x) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x)$.
  Cette équation modélise la propagation au cours du temps $t$ des déformations $f(t,x)$ d'un point $x$ d'une corde élastique ($n = 1$).

Les EDP en biologie:

- chimiotaxie: mouvement de bactéries, de cellules sous l'influence d'une substance chimique. Intérêt par exemple en cancérologie pour modéliser l'angiogénèse (fabrication de vaisseaux sanguins autour d'une tumeur).
- chromatographie: une technique physique de séparation d'espèces chimiques.
- ...

Les EDP en biologie:

- chimiotaxie: mouvement de bactéries, de cellules sous l'influence d'une substance chimique. Intérêt par exemple en cancérologie pour modéliser l'angiogénèse (fabrication de vaisseaux sanguins autour d'une tumeur).
- chromatographie: une technique physique de séparation d'espèces chimiques.
- ...

Les EDP en biologie:

- chimiotaxie: mouvement de bactéries, de cellules sous l'influence d'une substance chimique. Intérêt par exemple en cancérologie pour modéliser l'angiogénèse (fabrication de vaisseaux sanguins autour d'une tumeur).
- chromatographie: une technique physique de séparation d'espèces chimiques.
- ...

Bordeaux INP
ENSTBB

On sait résoudre assez peu d'EDP. Dans la plupart des cas, on calcule des solutions approchées. Néanmoins, ici nous allons voir quelques techniques de résolution. Par exemple, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$,en intégrant par rapport à $x$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y} = h(y)$. Et par conséquent, on a

$$f(x, y) = H(y) + k(x).$$

On sait résoudre assez peu d'EDP. Dans la plupart des cas, on calcule des solutions approchées. Néanmoins, ici nous allons voir quelques techniques de résolution. Par exemple, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$,en intégrant par rapport à $x$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y} = h(y)$. Et par conséquent, on a

$$f(x, y) = H(y) + k(x).$$

On sait résoudre assez peu d'EDP. Dans la plupart des cas, on calcule des solutions approchées. Néanmoins, ici nous allons voir quelques techniques de résolution. Par exemple, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$,en intégrant par rapport à $x$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y} = h(y)$. Et par conséquent, on a

$$f(x, y) = H(y) + k(x).$$

On sait résoudre assez peu d'EDP. Dans la plupart des cas, on calcule des solutions approchées. Néanmoins, ici nous allons voir quelques techniques de résolution. Par exemple, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$,en intégrant par rapport à $x$, on obtient $\frac{\partial f}{\partial y} = h(y)$. Et par conséquent, on a

$$f(x, y) = H(y) + k(x).$$

Il est aussi parfois possible de résoudre une EDP, en faisant un changement de variable.

## Exemple

*On veut trouver f vérifiant* $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

On fait le changement de variables suivant : $\begin{cases} s = x + y \\ t = x - y \end{cases}$. On introduit la fonction $g(s, t) = f(x, y)$ et on exprime les dérivées partielles de $f$ en fonction de celles de $g$

Il est aussi parfois possible de résoudre une EDP, en faisant un changement de variable.

## Exemple

*On veut trouver $f$ vérifiant* $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

On fait le changement de variables suivant : $\left\{\begin{array}{l} s = x + y \\ t = x - y \end{array}\right.$. On introduit la fonction $g(s,t) = f(x,y)$ et on exprime les dérivées partielles de $f$ en fonction de celles de $g$

Bordeaux INP
ENSTBB

Il est aussi parfois possible de résoudre une EDP, en faisant un changement de variable.

**Exemple**

*On veut trouver f vérifiant* $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

On fait le changement de variables suivant : $\begin{cases} s = x + y \\ t = x - y \end{cases}$. On introduit la fonction $g(s,t) = f(x,y)$ et on exprime les dérivées partielles de $f$ en fonction de celles de $g$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y} \end{cases}$$

De $\begin{cases} s = x + y \\ t = x - y \end{cases}$, on calcule

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial x} = 1 & \dfrac{\partial t}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} = 1 & \dfrac{\partial t}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y} \end{cases}$$

De $\begin{cases} s = x + y \\ t = x - y \end{cases}$, on calcule

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial x} = 1 & \dfrac{\partial t}{\partial x} = 1 \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} = 1 & \dfrac{\partial t}{\partial y} = -1 \end{cases}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Les dérivées de $f$ sont

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ devient $\frac{\partial g}{\partial s} = 0$. Donc $g(s,t) = h(t)$ avec $h$ une fonction arbitraire de classe $C^1$, d'où $f(x,y) = h(x-y)$. D'autre changement de variables permettent la résolution d'autres EDP...

Les dérivées de $f$ sont

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ devient $\frac{\partial g}{\partial s} = 0$. Donc $g(s,t) = h(t)$ avec $h$ une fonction arbitraire de classe $C^1$, d'où $f(x,y) = h(x-y)$.
D'autre changement de variables permettent la résolution d'autres EDP...

Les dérivées de $f$ sont

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial s} + \dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial s} - \dfrac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ devient $\frac{\partial g}{\partial s} = 0$. Donc $g(s,t) = h(t)$ avec $h$ une fonction arbitraire de classe $C^1$, d'où $f(x,y) = h(x-y)$.

D'autre changement de variables permettent la résolution d'autres EDP...

Les dérivées de $f$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{\partial g}{\partial t} \end{array} \right.$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ devient $\frac{\partial g}{\partial s} = 0$. Donc $g(s,t) = h(t)$ avec $h$ une fonction arbitraire de classe $C^1$, d'où $f(x,y) = h(x-y)$.

D'autre changement de variables permettent la résolution d'autres EDP...

Les dérivées de $f$ sont

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial s} + \dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial s} - \dfrac{\partial g}{\partial t} \end{array}\right.$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ devient $\frac{\partial g}{\partial s} = 0$. Donc $g(s,t) = h(t)$ avec $h$ une fonction arbitraire de classe $C^1$, d'où $f(x,y) = h(x-y)$. D'autre changement de variables permettent la résolution d'autres EDP...

# Plan

## Définition

*$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable si $f$ est dérivable et si $x \mapsto \nabla f(x)h$ est dérivable $\forall h \in \mathbb{R}^n$. On a $(f''(x)h)\,k = {}^t kH_f(x)h$.*

## Théorème

*Formule de Taylor à l'ordre 2*

*Si $f$ est deux fois dérivable en a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, h dans un voisinage de 0, on a :*

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a)h + \frac{1}{2}\,{}^t hH_f(a)h + \|h\|^2\epsilon(h)$$

*avec $\lim_{h\to 0}\epsilon(h) = 0$.*

## Définition

*$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable si $f$ est dérivable et si $x \mapsto \nabla f(x)h$ est dérivable $\forall h \in \mathbb{R}^n$. On a $(f''(x)h)\, k =^t kH_f(x)h$.*

## Théorème

*Formule de Taylor à l'ordre 2*

*Si $f$ est deux fois dérivable en a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $h$ dans un voisinage de 0, on a :*

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a)h + \frac{1}{2}\,{}^t hH_f(a)h + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

*avec* $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

## Exemple

*Soit* $f(x) = f(x_1, x_2) = 4{x_1}^3 + x_1 {x_2}^2$. *Appliquons la formule de Taylor au voisinage de* $x$ *:*

$f(x+h) - f(x) =$

$(12{x_1}^2 + {x_2}^2)h_1 + 2x_1 x_2 h_2 + 24x_1 h_1^2 + 4h_1 h_2 x_2 + 2x_1 h_2^2 + \|h\|^2 \epsilon(h).$

# Plan

Dans ce qui suit, on note $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

## Définition

*Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ admettant des dérivées partielles. On appelle divergence de $f$ en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ :*

$$div\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_i(x).$$

## Définition

*Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ admettant des dérivées partielles secondes. On appelle laplacien de $f$ en $x = (x_1, \ldots, x_n)$ le vecteur colonne*

$$\Delta f(x) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f_1(x) \\ \cdots \\ \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f_p(x) \end{pmatrix}$$

*En particulier pour $f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles secondes*

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x).$$

## Définition

*Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ admettant des dérivées partielles. On appelle rotationnel de $f$ en $x = (x_1, x_2, x_3)$ le vecteur colonne :*

$$rot\ f(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} (x)$$

*On définit aussi le rotationnel d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ admettant des dérivées partielles en $x = (x_1, x_2)$ par le scalaire :*

$$rotf = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 .$$

Soient $u$ définie de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $f$ définie de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ admettant des dérivées d'ordre 2 continues.

**Proposition**

*Les opérateurs vérifient les propriétés suivantes*

$$\Delta u = div(\nabla u) \qquad div(rot\ f) = 0 \quad rot(\nabla u) = 0$$

$$rot(rot\ f) = -\Delta f + \nabla(div\ f)$$