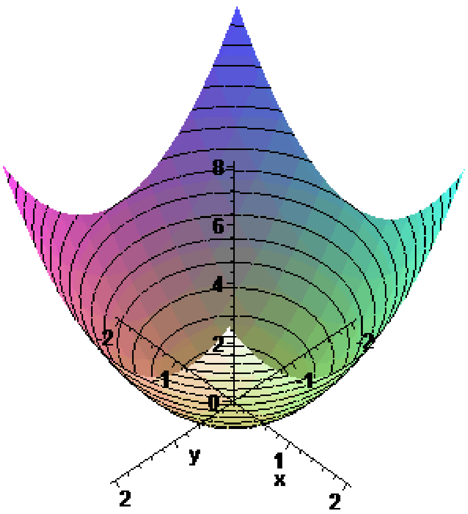
Mathématiques et Modélisation

Exercices de 1ère année

C. Nazaret



Bordeaux INP
ENSTBB

Année Universitaire 2014/2015

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

1.1 Domaine de définition, continuité, ouverts,...

Exercice 1. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{25-x^2-y^2}} & f_5(x,y) = \frac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}} \\ f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} & f_6(x,y) = \frac{xye^z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}} \\ f_3(x,y) = \sqrt{6-(2x+3y)} & f_7(x,y) = \sqrt{4x-4y-9)} \\ f_4(x,y) = \ln\left((16x^2-y^2)(x^2+y^2-4)\right) & f_8(x,y) = \sqrt{5x^2-5y^2-6} \end{array}$$

Exercice 2. Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Que vaut $f(0,y)$?
2. Que vaut $f(x,0)$?
3. f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 3. Dessiner les boules fermées de centre 0 et de rayon r relatives à chacune des trois normes classiques de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Justifier pour les sous-ensembles suivants E s'ils sont ouverts ou fermés dans F.

1. $E = [0;1]$ dans $F = \mathbb{R}$
2. $E = [0;1[$ dans $F = \mathbb{R}$
3. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = 4\}$ dans $F = \mathbb{R}^2$
4. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \leq 4\}$ dans $F = \mathbb{R}^2$
5. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 < 4\}$ dans $F = \mathbb{R}^2$
6. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y = 0\}$ dans $F = \mathbb{R}^2$

Sont-ils bornés ?

1.2 Dérivabilité

Exercice 5. Calculer les dérivées partielles de f en utilisant la définition (puis vérifier en calculant $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ...)

$$f_1(x,y) = x^2+y^3 \quad f_2(x,y) = x^2+xy \quad f_3(x,y,z) = xy^2z^3 \quad .$$

Exercice 6. Calculer le gradient de $f(x,y,z) = 3x^2+2yz$.
Calculer la matrice jacobienne de $f(x,y,z) = (x^2, xy, xz)$

Calculer la matrice hessienne des fonctions $f(x,y,z) = xyz$ et $g(x,y) = x^2y + 3xy^2$

Exercice 7. Donner les dérivées partielles premières des fonctions suivantes puis leur gradient :

$$\begin{array}{lll} f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} & r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} & \theta(x,y) = \arctan(\frac{y}{x}) \\ g(x,y) = \frac{xy}{x+y} & \text{Vérifier que } x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = g(x,y) & h(x,y) = xy - \tan(\frac{y}{x}) \end{array}$$

Exercice 8. Donner les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes, leur gradient et leur hessienne :

$$f_1(x,y) = \ln(x^2+y^2) \quad f_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad f_3(x,y) = \arctan(\tfrac{y}{x}) \ .$$

Calculer leur laplacien Δf. On rappelle que l'opérateur laplacien est : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.
Ecrire la formule de Taylor à l'ordre 2 pour chaque fonction.

Exercice 9. Calculer la matrice jacobienne de x l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1(t) & = & t^2\cos(t) + t \\ x_2(t) & = & \sin(t)\cos(t) \end{array} \right.$$

Exercice 10. Calculer la matrice jacobienne des applications suivantes et déterminer les points où $f'(x)$ est injective (c'est-à-dire admet au plus un antécédent).

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3 \left\{ \begin{array}{lcl} f_1(u,v) & = & u+v \\ f_2(u,v) & = & u^2+v^2 \\ f_3(u,v) & = & u^2-v^2 \end{array} \right. \qquad f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{lcl} f_1(u,v) & = & u^2-v^2 \\ f_2(u,v) & = & 2\,u\,v \end{array} \right.$$

Exercice 11. Soit $f(x,y,z) = (-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}})$. Montrer que $\vec{rot} f = 0$.

1.3 Calcul d'erreurs

Exercice 12. Une solution $C_1 = 5,5 \times 10^{-3}$ mol/l est préparée à partir d'une solution mère $C_2 = 10^{-2}$ mol/l, issue du commerce d'une précision relative garantie de $0,2$ %, par double prise d'essai de $v_1 = 5$ cm^3 et $v_2 = 0,5$ cm^3 complétée à $V = 10$ cm^3. Le volume v_1 est prélevé par une pipette jaugée d'une incertitude relative de $0,2$ %, v_2 par une pipette graduée de 1 cm^3 (incertitude absolue de 1 % du volume total) et V est ajusté à l'aide d'une fiole jaugée d'incertitude relative de $0,2$ %.

1. Exprimer C_1 en fonction de C_2, v_1, v_2 et V.
2. Déterminer l'incertitude relative sur la mesure de C_1.

Exercice 13. Soient l la longueur d'un pendule et T sa période. On admet que l'accélération terrestre est donnée par la formule $g(l,T) = \dfrac{4\pi^2 l}{T^2}$.
On a mesuré l et T : on a obtenu l = 1m à 0.005m près et T = 2s à 0.01s près. L'erreur absolue sur T vaut alors 0.01s et l'erreur relative sur T vaut $\frac{0.01}{2} = 0.005$.
1. Par analogie, donner les erreurs absolue et relative sur l ?
2. Donner une majoration de l'erreur absolue sur g. Que vaut g d'après les mesures ?
3. Donner une majoration de l'erreur relative sur g.

Exercice 14. Dans un circuit électrique, la résistance R équivalente à deux résistances R_1 et R_2 placées en parallèles est donnée par la relation $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. R_1 et R_2 sont connues avec une incertitude relative maximum de $2/100$. Estimer l'incertitude relative maximum sur la valeur R.

1.4 Dérivées de composées

Exercice 15. Soient f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ et g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x+y, x-y)$.
Calculer la dérivée de $f \circ g$ de deux manières différentes.

Exercice 16. Soit la f fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x,y,z) = (x^3+zy, xyz)$.
Soit g la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $g(x,y) = (sin(x)+y, e^{xy})$.
Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement. Calculer la dérivée de

$$h = g \circ f$$

Exercice 17. On considère $f(x,y) = 3x - y$. On fait le changement de variables $u = 3x + y$ et $v = y$. Calculer $g(u,v) = f(x,y)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ de deux manières différentes.

Exercice 18. On considère $x(t) = \cos(2t+3)$ et $y(t) = t\exp(-3t)$. On note $g(t) = r(x(t), y(t))$ et $h(t) = \theta(x(t), y(t))$. Calculer $g'(t)$ et $h'(t)$.

1.5 Résolution d'EDP

Exercice 19. Trouver en effectuant le changement de variables indiqué les fonctions f de classe C^2 définies sur un domaine de $\mathbb{R}^2$ ayant des dérivées partielles satisfaisant à

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. On posera $u = y$ et $v = x + y$.
2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. On fera le changement de variables $u = y$ et $v = x + y$.

Exercice 20. Considérons une corde de longueur l fixée aux extrémités d'abscisses 0 et l. Lors de vibrations dans des conditions idéales, le déplacement $\varphi(t,x)$ à l'instant t du point d'abscisse x vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

où C est une constante positive.

1. Déterminer α et β pour que le changement de variable $u = x + \alpha t$ et $v = x + \beta t$ ramène l'équation à la forme $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ avec $F(u,v) = \varphi(x,t)$.
2. En déduire les solutions de l'équation.
3. Préciser ces solutions sachant que les extrémités de la corde sont fixes.

Exercice 21. On veut résoudre l'équation (dite de transport) suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + 3\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

où u_0 est une fonction donnée. Soit la fonction $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (s,y) & \mapsto & (s, y+3s) \end{array}$.
On pose $v = u \circ g$.
1. Calculer $\dfrac{\partial v}{\partial s}$ en fonction de $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.
2. Que vaut $\dfrac{\partial v}{\partial s}$ pour u solution du problème (1.1). En déduire que $v(s,y) = u_0(y)$.
3. Donner la solution du problème (1.1).

Chapitre 2

Optimisation

2.1 Optimisation sans contrainte

Exercice 1. Décomposer en somme de carrés les formes quadratiques suivantes :

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 \quad x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 \quad -x_1^2 - 4x_1x_2 - 5x_2^2 \ .$$

Exercice 2. Déterminer si les matrices suivantes sont semi-définies positives (resp. négatives), définies positives (resp. négatives)

$$H_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad H_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad H_4 = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Rechercher les extrema des fonctions :

$$\begin{array}{lll} f_1(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2 & f_2(x,y) = x^2 - y^2 & f_3(x,y) = x\exp(-x^2 - y^2) \\ f_4(x,y) = 4xy + y^2 - 8x^3 & f_5(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 & f_6(x,y,z) = x^2/2 + xyz - z + y \end{array} .$$

Exercice 4.

1. Chercher les extrema locaux éventuels de la fonction V de $\mathbb{R}_+^{2*}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$V(x,y) = xy\frac{12 - xy}{2(x+y)}.$$
2. Une boîte sans couvercle a la forme d'un parallélépipède de côtés de dimensions x, y et z (largeur, profondeur et hauteur de la boîte). Sachant que sa surface latérale (somme des aires de ses cinq faces) vaut 12, quelles valeurs doivent avoir x, y et z pour que son volume soit maximum (Indication : on pourra éliminer l'inconnue z dans l'expression du volume de la boîte).

2.2 Optimisation avec contraintes

Exercice 5. On veut déterminer l'optimum de $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $g(x,y) = x + 4y - 16$

1. Déterminer l'optimum de f par une méthode de substitution. (Indic : on exprimera x en fonction de y par exemple).
2. On veut déterminer l'optimum de f à l'aide des multiplicateurs de Lagrange
   (a) Vérifier la condition de qualification des contraintes.
   (b) Déterminer les points stationnaires du Lagrangien.
   (c) Montrer que $(8,2)$ est bien un optimum (étudier le signe de $f(8+h_1, 2+h_2) - f(8,2)$ sous la contrainte $g(8+h_1, 2+h_2) = 0$).

Exercice 6. On veut déterminer l'optimum de $f(x,y) = x^2y$ sous la contrainte $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 3$

1. Déterminer l'optimum de f par une méthode de substitution.
2. On veut déterminer l'optimum de f à l'aide des multiplicateurs de Lagrange
   (a) Vérifier la condition de qualification des contraintes
   (b) Déterminer les points stationnaires du Lagrangien.
   (c) Conclure.

Exercice 7. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

1. La fonction possède-t-elle un minimum et un maximum, global dans $\mathbb{R}^2$?
2. Déterminer les points où f présente des extremums locaux dans $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer le minimum et le maximum de f dans le carré $[0;1] \times [0;1]$?

Exercice 8. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 7xy + 4(x^3 - y^3) + x - y$.

1. La fonction possède-t-elle un minimum et un maximum, global dans $\mathbb{R}^2$?
2. Déterminer les points où f présente des extremums locaux dans $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer le minimum et le maximum de f dans $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1; -x \leq y \leq x\}$?

Exercice 9. Déterminer les extrémums de la fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + 2y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 5$.

Exercice 10. Déterminer les extrémums de la fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^4$ sur le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 11. Déterminer les extrémums de la fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ sur le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 12. Déterminer les extrémums de la fonction de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + yz$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Exercice 13. Déterminer le maximum de la fonction de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = z$ sous les contraintes $\left\{\begin{array}{ll} x^2 + y^2 + z^2 & = 3 \\ x + y + z = 1 & \end{array}\right.$.

Exercice 14. Justifier pour les sous-ensembles suivants E s'ils sont convexes dans F.

1. $E = [0;1]$ dans $F = \mathbb{R}$
2. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$ dans $F = \mathbb{R}^2$
3. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 4\}$ dans $F = \mathbb{R}^2$
4. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y = 0\}$ dans $F = \mathbb{R}^2$

Sont-ils bornés ?

Exercice 15. Les fonctions suivantes sont-elles convexes ?

1. $f(x,y) = xy$
2. $f(x,y) = x^2 + y^2$
3. $f(x,y) = |x| + |y|$

On pourra étudier le signe de $\varphi(\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ sur $[0;1]$ ou calculer la hessienne si f est deux fois dérivable.

Exercice 16. Dans les problèmes ci-dessous

1. minimum de $f(x,y) = 16x^2 + (y-4)^2$ dans $\mathbb{R}^2$?
2. minimum de $f(x,y,z) = 1(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ sous la contrainte $x + y + z = 0$.

A-t-on existence, unicité du minimum ? ce minimum, s'il existe, est-il global ou local ?

Chapitre 3

Calcul matriciel

3.1 Opérations sur les matrices

Exercice 1. Une diététicienne doit préparer des compléments alimentaires pour des sportifs, à prendre lors de quatre repas par jour. Elle dispose de deux aliments. La quantité (en grammes) de protéines, de matières grasses, de fruits et de légumes dans une portion de 10g des deux aliments est donnée par le tableau suivant :

Aliment 1	Aliment 2	
1	2	protéines
3	1	matières grasses
1	1	fruits
2	1	légumes

Lors de chaque repas, le total des compléments pèse 100g. Les proportions préparées par la diététicienne dans chaque repas sont indiquées par le tableau

repas1	repas2	repas3	repas4	
0.3	0.6	0.5	0.1	Aliment 1
0.7	0.4	0.5	0.9	Aliment 2

On note A la matrice des données numériques du premier tableau et B celle du second. Calculer les produit matriciels AB et BA. Interpréter ces deux produits dans le contexte du modèle.

Exercice 2. Montrer que le produit matriciel n'est pas commutatif.

Exercice 3. Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calculer et comparer $A^2 - B^2$ et $(A - B)(A + B)$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $M, N \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur M et N pour que l'on ait $M^2 - N^2 = (M - N)(M + N)$.

3.2 Matrices carrées : déterminant, inverse

Exercice 4. Calculer les déterminants suivants

$$\det X = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \det B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5. Montrer que les déterminants suivants sont nuls

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \quad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}$$

Exercice 6. Déterminer le rang des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & 1 & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

où a est un paramètre.

Exercice 7. Calculer l'inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 5 & 15 & 7 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & -5 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^{-1}.
b) Résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

c) Résoudre le système :

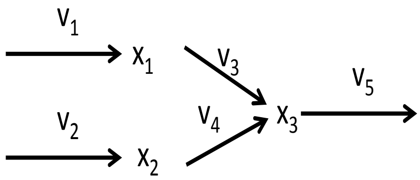
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 8 \end{cases}$$

Exercice 9. Soient les matrices suivantes

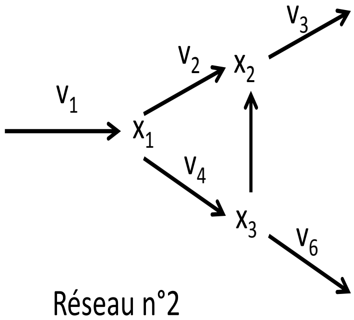
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $AB = AC$. La matrice A est-elle inversible ?

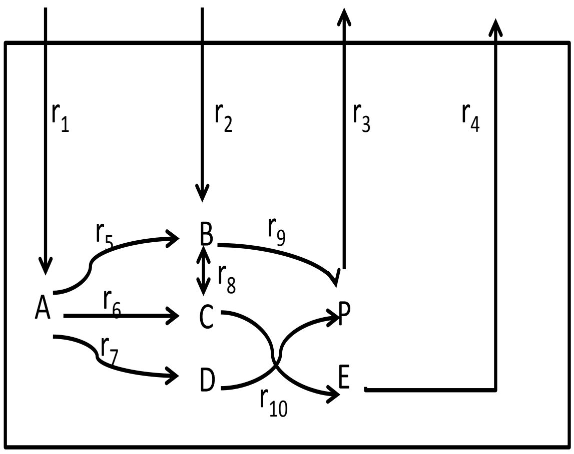
3.3 Matrices quelconques : matrices de stoechiométrie



Réseau n°1



Réseau n°2



Réseau n°3

Exercice 10. On considère le réseau métabolique n° 1

1. Ecrire sa matrice de stochimétrie S. Donner son rang.
2. Quel système vérifient les vitesses à l'état stationnaire.
3. Quelle est la dimension du noyau de S ? Le déterminer.

Exercice 11. Soient les matrices de stochiométrie suivantes. Quels sont les graphes correspondants ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12. On considère le réseau métabolique n° 2.
On note $v_m = (v_1, v_3, v_6)$ et $v_c = (v_2, v_4, v_5)$.

1. Ecrire sa matrice de stoechiométrie S. Donner son rang.
2. Quelle est la dimension du noyau de S ? Le déterminer.
3. Quelle critique peut-on faire sur les résultats (vecteur du noyau et thermodynamique) ?

4. On suppose que les vitesses de v_1, v_3 et v_6 ont été mesurées. Montrer qu'à l'état stationaire, on peut écrire $S_c v_c = -S_m v_m$ (on précisera S_c et S_m).
5. Calculer le déterminant de S_c.
6. Peut-on déduire v_c à partir de v_m de façon unique ?
7. Le problème suivant :
   $$\left.\begin{array}{l} max v_3 \\ \text{tel que } NV = 0 \\ \text{sous les contraintes } v_1 = 1 \\ v_i \geq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 5 \end{array}\right. \quad \text{admet-il une unique solution ?}$$
8. Résoudre le problème suivant :
   $min||V||^2$
   tel que $NV = 0$
   sous les contraintes $v_1 = 1$
   $v_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq 5$.
   (a) Montrer qu'il Il s'agit d'un problème convexe.
   (b) En se ramenerant à un problème à deux variables (v_2, v_5), on cherchera le minimum (point critique, hessienne, ...).

Exercice 13. Reprendre le réseau n° 1.

1. Montrer à l'aide du théorème de Rouché-Fontené que le problème ci-dessous n'admet aucune solution $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ En déduire que l'on ne peut pas avoir $v_1 = v_2 = v_5 = 1$ dans le réseau à l'état stationnaire.
2. Montrer qu'à l'état stationnaire, si on fixe $v_1 = v_2$ alors cela fixe de manière unique les autres vitesses du réseau.
3. Montrer qu'à l'état stationnaire, fixer seulement v_1 ne suffit pas à fixer les autres vitesses de manière unique.
4. Le problème suivant :
   $$\left.\begin{array}{l} max v_5 \\ \text{tel que } NV = 0 \\ \text{sous les contraintes } v_1 = 1 \\ v_i \geq 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq 5 \end{array}\right. \quad \text{admet-il une unique solution ?}$$

Exercice 14. On considère le réseau métabolique n° 3.

1. Ecrire sa matrice de stoechiométrie S.
2. On suppose que les vitesses de r_1 à r_4 ont été mesurées. On note $r_m = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ et $r_c = (r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10})$.
   (a) Ecrire le système (matriciellement) vérifié par v_c en fonction de v_m à l'état stationnaire.
   (b) Peut-on déduire v_c à partir de v_m ?
3. On suppose maintenant que les vitesses de r_1, r_2, r_3 et r_8 ont été mesurées. Peut-on en déduire les autres à l'état stationnaire.

Exercice 15. On considère le réseau métabolique formé des réactions R1 à R9 données dans le tableau ci-dessous. On note :
A, B, C, D et P les concentrations des métabolites A, B, C, D et P impliqués dans les réactions R1 à R9, et $V =^t (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9)$ les vitesses de ces réactions.

1. Représenter le graphe du réseau métabolique.

Réactions	Graphe
R1 : $A_{ext} \longrightarrow A$ R2 : $B_{ext} \longleftrightarrow B$ R3 : $P \longrightarrow P_{ext}$ R4 : $A \longrightarrow B$ R5 : $A \longrightarrow C$ R6 : $A \longrightarrow D$ R7 : $B \longleftrightarrow C$ R8 : $2B \longrightarrow P$ R9 : $C + D \longrightarrow P$	

2. Ecrire le système différentiel vérifié par les concentrations des métabolites (A,B,C,D,P) en fonction de V. Peut-on résoudre ce système différentiel ? (justifier)
3. Ecrire S la matrice de stœchiométrie [1] du réseau.
4. Quelle équation vérifie V à l'état stationnaire ?
5. Quel est le rang de S ? En déduire la dimension du noyau de S.
6. Déterminer une base du noyau de S (i.e. des vecteurs linéairement indépendants suffisants pour générer l'ensemble des solutions).
7. On donne les vecteurs suivants

$$\begin{aligned} u_1 &=^t (1, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ u_2 &=^t (1, -1, 0, 0, 1, 0, -1, 0, 0) \\ u_3 &=^t (0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \\ u_4 &=^t (1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1) \end{aligned}$$

   (a) Comment vérifier que ces vecteurs appartiennent au noyau de S ?

   (b) Quel est l'intérêt de ces vecteurs comparativement à d'autres vecteurs quelconques du noyau ?
8. On suppose que les vitesses de v_1, v_2, et v_3 ont été mesurées. Peut-on en déduire les autres vitesses à l'état stationnaire ? (justifier)
9. On suppose maintenant que les vitesses v_1, v_3 ,v_4, et v_8 ont été mesurées. On note $v_m = (v_1, v_3, v_4, v_8)$ et $v_c = (v_2, v_5, v_6, v_7, v_9)$.

   (a) Ecrire le système **matriciel** vérifié par v_c en fonction de v_m à l'état stationnaire.

   (b) Peut-on déduire v_c à partir de v_m ?
10. Résoudre le problème suivant :
    $min||V||^2$
    tel que $NV = 0$
    sous les contraintes $v_1 = v_2 = 1$.
    $v_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq 9$ et $i \neq 7$.
    On exprimera la fonction objectif en fonction des variables (v_7, v_9) puis on cherchera son minimum. On verifiera ses résultats avec le solveur d'excel.

1. Le coefficient stœchiométrique d'une espèce chimique est le coefficient qui lui est affecté dans l'équation chimique considérée. Dans cet exemple :

$$2B \longrightarrow P$$

le coefficient stœchiométrique de B est -2.

Chapitre 4

Diagonalisation

4.1 Calcul de valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1. Etudier la diagonalisation des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. a) Montrer que toute matrice symétrique carrée d'ordre 2 est diagonalisable.

b) Montrer que toute matrice carrée d'ordre n triangulaire non diagonale dont les éléments diagonaux sont tous égaux n'est pas diagonalisable.

Exercice 3. 1) Diagonaliser la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Calculer A^n.

3) Soient les suites (u_n), (v_n), (w_n) définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et les relations de récurrence

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & 3u_{n-1} + v_{n-1} - w_{n-1} \\ v_n & = & -u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \\ w_n & = & u_{n-1} + v_{n-1} + w_{n-1} \end{array} \right.$$

Calculer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

4) Résoudre le système différentiel linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx/dt & = & 3x + y - z \\ dy/dt & = & -x + y + z \\ dz/dt & = & x + y + z \end{array} \right.$$

4.2 Application à des problèmes concrets

Exercice 4. On considère une réaction en chaîne faisant intervenir successivement trois produits A, B et C. On suppose qu'une partie de A se transforme en B à la vitesse de 0,5 mole de A par litre et par seconde et une autre partie se transforme directement en C à la vitesse de 0,5 mole de A par litre et par seconde. Le produit B se transforme en C à la vitesse de 0,5 mole de B par litre et par seconde et le produit C disparait à la vitesse de 2 mole de C par litre et par seconde. Enfin, on introduit de l'extérieur du produit A à la vitesse de 1 mole par litre et par seconde. Modéliser et écrire un système d'équations différentielles sous forme matricielle, puis le résoudre de deux manières différentes : (1) en utilisant une matrice triangulaire inférieure ; (2) en diagonalisant la matrice (on vérifiera que la diagonale de la matrice triangulaire inférieure utilisée à l'étape précédente donne bien les valeurs propres).

Exercice 5. Soient x_1, x_2, x_3 le nombre d'individus d'une population répartie en 3 classes d'âge, mesuré à un instant donné. Une modélisation extrement simpliste de l'évolution de cette population pourrait donner les populations y_1, y_2, y_3 un an plus tard par les formules :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1-m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-m_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

où a, b, c sont les taux de natalité naturels pour les populations d'âge donné, et m_1, m_2 sont des taux de mortalité.
Supposons que $a = 1/2$, $b = 5/6$, $c = 1/5$, $m_1 = 17/50$, $m_2 = 1/12$. On voudrait savoir s'il existe une pyramide des âges "stationnaires", c'est-à-dire des nombres x_1, x_2, x_3 tels que la proportion de chaque classe d'âge par rapport à la population totale ne varie pas au cours du temps. Quel est dans ce cas le taux d'accroissement global de la population et que vaut $x = (x_1, x_2, x_3)$?

Exercice 6. On suppose qu'un caractère héréditaire est déterminé par deux gènes A et a. Il y a 3 types de génotypes possibles AA, Aa et aa. Le gène A est dominant. On admet que les gènes transmis sont répartis aléatoirement et de façon équiprobables.

On note $X_n =^t (D_n, H_n, R_n)$ le vecteur (appelé vecteur d'état du sytème) où D_n est le pourcentage d'individus d'une population ayant le gène AA après n croisements dans cette population, H_n ceux ayant le gène Aa, R_n ceux ayant le gène aa. On note X_0 l'état initial du système.

1. Faire un diagramme (graphe) pour résumer les informations où les sommets seront les différents génotypes et les flèches d'un sommet à l'autre seront les pourcentages de descendants passant d'un état à un autre après un croisement.
2. Décrire la suite des états sucessifs X_n par une relation $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice (dite de transition) que l'on déterminera.
3. Calculer X_1, X_2.
4. Exprimer X_n en fonction de n, A et X_0.
5. Démontrer que le système tend vers la situation permanente ${}^t(1/4; 1/2; 1/4)$

Exercice 7. Deux villes A et B totalisent une population d'un million d'habitants. La ville A est plus agréable mais la ville B offre plus de possibilités d'emplois ; 20 % des habitants de B partent chaque année habiter A pour avoir un meilleur cadre de vie et 5 % des habitants de A partent chaque année habiter B pour trouver un meilleur emploi. On suppose qu'à l'année 0, un quart des habitants sont en A. On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ le vecteur (appelé vecteur d'état du système) où a_n est la population de la ville A après n jours et b_n celle de la ville B.

1. Faire un diagramme (graphe des transitions) pour résumer les informations où les sommets seront les villes et les flèches d'un sommet à un autre seront les pourcentages de gens qui passent d'un état à un autre, d'une année sur l'autre.
2. Décrire la suite des états successifs X_n par une relation $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice (dite de transition) que l'on déterminera.
3. Calculer X_1, X_2, X_5 (avec une calculatrice pour ce dernier).
4. Exprimer X_n en fonction de n, A et X_0.
5. Montrer que si A^n tend vers S quand n tend vers l'infini alors S vérifie $S = AS$ et X_n tend vers une limite X_∞ vérifiant $X_\infty = AX_\infty$. Comment appelle-t-on X_∞ ?
6. Calculer les valeurs et vecteurs propres de A.
7. Déterminer S et X_∞.

Chapitre 5

Intégrales multiples et curvilignes

5.1 Intégrales multiples

Exercice 1. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$. Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int\int_D dxdy \quad J = \int\int_D (2x + 3y)dxdy \quad K = \int\int_D xydxdy.$$

Exercice 2. Soit D l'intérieur du triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 2)$. Calculer $I = \int\int_D dxdy$ et $J = \int\int_D (x + y)dxdy$.

Exercice 3. Calculer l'aire d'un disque de rayon R. (Indic : penser aux coordonnées polaires)

Exercice 4. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x + 2y \leq 2,\ 0 \leq x\ \ 0 \leq y\}$. Calculer l'aire du domaine D.

Exercice 5. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \leq 10,\ 1 \leq x \leq 10,\ 1 \leq y \leq 10\}$. Calculer l'aire du domaine D.

Exercice 6. **1)** Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ et $x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calculer l'intégrale I suivante :

$$I = \int\int_D \frac{y}{x^2 + 1} dxdy$$

2) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - x \leq 0$ et $x^2 + y^2 - y \geq 0$ et $y \geq 0\}$. Calculer l'intégrale K suivante :

$$K = \int\int_D (x + y)^2 dxdy$$

(Conseils : dessinez D puis utilisez les coordonnées polaires.)

Exercice 7. Calculer l'aire du domaine elliptique $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ où a et b sont deux constantes strictement positives, puis calculer $K = \int\int_D xydxdy$.

Exercice 8. On considère le cylindre D compris entre les plan $z = 1$ et $z = 2$ dont la base est la surface limitée par les courbes $y = x^2$ et $y = 2x$ avec $0 \leq x \leq 2$.

1) calculer le volume de ce cylindre.

2) Dans ce domaine une substance est présente avec la concentration $C(x, y, z) = \dfrac{1}{z}$. Quelle est la quantité de substance contenue dans D ?

Exercice 9. Que représente l'intégrale triple exprimée en coordonnées cylindriques :

$$V = \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \int_0^{2\pi} \rho d\theta d\rho dz?$$

Calculer V.

Exercice 10. calculer le volume du tétraèdre de sommets (0,0,0) (1,0,0) (0,1,0) et (0,0,1).

Exercice 11. **1)** Calculer le volume d'une sphère de rayon R.

2) Calculer le volume d'une ellipsoide d'équation : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$.

Exercice 12. Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1\}$. A l'aide du changement de variable suivant $u = x+y+z$, $v = \dfrac{z}{y+z}$, $w = \dfrac{y+z}{x+y+z}$, calculer l'intégrale :

$$I = \int\int_D \frac{z^3}{(x+y+z)(y+z)} dxdydz.$$

Exercice 13. **1.** Soit A un domaine de $\mathbb{R}^2$ et B un domaine de $\mathbb{R}^3$. Que représentent les intégrales suivantes

$$I = \int\int_A dxdy \quad J = \int\int\int_B dxdydz \ ?$$

2. Que sont les coordonnées cylindriques (faire un dessin) ?
3. Quel est le déterminant de la jacobienne lorsque l'on passe des coordonnées cartésiennes à cylindriques ?
4. Soit le domaine D défini par

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq (R-z)^2; \quad 0 \leq z \leq R\}.$$

Dessiner D et calculer son volume.
Exercice 14. (annales 2002)

Soit Δ le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Calculer l'intégrale

$$K = \int\int_\Delta \frac{x}{1+y^2} dxdy.$$

Exercice 15. **1)** Montrer que $I = \int_{\mathbb{R}} \exp(-\frac{t^2}{2})dt$ est convergente.

2) Calculer $\int\int_{\mathbb{R}^2} \exp -\frac{x^2+y^2}{2} dxdy$. En déduire la valeur de I.

5.2 Intégrales curvilignes

Exercice 16. Paramétrer les courbes suivantes :

1) le bord du triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.
2) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.

Exercice 17. Calculer la longueur de l'arc d'hélice : $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = kt \end{cases}$

Exercice 18. Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_{[AB]} xy^3 ds$ sur le segment $[AB]$ où $A(-1,-2)$ et $b(1,2)$.

Exercice 19. Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_\Gamma y^2 dx + x^2 dy$ où Γ est la demi-ellipse supérieure $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1\}$ parcourue dans le sens trigonométrique.
Exercice 20. Calculer l'intégrale curviligne $I = \int_\Gamma (x^3 - y)dx + (x+y)dy$ où Γ est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ parcouru dans le sens trigonométrique.
Exercice 21. Soit D le demi-disque de centre $(0,0)$ et de rayon a, $a > 0$ et ∂D son bord supérieur. Calculer de deux manières différentes $I = \int_{\partial D} x^2 y dx + xy(2a-y)dy$.

Chapitre 6

Transformation de Fourier

6.1 Calcul de transformées

Exercice 1. On définit la fonction porte Π et la fonction de Heaviside H par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| \geq \dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad |x| \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si} & x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} & \end{cases}$$

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes (où α est un réel strictement positif)

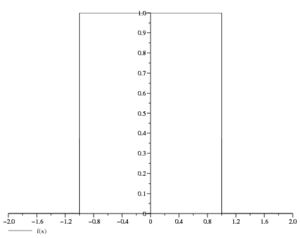
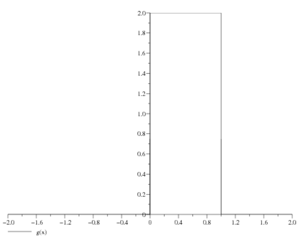
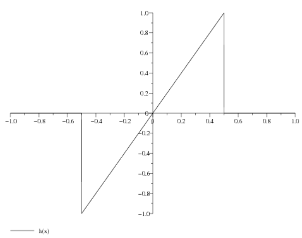
$$f(x) = \Pi(x) \quad g(x) = \exp(-\alpha|x|) \quad h(x) = H(x)\exp(-\alpha x)$$

Exercice 2. Calculer les tranformées de Fourier des fonctions suivantes

$$f(x) = \Pi(\frac{x - a/2}{a}) \quad a > 0, \qquad g(x) = x\Pi(x), \qquad \Lambda(x) = \Pi * \Pi(x),$$
$$h(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \qquad j(x) = \frac{\cos(\pi x)}{\pi(x - \frac{1}{2})}.$$

Exercice 3. **1.** Soit a un réel positif. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\Pi_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. En déduire la transformée de Fourier de $x\Pi_a(x)$.

Exercice 4. On rappelle que la fonction "porte" $\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ admet pour transformée de Fourier la fonction $\hat{\Pi}(\nu) = \dfrac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$.
1. Exprimer à l'aide de la fonction "porte" les fonctions f, g et h dont le graphe est représenté ci-dessous.

2. En déduire leurs transformées de Fourier.

Exercice 5. Notons $\Pi_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| > \dfrac{a}{2} \\ 1 & \text{si} \quad |x| \leq \dfrac{a}{2} \end{cases}$. Montrer que la transformée de Fourier de

$$\frac{\sin(\pi a x)}{\pi x} * \frac{\sin(\pi b x)}{\pi x}$$

est égale à $\Pi_c(\nu)$ où c est un réel que l'on déterminera.

Exercice 6. Soit la fonction $f(x) = \exp(-\pi x^2)$. On veut calculer sa transformée de Fourier.
1) Calculer sa dérivée.
2) En utilisant les propriétés de dérivation des transformées de Fourier, établir une équation différentielle vérifiée par F la transformée de Fourier de f.
3) Intégrer cette équation différentielle et en déduire F sachant que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2)dx = 1.$$

6.2 Utilisation de la transformée Fourier

Exercice 7. Soient les fonctions f et g suivantes

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ \exp(t) & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} t\exp(-t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer les transformées de Fourier de f et g.
2. On considère l'équation différentielle

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t).$$

   En supposant que y, y' et y'' admettent des transformées de Fourier, montrer que $y = f * g$ est solution.

Exercice 8. Soit $a > 0$ un réel. Soit $f(x)$ l'intégrale suivante :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{\pi(x-u)^2}{a^2}) \exp(-\frac{\pi(u)^2}{a^2}) du.$$

On veut calculer cette intégrale de deux manières différentes.
1. On rappelle que la fonction $g(x) = \exp(-\pi x^2)$ admet pour transformée de Fourier $G(\nu) = \exp(-\pi\nu^2)$.
a) Que vaut $G(0)$? En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2)dx$.
b) Soit $k(x)$ une fonction de la variable réelle x admettant $K(\nu)$ pour transformée de Fourier. Montrer que

$$\frac{1}{c}\mathcal{F}[k(\frac{x}{c})](\nu) = K(c\nu).$$

c) Montrer que la transformée de Fourier de $f(x)$ est

$$F(\nu) = a^2 \exp(-2\pi a^2 \nu^2).$$

d) En déduire $f(x)$.
2. a) Montrer que

$$\forall (x,u) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{u^2}{a^2} = \frac{2}{a^2}((u - \frac{x}{2})^2 + \frac{x^2}{4}).$$

b) A l'aide d'un changement de variable, calculer l'intégrale $f(x)$ (comparer avec le résultat obtenu en **1.d)**).

Exercice 9. 1. Résoudre l'équation différentielle suivante (avec k constante réelle ou complexe)

$$\begin{cases} V'(t) + kV(t) = 0, & \\ V(0) = V_0 & (V_0 \neq 0). \end{cases}$$

2. On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + c\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = 0, & \\ u(0,x) = u_0(x) & (u_0 \neq 0). \end{cases}$$

On pose $U(t,\nu)$ la transformée de Fourier de $u(t,x)$ par rapport à x.

a) Calculer les transformées de Fourier par rapport à x de $\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)$, $\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)$ en fonction de $U(t,\nu)$.

b) Calculer la transformée de Fourier de l'équation.

c) En déduire que $u(t,x) = u_0(x-ct)$.

Exercice 10. Résolution de l'équation de la chaleur
Considérons une barre de longueur illimitée dans laquelle la chaleur se transmet par conduction. Notons $u(x,t)$ la température en un point x de la barre à l'instant t. U vérifie l'équation dite de la chaleur :

$$\left\{\begin{array}{rcll} c\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \gamma\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & = & \rho(x,t) & \text{source de chaleur} \\ u(x,0) = u_0(x) & & & \text{température à l'instant initial} \end{array}\right.$$

Nous supposerons pour simplifier que $\rho(x,t) = 0$.
Résoudre l'équation aux dérivées partielles en supposant que u et u_0 admettent des transformées de Fourier.

Chapitre 7

Annales

2011/2012
1ère session, janvier 2012

Institut Polytechnique de Bordeaux
E.N.S.T.B.B. 1ère année

MODULE Mathématiques : Examen du 1er semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso - calculatrice interdite)

Durée : 2h - Sujet de C. Nazaret

Exercice 1. On mesure les dimensions d'un cone avec une incertitude relative majorée par 3% pour le rayon r et par 1% pour la hauteur h. On rappelle que le volume d'un cone est donné par la relation $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$. Pour toute fonction f de deux variables (x, y), on note $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

1. Démontrer que l'on peut exprimer ΔV en fonction du gradient de V, de Δr et de Δh.
2. Majorer l'incertitude relative sur le volume.
3. On augmente le rayon du cone r de 1% et on diminue la hauteur h de 3%. Donner une approximation de la variation relative du volume $\dfrac{\Delta V}{V}$.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$.

1. Déterminer le point critique de f.
2. Préciser sa nature (maximum, minimum, ...).
3. Déterminer le maximum et le minimum de f sur le disque
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
4. La fonction f possède-t-elle un maximum global dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. On cherche toutes les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2f(x, y) = 0 \quad (*)$$

1. Résoudre l'équation différentielle suivante de la fonction u de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:
$$u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = 0.$$
2. Vérifier que la fonction $g(x, y) = \cos(y)e^x + ye^{2x}$ vérifie (*).
3. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant (*).

Exercice 4. On cherche toutes les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 5\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (**).$$

1. Soit h une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que la fonction $u(x, y) = h(5x + 3y)$ est solution de (**).
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant (**). On considère la fonction φ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (5x + 3y, x)$. Déterminer l'équation vérifiée par la fonction g définie par $f = g \circ \varphi$. Conclure.
3. Trouver la solution de (**) vérifiant $f(0, y) = sin(y)$.

2011/2012 — Institut Polytechnique de Bordeaux
1ère session, juin 2012 — E.N.S.T.B.B. 1ère année

MODULE Mathématiques : Examen du 2nd semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso - calculatrice interdite)

Durée : 2h - Sujet de C. Nazaret

Exercice 1.

1. Soit la matrice A suivante

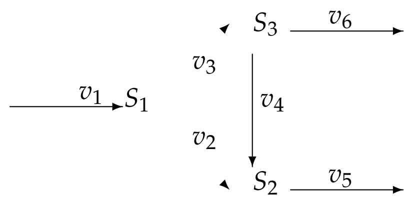
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que le polynôme caractéristique de la matrice A admet trois racines $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ et $\lambda_3 = \dfrac{1}{2}$.

   (b) Diagonaliser la matrice A. On notera D la matrice diagonale et P la matrice de passage telles que

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \\ 5/12 & 1 & 1/4 \end{pmatrix}$$

2. On considère le réseau métabolique suivant



   (a) Ecrire le système différentiel (ie les équations différentielles) vérifié par $S_1(t)$, $S_2(t)$, et $S_3(t)$, les concentrations des métabolites S_1, S_2 et S_3, en fonction des vitesses $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$.

   (b) En déduire N la matrice de stoichiométrie. On définit $V =^t (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$.

   (c) Donner le rang de N.

   (d) Quelle relation vérifie le système à l'état stationnaire ?

   (e) On suppose le système à l'état stationnaire.

      i. Combien de vitesses au moins doit-on mesurer pour fixer de facon unique la distribution des vitesses du réseau à l'état stationnaire (justifier) ?

      ii. On suppose v_1, v_5, v_6 connues. Peut-on en déduire les autres ? Si oui, les exprimer.

   (f) On ne suppose plus le système à l'état stationnaire. On suppose que $v_1 = 1$, $v_2 = \dfrac{S_1}{2}$, $v_3 = \dfrac{S_1}{2}$, $v_4 = \dfrac{S_3}{4}$, $v_5 = \dfrac{S_2}{2}$ et $v_6 = \dfrac{S_3}{4}$.

      i. Montrer que $S' = AS + b$ où $S =^t (S_1, S_2, S_3)$, A est la matrice étudiée précédemment et b un vecteur que l'on déterminera.

      ii. Résoudre ce système.

Exercice 2.

1. Démontrer la propriété dite de changement d'échelle (où $a > 0$) :
   si $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f alors $g(x) = f(ax)$ admet $\frac{1}{a}\widehat{f}(\frac{\nu}{a})$ comme transformée.
2. Soit la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = exp(-|x|)$. Déterminer sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ (toutes les étapes du calcul devront être justifiées).
3. Montrer que $\widehat{y}$, la transformée de la solution y de l'équation intégro-différentielle :
$$y(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(u)exp(-a|x-u|)du = exp(-|x|)$$
   vérifie
$$\widehat{y} = \frac{1}{4}\widehat{f}(\frac{\nu}{\sqrt{2}}).$$
4. En déduire y.

2012/2013 Institut Polytechnique de Bordeaux
1ère session, janvier 2013 E.N.S.T.B.B. 1ère année

MODULE Mathématiques : Examen du 1er semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso - calculatrice interdite)

Durée : 2h - Sujet de C. Nazaret

Exercice 1. On notera pour toute fonction f de n variables $x = (x_1, ..., x_n)$,

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

avec $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)$.
On considère deux gaz, à température T et pression P, composés de molécules de même masse m et de même diamètre d. Le coefficient de diffusion est donné par la relation

$$D = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k_B^3}{\pi^3 m}}\frac{T^{3/2}}{Pd^2}$$

où k_B est la constante de Boltzmann.

1. Calculer les dérivées partielles de D par rapport à T, P, d et m.
2. Enoncer la formule qui permet d'exprimer ΔD en fonction du gradient de D, de ΔT, ΔP, Δd et de Δm et l'appliquer.
3. Donner une approximation sur l'incertitude relative sur D connaissant les incertitudes relatives sur T, P, d et m.
4. Majorer l'incertitude relative sur D sachant que l' incertitude relative pour T est majorée par 0.1%, celle de P par 0.5%, celle de m par 0.1% et celle de d par 0.2%.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^3 + y^2 - 4x$.

1. Calculer le gradient et la hessienne de f.
2. Déterminer les deux points critiques de f.
3. Préciser leur nature (maximum, minimum, ...).
4. On veut déterminer le maximum et le minimum de f sur le cercle

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 = 9\}.$$

   (a) Montrer que la fonction f vérifient les relations suivantes

$$\begin{array}{ll} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 & f(x,y) = f(x,-y) \\ \forall x \in \mathbb{R} & f(x,0) = -f(-x,0) \end{array}$$

   (b) Déterminer les deux racines de l'équation $6x^2 - 2x - 4 = 0$.

   (c) A l'aide du lagrangien, déterminer les six candidats potentiels à l'optimum.

   (d) Conclure (Indication : $f(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{77}}{3}) = \frac{287}{27}$).

5. Justifier l'existence des maximum et minimum de f sur le disque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 \leq 9\}$$

   et les déterminer.

6. La fonction f possède-t-elle un maximum global dans $\mathbb{R}^2$? un minimum global ? (justifier)

Exercice 3. On cherche toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y) \quad (*)$$

1. Vérifier que la fonction $h(x,y) = e^{5x-3y}$ vérifie (*)
2. Déterminer les constantes (a,b) pour que le changement de variable $u = ax + y$ et $v = bx + y$ transforme l'équation (*) en $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g(u,v)$ où $g(u,v) = f(x,y)$.
3. Déterminer toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant (*).

2012/2013
1ère session, juin 2013

Institut Polytechnique de Bordeaux
E.N.S.T.B.B. 1ère année

MODULE Mathématiques : Examen du 2nd semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso - calculatrice interdite)
La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation

Durée : 2h - Sujet de C. Nazaret

Exercice 1. On considère le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq \frac{x^2}{y} \leq 4,\ 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2\}.$$

1. Représenter D.
2. Montrer que l'aire de D vaut 1 grâce au changement de variable $u = \dfrac{x^2}{y}$ et $v = \dfrac{y^2}{x}$.

Exercice 2. On considère la fonction

$$f(x) = \exp(-\pi x^2).$$

1. Calculer f' , la dérivée de f et l'exprimer en fonction de f.
2. En utilisant les propriétés de dérivation des transformées de Fourier, établir une équation différentielle vérifiée par la transformée de Fourier de f, notée $\widehat{f}$.
3. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $\widehat{f}$.
4. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi(x^2+y^2))dxdy = 1.$$
(Indication : on pourra utiliser les coordonnées polaires).
5. En déduire que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi u^2)du = 1$ puis conclure (pour $\widehat{f}$).

Exercice 3.

1. Soit la matrice A suivante
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$
   (a) Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.
   (b) Montrer qu'il admet trois racines $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 3$ et $\lambda_3 = 6$.
   (c) En déduire que A est inversible. Quel est le rang de A ?
   (d) Diagonaliser la matrice A. On notera D la matrice diagonale et P la matrice de passage telles que
$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & .. & .. \\ .. & 1 & .. \\ .. & .. & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & .. \\ 4 & 1 & .. \\ .. & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. On considère le système différentiel suivant
$$\begin{pmatrix} S_1'(t) \\ S_2'(t) \\ S_3'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \end{pmatrix}$$

(a) Quelle relation vérifie le système à l'état stationnaire ? Déterminer la ou les solutions à l'état stationnaire.

(b) On ne suppose plus le système à l'état stationnaire. Résoudre ce système.

Nom : 2013/2014
Prénom : ENSTBB-IPB

Mathématiques
Contrôle continu n^{o}1 - 1ère année

Durée : 1h - Répondre sur cette feuille- réponse finale dans les cases prévues à cet effet exclusivement
Calculatrice interdite - Formulaire manuscrit A4 recto-verso autorisé.

Exercice 1.

1. Soit la fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x+y^2}}$

Question	Réponse
Ensemble de définition de f (faire un dessin)	
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$	
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$	
$\nabla f(x,y)$	
Hessienne $H_f(x,y)$	
Ensemble des points (x,y) qui annule $\Delta f(x,y)$	

2. Soit la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y$. Démontrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$

Exercice 2.

1. Soient les nombres complexes suivants $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ et $z = \dfrac{z_2}{z_1}$

Question	Réponse
forme algébrique de z	
forme exponentielle de z	

2. Le dessin ci-dessous représente un nombre $z = x + iy$ dans le plan des complexes. Veuillez trouver la position du nombre $\omega = -\dfrac{\overline{z}}{|z|}$ (on tracera une croix en rouge à l'endroit de la position de ω le plus précisément possible).

Exercice 3. La surface corporelle S est donné en fonction du poids P et de la taille T par la formule de Du Bois :

$$S = 71.84 \times T^{0.725} \times P^{0.425}$$

où S est exprimé en cm^2, T est exprimée en cm et P en kg.
En supposant que l'on réalise une incertitude relative majorée par 0.001 sur la mesure de la taille et une incertitude majorée par 0.005 sur la mesure du poids, déterminer une majoration de l'incertitude relative sur S.

Question	Réponse
incertitude relative sur S	

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle suivante

Question	Réponse
Solution de $xy'(x) - 2y(x) = 28x^3e^{4x}$ $y(1/4) = 0$	

2013/2014 Institut Polytechnique de Bordeaux
1ère session, janvier 2014 E.N.S.T.B.B. 1ère année

MODULE Mathématiques : Examen du 1er semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso - calculatrice interdite)

Durée : 2h - Sujet de C. Nazaret

Exercice 1. On donne $p(v, T) = \dfrac{RT}{v}(1 + \dfrac{A}{v})$ (où R et A sont des constantes positives).

1. Donner une majoration de l'erreur absolue sur p.
2. On mesure v et T avec incertitude relative majorée par 3% sur v et 2% sur T. Donner une majoration de l'incertitude relative sur p.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$.

1. Calculer le gradient et la hessienne de f.
2. Déterminer les éventuels points critiques de f.
3. Préciser leur nature (maximum, minimum, ...).
4. On veut déterminer le maximum et le minimum de f dans le disque
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
   (a) Justifier l'existence des maximum et minimum de f dans D.
   (b) A l'aide du lagrangien, déterminer les 4 candidats potentiels à l'optimum sur le bord de D.
   (c) Conclure.
5. La fonction f possède-t-elle un maximum global dans $\mathbb{R}^2$? un minimum global ? (justifier)

Exercice 3.

Soit la fonction $\varphi\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par
$$\varphi(x, y) = (x + xy + y^2, y).$$

1. Déterminer sa dérivée et montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour g de classe $\mathcal{C}^1$, on définit h par :
$$h(x, y) = g(\varphi(x, y)) = g(x + xy + y^2, y).$$
   Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en fonction des dérivées partielles de g.
3. Calculer $(x + 2y)\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - (1 + y)\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)$.
4. Soit maintenant $f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[\times]0, +\infty[)$ une solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :
$$(x + 2y)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - (1 + y)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \qquad (E)$$
   Montrer que f est de la forme $f(x, y) = G(x + xy + y^2)$ avec $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
5. Trouver la solution de (E) vérifiant $f(x, 1) = e^x$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. On définit pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(tx, ty)$. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. On suppose désormais que $f(tx, ty) = tf(x, y)$ pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, on a
   $$f(x, y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$$
   (b) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera, tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$f(x, y) = \alpha x + \beta y$$
   .

NOM : I.P.B. - E.N.S.T.B.B. 1ère année - **2013/2014**
PRENOM :

MODULE Mathématiques : Examen du 2nd semestre

1ère session, mai 2014
(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso - utilisation d'excel autorisée)

Durée : 2h - Sujet de C. Nazaret

Exercice 1. (12 points)
On considère le réseau métabolique formé des réactions R1 à R9 données dans le tableau ci-dessous. On note :
A, B, C, D et P les concentrations des métabolites A, B, C, D et P impliqués dans les réactions R1 à R9, et $V = ^t(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9)$ les vitesses de ces réactions.

1. Représenter le graphe du réseau métabolique dans le tableau ci-dessous (répondre sur cette feuille).

Réactions	Graphe
R1 : $A_{ext} \longrightarrow A$ R2 : $B_{ext} \longleftrightarrow B$ R3 : $P \longrightarrow P_{ext}$ R4 : $A \longrightarrow B$ R5 : $A \longrightarrow C$ R6 : $A \longrightarrow D$ R7 : $B \longleftrightarrow C$ R8 : $2B \longrightarrow P$ R9 : $C + D \longrightarrow P$	

2. Ecrire le système différentiel vérifié par les concentrations des métabolites (A,B,C,D,P) en fonction de V. Peut-on résoudre ce système différentiel ? (justifier)

3. Ecrire S la matrice de stœchiométrie [1] du réseau.

1. Le coefficient stœchiométrique d'une espèce chimique est le coefficient qui lui est affecté dans l'équation chimique considérée. Dans cet exemple :

$$2B \longrightarrow P$$

le coefficient stœchiométrique de B est -2.

La suite sur une copie, s'il vous plaît.

4. Quelle équation vérifie V à l'état stationnaire ?
5. Quel est le rang de S ? En déduire la dimension du noyau de S.
6. Déterminer une base du noyau de S (i.e. des vecteurs linéairement indépendants suffisants pour générer l'ensemble des solutions).
7. On donne les vecteurs suivants

$$\begin{aligned} u_1 &=^t (1,-1,0,1,0,0,0,0,0) \\ u_2 &=^t (1,-1,0,0,1,0,-1,0,0) \\ u_3 &=^t (0,2,1,0,0,0,0,1,0) \\ u_4 &=^t (1,1,1,0,0,1,1,0,1) \end{aligned}$$

   (a) Comment vérifier que ces vecteurs appartiennent au noyau de S ?

   (b) Quel est l'intérêt de ces vecteurs comparativement à d'autres vecteurs quelconques du noyau ?
8. On suppose que les vitesses de v_1, v_2, et v_3 ont été mesurées. Peut-on en déduire les autres vitesses à l'état stationnaire ? (justifier)
9. On suppose maintenant que les vitesses v_1, v_3 ,v_4, et v_8 ont été mesurées. On note $v_m = (v_1, v_3, v_4, v_8)$ et $v_c = (v_2, v_5, v_6, v_7, v_9)$.

   (a) Ecrire le système **matriciel** vérifié par v_c en fonction de v_m à l'état stationnaire.

   (b) Peut-on déduire v_c à partir de v_m ?
10. Résoudre le problème suivant :
    $min||V||^2$
    tel que $NV = 0$
    sous les contraintes $v_1 = v_2 = 1$
    $v_i \geq 0$ pour $1 \leq i \leq 9$ et $i \neq 7$.

Exercice 2. (8 points)
On définit les fonctions porte Π et Λ par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [-1/2;1/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \Lambda(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Fourier de Π.
2. Calculer Λ', la dérivée de Λ sur $D'_\Lambda = \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$.
3. Montrer que pour tout $x \in D'_\Lambda$, $\Lambda'(x) - g(x) = a$
   où $g(x) = \Pi(x+1/2) - \Pi(x-1/2)$ et a est une constante (que l'on déterminera).
4. Calculer la transformée de Fourier de g.
5. En déduire que Λ peut s'écrire comme un produit de convolution.