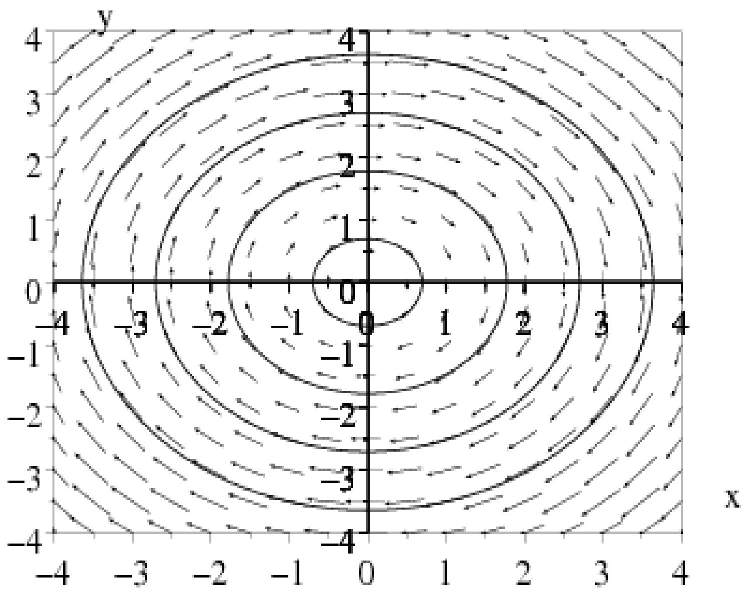
Mathématiques et Modélisation

Exercices de 2ème année

C. Nazaret



Bordeaux INP
ENSTBB

Année Universitaire 2014/2015

Table des matières

Chapitre 1

Transformation de Laplace

1.1 Calcul de transformées et d'originaux

Exercice 1. Prouver l'existence des transformées de Laplace des fonctions suivantes et les calculer par calcul intégral

$$\begin{array}{lll} f_1(t) = u(t)t^n & n \in \mathbb{N} & f_3(t) = u(t)\cos(\omega t) \\ f_2(t) = u(t)e^{\omega t} & \omega \in \mathbb{R} & f_4(t) = u(t)\sin(\omega t) \end{array}$$

Exercice 2. Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes (utiliser la table et les théorèmes)

$$\begin{array}{ll} f_1(t) = u(t)te^{2t} & f_4(t) = u(t)\sin^2(2t) \\ f_2(t) = u(t)\dfrac{e^t - e^{-t}}{t} & f_5(t) = u(t)\cos^2(3t) \\ f_3(t) = u(t)e^{2t}\cos(3t) & f_6(t) = u(t)\dfrac{\sin^2(2t)}{t} \end{array}$$

Exercice 3. Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes

$$f_1(t) = (u(t) - u(t-2))(t^3 - 3t^2 + 2t) \quad f_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sin(t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad f_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 3-t & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Indic : on peut soit calculer les intégrales soit exprimer les fonctions à l'aide de la fonction d'Heaviside et utiliser le théorème de la translation).

Exercice 4. Soit f la fonction périodique suivante

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [2n; 2n+1] \text{ avec } n = 0, 1, 2, \cdots \\ 0 & \text{sur }]2n+1; 2n+2[\end{cases}$$

1. Tracer le graphe de la fonction f.
2. Exprimer f comme une somme infinie d'une certaine fonction (translater la fonction qui vaut 1 sur [0 ;1] et 0 ailleurs).
3. En déduire la transformée de laplace de f.

Exercice 5. Donner les originaux des fonctions

$$\begin{array}{llll} F_1(p) = \dfrac{1}{p-1} & F_2(p) = \dfrac{1}{p+1} & F_3(p) = \dfrac{p}{p^2+4} & F_4(p) = \dfrac{2}{p^2+4} \\ F_5(p) = \dfrac{1}{(p-1)^3} & F_6(p) = \ln(\dfrac{p-2}{p-1}) & F_7(p) = \dfrac{1}{p^2+2p+1} & F_8(p) = \dfrac{1}{(p+3)^2+9} \\ F_9(p) = \dfrac{p-1}{(p-1)^2+4} & F_{10}(p) = e^{-p}F_9(p) & F_{11}(p) = \dfrac{p}{(p-1)^2+4} & \end{array}$$

Exercice 6. Trouver les constantes a, b, ou c (pour obtenir les décompositions en éléments simples) puis en déduire les originaux des fonctions

$$F_1(p) = \frac{p-1}{p(p-2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p-2} \qquad F_2(p) = \frac{p}{p^2(p-1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{(p-1)}$$

$$F_3(p) = \frac{p^2+9p+2}{(p-1)^2(p+3)} = \frac{a}{p-1} + \frac{b}{(p-1)^2} + \frac{c}{p+3} \qquad F_4(p) = \frac{(2p^2+10p)}{(p^2-2p+5)(p+1)} = \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2-2p+5}$$

Exercice 7. Calculer les originaux des fonctions

$$F_1(p) = \frac{p-1}{p^2-2p} \quad F_2(p) = \frac{1}{p^2+2p+1} \quad F_3(p) = \frac{1}{p^2+6p+18} \quad F_4(p) = \frac{p+2}{p^2-4p+8}$$
$$F_5(p) = \frac{6}{(p+2)^2} \quad F_6(p) = \frac{1}{(p+\pi)^7} \quad F_7(p) = \frac{e^{-p}}{(p+\pi)^7} \quad F_8(p) = \frac{p^2+9p+2}{(p-1)^2(p+3)}$$
$$F_9(p) = \frac{3p+2}{p^2+2p+10} \quad F_{10}(p) = \frac{e^{-\pi p}(2p^2+10p)}{(p^2-2p+5)(p+1)}$$

Exercice 8. Calculer l'original de la fonction F définie par $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2+1)}$ de deux manières différentes.

Exercice 9. Soient $f(t) = u(t)(1-t)$ et $g(t) = u(t)e^{-t}$.
Calculer le produit de convolution $f * g$ à l'aide de la transformée de Laplace.

1.2 Résolution d'EDO, d'EDP ou d'équations intégrales

Exercice 10. A l'aide de la transformation de Laplace, résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = -8u(t)e^{-t} \\ x(0) = 2 \quad x'(0) = 12 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = u(t) - u(t-1) \\ x(0) = 1 \quad x'(0) = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} tx''(t) - tx'(t) + x(t) = 2t - t^2 \\ x(0) = 0 \\ x(1) = 7 \end{cases}$

4. $\begin{cases} tx'''(t) - x''(t) + tx'(t) - x(t) = 0 \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \end{cases}$ (rép. $x(t) = (t - \sin(t))u(t)$).

Exercice 11. A l'aide de la transformation de Laplace, résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) - y'(t) - 2x(t) + 2y(t) = \sin(t) \\ x''(t) + x(t) + 2y'(t) = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{rep.} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{4}{45}e^{2t} + (\frac{1}{3}t + \frac{1}{9})e^{-t} - \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t \\ y(t) = (\frac{1}{3}t + \frac{1}{9})e^{-t} - \frac{1}{9}e^{2t} \end{cases}$$

Exercice 12. Résoudre l'équation intégro-différentielle suivante en utilisant la transformation de Laplace

$$\begin{cases} y'(t) + 5\int_0^t y(s)\cos(2(t-s))ds = 10 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Exercice 13. A l'aide de la transformation de Laplace, résoudre les équations aux dérivées partielles

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v = x + \sin(x) \\ v(\pi, t) = \pi \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x, 0) = 0 \\ v(0, t) = 0 \\ v(x, 0) = x + \sin(2x) \end{cases}$

   Indic. : Introduire $V(x, p)$ la transformée de Laplace de $t \mapsto v(x, t)$
   Chercher la solution particulière $V_p(x, p)$ de l'EASM (après transformation) sous la forme $V_p(x, p) = ax + b\sin(x) + c\sin(2x)$
   (rép. $v(x, t) = x + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}t)\sin(x) + \cos(\sqrt{5}t)\sin(2x)$).

2. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ y(0, t) = y(2, t) = \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \\ y(x, 0) = 20\sin(2\pi x) - 10\sin(5\pi x) \end{cases}$ rep. $y(x, t) = 10\cos 15\pi t \sin 5\pi x - 20\cos 6\pi t \sin 2\pi x$

Exercice 14. L'intensité qui traverse un circuit RLC vérifie l'équation suivante :

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(x)dx = E(t).$$

Déterminer $i(t)$ lorsque $C = 1/225$, $R = 50$, $L = 1$, sachant qu'il n'y a pas de courant initial dans le cricuit et que ce dernier est relié à une source de courant alternatif qui délivre : $E(t) = 100\cos(2t)$.
(rep. $i(t) = -\frac{10125}{4058}e^{-45t} + \frac{125}{58}e^{-5t} + \frac{20000}{58841}\cos(2t) - \frac{44200}{58841}\sin(2t)$)

Exercice 15. **1.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \pi & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$

Exprimez f à l'aide de la fonction de Heaviside u. En déduire que la transformée de Laplace de f est

$$F(s) = \frac{1 - \exp(-\pi s)}{s^2}.$$

2. Calculez à l'aide de la table et des théorèmes vus en cours, les transformées des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} &u(t) = 2t - \sin(2t) \\ &v(t) = u(t-\pi)[2(t-\pi) - sin(2(t-\pi))]. \end{aligned}$$

3. Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la transformation de Laplace

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = f(t) & t \geq 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 2 \end{cases} \qquad \text{On vérifiera que} \quad x(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{4} + \dfrac{7}{8}\sin(2t) & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ \\ \dfrac{\pi}{4} + \sin(2t) & \text{si } t \geq \pi \end{cases}$$

Exercice 16. La fonction de transfert d'un système linéaire est $H(p) = \frac{1}{p^2+p+5}$.

1. Quelle la sortie si l'entrée est une impulsion de dirac ?
2. Quelle la sortie si l'entrée est un échelon ?
3. Quelle la sortie si l'entrée est $e(t) = 5\sin 3tu(t)$?

Chapitre 2

Curve fitting (ajustement de paramètres)

2.1 Etude de cas linéaires

Exercice 1. Détermination du pKa d'un acide faible.
On dispose des valeurs expérimentales suivantes

x_i	0.1	0.14	0.19	0.24	0.29	0.34	0.38	0.43	0.48
pH_i	4.19	4.32	4.43	4.54	4.63	4.73	4.81	4.89	4.97
x_i	0.53	0.58	0.63	0.67	0.77	0.82	0.87	0.91	
pH_i	5.05	5.13	5.22	5.40	5.51	5.64	5.79	6.03	

Déterminer le paramètre pKa tel que la courbe théorique $pH(x, pKa) = pKa + \log \frac{x}{1-x}$ approche au mieux au sens des moindres carrés les points expérimentaux.
Exercice 2.
On dispose des données expérimentales (x_i, y_i). On veut déterminer les paramètres (a_0, a_1) tels que la courbe représentative de $y = a_0 + a_1 x$ approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux.
Ecrire sous forme matricielle $Ba = u$ le système vérifié par $a =^t (a_0, a_1)$ (On précisera B et u).
Appliquer cette méthode avec les données suivantes et vérifier vos résultats avec un tableur.

x_i	1	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	7
y_i	0,22	0,25	0,27	0,3	0,32	0,36	0,38	0,40	0,46	0,50

Exercice 3. On dispose des données expérimentales (x_i, y_i). On veut déterminer les paramètres (a_0, a_1, a_2) tels que la courbe représentative de $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux.
1. Expliquer la méthode des moindres carrés.
2. Ecrire sous forme matricielle $Ba = u$ le système vérifié par $a =^t (a_0, a_1, a_2)$ (On précisera B et u).
3. Appliquer cette méthode avec les données suivantes

x_i	0	1	2	3	4
y_i	3	8	13	25	40

Exercice 4. On dispose des données expérimentales suivantes.

x_i	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
y_i	0	0.0453	0.0991	0.1633	0.2397	0.3307	0.4388

On cherche à approcher le nuage de points (x_i, y_i) selon le critère des moindres carrés par une fonction de la forme $\alpha_1 \exp \frac{x}{2} + \alpha_2 x \exp \frac{x}{2} + \alpha_3 \cos \frac{x}{2}$.
1. Montrer que $\alpha =^t (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vérifie un système $M\alpha = G$. Déterminer M puis préciser le second membre G.
2. En déduire α à 10^{-2} près (on fera les calculs à l'aide d'un logiciel).

2.2 Etude de cas non linéaires

Exercice 5. En 1601, l'astronome allemand Johannes Kepler formula la 3ième loi du mouvement planétaire $T = Cx^{\alpha}$ qui lie la distance x de la planète au soleil (en millions de km) et la période orbitale T (en jours) sur la base des données expérimentales suivantes

Planète	Mercure	Venus	Terre	Mars
x_i	58	108	150	228
T_i	88	225	365	687

Retrouver les constantes de la 3ième loi de Kepler C et α.
Exercice 6. On étudie une réaction biochimique. La vitesse de cette réaction d'après la théorie suit l'équation dite de Michaelis-Menten-Henri : $v = \dfrac{V_M s}{K_M + s}$. (1). On voudrait déterminer les paramètres V_M et K_M à partir des mesures suivantes

s_i	1	2	5	10	15	30
v_i	0.9	1.5	1.55	1.75	1.9	1.95

1. Tracer ce nuage de points (s_i, v_i).
2. Linéarisation de Lineweaver et Burck :
   (a) En effectuant le changement de variables $y = \dfrac{1}{v}$ et $x = \dfrac{1}{s}$ dans l'équation (1), écrire une relation liant x et y.
   (b) Déterminer les paramètres (a_0, a_1) tels que la courbe représentative de $y = a_0 + a_1 x$ approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux $x_i = \dfrac{1}{s_i}$ et $y_i = \dfrac{1}{v_i}$.
   (c) Tracer sur un même graphe le nuage de points expérimentaux (x_i, y_i) et la courbe $y = a_0 + a_1 x$ obtenue en **b.**
   (d) En déduire (V_M, K_M) et tracer la courbe $v = \dfrac{V_M s}{K_M + s}$ avec le nuage de points (s_i, v_i).
3. Linéarisation d'Headie-Hofstee : Mêmes questions en effectuant le changement de variables $y = \dfrac{v}{s}$ et $x = v$ dans l'équation (1).
4. Linéarisation de Hanes-Woolf : Mêmes questions en effectuant le changement de variables $y = \dfrac{s}{v}$ et $x = s$ dans l'équation (1).
5. Déterminer les paramètres en utilisant un tableur et son solveur.
6. Reprendre toutes les questions en supposant qu'une erreur de 0.05 s'est produite lors de la mesure de $v_1 = 0.95$.

Exercice 7. On dispose des données expérimentales suivantes

x_i	0	0.5	1	1.5
y_i	2.05	2.3	2.6	2.9

On veut déterminer les paramètres (a_0, a_1) tels que la courbe représentative de $y = a_0 exp(a_1 x)$ approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux .

1. Déterminer les paramètres (a_0, a_1) en se ramenant à un problème linéaire par un changement de variable.
2. Tracer sur un même graphe le nuage de points expérimentaux et la courbe $y = a_0 exp(a_1 x)$ obtenue en **1** .
3. Quelle fonction S_1 a-t-on minimisé par cette méthode ?
4. On veut déterminer les paramètres (a_0, a_1) sans faire de changement de variables. Quelle fonction S_2 veut-on minimiser ?
5. Expliquer la méthode dite de Newton puis celle du gradient.
6. Déterminer les paramètres en utilisant un tableur et son solveur.

7. Quelle méthode utilise le solveur ?

Exercice 8. Croissance dans un chemostat : modèle exponentiel

On place dans la chambre du chemostat les organismes (appelés biomasse de concentration x) dont on veut étudier la croissance. Ils sont alimentés par des nutriments (appelés substrat de concentration s). Ici on s'intéresse au fonctionnement en batch (pas d'entrée, pas de sortie dans le chemostat). Sous certaines conditions, on peut modéliser l'évolution des concentrations x et s par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{dx}{dt} & = \mu x & x(0) = x_0 \\ \frac{ds}{dt} & = -\frac{\mu}{Y_{x/s}} x & s(0) = s_0 \end{array}\right.$$

où μ le taux de croissance de la biomasse, et $Y_{x/s}$ le rendement instantané sont supposés constants au cours du temps et (x_0, s_0) sont les concentrations initiales (des constantes strictement positives).

1. Exprimer $t \mapsto x(t)$.
2. En déduire x_0 et μ à partir des données expérimentales suivantes

t_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5
x_i	0.1	0.17	0.32	0.62	0.93	1.57

3. Montrer que $x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_0 + Y_{x/s}s_0$.
4. En déduire comment on peut déterminer le coefficient $Y_{x/s}$ à partir de n données expérimentales $(x_i, s_i), i = 1 \cdots n$.

Exercice 9. Croissance dans un chemostat : modèle linéaire

On place dans la chambre du chemostat les organismes (appelés biomasse de concentration x) dont on veut étudier la croissance. Ils sont alimentés par des nutriments (appelés substrat de concentration s). Ici on s'intéresse au fonctionnement en batch (pas d'entrée, pas de sortie dans le chemostat). Sous certaines conditions, on peut modéliser l'évolution des concentrations x et s par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{dx}{dt} & = \mu x & x(0) = x_0 \\ \frac{ds}{dt} & = -\frac{\mu}{Y_{x/s}} x & s(0) = s_0 \end{array}\right.$$

où $Y_{x/s}$ le rendement instantané est supposé constant au cours du temps et (x_0, s_0) sont les concentrations initiales (des constantes strictement positives). On suppose ici que μ le taux de croissance de la biomasse est égal à $\mu = k \times s(t)$ où k est une constante positive. On suppose aussi à l'instant $t^* > 0$ le substrat est épuisé c'est-à-dire $s(t^*) = 0$

1. Montrer que $x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_0 + Y_{x/s}s_0$.
2. En déduire $x(t^*) - x(t) = Y_{x/s}s(t)$
3. Exprimer μ en fonction de x. x vérifie donc l'équation différentielle (de Bernoulli)

$$\frac{dx}{dt} = k(1 - \frac{x}{x_{t^*}})x.$$

4. Calculer $t \mapsto x(t)$.
5. En déduire une méthode pour déterminer le paramètre k à partir de n données expérimentales $(t_i, x_i), i = 1 \cdots n$.
6. Comment déterminer le paramètre $Y_{x/s}$?

Exercice 10. La capacité d'oxygénation d'un fermenteur est déterminée en suivant la cinétique de transfert d'oxygène en absence de microorganismes. Le fermenteur contient initialement 100 litres d'eau déoxygénée à 30^{o}C. On met en route l'aération et, à l'aide d'une sonde à oxygène, on mesure l'évolution suivante de la concentration en oxygène dissous, C_L.

temps (s)	15	30	45	60	90	120	180	240
C_L (mgl^{-1})	1.8	3.2	4.1	4.9	5.8	6.2	6.6	6.8

On rappelle que la concentration en oxygène dissous, C_L, dans un fermenteur en absence de microorganismes est donnée par l'équation différentielle

$$\frac{dC_L}{dt} = Kla(C_L^* - C_L)$$

où Kla est le coefficient de transfert (gaz-liquide) de l'oxygène, C_L^* la concentration saturante d'oxygène liquide à 30^oC.

1. On suppose que $C_L(0) = 0$. Résoudre l'équation différentielle.
2. On veut déterminer à partir des données expérimentales le coefficient de transfert, Kla, en supposant que $C_L^* = 6.8$ mgl^{-1}.
   (a) Par un changement de variable bien choisi, se ramener à un problème linéaire et le résoudre.
   (b) Résoudre le même problème sans changement de variable (on fera les calculs avec un tableur).
3. Résoudre à nouveau le même problème sans changement de variable en supposant que C_L^* est aussi un paramètre à déterminer.

2014/2015 E.S.T.B.B. 2ème année

Courbes d'ajustement à des données expérimentales
TD1 : Modèles linéaires par rapport aux paramètres

Travail à envoyer à cnazaret@ipb.fr avant de quitter la salle : votre fichier excel.

Exercice 11. Détermination du pKa d'un acide faible.

1. On veut déterminer le paramètre pKa tel que la courbe théorique $pH(x, pKa) = pKa + \log \frac{x}{1-x}$ approche au mieux au sens des moindres carrés les points expérimentaux (x_i, pH_i) pour $i = 1, \cdots, n$. Quelle fonction cherche-t-on à minimiser ?
2. Déterminer l'expression littérale vérifiée par le paramètre pKa.
3. On dispose des valeurs expérimentales suivantes

x_i	0.1	0.14	0.19	0.24	0.29	0.34	0.38	0.43	0.48
pH_i	4.19	4.32	4.43	4.54	4.63	4.73	4.81	4.89	4.97
x_i	0.53	0.58	0.63	0.67	0.77	0.82	0.87	0.91	
pH_i	5.05	5.13	5.22	5.40	5.51	5.64	5.79	6.03	

   Déterminer à l'aide d'un tableur la valeur de pKa.
4. Tracer sur un même graphe le nuage de points et la courbe théorique obtenue (à l'aide du tableur). (Attention : faire un nuage pour les points expérimentaux et une courbe continue pour la courbe théorique).

Exercice 12. On veut déterminer les paramètres (a_0, a_1, a_2) tels que la courbe représentative de $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ approche au mieux au sens des moindres carrés un nuage de points expérimentaux (x_i, y_i).

1. Ecrire sous forme matricielle $Ba = u$ le système vérifié par $a =^t (a_0, a_1, a_2)$ (On précisera B et u).
2. Calculer a pour les données ci-dessous :

x_i	0	1	2	3	4
y_i	3	8	13	25	40

3. Tracer sur un même graphe le nuage de points et la courbe théorique obtenue.
4. Ajouter une courbe de tendance (fonction prédéfinie d'excel) et afficher son équation. (Vérifier vos résultats).

Exercice 13. On dispose des données expérimentales suivantes.

x_i	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
y_i	0	0.0453	0.0991	0.1633	0.2397	0.3307	0.4388

On cherche à approcher le nuage de points (x_i, y_i) selon le critère des moindres carrés par une fonction de la forme $\alpha_1 \exp \frac{x}{2} + \alpha_2 x \exp \frac{x}{2} + \alpha_3 \cos \frac{x}{2}$.

1. Montrer que $\alpha =^t (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ vérifie un système $M\alpha = G$. Déterminer M puis préciser le second membre G.
2. En déduire α à 10^{-2} près.
3. Tracer sur un même graphe le nuage de points et la courbe théorique obtenue.

Exercice 14. On dispose des données expérimentales suivantes

x_i	0	0.5	1	1.5
y_i	2.05	2.3	2.6	2.9

On veut déterminer les paramètres (a_0, a_1) tels que la courbe représentative de $y = a_0 exp(a_1 x)$ approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux en utilisant différentes méthodes.

1. Tracer le nuage de points expérimentaux.
2. Déterminer les paramètres en utilisant l'option "courbe de tendance exponentielle" d'excel.
3. Méthode avec changement de variable :
   (a) Déterminer les paramètres (a_0, a_1) en se ramenant à un problème linéaire par un changement de variable.
   (b) Tracer sur un même graphe le nuage des points expérimentaux transformés et la droite théorique obtenue.
   (c) Tracer sur un même graphe le nuage de points expérimentaux et la courbe $y = a_0 exp(a_1 x)$ obtenue.
   (d) Quelle fonction S_1 a-t-on minimisé par cette méthode ?
4. Méthode sans changement de variable :
   (a) Déterminer les paramètres (a_0, a_1), sans faire de changement de variables, à l'aide du solveur d'excel (qu'il faudra peut-être chargé).
   (b) Quelle fonction S_2 a-t-on minimisé ?
5. Quelle est la méthode utilisée par "courbe de tendance exponentielle" d'excel pour déterminer les paramètres ?
6. Même question pour le solveur ?

2014/2015 E.S.T.B.B. 2ème année

TP2 : Courbes d'ajustement à des données expérimentales

Exercice 15. Détermination du Kla d'un fermenteur
La capacité d'oxygénation d'un fermenteur est déterminée en suivant la cinétique de transfert d'oxygène en absence de microorganismes. On rappelle que la concentration en oxygène dissous, C_L, dans un fermenteur en absence de microorganismes est donnée par l'équation différentielle

$$\frac{dC_L}{dt} = Kla(C_L^* - C_L) \quad C_L(0) = C_0$$

où Kla est le coefficient de transfert (gaz-liquide) de l'oxygène, supposé constant, C_L^* la concentration saturante d'oxygène liquide à 30^oC. On suppose que $C_L^* = 100$. A l'aide de données expérimentales ci-dessous, on veut déterminer Kla et C_0.

t_i temps (s)	10	20	30	40	50	60	70	100	130
C_i (mgl^{-1})	27	46	60	67,5	79	85	86	94	98

1. Tracer le nuage de points expérimentaux (t_i, C_i) (graphe 1).
2. Pour déterminer les paramètres, on réalise la transformation $z = \ln(C_L^* - C_L)$.
   (a) Tracer le nuage de points transformés (t_i, z_i) (graphe 2).
   (b) Pour déterminer Kla et C_0, quelle fonction S_1 peut-on minimiser ?
   (c) Déterminer Kla et C_0 à l'aide d'excel (on peut utiliser les courbes de tendance).
   (d) Tracer alors l'allure de la courbe représentative de C_L dans le graphe 1.
3. On veut déterminer les paramètres sans faire de transformation.
   (a) Résoudre l'équation différentielle vérifiée par C_L.
   (b) Pour déterminer Kla et C_0 sans transformer les données expérimentales, quelle fonction S_2 cherche-t-on à minimiser ?
   (c) Déterminer Kla et C_0 à l'aide du solveur d'excel.
   (d) Tracer la courbe théorique ainsi obtenue dans le graphe 1.
4. Comparer les deux méthodes.
5. Pourquoi vaut-il mieux fitter aussi C_0 (même si on le connaît) ?

Exercice 16. Croissance dans un chemostat : modèle exponentiel
On place dans la chambre du chemostat les organismes de concentration x dont on veut étudier la croissance. Ils sont alimentés par des nutriments de concentration s. Ici on s'intéresse au fonctionnement en batch (pas d'entrée, pas de sortie dans le chemostat). On veut modéliser l'évolution des concentrations x et s sous les conditions "batch" par les équations différentielles suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \frac{dx}{dt} & = & \mu x & x(0) = x_0 \\ \frac{ds}{dt} & = & -\frac{\mu}{Y_{x/s}} x & s(0) = s_0 \end{array}\right.$$

où μ le taux de croissance de la biomasse, et $Y_{x/s}$ le rendement instantané sont supposés constants au cours du temps et (x_0, s_0) sont les concentrations initiales (des constantes strictement positives).

1. Exprimer $t \mapsto x(t)$.
2. Tracer le nuage de points expérimentaux (t_i, x_i) du fichier chemostat.xls.
3. Le modèle exponentiel est-il adéquat pour tous les points expérimentaux ?
4. Sélectionner les données adéquates (en justifiant votre choix) puis déterminer à l'aide du solveur d'excel les paramètres x_0 et μ.

5. Comparer la courbe théorique avec le résultat "courbe de tendance exponentielle" donné par excel.
6. Montrer que pour tout t, $x(t) + Y_{x/s}s(t) = x_0 + Y_{x/s}s_0$.
7. En déduire le coefficient $Y_{x/s}$ à partir des données expérimentales sélectionnées du fichier.
8. Tracer la courbe théorique et les points expérimentaux.

Exercice 17. Croissance dans un chemostat : modèle linéaire
le modèle précédent ne permet la prise en compte que d'une partie de la phase de croissance dans le chemostat. Celui qui suit vise à élargir le domaine de validité du modèle.
On étudie toujours la croissance dans un chemostat en batch avec le modèle

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{dx}{dt} & = & \mu x \qquad x(0) = x_0 \\ \dfrac{ds}{dt} & = & -\dfrac{\mu}{Y_{x/s}}x \quad s(0) = s_0 \end{array}\right.$$

où $Y_{x/s}$ le rendement instantané est toujours supposé constant au cours du temps mais on suppose maintenant que μ le taux de croissance de la biomasse est égal à $\mu = \lambda \times s(t)$ où λ est une constante positive. On suppose aussi à l'instant $t^* > 0$ le substrat est épuisé c'est-à-dire $s(t^*) = 0$ et on pose $x(t^*) = x_m$.

1. Montrer que $x_m - x(t) = Y_{x/s}s(t)$.
2. En déduire que x vérifie l'équation différentielle (de Bernoulli)
$$\frac{dx}{dt} = k(1 - \frac{x}{x_m})x.$$
3. Vérifier que la solution est
$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \dfrac{(x_m - x_0)e^{-kt}}{x_0}}.$$
4. Déterminer les paramètres k, x_0 et x_m à partir des données expérimentales (t_i, x_i) du fichier (on sélectionnera les données "utiles" : on peut faire plusieurs essais...) à l'aide du solveur d'excel.
5. Quelle fonction a-t-on minimisé ? Quelle méthode utilise le solveur ?

Exercice 18. Modélisation de la croissance d'un champignon
On étudie la croissance d'un champignon microscopique que l'on trouve dans les sols du genre fusarium. Les données expérimentales sont les suivantes (t représente le temps et y la densité de champignons) :

t_i	0	2	4	6	9	11	13	16	18	20	23	27	31
y_i	0.79	4.89	5.12	6.7	27.3	34	37.6	64.9	71.9	85.2	95	98	97.4

On suppose que la fonction y suit une croissance dite logistique c'est-à-dire vérifie l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{l} y'(t) = ry(t)(1 - y(t)/K) \\ y(0) = y_0 \end{array}\right.$$

Sans calculer la solution explicite de l'équation différentielle, on veut déterminer les paramètres $X = (y_0, r, K)$ connaissant seulement le modèle théorique vérifié par $y'(t)$.

1. Tracer ce nuage de points.
2. Initialiser $X = (y_0, r, K)$ dans trois cellules vides par exemple F1, F2 et F3.
3. Résoudre numériquement l'équation différentielle par la méthode dite d'Euler :
$$y(t + \Delta t) = y(t) + y'(t)\Delta t$$
c'est-à-dire évaluer $y_{th}(t_i)$ pour $i = 1, \cdots, 13$ en prenant pour $X = (y_0, r, K)$ les valeurs précédemment initialisées.
4. Chercher les paramètres $X = (y_0, r, K)$ tels que les points $(t_i, y_{th}(t_i))$ calculés par la méthode d'Euler approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux (t_i, y_i).

5. Tracer les deux nuages de points.
6. La solution explicite de l'équation différentielle est $y(t) = \dfrac{K}{1 + \dfrac{K - y_0}{y_0} \exp(-rt)}$. Vérifier vos résultats.

Il est en général souhaitable de faire une étude statistiques des résultats ainsi obtenus. Suite à voir en statistiques ...

Chapitre 3

Modélisation par EDO de phénomènes biologiques à une seule espèce

3.1 Etude de modèles de croissance

Exercice 1. Etude d'une culture de microbes.
Dans une culture de microbes, on suppose que la vitesse de prolifération des microbes est proportionnelle à leur quantité actuelle.
1. Etablir l'équation donnant le nombre de microbes après un temps t.
2. Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, donner en fonction du nombre initial de microbes, le nombre de microbes au bout de trois heures.
3. Quel en était le nombre au départ sachant qu'il y en a 6400 au bout de cinq heures ?

Exercice 2. Considérons une hormone élaborée par une glande endocrine et relâchée à un rythme constant dans le sang. Cette hormone se dégrade, la vitesse de dégradation est supposée proportionnelle à la concentration de l'hormone dans le sang. Notons $Q(t)$ la concentration de l'hormone à l'instant t. On peut modéliser ce phénomène par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dQ}{dt} = -mQ + K$$

1. Déterminer les éventuels points stationnaires.
2. Notons $D(t) = Q(t) - K/m$. Montrer que $D(t)$ est solution d'une équation différentielle et en déduire que $D(t) = D(0)e^{-mt}$.
3. En déduire $Q(t)$.
4. Tracer sur un même graphe $Q(t)$ pour différentes valeurs de $Q(0)$.

Exercice 3. Croissance logistique : modèle de Verhulst 1838
On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} Q'(t) = 4Q(t) - 2Q^2(t), & t \geq 0, \\ Q(0) = Q_0 > 0, \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution $(I_{max} = [0, T_{max}[, Q(t))$.
2. Calculer explicitement la solution du problème en fonction de Q_0.
3. On s'interesse aux propriétés de $Q(t)$ suivant la valeur de Q_0.
   a. Quelles sont les solutions stationnaires ?
   b. Montrer que
   $$\begin{array}{lcl} Q_0 \in]0;2[& \Longleftrightarrow & Q(t) \text{ est strictement croissante} \\ Q_0 > 2 & \Longleftrightarrow & Q(t) \text{ est strictement décroissante} \end{array}$$
   Que vaut T_{max} ?
   c. Montrer que
   $$Q_0 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{Q(t) \to T_{max}} Q(t) = 2.$$

4. Montrer que
$$Q''(t) = 4Q'(t)(1 - Q(t)).$$
En déduire l'éventuelle convexité de la courbe représentative C_Q de Q suivant la valeur de Q_0. En particulier, montrer que pour $0 < Q_0 < 1$, la courbe C_Q possède un point d'inflexion au point $(t^*, Q(t^*))$ tel que $Q(t^*) = 1$.
5. Tracer sur un même graphe l'allure des solutions Q en fonction de t pour les données initiales $Q_0 = 0$, $Q_0 = 2$, $Q_0 > 2$, $0 < Q_0 < 1$, $1 < Q_0 < 2$.

6. Ce problème modélise l'évolution temporelle de la densité de bactéries $Q(t)$ dans une boîte de Petri. On appelle n le taux de natalité, et $m(Q)$ le taux de mortalité. Si la densité augmente, on supposera que le taux de mortalité m augmente avec Q (on dira qu'il y a action de feed-forward de Q sur m) : $m = m_0 + sQ$,
où m_0 le taux de mortalité normale, c'est-à-dire que m_0 est le taux de mortalité de la population lorsque la densité de celle-ci est faible et s le coefficient de saturation.
Expliquer la mise en équation obtenue (loi de stockage) et interpréter les différentes courbes obtenues.

Exercice 4. Modèle de Allee
On considère le problème de Cauchy suivant
$$\begin{cases} y'(t) = yg(y), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$
avec $g(y) = -y^2 + 12y - 32$.
Ce problème modélise l'évolution temporelle du nombre de poissons en centaines y contenus dans un vivier. On s'intéresse aux propriétés de $y(t)$ suivant la valeur de y_0 où $y_0 \geq 0$.

1. Tracer la courbe représentative de g. Interpréter ce graphe en terme de modélisation.
2. Montrer que ce problème admet une unique solution.
3. Quelles sont les solutions stationnaires du problème ?
4. Etudier les variations de y en fonction de y_0.
5. Montrer que $y(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$.
6. Tracer sur un même graphe l'allure des solutions y en fonction t pour les différentes données initiales.
7. Interpréter biologiquement (évolution du nombre de poissons) les résultats obtenus (en 2 ou 3 lignes).

Exercice 5. modèle de Gompertz
On considère le problème de Cauchy suivant
$$\begin{cases} y'(t) = y(t)g(y(t)), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$
avec $g(y) = -\tau \ln y$.

1. Etudier ce modèle.
2. Interprétation : Ce modèle n'est pas valide pour des populations de petites tailles. Dans une tumeur, les cellules n'ayant pas d'accès à la nourriture et à l'oxygène ne se reproduisent pas et meurent générallement formant un centre nécrotique. Le modèle de Gompertz peut être vu comme une description de ces nécroses. Commenter et argumenter ce point.

3.2 Modèle croissance bactérienne dans un chemostat

Exercice 6. Un modèle mathématique classique de croissance des bactéries dans le chemostat est le suivant
$$\begin{cases} \dfrac{d(xV)}{dt} &= \mu x V - F_{ex} x \\ \dfrac{d(sV)}{dt} &= F_{in} s_{in} - F_{ex} s - \dfrac{\mu}{Y_{x/s}} x V \end{cases}$$

On suppose que $Y_{x/s}$ est une constante.

1. Montrer qu'en batch, le sytème se réduit alors à une EDO et une équation algébrique

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & \mu x \\ x(t) + Y_{x/s}s(t) & = & x_m \end{cases}$$

   où x_m est la valeur de x à l'épuisement du subtrat $s = 0$. On suppose que μ est une fonction de s définie par $\mu(s) = ks$ où k est une constante.

2. Ecrire l'EDO vérifiée par x
3. Déterminer ses éventuels points stationnaires.
4. Tracer les différentes trajectoires en faisant varier $x(0)$.

Exercice 7. On étudie à nouveau un modèle de croissance en batch dans le chemostat où x_m est la valeur de x à l'épuisement du subtrat $s = 0$ et que $Y_{x/s}$ est une constante.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & \mu x \\ x(t) + Y_{x/s}s(t) & = & x_m \end{cases}$$

Ici on suppose $\mu(s) = \mu_{max} \frac{s}{k_s + s}$

1. Tracer le graphe de μ
2. Déterminer les états stationnaires de x et s.
3. Tracer les différentes trajectoires.

3.3 Etude de modèles de cinétique enzymatique

Exercice 8. Modélisation d'une réaction du deuxième ordre

$$A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C$$

on note $a(t)$, $b(t)$, et $c(t)$ les concentrations de A, B, C. D'après la loi d'action de masse, la vitesse de réaction, à chaque instant, est proportionnelle à la concentration à cet instant de la substance qui se transforme. Lorsque la réaction n'est pas réversible,

$$A + B \xrightarrow{k} C$$

on a alors $\frac{da}{dt} = -ka$ où k est une constante indépendante de a mais proportionnelle à b d'où

$$\frac{da}{dt} = -k_1 ab$$

1. Ecrire un système différentiel de dimension 3 pour modéliser la réaction simplement.
2. En éliminant les deux inconnues $a(t)$ et $b(t)$ ($a + c = I$ et $b + c = J$), montrer que l'on peut alors écrire

$$\frac{dc}{dt} = k_1(I - c)(J - c) - k_2 c$$

3. Montrer que a, b, c admettent chacun une valeur d'équilibre stable.

Exercice 9. Modélisation d'une réaction enzymatique

$$S + E \underset{k^-}{\overset{k_+}{\rightleftharpoons}} C \xrightarrow{k_1} P + E$$

1. On suppose que la concentration en subtrat S, $s(t)$ est constante (trés grande ou régulièrement approvisionnée). Appelons e_0 la concentration totale d'enzyme (libre représentée par E ou liée dans le complexe C). Appelons c et p les concentrations de C et P. Expliquer comment on obtient le système différentiel vérifié par $c(t)$ et $p(t)$ suivant

$$\begin{cases} \frac{dc}{dt} = -(k^+ s + k_- + k_1)c + k^+ e_0 s \\ \frac{dp}{dt} = k_1 c \end{cases}$$

   Calculer les solutions $c(t)$ et $p(t)$.

2. On ne suppose plus que la concentration en subtrat S, $s(t)$, est constante. Ecrire le système différentiel vérifié par (s, e, c, p). Montrer que si on fait l'hypothèse de quasi-stationnarité $\frac{dc}{dt} \approx 0$, alors on obtient l'équation dite de Michaelis-Menten

$$\frac{dp}{dt} = \frac{V_M s}{K_M + s}$$

où V_M et K_M sont deux constantes que l'on déterminera.

Chapitre 4

Modélisation par EDO de phénomènes biologiques à plusieurs espèces

4.1 Etude de systèmes linéaires

Exercice 1. Transformer l'équation différentielle $4y'' - 15y' - 4y = 0$ en système différentiel. Le résoudre de deux manières différentes.

Exercice 2. Soit le système différentiel suivant $x' = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} x$

1) Résoudre explicitement le système linéaire avec la condition initiale $x(0) = (4, 8)$.
2) Etudier la courbe paramètrée obtenue avec la condition initiale $x(0) = (1, 2)$.
3) Quelle est la stabilité des solutions du système ?
4) Parmi les orbites au voisinage de $(0, 0)$ proposées page suivante, laquelle correspond à ce problème ?

Exercice 3. Soit le système différentiel suivant $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x$

1) Résoudre explicitement le système linéaire avec la condition initiale $x(0) = (a, b)$.
2) Quelle est la stabilité des solutions du système ?
3) Tracer les trajectoires obtenues pour les conditions initiales suivantes : $(1; 1)$ $(1; -1)$ $(1; 0)$ $(2; 0)$
4) Parmi les orbites au voisinage de $(0, 0)$ proposées page suivante, laquelle correspond à notre problème ?

Exercice 4. Soit le système différentiel suivant $x' = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} x$

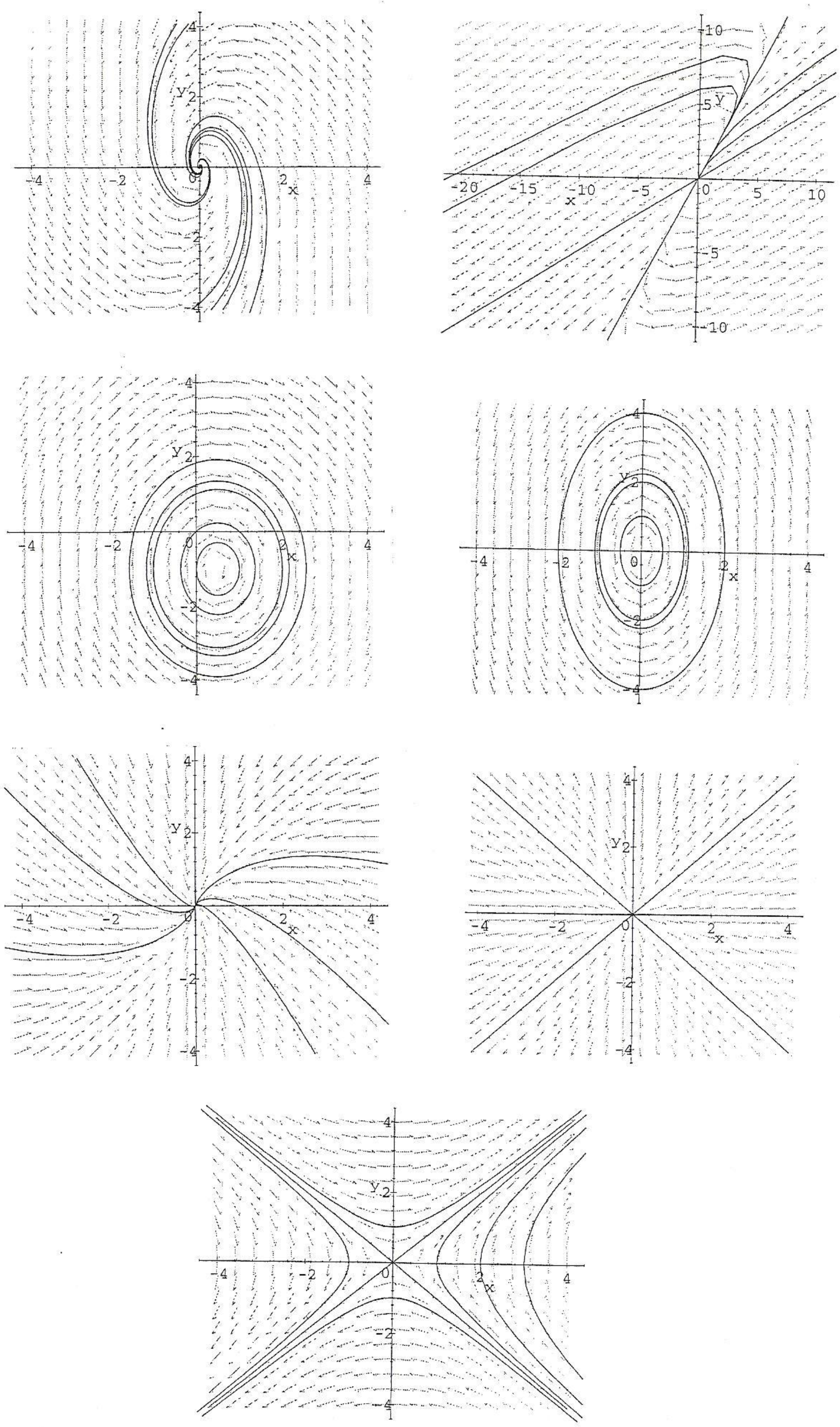
1) Résoudre explicitement le système linéaire avec la condition initiale $x(0) = (a, 0)$.
2) Montrer que les courbes paramétrées obtenues sont des ellipses.
3) Quelle est la stabilité des solutions du système ?
4) Parmi les orbites au voisinage de $(0, 0)$ proposées page suivante, laquelle correspond à notre problème ?

Exercice 5. mêmes questions (sauf 2) pour les systèmes suivants avec la condition initiale $x(0) = (a, b)$.

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x \qquad x' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x$$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x$$

Orbites des différents problèmes de la page 1



4.2 Etude de systèmes non linéaires

4.2.1 Modèles de croissance

Exercice 6. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= ax - kx^2 - bxy, \ \ t \geq 0, \\ y' &= cxy - dy, \ \ t \geq 0, \\ x(0) &= \alpha > 0, \ \ y(0) = \beta > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que par un changement de variables le système peut être simplifié en

$$\begin{cases} u' &= u(1 - u/K - v), \ \ t \geq 0, \\ v' &= \alpha v(u-1), \ \ t \geq 0, \\ u(0) &= \gamma > 0, \ \ v(0) = \nu > 0. \end{cases}$$

2. Montrer que ce problème possède une unique solution.
3. **a.** Déterminer et représenter dans le portrait de phase (le plan (u, v)) l'isocline nulle $u' = 0$ ainsi que l'isocline nulle $v' = 0$. Montrer qu'une orbite du système différentiel qui coupe une isocline nulle possède en ce point un vecteur tangent parallèle aux axes.
   On distinguera les cas $K > 1$ et $K < 1$.
   b. On suppose $K > 1$. Déterminer pour le premier quadrant $u \geq 0$ et $v \geq 0$ du portrait de phase l'ensemble des points (u, v) tels que $u' > 0$,$u' < 0$, $v' > 0$, $v' < 0$. Préciser alors sur le portrait de phase le sens des vecteurs tangents.
   c. Que dire de l'orbite du système différentiel correspondant à la condition initiale $(u(0), v(0)) = (u_0, 0)$ où $u_0 \geq 0$. Même question si $(u(0), v(0)) = (0, v_0)$ où $v_0 \geq 0$. En déduire qu'une orbite correspondant à une condition initiale $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ où $u_0 \geq 0$ et $v_0 \geq 0$ reste dans le premier quadrant ouvert $u > 0$ et $v > 0$ pour tout temps positif (on dit que la région est positivement invariante).
   d. A l'aide des questions précédentes, représenter l'allure de différentes orbites.
4. Déterminer les solutions stationnaires dans $\mathbb{R}^2_+$ du système et étudier leurs stabilités respectives.
5. Décrire un problème de dynamique des populations conduisant à un tel modèle et décrire les orbites obtenues.

Exercice 7. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\sin x - y, \\ x(0) &= \alpha \ \ y(0) = \beta. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il possède une unique solution globalement définie sur $[-\infty, +\infty[$ (on admettra que l'intervalle de définition est $[-\infty, +\infty[$).
2. Déterminer ses solutions stationnaires et étudier leurs stabilités respectives.
3. Ce système modélise le mouvement d'un pendule avec frottements. Expliquer les orbites obtenues (fig. 5.1).

4.2.2 Modèle de croissance de microorganismes dans un chemostat utilisé en continu

On se propose d'étudier des modèles de croissance de microorganismes dans un chemostat utilisé en continu. On fait l'hypothèse que le chemostat est bien mélangé, par conséquent on a une répartition spatiale homogène du substrat et de la biomasse. On utilise donc des équations différentielles pour cette modèlisation. On s'intèresse au modèle suivant

$$\begin{cases} x' &= \mu(s)x - Dx, \\ s' &= -\dfrac{1}{Y_{x/s}}\mu(s)x + D(s_{in} - s), \\ x(0) &= x_0 > 0, \ \ s(0) = s_0 > 0. \end{cases}$$

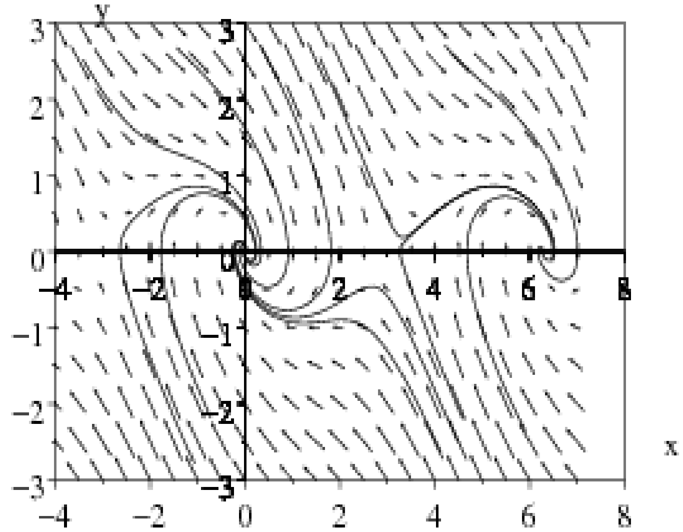


FIGURE 4.1 – Orbites de l'exercice 7

où
$x(t)$ représente la biomasse à l'instant t,
$s(t)$ le substrat à l'instant t,
$\mu(s)$ le taux de croissance de la biomasse,
$Y_{x/s}$ le taux de conversion du subtrat en biomasse, aussi appelé rendement, supposé constant
$D > 0$ le taux de dilution supposé constant,
$s_{in} > 0$ la concentration en substrat dans l'alimentation supposée constante.

Exercice 8. Lessivage
On considère le modèle (4.2.2). On suppose ici que $D > \mu_{max}$ et que $0 \leq \mu(s) < \mu_{max}$ (où μ_{max} est une constante).

1. Montrer qu'alors le système n'admet que l'état stationnaire $E_{trivial} = (0, s_{in})$.
2. Déterminer les solutions de $y' = (\mu_{max} - D)y$.
3. De $x' < \mu_{max}x - Dx$ et de la question précédente, déduire que $x(t) < \lambda e^{(\mu_{max}-D)t}$. En déduire la limite de x quand t tend vers $+\infty$.
4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u = x + Y_{x/s}s$ et la résoudre. En déduire la limite de u quand t tend vers $+\infty$.
5. En déduire que (x, s) tend vers $E_{trivial} = (0, s_{in})$ quand t tend vers $+\infty$ (on dit que $E_{trivial}$ est globalement asymptotiquemment stable).
6. Interpréter ces résultats.

Exercice 9. Modèle de Monod
On s'intéresse toujours au modèle (4.2.2). Ici nous prendrons comme taux de croissance une fonction dite de Monod

$$\mu(s) = \frac{\mu_{max}s}{k_s + s}$$

où μ_{max} est le taux maximal de croissance, supposé constant et k_s la constante de demi-saturation.

1. Etude de μ :
   (a) Etudier les variations de μ sur $\mathbb{R}_+$ et tracer son graphe.
   (b) Pour quelles valeurs de α a-t-on existence et unicité d'une solution s de l'équation $\mu(\bar{s}) = \alpha$? Déterminer $\bar{s}$ dans ce cas.
2. Etude du système (4.2.2) :

(a) Montrer que le système admet une unique solution $(x(t), s(t))$ définie sur $[0, T_{max}[$ et telle que $x(t) \geq 0$ et $s(t) \geq 0$.

(b) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u = x + Y_{x/s}s$ et la résoudre. En déduire la limite de u quand t tend vers $+\infty$.

(c) En déduire que $T_{max} = +\infty$.

(d) Montrer que si $D < \mu(s_{in})$ alors le système admet deux états stationnaires $E_{trivial} = (0, s_{in})$ et $E_{int} = (Y_{x/s}(s_{in} - \bar{s}), \bar{s})$ dans $\mathbb{R}^2_+$ et un seul état stationnaire sinon.

(e) Calculer J la matrice jacobienne du système.

(f) Montrer que le polynôme caractéristique de J est

$$P(\lambda) = \lambda^2 + (2D + \sigma' x - \mu)\lambda + D(D + \sigma' x - \mu)$$

où on note $\sigma(s) = \dfrac{\mu(s)}{Y_{x/s}}$.

(g) En déduire que ses deux valeurs propres sont $\lambda_1 = -D$ et $\lambda_2 = \mu - D - \sigma' x$.

(h) Etudier les stabilités des points stationnaires (on étudiera deux cas selon que $D < \mu(s_{in})$ ou $D > \mu(s_{in})$).

(i) Tracer les orbites du système à l'aide de Scilab.

(j) Donner une interprétation biologique des résultats obtenus. Peut-on dire qu'à l'équilibre, le taux de croissance de la biomasse est égal au taux de dilution ?

Exercice 10. Prise en compte de la maintenance
On reprend le modèle de l'exercice précédent en prenant en compte l'énergie de maintenance $m > 0$, l'énergie consommée par la biomasse pour des besoins autres que la croissance (respiration,...). On suppose que les cellules n'utilisent pas l'intégralité du substrat qu'elles prélèvent pour leur croissance. Si les cellules prélèvent le substrat dans l'environnement au taux $\mu(s)$, leur taux de croissance est $(1 - \epsilon)\mu(s)$. Le système que nous considèrons ici est donc le suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & (1-\epsilon)\mu(s)x - Dx, \\ s' & = & -\dfrac{1}{Y_{x/s}}\mu(s)x + D(s_{in} - s), \\ x(0) & = & x_0 > 0, \ \ s(0) = s_0 > 0. \end{array} \right.$$

où $\mu(s) = \dfrac{\mu_{max} s}{k_s + s}$ et ϵ est une constante supposée inférieure à 1.
Déterminer les états d'equilibre et leurs stabilités respectives. Comparer avec les résultats de l'exercice précédent.
Vos résultats sont-ils en accord avec la conclusion suivante ? : L'introduction de la maintenance a pour effet de réduire l'intervalle des dilutions pour lesquelles la population peut exister dans le chemostat mais ne modifie pas outre mesure le comportement du système si ce n'est en abaissant la valeur d'équilibre de la population.

Exercice 11. Prise en compte de la mortalité
On reprend le modèle précédent. Mais si le temps de résidence dans le chemostat est supérieur à la durée de vie moyenne d'une cellule, il y a mortalité cellulaire m dans le chemostat et celle-ci doit être prise en compte. On considère alors le nouveau modèle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & \mu(s)x - (D+m)x, \\ s' & = & -\dfrac{1}{Y_{x/s}}\mu(s)x + D(s_{in} - s), \\ x(0) & = & x_0 > 0, \ \ s(0) = s_0 > 0. \end{array} \right.$$

Déterminer les états d'equilibre et leurs stabilités respectives. Comparer avec les résultats précédents.
Vos résultats sont-ils en accord avec la conclusion suivante ? : L'introduction de la mortalité a pour effet de réduire l'intervalle des dilutions pour lesquelles la population peut exister dans le chemostat mais ne modifie pas outre mesure le comportement du système si ce n'est en abaissant la valeur d'équilibre de la population.

4.2.3 Modèles de cinétique

Exercice 12. On considère les réactions chimiques suivantes

$$\begin{array}{lcl} A + X_1 & \xrightarrow{k1} & 2X_1 \\ X_1 + X_2 & \xrightarrow{k2} & 2X_2 \\ X_2 & \xrightarrow{k3} & B \end{array}$$

On suppose que la concentration de A est gardée artificiellement constante.

1. Montrer que l'on peut modéliser ces réactions par le système différentiel suivant
$$\begin{array}{lcl} \dfrac{dx_1}{dt} & = & k_1 a x_1 - k_2 x_1 x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} & = & k_2 x_1 x_2 - k_3 x_2 \end{array}$$
où $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $a > 0$ sont les concentrations de X_1, X_2 et A.
2. En déduire les orbites de ce système différentiel.

Exercice 13. On considère les réactions chimiques suivantes

$$\begin{array}{lcl} 2X + Y & \xrightarrow{k1} & 3X \\ A & \xrightarrow{k2} & Y \\ X & \xleftrightarrow{k3} & B \end{array}$$

On suppose que les concentrations de A et de B sont gardées artificiellement constante.

1. Montrer que l'on peut modéliser ces réactions par le système différentiel suivant en choisissant convenablement k_1, k_2, k_3 et k_{-3}.
$$\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} & = & x^2 y - x + b \\ \dfrac{dy}{dt} & = & a - x^2 y \end{array}$$
où $x(t)$, $y(t)$ et $a > 0$ sont les concentrations de X, Y et A.
2. Déterminer le(s) état(s) stationnaire(s).
3. Ecrire les valeurs propres la matrice jacobienne au point stationnaire J en fonction de la trace et du déterminant de J.
4. Montrer que si $\frac{a-b}{a+b} = (a+b)^2$ alors des valeurs propres de J sont purement imaginaires. (Dans ce cas, on ne peut rien conclure concernant le problème non linéaire).
5. Discuter la stabilité du point stationnaire en fonction du signe de $\frac{a-b}{a+b} - (a+b)^2$.
6. Déterminer les isoclines nulles de ce système et les représenter.
7. Montrer qu'il existe une région R de laquelle une trajectoire ("entrée" dans R) ne peut "sortir". On obtient ici un cycle limite (cf fig 4.2).

Exercice 14. On appelle intégrale première d'un système différentiel autonome planaire $X' = f(X)$ une fonction H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 qui n'est pas constante sur aucun domaine ouvert de $\mathbb{R}^2$ et qui est constante le long de chaque trajectoire du système ; c'est-à-dire que pour chaque solution $X(t)$, on a $\forall t \geq 0,\ \ H(X(t)) = H(X_0)$. En pratique, il suffit donc de vérifier que $\frac{d}{dt}(H(X(t)) = 0$. Montrer que les systèmes différentiels suivants ont pour intégrale première les fonctions H données

1. $x' = y,\ y' = -x,\ H(x,y) = x^2 + y^2$ (interprétation géométrique ?)
2. $x' = y,\ y' = -\sin x,\ H(x,y) = (1 - \cos(x)) + \frac{1}{2} y^2$
3. $x' = y,\ y' = -g(x),\ H(x,y) = \int_0^x g(z)dz + \frac{1}{2} y^2$

Calculer une intégrale première pour Lotka-Volterra.

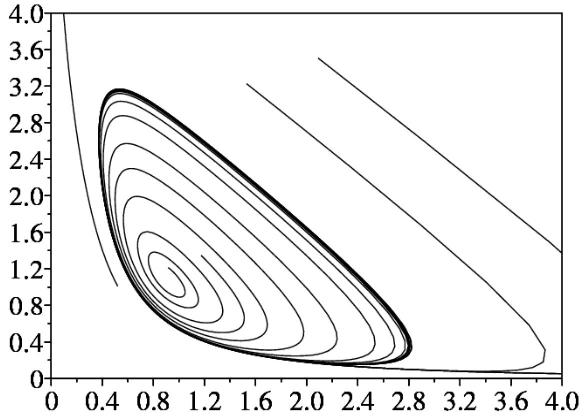


FIGURE 4.2 – Cycle limite

Chapitre 5

Annales

2011/2012 Institut Polytechnique de Bordeaux
1ère session janvier 2012 E.N.S.T.B.B. 2ème année

MODULE Mathématiques : Examen 1er semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso- utilisation d'excel)

Sujet (recto-verso) de C. Nazaret - Durée : 1h30

Exercice 1. On étudie une réaction biochimique. La vitesse de cette réaction d'après la théorie suit l'équation dite de Michaelis-Menten-Henri : $v = \dfrac{V_M s}{K_M + s}$. (1). On voudrait déterminer les paramètres V_M et K_M à partir des mesures suivantes

s_i	1	2	5	10	15	30
v_i	0.9	1.5	1.55	1.75	1.9	1.95

1. Linéarisation de Hanes-Woolf :
   (a) En effectuant le changement de variables $y = \dfrac{s}{v}$ et $x = s$ dans l'équation (1), écrire une relation liant x et y.
   (b) Donner le système $Ma = b$ vérifié par les paramètres $a = (a_0, a_1)$ pour que la courbe représentative de $y = a_0 + a_1 x$ approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux $x_i = s_i$ et $y_i = \dfrac{s_i}{v_i}$ (déterminer M, a et b).
   (c) Déduire du système les valeurs des paramètres (a_0, a_1).
   (d) Donner l'équation de la courbe de tendance d'excel et comparer.
   (e) Exprimer (V_M, K_M) en fonction de (a_0, a_1) puis les calculer.
   (f) Quelle fonction S_1 a-t-on minimiser dans ce cas ?
2. On veut déterminer les paramètres sans faire de transformation des données
   (a) Quelle fonction va-t-on minimiser dans ce cas ? Peut-on trouver des valeurs explicites et pourquoi ?
   (b) Expliquer la méthode utilisée par le solveur d'excel (5 ou 6 lignes maximum)
   (c) Déterminer (V_M, K_M) à l'aide du solveur d'excel.
   (d) Donner alors les valeurs de la vitesse théorique $v(s_i)$ pour $i = 1 \cdots 6$ (s_i du tableau des données expérimentales).
   (e) Expliquer la raison des différences sur les valeurs des paramètres (s'il en y a).

Exercice 2.

On étudie la cinétique d'une enzyme allostérique. C'est une enzyme dont l'activité peut être modifiée par une molécule. Cette molécule en se fixant à un site autre que le site actif de l'enzyme entraîne un changement dans l'activité enzymatique. La cinétique de l'enzyme est la sigmoïde du type $v = \frac{Vs^h}{K^h + s^h}$ (1). On voudrait déterminer les paramètres V, K et h à partir des mesures suivantes

s_i	0,2	0,5	0,8	1	2	3
v_i	0,01	0,45	0,88	0,95	0,99	0,99

1. On suppose que $V = 1$.

   (a) En effectuant le changement de variables $y = \ln(\frac{1}{v} - 1)$ et $x = \ln(\frac{1}{s})$ dans l'équation (1), écrire une relation liant x et y.

   (b) Déterminer les paramètres (a_0, a_1) tels que la courbe représentative de $y = a_0 + a_1 x$ approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux $x_i = \ln(\frac{1}{s_i})$ et $y_i = \ln(\frac{1}{v_i} - 1)$.

   (c) En déduire que $(K, h) = (0,57; 3,49)$ à 10^{-2} près.

2. Méthode itérative : on veut déterminer (V, K, h) sans faire de changement de variable (on ne suppose plus que $V = 1$). On cherche à construire une suite $X_k = (V_k, K_k, h_k)$ qui tende vers les meilleures valeurs de (V, K, h) au sens des moindres carrées à l'aide de la méthode dite du gradient.

   (a) Exprimer X_{k+1} en fonction X_k (on demande une formule : ne pas faire de calculs).

   (b) Quelle valeur initiale X_0 peut-on prendre ? (Justifier)

   (c) On utilise le solveur d'excel. Quelle est la méthode utilisée (par défaut) par ce solveur ?

   (d) Déterminer les paramètres (V, K, h) à l'aide du solveur.

3. Expliquer les différences obtenues entre la méthode de linéarisation et la méthode itérative. Quelle est la meilleure méthode ?

Exercice 3. Résoudre à l'aide de la transformation de Laplace l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} tx''(t) - (1+t)x'(t) + 2x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1 \end{cases}$$

(Indication : on montrera que la transformée de x, X vérifie l'équation $pX'(p) + 3X(p) = 0$ qu'on résoudra).

2011/2012 Institut Polytechnique de Bordeaux
1ère session juin 2012 E.N.S.T.B.B. 2ème année

MODULE Mathématiques : Examen 2nd semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso)

Sujet (recto-verso) de C. Nazaret - Durée : 2h

Exercice 1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?
2. Résoudre explicitement le système différentiel $X' = AX$.
3. Résoudre explicitement le système différentiel $Y' = AY + b$ avec la condition initiale $Y(0) = (0, 1)$.
4. Quel est le point stationnaire de ce système ? Est-il stable ?

Exercice 2. On s'intèresse maintenant au modèle de croissance de microorganismes dans un chemostat

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d(xV)}{dt} & = & \mu x V - F_{ex} x \\ \dfrac{d(sV)}{dt} & = & F_{in} s_{in} - F_{ex} s - \dfrac{\mu}{Y_{x/s}} x V \end{array} \right. \tag{5.1}$$

où
$x(t)$ représente la concentration de biomasse à l'instant t,
$s(t)$ la concentration de substrat à l'instant t,
$V(t)$ est le volume du fermenteur à l'instant t,
μ le taux de croissance de la biomasse,
F_{in} et F_{ex} les débits entrant et sortant dans le fermenteur,
s_{in} la concentration en substrat dans l'alimentation supposée constante
$Y_{x/s}$ le taux de conversion du subtrat en biomasse, aussi appelé rendement, supposé constant.
On rappelle que $\dfrac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex}$. On suppose aussi que l'on a les conditions initiales suivantes

$$x(0) = x_0 > 0, \quad s(0) = s_0 > 0.$$

On suppose que μ n'est pas une constante mais une fonction dite de Contois

$$\mu = \frac{\mu_{max} s}{k_s x + s}$$

où μ_{max} et k_s sont deux constantes réelles stritement positives. On fait fonctionner le fermenteur en "batch" : l'entrée et la sortie sont nulles $F_{in} = F_{ex} = 0$. On suppose qu'à l'épuisement du substrat ($s = 0$), x atteint la valeur x_m.

1. Montrer que le système différentiel (5.1) se réduit à une Equation Différentielle Ordinaire (EDO) et une équation algébrique

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & \mu_{max} \dfrac{x_m - x}{k_s Y_{x/s} x + x_m - x} x \\ s(t) & = & \dfrac{x_m - x}{Y_{x/s}} \end{array} \right.$$

   On suppose dans ce qui suit que $k_s Y_{x/s} > 1$.

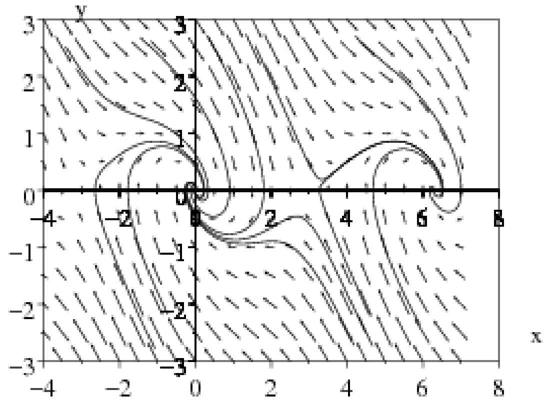


FIGURE 5.1 – Orbites de l'exercice 3

2. On pose $f(x) = \mu_{max} \dfrac{x_m - x}{k_s Y_{x/s} x + x_m - x} x$. Déterminer son ensemble de définition.
3. Montrer que le problème de Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = \mu_{max} \frac{x_m - x}{k_s Y_{x/s} x + x_m - x} x, \qquad x(0) = x_0$$

admet une unique solution (maximale) $(I_{max} = [0, T_{max}[, x(t))$.
4. Quelles sont les solutions stationnaires de l'EDO ?
5. Justifier que $\forall t \in I_{max}, \quad x(t) \geq 0$.
6. Etudier les variations de x en fonction de x_0 (on détaillera le raisonnement pour $0 < x_0 < x_m$).
7. Justifier que $\forall t \in I_{max}, \quad x(t) \leq max(x_0, x_m)$. En déduire que $I_{max} = \mathbb{R}^+$ et la limite de x en $+\infty$ pour tout x_0.
8. On veut étudier les éventuels points d'inflexion notés (t_i, x_i) de la courbe représentative de x.
   (a) Calculer la dérivée de f.
   (b) Montrer que f' s'annule en $x^* = \dfrac{x_m}{\sqrt{k_s Y_{x/s}} + 1}$.
   (c) Montrer que $x^* < \dfrac{x_m}{2}$.
   (d) En déduire que l'éventuel point d'inflexion (t_i, x_i) est tel que $x_i < \dfrac{x_m}{2}$.
   (e) Pour quelles valeurs de x_0 la courbe admet-elle un tel point d'inflexion ?
9. Tracer sur un même graphe l'allure des solutions x en fonction de t pour les données initiales vérifiant $x_0 = 0$, $x_0 = x_m$, $0 < x_0 < x_i$, $x_i < x_0 < x_m$ et $x_m < x_0$.

Exercice 3. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -\sin x - y, \\ x(0) & = & \alpha, \ \ y(0) = \beta. \end{array} \right.$$

1. Montrer qu'il possède une unique solution globalement définie sur $[-\infty, +\infty[$ (on admettra que l'intervalle de définition est $[-\infty, +\infty[$).
2. Déterminer ses solutions stationnaires et étudier leurs stabilités respectives.
3. Ce système modélise le mouvement d'un pendule avec frottements. Expliquer les orbites obtenues (fig. 5.1).

2012/2013
novembre 2012

Institut Polytechnique de Bordeaux
E.N.S.T.B.B. 2ème année

MODULE Mathématiques :Contrôle continu 1er semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso)

Sujet de C. Nazaret - Durée :1h

Exercice 1. (12 points)

1. Justifier pour $p > 0$, l'existence de $p \to F_n(p)$, la transformée de Laplace de $f_n(t) = t^n u(t)$ où n est un entier positif et u la fonction d'Heaviside.
2. Calculer F_1 (avec une intégrale).
3. Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la transformation de Laplace

$$\begin{cases} tx''(t) + (1-t)x'(t) = \dfrac{t^2}{2} - t \quad t \geq 0 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

(Indic. on vérifiera que $pX'(p) + X(p) = \dfrac{1}{p^3}$)

Exercice 2. (8 points) (dans cet exercice, on peut admettre une question et continuer...)

1. Soit f une fonction admettant une transformée de Laplace F. On définit $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$ où λ est un réel strictement positif et on note F_λ sa transformée. Démontrer que $F_\lambda(p) = \dfrac{1}{\lambda} F(\dfrac{p}{\lambda})$ (à l'aide d'une intégrale).
2. L'objectif maintenant est de calculer F la transformée de Laplace de $f(t) = \ln t$.

   (a) Déduire de la question précédente, en considérant $t \mapsto f(\lambda t)$, que F vérifie la relation

   $$\frac{1}{\lambda} F(\frac{p}{\lambda}) = \frac{\ln \lambda}{p} + F(p)$$

   (b) Montrer à partir de la relation précédente que F vérifie l'équation différentielle

   $$F(\frac{p}{\lambda}) + \frac{p}{\lambda} F'(\frac{p}{\lambda}) = -\frac{\lambda}{p}$$

   (Indic : Il faut dériver).

   (c) On prend $\lambda = 1$. Vérifier que $p \mapsto \dfrac{-\ln p}{p}$ est une solution particulière de l'équation différentielle précédente (avec $\lambda = 1$). Conclure.

2012/2013 Institut Polytechnique de Bordeaux
1ère session janvier 2013 E.N.S.T.B.B. 2ème année

MODULE Mathématiques : Examen 1er semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso- utilisation d'excel)

Sujet (recto-verso) de C. Nazaret - Durée : 1h30

A rendre : copie et fichier excel nommé "Nom-Prenom.xlsx"

Exercice 1. On étudie la cinétique d'une enzyme allostérique. C'est une enzyme dont l'activité peut être modifiée par une molécule. Cette molécule en se fixant à un site autre que le site actif de l'enzyme entraîne un changement dans l'activité enzymatique. La cinétique de l'enzyme est la sigmoïde du type $v = \dfrac{Vs^h}{K^h + s^h}$ (1) où V, K et h sont des constantes strictement positives. On dispose des données expérimentales suivantes

s_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,8	1	2	3
v_i	0,01	0,1	0,2	0,45	0,88	0,95	0,99	0,99

1. Tracer le nuage de points (s_i, v_i) avec le tableur (graphe 1).
2. Linéarisation : on suppose ici que $V = 1$.

   a. En effectuant le changement de variables $y = \ln(\dfrac{1}{v} - 1)$ et $x = \ln(\dfrac{1}{s})$ dans l'équation (1), écrire une relation liant x et y.
   b. Tracer le nuage de points transformés $\left(y_i = \ln(\dfrac{1}{v_i} - 1); x_i = \ln(\dfrac{1}{s_i})\right)$ avec le tableur (graphe 2).
   c. Déterminer les paramètres (a_0, a_1) tels que la courbe représentative de $y = a_0 + a_1 x$ approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux $(x_i; y_i)$ (on peut utiliser la courbe de tendance adéquate d'excel).
   d. Tracer la courbe de tendance et son équation sur le graphe 2.
   e. En déduire que $(K, h) = (0,57; 3,49)$ à 10^{-2} près.
   f. Tracer la courbe théorique ainsi obtenue dans le graphe 1.
   g. Quelle fonction S_1 a-t-on minimisé par cette méthode ?

3. Méthode itérative (ou de descente) : on veut déterminer (V, K, h) sans faire de changement de variable. On cherche à construire une suite $X_k = (V_k, K_k, h_k)$ qui tende vers les meilleures valeurs de (V, K, h) au sens des moindres carrées à l'aide d'une méthode de descente.
   a. Exprimer X_{k+1} en fonction X_k (on demande une formule : ne pas faire de calculs).
   b. On utilise le solveur d'excel. Quelle est la méthode utilisée (par défaut) par ce solveur ?
   c. Quelle direction de descente est utilisée dans la méthode dite du gradient ?
   d. Quelle valeur initiale X_0 peut-on prendre dans notre cas ? (Justifier)
   e. Résoudre le problème avec le solveur et tracer la courbe théorique obtenue dans le graphe 1.
   f. Quelle fonction S_2 a-t-on minimisé ?
4. Expliquer les différences obtenues entre la méthode de linéarisation et la méthode itérative. Quelle est la meilleure méthode ?

Exercice 2. Croissance dans un chemostat : modèle linéaire
On place dans la chambre d'un chemostat les organismes (appelés biomasse) dont on veut étudier la croissance alimentés par des nutriments (appelés substrat). On note x la concentration de biomasse dans la chambre, s celle du subtrat, V le volume contenu dans la chambre du fermenteur, F_{in} le flux entrant et F_{ex} le flux sortant. On a $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex}$. Ces organismes sont alimentés par l'entrée dans le système de nutriment, à une concentration s_{in}. Un modèle mathématique classique de croissance des bactéries dans le chemostat est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{d(xV)}{dt} & = & \mu x V - F_{ex} x \\ \frac{d(sV)}{dt} & = & F_{in} s_{in} - F_{ex} s - \frac{\mu}{Y_{x/s}} x V \end{array} \right.$$

Ici $Y_{x/s}$, le rendement instantané, est supposé constant au cours du temps et μ le taux de croissance de la biomasse est supposé égal à $\mu = \lambda \times s(t)$ où λ est une constante positive. On s'intéresse au fonctionnement en batch (pas d'entrée, pas de sortie dans le chemostat), on a donc $F_{in} = F_{ex} = 0$. On suppose que $x(0) = x_0$ et $s(0) = s_0$. On dispose des données expérimentales suivantes

t_i	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	8	8,5
s_i	7,8	7,6	7,5	7	6,5	5,5	4	2,5	1,5	0,8	0,5	0,25	0,15	0,1	0,05	0,05
x_i	0,08	0,1	0,17	0,32	0,62	0,93	1,57	2,32	2,61	2,75	2,77	3,07	3,15	3,27	2,86	3,29

1. Montrer que sous ces conditions "batch", le système peut se simplifier de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} \frac{dx}{dt} & = & \mu x & \qquad & x(0) = x_0 \\ \frac{ds}{dt} & = & -\frac{\mu}{Y_{x/s}} x & \qquad & s(0) = s_0 \end{array} \right.$$

   On suppose aussi qu'à l'instant $t^* > 0$ le substrat est épuisé c'est-à-dire que $s(t^*) = 0$ et que $x(t^*) = x_m$.

2. Montrer que $\forall t \geq 0, \quad Y_{x/s} s(t) + x(t) = x_m$
3. Montrer que x vérifie l'équation différentielle (de Bernoulli)

$$\frac{dx}{dt} = k(1 - \frac{x}{x_m})x.$$

   (on exprimera k en fonction de λ, x_m et $Y_{x/s}$). On admettra que la solution est

$$x(t) = \frac{x_m}{1 + \frac{(x_m - x_0)e^{-kt}}{x_0}}.$$

4. Déterminer le coefficient $Y_{x/s}$ à partir des données expérimentales à l'aide d'excel.
5. Déterminer les paramètres k, x_0 et x_m à partir des données expérimentales à l'aide du solveur d'excel.
6. Tracer la courbe théorique ainsi obtenue et les points expérimentaux dans un même graphe.
7. Hors Barême : Résolution de l'équation différentielle de Bernoulli. Posons $z(t) = \frac{1}{x(t)}$.
   (a) Calculer sa dérivée z'.
   (b) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par z et la résoudre (Indication : c'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre).
   (c) Retrouver le résultat admis précédemment $x(t) = \frac{x_m}{1 + \frac{(x_m - x_0)e^{-kt}}{x_0}}$

2012/2013
1ère session juin 2013

Institut Polytechnique de Bordeaux
E.N.S.T.B.B. 2ème année

MODULE Mathématiques : Examen 2nd semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto versol)

Sujet (recto-verso) de C. Nazaret - Durée : 2h

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation

Exercice 1. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), & t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

avec $f(y) = y \ln \dfrac{\tau}{y}$

où τ est une constante strictement positive et y_0 une constante positive ou nulle.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer la limite de f quand y tend vers 0. On pose dans ce qui suit $f(0) = 0$ (f est maintenant définie en 0 et ce de façon continue).
3. Déterminer les points stationnaires du problème de Cauchy.
4. Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
5. Prouver que le problème de Cauchy admet une unique solution notée $(I, y(t))$.
6. Etudier les variations de la solution en fonction de y_0 où $y_0 \geq 0$ (on ne détaillera que le cas $0 < y_0 < \tau$). Préciser I et la limite de y à la borne supérieure de I.
7. On veut étudier les éventuels points d'inflexion notés (t_i, y_i) de la courbe représentative de y.
   (a) Montrer que la courbe représentative de y admet un point d'inflexion quand f' s'annule.
   (b) Pour quelles valeurs de y_0 la courbe admet-elle un tel point d'inflexion ?
8. Tracer l'allure de la solution pour différentes conditions initiales bien choisies.

Exercice 2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1/2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A. Est-elle diagonalisable ?
2. Résoudre explicitement le système différentiel $X' = AX$ avec la condition initiale $Y(0) = (0, 1)$.
3. Quel est le point stationnaire de ce système ? Est-il stable ?

Exercice 3. Croissance dans un chemostat

On place dans la chambre d'un chemostat les organismes (appelés biomasse) dont on veut étudier la croissance alimentés par des nutriments (appelés substrat). On note x la concentration de biomasse dans la chambre, s celle du subtrat, V le volume contenu dans la chambre du fermenteur, F_{in} le flux entrant et F_{ex} le flux sortant.

On a $\frac{dV}{dt} = F_{in} - F_{ex}$. Ces organismes sont alimentés par l'entrée dans le système de nutriment, à une concentration s_{in}. Un modèle mathématique classique de croissance des bactéries dans le chemostat est le suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{d(xV)}{dt} & = & \mu xV - F_{ex}x \\ \dfrac{d(sV)}{dt} & = & F_{in}s_{in} - F_{ex}s - \dfrac{\mu}{Y_{x/s}}xV \end{array}\right.$$

Ici $Y_{x/s}$, le rendement instantané, μ le taux de croissance de la biomasse et s_{in} sont supposés constants au cours du temps.

On s'intéresse au fonctionnement en fed-batch : le flux d'entrée dans le chemostat est non nul $F_{in}(t) \neq 0$ et le flux de sortie est nul $F_{ex} = 0$. On note $V_0 = V(0)$, $x_0 = x(0)$ et $s_0 = s(0)$.

1. On pose $u(t) = x(t)V(t)$. Montrer que u vérifie une équation différentielle et la résoudre.
2. En posant $D(t) = \frac{F_{in}(t)}{V(t)}$ (dilution), montrer que le système de départ peut s'écrire

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{dx}{dt} & = & (\mu - D)x & x(0) = x_0 \\ \frac{ds}{dt} & = & D(s_{in} - s) - \frac{\mu}{Y_{x/s}}x & s(0) = s_0 \end{array}\right.$$

3. Montrer que $(0, s_{in})$ est un point stationnaire de ce système et discuter sa stabilité selon que $\mu > D$ ou $\mu < D$. Ce résultat vous semble-t-il cohérent avec la biologie ?
4. On suppose maintenant que $D < \mu$ et que $s(0) = s_0 < s_{in}$. On veut maintenir s constant au cours du temps

$$\forall t \quad s(t) = s_0$$

   (a) Déduire de $\frac{ds}{dt} = 0$ et de l'expression de $t \mapsto u(t)$, l'expression de la fonction $t \mapsto F_{in}(t)$.
   (b) En déduire alors $t \mapsto V(t)$ et $t \mapsto x(t)$.
   (c) Montrer que x tend, lorsque t tend vers $+\infty$, vers une valeur constante que l'on déterminera .
   (d) Montrer que D tend vers μ.

2013/2014 Institut Polytechnique de Bordeaux
octobre 2013 E.N.S.T.B.B. 2ème année

MODULE Mathématiques :Contrôle continu 1er semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso)

Sujet de C. Nazaret - Durée :1h

Exercice 1. (7 points)

1. Déterminer l'original h de $H(p) = \dfrac{1}{p(p^2+4)}$
2. En déduire l'original f de $F(p) = \dfrac{1-e^{-2p}}{p(p^2+4)}$
3. Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la transformation de Laplace

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = u(t) - u(t-2) & t \geq 0 \\ x(0) = 0 \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. (8 points)

1. Soit

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} & t < 0 \\ t & \text{si} & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & \text{si} & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{si} & t \geq 2 \end{cases}$$

   (a) Tracer le graphe de f_1.
   (b) Exprimer f_1 en une relation à l'aide de la fonction d'Heaviside.
   (c) Montrer que la transformée de Laplace de f_1 est $F_1(p) = \left(\dfrac{1-e^{-p}}{p}\right)^2$ pour $p > 0$.
2. On considère maintenant la fonction causale périodique f de période $T = 2$ définie par $f(t) = f_1(t)$ sur $[0;2]$
   (a) Tracer le graphe de f.
   (b) Exprimer f en fonction de f_1 pout tout $t \in \mathbb{R}$.
   (c) Calculer $\sum_{k=0}^{n} e^{-2kp}$ avec p réel strictement positif. En déduire $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2kp}$
   (d) Déterminer la transformée de Laplace de f.

Exercice 3. (5 points)

Soient deux réels ω et φ. Démontrer par calcul intégral que la transformée de $f(t) = \sin(\omega t + \varphi)$ est la fonction définie pour $p > 0$ par

$$F(p) = \frac{\omega \cos\varphi + p \sin\varphi}{p^2 + \omega^2}$$

(rappel : $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$)

2013/2014 Institut Polytechnique de Bordeaux
1ère session janvier 2014 E.N.S.T.B.B. 2ème année

MODULE Mathématiques : Examen 1er semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto verso- utilisation d'excel)

Sujet (recto-verso) de C. Nazaret - Durée : 1h30

A rendre : copie et fichier excel nommé "Nom-Prenom.xlsx"
Pour toutes les questions, on peut utiliser excel en expliquant ses choix. On veillera à rendre des feuilles de calcul organisées (une feuille par exercice).

Exercice 1. On dispose des données expérimentales suivantes.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	120	99	80	88	109	118	110	85	60	60

On cherche à approcher le nuage de points (x_i, y_i) selon le critère des moindres carrés par une fonction de la forme $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \cos x$. Posons $\alpha =^t (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

1. Quelle fonction S cherche-t-on à minimiser ? Quelles conditions nécessaires vérifie le minimum de S ?
2. Ecrire le système ${}^tXX\alpha = G$ vérifié par α (donner X puis préciser le second membre G).
3. En déduire α à 10^{-2} près.

Exercice 2. Détermination du Kla d'un fermenteur
La concentration en oxygène dissous, C_L dans un fermenteur en régime transitoire est donnée par l'équation

$$\frac{dC_L}{dt} = Kla(C_L^* - C_L) - Q_{C_L} X \quad (E)$$

où Kla le coefficient de transfert (gaz-liquide) de l'oxygène, C_L^* la concentration saturante d'oygène liquide, X la concentration bactérienne du milieu, et Q_{C_L} la vitesse spécifique de respiration des bactéries sont supposés constants. On suppose que $C_L^* = 100$. On cherche à approcher le nuage de points (t_i, C_{L_i}) selon le critère des moindres carrés par la fonction C_L solution de (E).

1. Détermination du Kla en absence de bactéries ($X = 0$). On mesure l'évolution suivante de la concentration C_L en absence de microorganismes.

t_i (temps en s)	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
C_{L_i} (concentration mgl^{-1})	7,5	19,4	30,9	40,4	50	56,5	62,2	67,4	71	74,7
t_i (temps en s)	165	180	195	210	240	270	300	330	360	
C_{L_i} (concentration mgl^{-1})	77,5	81	82,1	84	86,8	88,8	90,4	91,5	92,3	

   (a) Résoudre l'équation différentielle (E) vérifiée par C_L (avec $X = 0$) avec la condition initiale $C_L(0) = C_0$.

(b) Détermination du Kla par linéarisation

i. En effectuant le changement de variables $y = \ln(C_L^* - C_L)$, montrer que $y = \alpha t + \beta$ (avec α et β des réels).

ii. Déterminer les valeurs des paramètres (α, β) tels que la courbe représentative de $y = \alpha t + \beta$ approche au mieux au sens des moindres carrés le nuage de points expérimentaux t_i et $y_i = \ln(C_L^* - C_{L_i})$.

iii. En déduire Kla et C_0.

iv. Tracer le nuage de points transformés et la courbe théorique $t \mapsto y(t)$ sur un même graphique.

v. Quelle fonction S_1 avez-vous minimisée ?

(c) Méthode itérative : on veut déterminer Kla sans faire de changement de variable.

i. Pour déterminer Kla et C_0 sans transformer les données expérimentales, quelle fonction S_2 cherche-t-on à minimiser ?

ii. Pourquoi utilise-t-on une méthode itérative pour trouver le minimum de S_2 ?

iii. On cherche à construire une suite $X_k = (Kla_k, C_{0_k})$ qui tende vers le minimum de S_2 par la méthode dite du gradient.Exprimer X_{k+1} en fonction X_k (on demande une formule : ne pas faire de calculs).

iv. Quelle valeur initiale X_0 peut-on prendre ? (Justifier).

v. On utilise le solveur d'excel. Quelle(s) méthode(s) implémentée(s) dans ce solveur peut-on utiliser pour résoudre le problème ?

vi. Déterminer Kla et C_0 à l'aide du solveur d'excel et à partir des données expérimentales (t_i, C_{L_i}).

vii. Tracer le nuage de points expérimentaux et la courbe théorique ainsi obtenue.

(d) Calculer la somme des écarts au carré entre points expérimentaux (non transformés) et courbe théorique pour chacune des deux méthodes (linéarisation et itérative). L'une des deux est-elle meilleure (justifier) ?

2. On suppose maintenant que la cuve est utilisée pour une fermentation. On dispose des mesures suivantes en présence de microorganismes ($X \neq 0$)

t_i (en s)	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	330
C_{L_i} (mgl^{-1})	11,9	16,5	19,6	24,4	26,3	29,5	32,5	34,4	35,6	36,9	37,7	39,3	40,5	40,4

(a) Résoudre l'équation différentielle (E) vérifiée par C_L avec la condition initiale $C_L(120) = C_0$.

(b) Déterminer par la méthode des moindres carrés, Kla, $Q_{C_L}X$ et C_0 à partir des données expérimentales (t_i, C_{L_i}).

(c) Tracer le nuage de points expérimentaux et la courbe théorique ainsi obtenue.

2013/2014 Institut Polytechnique de Bordeaux
1ère session juin 2014 E.N.S.T.B.B. 2ème année

MODULE Mathématiques : Examen 2nd semestre

(document autorisé : formulaire manuscrit A4 recto versol)

Sujet (recto-verso) de C. Nazaret - Durée : 2h

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation

Exercice 1. (8 points) On considère le problème de Cauchy suivant

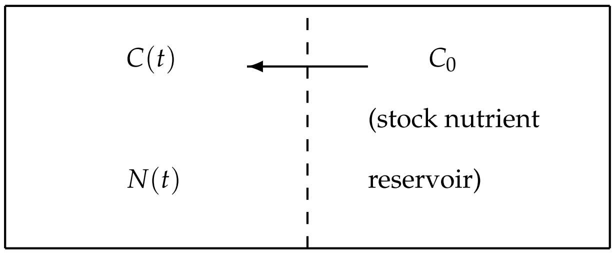
$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \quad t \geq 0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{5.2}$$

où $f(y) = -y^3 + 4y^2 - 3y$ et y_0 une constante positive ou nulle.

1. Déterminer les points stationnaires du problème de Cauchy (5.2).
2. Etudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
3. Prouver que le problème (5.2) admet une unique solution notée $(I, y(t))$.
4. Etudier les variations de la solution y en fonction de y_0 où $y_0 \geq 0$ (on ne détaillera que le cas $0 < y_0 < y_1$) où y_1 est le plus petit point stationnaire strictement positif). Préciser I et la limite de y à la borne supérieure de I.
5. Tracer l'allure de la solution pour différentes conditions initiales bien choisies.
6. Interprétation du modèle :
   (a) Tracer la courbe représentative de la fonction $g(y) = -y^2 + 4y - 3$.
   (b) Si le problème modélise la croissance d'une population de densité (ou de taille) y, g est appelé taux de croissance de la population. Expliquer ce choix de g d'un point de vue biologique (en commentant le graphe) et les différentes courbes obtenues précédemment.

Exercice 2. (12 points)

1. Soient K_{max} et K_n deux constantes réelles strictement positives. Soit la fonction sur $\mathbb{R}^+$ dite de Haldane suivante
$$\gamma(C) = \frac{K_{max}C}{K_n + C}.$$
   (a) Calculer $\gamma(0)$, $\gamma(K_n)$ et $\lim_{C\to+\infty}\gamma(C)$.
   (b) Déterminer γ'. En déduire le tableau des variations de γ (sur $\mathbb{R}^+$).
   (c) Tracer l'allure du graphe de la fonction.
   (d) Pour quelles valeurs y, existe-t-il un unique $C \in \mathbb{R}^+$ telles que $\gamma(C) = y$ (justifier rigoureusement) ? Que vaut alors C (en fonction de y) ?
2. On se propose d'étudier le modèle suivant de croissance de microorganismes : "In the growth chamber shown here, the microorganisms (density $N(t)$) and their food supply are kept in a chamber separated by a semipermeable membrane from a reservoir containing the stock nutrient whose concentration $C_0 > C(t)$ is assumed to be fixed. Nutrient can pass across the membrane by a process of diffusion at a rate proportionnal to the concentration difference. The microorganisms have mortality μ."



Le modèle mathématique associé est le suivant
$$\left\{\begin{array}{rcl} N' &=& N\gamma(C) - \mu N, \\ C' &=& D(C_0 - C) - \alpha N\gamma(C), \\ N(0) &=& N_0,\ \ C(0) = C_0. \end{array}\right.$$
où μ, D et α sont des constantes réelles strictement positives et N_0 et C_0 sont des constantes réelles positives.

   (a) Montrer que le système admet une unique solution $(N(t), C(t))$ définie sur $[0, T_{max}[$.
   (b) On suppose que $\mu \geq K_{max}$. Montrer qu'alors le système admet un unique point stationnaire $E_0 = (0, C_0)$.
   (c) On suppose que $\mu < K_{max}$.
      i. Montrer qu'alors le système admet deux points stationnaires $E_0 = (0, C_0)$ et $E_1 = (N_1, C_1)$ (déterminer explicitement E_1).
      ii. En déduire une condition sur les paramètres pour que E_1 soit dans $R^+ \times R^+$.
      Dans ce qui suit, on suppose cette condition vérifiée.
      iii. Déterminer la jacobienne $J = J(N, C)$ du système différentiel.
      iv. Calculer son déterminant $det(J)$ et sa trace $tr(J)$ (la trace est la somme des éléments diagonaux).
      v. Discuter la stabilité des points stationnaires E_0 et E_1 à partir des signes de $det(J)$ et $tr(J)$.
      On admettra les résultats suivants : La matrice $J(N, V)$ a deux valeurs propres λ_1 et λ_2, $det(J) = \lambda_1\lambda_2$ $tr(J) = \lambda_1 + \lambda_2$
      vi. Expliquer la mise en équations du problème et interpréter les résultats.