Intégrales Généralisées

2ème année CPP

Année Universitaire 2014-15

Il s'agit ici d'étendre la notion d'intégrale aux cas où f est continue sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b]$ (avec f non définie en a ou en b). On écrira les énoncés avec $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$. Pour les autres cas, il suffit d'adapter les énoncés.

Plan

Plan

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui n'est ni vide, ni réduit à un point et qui n'est pas un fermé borné.

Définition

Une fonction f localement intégrable est une fonction intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans I.

Rappelons qu'une fonction intégrable (au sens de Riemann) est une fonction réelle bornée et presque partout continue. C'est le cas notamment des fonctions continues, continues par morceaux, ou même seulement bornée et continue sauf en un nombre fini de points, ou encore bornée et monotone sur un segment $[a, b]$, ou réglées sur un segment $[a, b]$ (limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier).

Plan

Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$

Définition

f étant une fonction définie et localement intégrable sur $[a, +\infty[$ et si $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ est finie alors on note

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

On dit que l'intégrale est convergente.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque

Pour $\int_{-\infty}^b f(t)dt$, la définition s'adapte de façon évidente.

Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$

Définition

f étant une fonction définie et localement intégrable sur $[a, +\infty[$ et si $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ est finie alors on note

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

On dit que l'intégrale est convergente.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque

Pour $\int_{-\infty}^b f(t)dt$, la définition s'adapte de façon évidente.

Une première méthode pour étudier la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ consiste à calculer $\displaystyle I(x) = \int_a^x f(t)dt$ quand c'est possible puis à chercher si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x)$ existe et est finie.

Exemple

L'intégrale $\displaystyle I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *est convergente car*

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = [-\frac{1}{t}]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$$

et donc

$$I = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1.$$

Une première méthode pour étudier la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ consiste à calculer $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ quand c'est possible puis à chercher si $\lim_{x\to+\infty} I(x)$ existe et est finie.

Exemple

L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *est convergente car*

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = [-\frac{1}{t}]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$$

et donc

$$I = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1.$$

Exemple

En revanche, l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t dt$ *est divergente car*

$$\int_0^x \cos t dt = \sin x$$

et comme la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$*, J est divergente.*

Exemple

L'intégrale $K = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ *converge car*

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^x = \arctan x$$

et donc

$$K = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Définition (Intégrale d'une fonction qui devient infinie pour une des bornes d'intégration)

f étant une fonction définie et localement intégrable sur $[a, b[$ et si $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$ est finie alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt.$$

On dit que l'intégrale est convergente.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque

Pour f fonction définie et localement intégrable sur $]a, b]$, la définition s'adapte de façon évidente.

Définition (Intégrale d'une fonction qui devient infinie pour une des bornes d'intégration)

f étant une fonction définie et localement intégrable sur $[a, b[$ et si $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$ est finie alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt.$$

On dit que l'intégrale est convergente.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque

Pour f fonction définie et localement intégrable sur $]a, b]$, la définition s'adapte de façon évidente.

Exemple

L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ *converge car*

$$\int_\epsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_\epsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\epsilon})$$

et donc

$$I = \lim_{\epsilon \to 0} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2.$$

Exemple

En revanche, l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t}$ *diverge car*

$$\int_\epsilon^1 \frac{dt}{t} = -\ln \epsilon$$

et comme $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0} -\ln \epsilon = +\infty$, *J est divergente.*

Remarque

Pour que $\int^{+\infty} f(t)dt$ *soit convergente, si* f *a une limite* L *en* ∞, *alors il faut que* $L = 0$. *Mais ce n'est pas une condition suffisante.*

Exemple

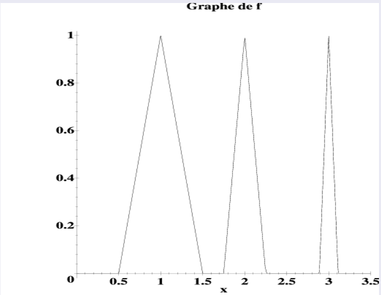
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt(t)}$ *est divergente bien que* $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt(t)} = 0$

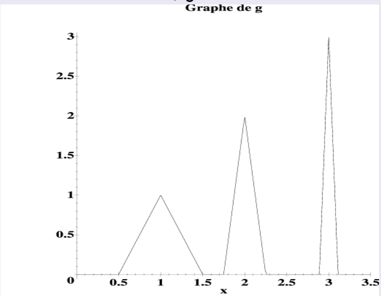
Remarque

Il se peut que $\int^{+\infty} f(t)dt$ *soit convergente sans que* f *n'ait de limite en* ∞*, ni que* f *ne soit bornée.*

Exemple

La fonction $f(t) = -2^k|t-k|+1$ *sur* $[k-\frac{1}{2^k}, k+\frac{1}{2^k}]$ *(dont le graphe est ci-dessous à gauche) n'a pas de limite en* ∞ *mais* $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$
La fonction $g(t) = k(-2^k|t-k|+1)$ *sur* $[k-\frac{1}{2^k}, k+\frac{1}{2^k}]$ *(graphe ci-dessous à droite) n'est pas bornée mais* $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 2$





Plan

Dans ce qui suit on notera : I un intervalle d'extrémités a et b ($a < b$) avec a et b éventuellement ∞.

Remarque

S'il y a un problème des deux côtés des bornes d'intégration ($\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ ou $\int_a^b f(t)dt$ avec f non définie en a et en b) ou bien un problème en "cours de route" ($\int_a^b f(t)dt$ avec f non définie en $c \in]a, b[$), on sépare les problèmes à l'aide de la relation de Chasles.

Proposition (Relation de Chasles 1)

Si f est définie sur I. On dit que f admet une intégrale généralisée sur I si et seulement si f admet une intégrale généralisée sur les deux intervalles $\{x \in I, x \leq c\}$ et $\{x \in I, x \geq c\}$ où c est un réel quelconque tel que $a < c < b$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Exemple

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ *est convergente. Car on a*

$$\int_c^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(x) - \arctan(c)$$

d'où
$\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) - \arctan(c) = \frac{\pi}{2} - \arctan(c).$
De même $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(c) + \frac{\pi}{2}$ *et donc on a*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$$

Exemple

En revanche, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ *est divergente car*

$$\int_c^x tdt = \frac{x^2 - c^2}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Alors que $\int_{-x}^{x} tdt = [\frac{t^2}{2}]_{-x}^{x} = 0 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exemple

En revanche, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t dt$ *est divergente car*

$$\int_c^x t dt = \frac{x^2 - c^2}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Alors que $\int_{-x}^{x} t dt = [\frac{t^2}{2}]_{-x}^{x} = 0 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Proposition (Relation de Chasles 2)

Si f est définie sur I sauf en c. On dit que f admet une intégrale généralisée sur I si et seulement si f admet une intégrale généralisée sur les deux intervalles $\{x \in I, x < c\}$ et $\{x \in I, x < c\}$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Exemple

$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{t} dt$ *est divergente. Le problème est en zéro.*

$$\int_{\epsilon}^{+1} \frac{1}{t} dt = -\ln(\epsilon) \underset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

Plan

Faux problèmes de convergence

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas une intégrale généralisée car le problème en zéro est un faux problème. La fonction $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge par 1 en 0 en une fonction continue sur $[0, 1]$.

On définit donc

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On définit alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^1 \tilde{f}(t) dt$ qui est une intégrale (habituelle) d'une fonction continue sur un fermé borné.

Faux problèmes de convergence

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas une intégrale généralisée car le problème en zéro est un faux problème. La fonction $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge par 1 en 0 en une fonction continue sur $[0, 1]$.

On définit donc

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On définit alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^1 \tilde{f}(t) dt$ qui est une intégrale (habituelle) d'une fonction continue sur un fermé borné.

Plan

Théorème (Linéarité de l'intégrale)

Soit I un intervalle d'extrémités a et b ($a < b$) avec a et b éventuellement ∞. Soient f et g deux fonctions définies sur I et dont les intégrales généralisées convergent sur I. Alors $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ a une intégrale convergente sur I et

$$\int_I (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_I f(t)dt + \beta \int_I g(t)dt.$$

Attention $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g)(t)dt$ peut exister sans que $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ existent.

Faux problèmes de convergence

L'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ n'est pas une intégrale généralisée car le problème en zéro est un faux problème. La fonction se prolonge par 1 en 0 en une fonction continue sur $[0, 1]$.

mais il ne faut pas utiliser la linéarité dans cette intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt \neq \int_0^1 \frac{e^t}{t} dt - \int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

car $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ et $\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$ ne sont pas convergentes ni l'une ni l'autre (une seule divergente suffit à mettre en défaut la linéarite).

Faux problèmes de convergence

L'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt$ n'est pas une intégrale généralisée car le problème en zéro est un faux problème. La fonction se prolonge par 1 en 0 en une fonction continue sur $[0, 1]$.
mais il ne faut pas utiliser la linéarité dans cette intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt \neq \int_0^1 \frac{e^t}{t} dt - \int_0^1 \frac{1}{t} dt$$

car $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ et $\int_0^1 \frac{e^t}{t} dt$ ne sont pas convergentes ni l'une ni l'autre (une seule divergente suffit à mettre en défaut la linéarite).

Plan

Intégrer par parties

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $I = [a, b[$ telles que $f'g$ et $g'f$ soient continues sur I. Supposons de plus que fg ait une limite à gauche en b alors $\int_a^b g'(t)f(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature et si elles convergent, on a :

$$\int_a^b g'(t)f(t)dt = \lim_{x \to b^-} [fg]_a^x - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

idem pour un intervalle $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Intégrer par parties

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $I = [a, b[$ telles que $f'g$ et $g'f$ soient continues sur I. Supposons de plus que fg ait une limite à gauche en b alors $\int_a^b g'(t)f(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature et si elles convergent, on a :

$$\int_a^b g'(t)f(t)dt = \lim_{x \to b^-} [fg]_a^x - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

idem pour un intervalle $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Exemple

On intègre par parties $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt = [\frac{-\cos(t)}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}dt$. *Comme la limite à gauche de* $b = +\infty$ *de fg est nulle (* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$*), on en déduit que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ *est de même nature que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ *(qui est convergente).*

Changer de variable

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soit f continue sur I et soit φ une fonction de classe C^1 sur $J = [a, b[$ telle $\varphi(J) \in I$. Posons $L = \lim_{x \to b} \varphi(x)$.

$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ et $\int_{\varphi(a)}^L f(u)du$ sont de même nature et égales si convergentes.

Idem pour un intervalle $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Changer de variable

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soit f continue sur I et soit φ une fonction de classe C^1 sur $J = [a, b[$ telle $\varphi(J) \in I$. Posons $L = \lim_{x \to b} \varphi(x)$.

$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ et $\int_{\varphi(a)}^L f(u)du$ sont de même nature et égales si convergentes.

Idem pour un intervalle $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Exemple

On montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(e^t)dt$ *est de même nature que* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}du$ *en faisant le changement de variable* $u = e^t$.

Remarque

Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en une intégrale généralisée et vice-versa.

Exemple

On montre que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(u)}{\sqrt{(u)}}du = 2\int_0^1 \cos(t^2)dt$ *(en faisant le changement de variable* $t = \sqrt{u}$*) et donc converge.*

Intégrales des fonctions positives

Les critères qui suivent s'appliquent à des **fonctions positives.** Si les fonctions sont négatives, il suffit d'appliquer le critère à $-f$ et $-g$. Si les fonctions changent de signe, on étudiera éventuellement la convergence en valeur absolue.

Plan

Proposition (Intégrale de référence: Riemann)

Soient $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *existe si et seulement si* $\alpha > 1$
- *L'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^{a+c} \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ *existe si et seulement si* $\alpha < 1$

Preuve

$$\int_c^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x - \ln c & si\ \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{c^{\alpha-1}}\right) & si\ \alpha \neq 1 \end{cases}$$

et cette expression a une limite quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve

$$\int_{a+\epsilon}^{a+c} \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \begin{cases} \ln c - \ln \epsilon & si\ \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{c^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{\epsilon^{\alpha-1}}\right) & si\ \alpha \neq 1 \end{cases}$$

et cette expression a une limite quand ϵ tend vers 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème (CNS de convergence)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a < b$). Soit f une fonction positive ou nulle localement intégrable sur $I = [a, b[$, $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si il existe un réel M tel que

$$\forall x \in [a, b[\quad \int_a^x f(t)dt \leq M.$$

Preuve

Posons $F(x) = \int_a^x f(t)dt.$

Soient $(x, x') \in [a, b[^2$ *si* $x \leq x'$, $F(x') - F(x) = \int_x^{x'} f(t)dt \geq 0.$

F est donc croissante. D'après le théorème de la limite monotone, F admet une limite en b si et seulement si F est majorée.

Plan

Proposition (Critère de comparaison)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a < b$). Soient f et g définies **positives** *localement intégrables sur $I = [a, b[$ et telles que $\forall t \in I$, $0 \leq f(t) \leq g(t)$.*

- *Si $\displaystyle\int_I g(t)dt$ est convergente alors $\displaystyle\int_I f(t)dt$ aussi.*
- *Si $\displaystyle\int_I f(t)dt$ est divergente alors $\displaystyle\int_I g(t)dt$ aussi.*

Le raisonnement s'adapte au cas d'un intervalle $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Preuve

Posons $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.

Lles fonctions F et G sont croissantes. De plus, $\forall x \in I$, $F(x) \leq G(x)$.

Si $\int_I g(t)dt$ *converge alors G admet une limite en b, et G est donc majorée. Par conséquent F est majorée et croissante donc F a une limite en b, notée* $\int_I f(t)dt$. *Par passage à la limite de* $F(x) \leq G(x)$, *on obtient* $\int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt$.

Preuve

Posons $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.
Lles fonctions F *et* G *sont croissantes. De plus,* $\forall x \in I$, $F(x) \leq G(x)$.
Si $\int_I g(t)dt$ *converge alors* G *admet une limite en* b, *et* G *est donc majorée. Par conséquent* F *est majorée et croissante donc* F *a une limite en* b, *notée* $\int_I f(t)dt$. *Par passage à la limite de* $F(x) \leq G(x)$, *on obtient* $\int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt$.

Preuve

Posons $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.
Lles fonctions F et G sont croissantes. De plus, $\forall x \in I$, $F(x) \leq G(x)$.
Si $\int_I g(t)dt$ *converge alors G admet une limite en b, et G est donc majorée. Par conséquent F est majorée et croissante donc F a une limite en b, notée* $\int_I f(t)dt$. *Par passage à la limite de* $F(x) \leq G(x)$, *on obtient* $\int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt$.

Preuve

Posons $\forall x \in I$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.
Lles fonctions F *et* G *sont croissantes. De plus,* $\forall x \in I$, $F(x) \leq G(x)$.
Si $\int_I g(t)dt$ *converge alors* G *admet une limite en* b, *et* G *est donc majorée. Par conséquent* F *est majorée et croissante donc* F *a une limite en* b, *notée* $\int_I f(t)dt$. *Par passage à la limite de* $F(x) \leq G(x)$, *on obtient* $\int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt$.

Preuve

Posons $\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$.
Lles fonctions F *et* G *sont croissantes. De plus,* $\forall x \in I$, $F(x) \leq G(x)$.
Si $\int_I g(t)dt$ *converge alors* G *admet une limite en* b, *et* G *est donc majorée. Par conséquent* F *est majorée et croissante donc* F *a une limite en* b, *notée* $\int_I f(t)dt$. *Par passage à la limite de* $F(x) \leq G(x)$, *on obtient* $\int_I f(t)dt \leq \int_I g(t)dt$.

Exemple

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt$ *est convergente.* *Comme* $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$, *on a* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$. *Comme* $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$, *comme* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ *est convergente (Riemann), l'intégrale est donc convergente.*

Exemple

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt$ *est convergente. Comme* $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$, *on a* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$. *Comme* $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, *comme* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ *est convergente (Riemann), l'intégrale est donc convergente.*

Exemple

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt$ *est convergente. Comme* $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$, *on a* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$. *Comme* $0 \leq \dfrac{1}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{t^2}$, *comme* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ *est convergente (Riemann), l'intégrale est donc convergente.*

Exemple

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt$ *est convergente. Comme* $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$*, on a* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$. *Comme* $0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$*, comme* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ *est convergente (Riemann), l'intégrale est donc convergente.*

Les propositions et techniques qui suivent sont données pour $I = [a, b[$ avec b éventuellement infini mais s'adaptent pour $I =]a, b]$ avec a éventuellement infini.

Proposition (Critère d'équivalence)

Soient f et g définies ***positives*** *localement intégrables sur $I = [a, b[$. Supposons $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*

Exemple

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 1} dt$ sont de même nature

Les propositions et techniques qui suivent sont données pour $I = [a, b[$ avec b éventuellement infini mais s'adaptent pour $I =]a, b]$ avec a éventuellement infini.

Proposition (Critère d'équivalence)

Soient f et g définies **positives** *localement intégrables sur $I = [a, b[$. Supposons $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*

Exemple

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *et* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 1} dt$ *sont de même nature*

Les propositions et techniques qui suivent sont données pour $I = [a, b[$ avec b éventuellement infini mais s'adaptent pour $I =]a, b]$ avec a éventuellement infini.

Proposition (Critère d'équivalence)

Soient f et g définies **positives** *localement intégrables sur $I = [a, b[$. Supposons $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*

Exemple

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 1} dt$ sont de même nature

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$*, on peut écrire pour tout* t *dans un voisinage à gauche de* b, $f(t) = g(t)(1+\epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t\to b^-} \epsilon(t) = 0$

Par conséquent pour t *assez proche de* b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$*, ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.

en utilisant la positivité de g, $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.

En appliquant le théorème de comparaison, on obtient le résultat annoncé.

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, *on peut écrire pour tout* t *dans un voisinage à gauche de* b, $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$
Par conséquent pour t *assez proche de* b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$, *ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
en utilisant la positivité de g, $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
En appliquant le théorème de comparaison, on obtient le résultat annoncé.

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$*, on peut écrire pour tout* t *dans un voisinage à gauche de* b, $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$
Par conséquent pour t *assez proche de* b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$*, ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
en utilisant la positivité de g, $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
En appliquant le théorème de comparaison, on obtient le résultat annoncé.

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$*, on peut écrire pour tout* t *dans un voisinage à gauche de* b, $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$
Par conséquent pour t *assez proche de* b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$*, ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
en utilisant la positivité de g, $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
En appliquant le théorème de comparaison, on obtient le résultat annoncé.

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$*, on peut écrire pour tout* t *dans un voisinage à gauche de* b, $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$
Par conséquent pour t *assez proche de* b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$*, ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$*.*
en utilisant la positivité de g, $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$*.*
En appliquant le théorème de comparaison, on obtient le résultat annoncé.

Plan

Corollaire

Soient α et k deux réels non nuls. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie et localement intégrable sur $[a; b[$, et **positive**.
si $f \underset{b}{\sim} \dfrac{k}{t^\alpha}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{k}{t^\alpha}dt$ sont de même nature.

Exemple

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[6]{t^4+t}}$ converge car la fonction est localement intégrable et positive sur $]0,1]$ et $\dfrac{1}{\sqrt[6]{t^4+t}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{\frac{1}{6}}}$.

Corollaire

Soient α et k deux réels non nuls. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction définie et localement intégrable sur $[a; b[$, et **positive***.*
si $f \underset{b}{\sim} \dfrac{k}{t^\alpha}$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{k}{t^\alpha}dt$ sont de même nature.

Exemple

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[6]{t^4+t}}$ *converge car la fonction est localement intégrable et positive sur $]0,1]$ et $\dfrac{1}{\sqrt[6]{t^4+t}} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{\frac{1}{6}}}$.*

Remarque (Règle de Riemann)

Soit f une fonction définie et localement intégrable sur $[a; +\infty[$, et **positive**.

- *Pour que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente, il suffit qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t)$ soit majorée (par exemple si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$).*
- *Pour que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ soit divergente, il suffit qu'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $t^\alpha f(t)$ soit minorée (par exemple si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$).*

Remarque (Règle de Riemann)

Soit f une fonction définie et localement intégrable sur $[a; +\infty[$, et **positive**.

- *Pour que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *soit convergente, il suffit qu'il existe un réel* $\alpha > 1$ *tel que* $t^\alpha f(t)$ *soit majorée (par exemple si* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$*).*
- *Pour que* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *soit divergente, il suffit qu'il existe un réel* $\alpha \leq 1$ *tel que* $t^\alpha f(t)$ *soit minorée (par exemple si* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$*).*

Exemple

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}$ *converge puisque l'on a* $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$. *Pour t assez grand, on a* $0 < \dfrac{\ln t}{t^2} < \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$. *On applique le théorème de comparaison.*

Exemple

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}$ *converge puisque l'on a* $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$. *Pour t assez grand, on a* $0 < \frac{\ln t}{t^2} < \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$. *On applique le théorème de comparaison.*

Exemple

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}$ *converge puisque l'on a* $\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} = 0$*. Pour t assez grand, on a* $0 < \frac{\ln t}{t^2} < \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$*. On applique le théorème de comparaison.*

Plan

Définition (Convergence absolue)

On dit que $\int_I f(t)dt$ *est absolument convergente si* $\int_I |f(t)|\, dt$ *est convergente.*

Théorème

Si $\int_I f(t)dt$ *est absolument convergente, elle est convergente et de plus on a :*

$$|\int_I f(t)dt| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

Attention, la réciproque n'est pas vraie.

Preuve

Posons $f^+ = sup(f, 0)$ *et* $f^- = sup(-f, 0)$. f^+ *et* f^- *sont deux fonctions positives ou nulles et localement intégrables sur* I. *De plus* $f^+ \leq |f|$ *et* $f^- \leq |f|$. *D'après le théorème de comparaison, puisque que* $|f|$ *est conv. sur* I, $\int_I f^+(t)dt$ *et* $\int_I f^-(t)dt$ *sont convergentes.*

Comme $f = f^+ - f^-$, *il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale pour conclure.*

On a $\forall x \in [ab[, |\int_a^x f(t)dt| \leq \int_a^x |f(t)|dt$, *par passage à la limite, on obtient*

$$|\int_I f(t)dt| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

Preuve

Posons $f^+ = sup(f, 0)$ et $f^- = sup(-f, 0)$. f^+ et f^- sont deux fonctions positives ou nulles et localement intégrables sur I.

De plus $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. D'après le théorème de comparaison, puisque que $|f|$ est conv. sur I, $\int_I f^+(t)dt$ et $\int_I f^-(t)dt$ sont convergentes.

Comme $f = f^+ - f^-$, il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale pour conclure.

On a $\forall x \in [ab[$, $|\int_a^x f(t)dt| \leq \int_a^x |f(t)|dt$, par passage à la limite, on obtient

$$|\int_I f(t)dt| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

Preuve

Posons $f^+ = sup(f, 0)$ et $f^- = sup(-f, 0)$. f^+ et f^- sont deux fonctions positives ou nulles et localement intégrables sur I. De plus $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. D'après le théorème de comparaison, puisque que $|f|$ est conv. sur I, $\int_I f^+(t)dt$ et $\int_I f^-(t)dt$ sont convergentes.

Comme $f = f^+ - f^-$, il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale pour conclure.

On a $\forall x \in [ab[$, $|\int_a^x f(t)dt| \leq \int_a^x |f(t)|dt$, par passage à la limite, on obtient

$$|\int_I f(t)dt| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

Preuve

Posons $f^+ = sup(f, 0)$ et $f^- = sup(-f, 0)$. f^+ et f^- sont deux fonctions positives ou nulles et localement intégrables sur I. De plus $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. D'après le théorème de comparaison, puisque que $|f|$ est conv. sur I, $\int_I f^+(t)dt$ et $\int_I f^-(t)dt$ sont convergentes.

Comme $f = f^+ - f^-$, il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale pour conclure.

On a $\forall x \in [ab[, |\int_a^x f(t)dt| \leq \int_a^x |f(t)|dt$, par passage à la limite, on obtient

$$|\int_I f(t)dt| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

Preuve

Posons $f^+ = sup(f, 0)$ et $f^- = sup(-f, 0)$. f^+ et f^- sont deux fonctions positives ou nulles et localement intégrables sur I. De plus $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$. D'après le théorème de comparaison, puisque que $|f|$ est conv. sur I, $\int_I f^+(t)dt$ et $\int_I f^-(t)dt$ sont convergentes.

Comme $f = f^+ - f^-$, il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale pour conclure.

On a $\forall x \in [ab[$, $|\int_a^x f(t)dt| \leq \int_a^x |f(t)|dt$, par passage à la limite, on obtient

$$|\int_I f(t)dt| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

Proposition (Critère d'équivalence)

Soient f et g définies localement intégrables sur $I = [a, b[$. Supposons de plus que f soit **positive au voisinage à gauche de** *b et que $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, *on peut écrire pour tout t dans un voisinage à gauche de b,* $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$

Par conséquent pour t assez proche de b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$, *ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.

en utilisant la positivité de f, on peut écrire $\exists c \in]a, b[, \forall t \in [c, b[$ $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.

En appliquant le théorème de comparaison sur $I = [c, b[$, *on obtient que* $\int_c^b f(t)dt$ *et* $\int_c^b g(t)dt$ *sont de même nature et il suffit d'appliquer la relation de Chasles.*

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$*, on peut écrire pour tout* t *dans un voisinage à gauche de* b*,* $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$
Par conséquent pour t *assez proche de* b*,* $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$*, ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$*.*
en utilisant la positivité de f*, on peut écrire* $\exists c \in]a, b[, \forall t \in [c, b[$
$0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$*.*
En appliquant le théorème de comparaison sur $I = [c, b[$*, on obtient que* $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ *et* $\displaystyle\int_c^b g(t)dt$ *sont de même nature et il suffit d'appliquer la relation de Chasles.*

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$*, on peut écrire pour tout t dans un voisinage à gauche de b,* $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$
Par conséquent pour t assez proche de b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$*, ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
en utilisant la positivité de f, on peut écrire $\exists c \in]a, b[, \forall t \in [c, b[$ $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
En appliquant le théorème de comparaison sur $I = [c, b[$*, on obtient que* $\int_c^b f(t)dt$ *et* $\int_c^b g(t)dt$ *sont de même nature et il suffit d'appliquer la relation de Chasles.*

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, *on peut écrire pour tout* t *dans un voisinage à gauche de* b, $f(t) = g(t)(1+\epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$
Par conséquent pour t *assez proche de* b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$, *ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
en utilisant la positivité de f, *on peut écrire* $\exists c \in]a,b[, \forall t \in [c,b[$
$0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
En appliquant le théorème de comparaison sur $I = [c,b[$, *on obtient que* $\int_c^b f(t)dt$ *et* $\int_c^b g(t)dt$ *sont de même nature et il suffit d'appliquer la relation de Chasles.*

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$*, on peut écrire pour tout* t *dans un voisinage à gauche de* b, $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$
Par conséquent pour t *assez proche de* b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$*, ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
en utilisant la positivité de f*, on peut écrire* $\exists c \in]a, b[, \forall t \in [c, b[$
$0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
En appliquant le théorème de comparaison sur $I = [c, b[$*, on obtient que* $\int_c^b f(t)dt$ *et* $\int_c^b g(t)dt$ *sont de même nature et il suffit d'appliquer la relation de Chasles.*

Preuve

Puisque $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, *on peut écrire pour tout* t *dans un voisinage à gauche de* b, $f(t) = g(t)(1 + \epsilon(t))$ *avec* $\lim_{t \to b^-} \epsilon(t) = 0$
Par conséquent pour t *assez proche de* b, $-\frac{1}{2} \leq \epsilon(t) \leq \frac{1}{2}$, *ce qui donne* $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
en utilisant la positivité de f, *on peut écrire* $\exists c \in]a, b[, \forall t \in [c, b[$ $0 \leq \frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
En appliquant le théorème de comparaison sur $I = [c, b[$, *on obtient que* $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ *et* $\displaystyle\int_c^b g(t)dt$ *sont de même nature et il suffit d'appliquer la relation de Chasles.*

Définition (Intégrale semi-convergente)

On dit que $\int_I f(t)dt$ *est semi-convergente si* $\int_I f(t)dt$ *est convergente mais pas absolument convergente.*

Exemple

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ *est convergente car absolument convergente.*

Comme $0 \leq |\cos(t)| \leq 1$, *on a* $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^2} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt.$

Exemple

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ *est semi-convergente (car de même nature que la précédente par IPP) mais n'est pas absolument convergente (nous allons le montrer...).*

Exemple

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ *est convergente car absolument convergente.*

Comme $0 \leq |\cos(t)| \leq 1$, *on a* $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^2} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

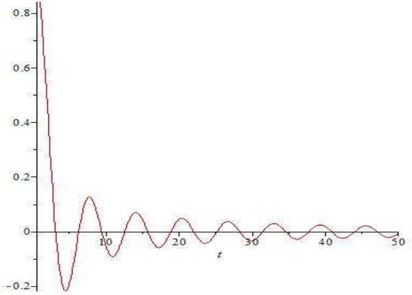
Exemple

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ *est semi-convergente (car de même nature que la précédente par IPP) mais n'est pas absolument convergente (nous allons le montrer...).*

Plan

Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$

La fonction n'est pas de signe constant.



Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$

On sait déjà que $\int_0^1 \frac{sint}{t} dt$ existe (faux problème en 0).

Etudions $F(x) = \int_1^x \frac{sint}{t} dt$.

Rappelons, qu'à l'aide d'une IPP, l' on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = [\frac{-\cos(t)}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

. Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$, et puisque $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$, F a donc bien une limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente. Nous allons montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$

On sait déjà que $\int_0^1 \frac{sint}{t} dt$ existe (faux problème en 0).

Etudions $F(x) = \int_1^x \frac{sint}{t} dt$.

Rappelons, qu'à l'aide d'une IPP, l' on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = [\frac{-\cos(t)}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

. Or $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$, et puisque $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \le \frac{1}{t^2}$, F a donc bien une limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente. Nous allons montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$

On sait déjà que $\int_0^1 \frac{sint}{t} dt$ existe (faux problème en 0).
Etudions $F(x) = \int_1^x \frac{sint}{t} dt$.
Rappelons, qu'à l'aide d'une IPP, l' on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = [\frac{-\cos(t)}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

. Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$, et puisque $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$, F a donc bien une limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente. Nous allons montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$

On sait déjà que $\int_0^1 \frac{sint}{t} dt$ existe (faux problème en 0).
Etudions $F(x) = \int_1^x \frac{sint}{t} dt$.
Rappelons, qu'à l'aide d'une IPP, l' on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = [\frac{-\cos(t)}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

. Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$, et puisque $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$, F a donc bien une limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente. Nous allons montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$

On sait déjà que $\int_0^1 \frac{sint}{t} dt$ existe (faux problème en 0).
Etudions $F(x) = \int_1^x \frac{sint}{t} dt$.
Rappelons, qu'à l'aide d'une IPP, l' on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = [\frac{-\cos(t)}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

. Or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$, et puisque $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$, F a donc bien une limite en $+\infty$ donc $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente. Nous allons montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

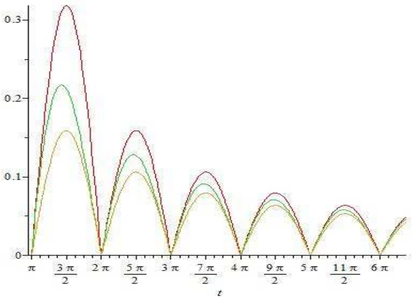
Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$

On sait déjà que $\displaystyle\int_0^1 \frac{sint}{t} dt$ existe (faux problème en 0).
Etudions $F(x) = \int_1^x \frac{sint}{t} dt$.
Rappelons, qu'à l'aide d'une IPP, l' on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = [\frac{-\cos(t)}{t}]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

. Or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$, et puisque $|\frac{\cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$, F a donc bien une limite en $+\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente. Nous allons montrer qu'elle n'est pas absolument convergente.

Etude de $\int_0^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$



Posons $I(x) = \int_0^x \frac{|sint|}{t} dt$ avec $x > \pi$.

Soit $n = E(\frac{x}{\pi})$, on peut écrire

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt.$$

Dans l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt$, effectuons le changement de variable $t = k\pi + u$

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du.$$

or si $u \in [0, \pi]$, $u + k\pi \leq (k+1)\pi$ et ainsi

$$I(x) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin u| du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}$$ divergence !

Posons $I(x) = \int_0^x \frac{|sint|}{t} dt$ avec $x > \pi$.
Soit $n = E(\frac{x}{\pi})$, on peut écrire

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt.$$

Dans l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt$, effectuons le changement de variable $t = k\pi + u$

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{0}^{\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du.$$

or si $u \in [0, \pi]$, $u + k\pi \leq (k+1)\pi$ et ainsi

$$I(x) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin u| du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}$$ divergence !

Posons $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{|sint|}{t}dt$ avec $x > \pi$.

Soit $n = E(\frac{x}{\pi})$, on peut écrire

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t}dt + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t}dt.$$

Dans l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t}dt$, effectuons le changement de variable $t = k\pi + u$

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sinu|}{u+k\pi}du + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t}dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|sinu|}{u+k\pi}du.$$

or si $u \in [0, \pi]$, $u + k\pi \leq (k+1)\pi$ et ainsi

$$I(x) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin u|du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}$$ **divergence !**

Posons $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{|sint|}{t} dt$ avec $x > \pi$.

Soit $n = E(\frac{x}{\pi})$, on peut écrire

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt.$$

Dans l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt$, effectuons le changement de variable $t = k\pi + u$

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sinu|}{u+k\pi} du + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{0}^{\pi} \frac{|sinu|}{u+k\pi} du.$$

or si $u \in [0, \pi]$, $u + k\pi \leq (k+1)\pi$ et ainsi

$$I(x) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin u| du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}$$ **divergence !**

Posons $I(x) = \int_0^x \frac{|sint|}{t} dt$ avec $x > \pi$.
Soit $n = E(\frac{x}{\pi})$, on peut écrire

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt.$$

Dans l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt$, effectuons le changement de variable $t = k\pi + u$

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du.$$

or si $u \in [0, \pi]$, $u + k\pi \leq (k+1)\pi$ et ainsi

$$I(x) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin u| du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}$$ **divergence !**

Posons $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{|sint|}{t} dt$ avec $x > \pi$.

Soit $n = E(\frac{x}{\pi})$, on peut écrire

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt.$$

Dans l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt$, effectuons le changement de variable $t = k\pi + u$

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du.$$

or si $u \in [0, \pi]$, $u + k\pi \leq (k+1)\pi$ et ainsi

$$I(x) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin u| du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}$$ **divergence !**

Posons $I(x) = \int_0^x \frac{|sint|}{t} dt$ avec $x > \pi$.

Soit $n = E(\frac{x}{\pi})$, on peut écrire

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt.$$

Dans l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sint|}{t} dt$, effectuons le changement de variable $t = k\pi + u$

$$I(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du + \int_{n\pi}^{x} \frac{|sint|}{t} dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|sinu|}{u + k\pi} du.$$

or si $u \in [0, \pi]$, $u + k\pi \leq (k+1)\pi$ et ainsi

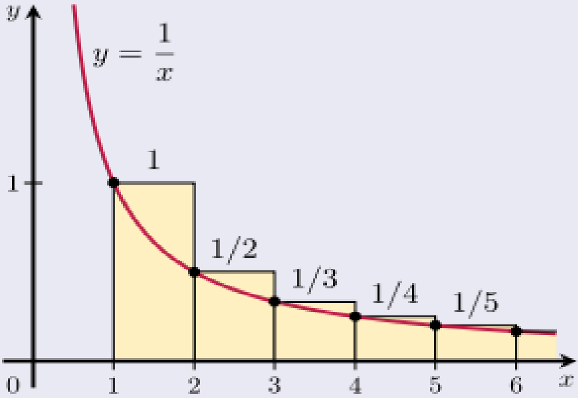
$$I(x) \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} |\sin u| du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)}$$ **divergence !**

Théorème (Comparaison à une intégrale impropre)

Soit f une fonction **positive et décroissante** *sur $[a, +\infty[$, alors la série $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature. Et si elles convergent, pour tout $n > a$,*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

Exemple ($\sum \frac{1}{n}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ divergentes)



Si f est décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$, en posant $n_0 = E(a) + 1$, on a pour $n \geq n_0$,

$\forall t \in [n, n+1], \qquad u_{n+1} = f(n+1) \leq f(t) \leq u_n = f(n)$

puis en intégrant (monotone bornée donc intégrable) de n à $n+1$: $u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq u_n$

En sommant ces encadrements ($n = n_0$ à N)

$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$

Si f est décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$, en posant $n_0 = E(a) + 1$, on a pour $n \geq n_0$,

$$\forall t \in [n, n+1], \qquad u_{n+1} = f(n+1) \leq f(t) \leq u_n = f(n)$$

puis en intégrant (monotone bornée donc intégrable) de n à $n+1$: $u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq u_n$

En sommant ces encadrements ($n = n_0$ à N)

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

Si f est décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$, en posant $n_0 = E(a) + 1$, on a pour $n \geq n_0$,

$\forall t \in [n, n+1], \qquad u_{n+1} = f(n+1) \leq f(t) \leq u_n = f(n)$

puis en intégrant (monotone bornée donc intégrable) de n à $n+1$: $u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq u_n$

En sommant ces encadrements ($n = n_0$ à N)

$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$

Si f est décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$, en posant $n_0 = E(a) + 1$, on a pour $n \geq n_0$,
$\forall t \in [n, n+1], \qquad u_{n+1} = f(n+1) \leq f(t) \leq u_n = f(n)$
puis en intégrant (monotone bornée donc intégrable) de n à $n+1$: $u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq u_n$
En sommant ces encadrements ($n = n_0$ à N)
$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

1er cas : Si la série $\sum u_n$ converge, $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ est donc majorée alors si $F(N+1) = \int_{n_0}^{N+1} f(t)dt$, la suite (F(N)) est donc majorée.

Comme $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)dt$ est une fonction croissante, en prenant $N = E(x) + 1$, on a $F(x) \leq F(N)$ et donc F(x) est majorée.

La fonction F admet donc une limite en $+\infty$ ie $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

1er cas : Si la série $\sum u_n$ converge, $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ est donc majorée alors si $F(N+1) = \int_{n_0}^{N+1} f(t)dt$, la suite (F(N)) est donc majorée.

Comme $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)dt$ est une fonction croissante, en prenant $N = E(x) + 1$, on a $F(x) \leq F(N)$ et donc F(x) est majorée.

La fonction F admet donc une limite en $+\infty$ ie $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

1er cas : Si la série $\sum u_n$ converge, $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ est donc majorée alors si $F(N+1) = \int_{n_0}^{N+1} f(t)dt$, la suite (F(N)) est donc majorée.

Comme $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)dt$ est une fonction croissante, en prenant $N = E(x) + 1$, on a $F(x) \leq F(N)$ et donc F(x) est majorée.

La fonction F admet donc une limite en $+\infty$ ie $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ converge.

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

2nd cas: Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est converge, ($\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ aussi), comme f est positive, on a: $\int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$. De cela et de la somme des encadrements précédents, on tire $\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$
La suite des sommes partielles de u_n qui est croissante est donc majorée et par conséquent convergente
ie la série $\sum f(n)$ est convergente.

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

2nd cas: Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est converge, ($\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ aussi), comme f est positive, on a:
$\int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$. De cela et de la somme des encadrements précédents, on tire
$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$
La suite des sommes partielles de u_n qui est croissante est donc majorée et par conséquent convergente
ie la série $\sum f(n)$ est convergente.

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

2nd cas: Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est converge, ($\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ aussi), comme f est positive, on a:
$\int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$. De cela et de la somme des encadrements précédents, on tire
$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$
La suite des sommes partielles de u_n qui est croissante est donc majorée et par conséquent convergente
ie la série $\sum f(n)$ est convergente.

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

2nd cas: Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est converge, ($\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ aussi), comme f est positive, on a:
$\int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$. De cela et de la somme des encadrements précédents, on tire
$\sum_{n=n_0}^{N} u_{n+1} \leq \int_{n_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$
La suite des sommes partielles de u_n qui est croissante est donc majorée et par conséquent convergente
ie la série $\sum f(n)$ est convergente.

Théorème

Soit f une fonction **positive localement intégrable** *sur $[a, +\infty[$. Pour que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ soit convergente, il faut et il suffit que pour toute suite (x_n) qui tend vers $+\infty$, la suite $F(x_n)$ définie par $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)\,dt$ soit convergente. On a alors*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{x_n} f(t)\,dt$$

Théorème

Soit f une fonction **positive localement intégrable** *sur $[a, +\infty[$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, si et seulement si pour toute suite (x_n) qui tend vers vers $+\infty$, la série de terme général $u_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,dt$ est convergente.*

Ce théorème permet de montrer la divergence d'une intégrale et la convergence ou divergence d'une série.