Optimisation d'une fonction d'une variable

1ère année

E.N.S.T.B.B.
I.P.B.

Année Universitaire 2015-16

Plan

Plan

Bordeaux INP
ENSTBB

On s'intéresse ici à la recherche de minimum ou maximum d'une fonction réelle $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lorsque l'on cherche x vérifiant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in I \end{cases}$$

on dit que l'on a un problème d'optimisation. La fonction f est souvent appelée fonction objectif.

On s'intéresse ici à la recherche de minimum ou maximum d'une fonction réelle $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lorsque l'on cherche x vérifiant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in I \end{cases}$$

on dit que l'on a un problème d'optimisation. La fonction f est souvent appelée fonction objectif.

Bordeaux INP
ENSTBB

On s'intéresse ici à la recherche de minimum ou maximum d'une fonction réelle $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lorsque l'on cherche x vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in I \end{array} \right.$$

on dit que l'on a un problème d'optimisation. La fonction f est souvent appelée fonction objectif.

Bordeaux INP
ENSTBB

On s'intéresse ici à la recherche de minimum ou maximum d'une fonction réelle $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Lorsque l'on cherche x vérifiant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in I \end{cases}$$

on dit que l'on a un problème d'optimisation. La fonction f est souvent appelée fonction objectif.

Plan

Bordeaux INP
ENSTBB

minimum global et local

Définition

Soit f une fonction définie sur I et $x^* \in I$.

- *On dit que f admet un minimum (resp. maximum) global sur I au point x^*, si*

$$\forall x \in I \quad f(x^*) \leq f(x).$$

(resp: $f(x^*) \geq f(x)$)

- *On dit que f admet un minimum (resp. maximum) local au point x^*, s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x^* tel que*

$$\forall x \in J \quad f(x^*) \leq f(x).$$

(resp: $f(x^*) \geq f(x)$)

minimum global et local

Définition

Soit f une fonction définie sur I et $x^* \in I$.

- *On dit que f admet un extremum en x^* si et seulement si f admet un maximum ou un minimum en x^*.*
- *Si les inégalités des définitions précédentes sont strictes, on parle d'extremum (min ou max) strict.*

Remarque

Un extremum global est un extremum local.

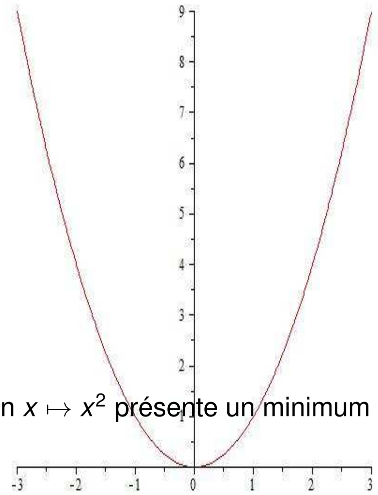

Figure: la fonction $x \mapsto x^2$ présente un minimum global strict en 0.

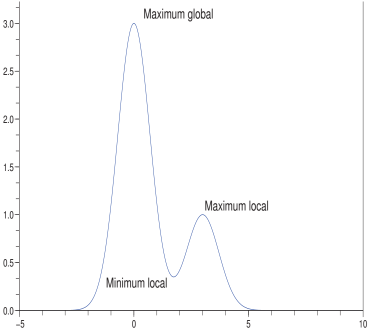

Figure: fonction présentant des maximums stricts locaux et globaux, un minimum local et des minima globaux non stricts sur $[-5; 10]$

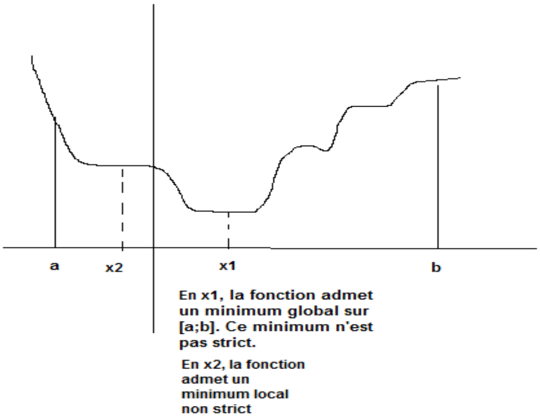

Figure: fonction présentant des extrema non stricts.

Plan

Bordeaux INP
ENSTBB

Plan

théorème de Weierstrass

L'existence d'extrema n'est pas garantie pour toute fonction. Mais sur un intervalle fermé borné...

Théorème

Soient f une fonction définie sur un intervalle fermé borné $I = [a; b]$. Si f est continue, alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes, autrement dit f admet un minimum et un maximum global sur I. A priori, ces extrema ne sont pas uniques (peuvent être atteints plusieurs fois sur I).

Existence

Si la recherche d'un minimum ne se limite pas à un intervalle fermé borné, on a aussi le résultat suivant:

Définition

Une fonction f est dite coercive sur $\mathbb{R}$ si « elle tend vers l'infini à l'infini »

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

ou coercive sur un intervalle ouvert $]a; b[$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to b} f(x) = +\infty$$

Soit Ω un intervalle ouvert.

Théorème

Toute fonction continue et coercive sur Ω atteint son minimum sur Ω.

Plan

1. Introduction
2. Définition: minimum, maximum
3. Propriétés
   - Existence: Théorème de Weierstrass
   - Condition d'optimalité du1er ordre
   - Condition d'optimalité du second ordre
4. Convexité
   - Définition et propriétés d'une fonction convexe

Bordeaux INP
ENSTBB

Condition d'optimalité du 1er ordre

Théorème

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et si f admet en un point x^* de I un extremum alors

$$f'(x^*) = 0.$$

Remarque

- *La réciproque de ce théorème est fausse (la fonction* $x \mapsto x^3$ *admet une dérivée nulle en* 0 *mais ce n'est pas un extremum).*
- *Si* $f'(x^*) = 0$*, on dit que* x^* *est un point critique de* f*. Les extrema sur l'ouvert* I *sont à chercher parmi les points critiques.*
- *Si on cherche un extremum sur un intervalle fermé* $[a, b]$*, on fera l'étude sur* $]a; b[$ *ouvert puis on comparera à* $f(a)$ *et* $f(b)$*.*

ENSTBB

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2$. Sur $\mathbb{R}$ cette fonction présente un minimum en $x = 0$, point où elle est dérivable de dérivée nulle. Elle n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

En revanche, si on s'intéresse à f sur $I = [-1; 1]$. D'après le théorème de W, la fonction admet un min et un max sur I. On étudie les extrema sur $]-1; 1[$ puis on calcule $f(-1)$ et $f(1)$. Le minimum est atteint en $x = 0$ et vaut 0. Le maximum qui vaut 1 est atteint en deux points $x = -1$ et $x = -1$.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2$. *Sur* $\mathbb{R}$ *cette fonction présente un minimum en* $x = 0$, *point où elle est dérivable de dérivée nulle. Elle n'admet pas de maximum sur* $\mathbb{R}$.
En revanche, si on s'intéresse à f *sur* $I = [-1;1]$. *D'après le théorème de W, la fonction admet un min et un max sur* I. *On étudie les extrema sur* $]-1;1[$ *puis on calcule* $f(-1)$ *et* $f(1)$. *Le minimum est atteint en* $x = 0$ *et vaut* 0. *Le maximum qui vaut* 1 *est atteint en deux points* $x = -1$ *et* $x = -1$.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2$. *Sur* $\mathbb{R}$ *cette fonction présente un minimum en* $x = 0$, *point où elle est dérivable de dérivée nulle. Elle n'admet pas de maximum sur* $\mathbb{R}$.
En revanche, si on s'intéresse à f *sur* $I = [-1; 1]$. *D'après le théorème de W, la fonction admet un min et un max sur* I. *On étudie les extrema sur* $]-1; 1[$ *puis on calcule* $f(-1)$ *et* $f(1)$. *Le minimum est atteint en* $x = 0$ *et vaut* 0. *Le maximum qui vaut* 1 *est atteint en deux points* $x = -1$ *et* $x = -1$.

Exemple

Soit la fonction $f(x) = x^2$. *Sur* $\mathbb{R}$ *cette fonction présente un minimum en* $x = 0$*, point où elle est dérivable de dérivée nulle. Elle n'admet pas de maximum sur* $\mathbb{R}$.
En revanche, si on s'intéresse à f *sur* $I = [-1;1]$. *D'après le théorème de W, la fonction admet un min et un max sur* I. *On étudie les extrema sur* $]-1;1[$ *puis on calcule* $f(-1)$ *et* $f(1)$. *Le minimum est atteint en* $x = 0$ *et vaut* 0. *Le maximum qui vaut* 1 *est atteint en deux points* $x = -1$ *et* $x = -1$.

Exemple

On peut aussi s'interesser à l'optimum d'une fonction non partout dérivable.
Soit la fonction $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$. *Cette fonction présente un maximum local en* $x = 0$, *point où elle est dérivable de dérivée nulle et un minima qui vaut* 0 *en deux points* $x = -1$ *et* $x = 1$.
En -1 *et* 1, *elle n'est pas dérivable.*
De plus, en $x = 0$, *le maximum est local car* f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers l'infini. En plusieurs dimensions, les choses seront au moins aussi délicates...on se contentera de l'étude de fonctions dérivables.*

Exemple

On peut aussi s'interesser à l'optimum d'une fonction non partout dérivable.

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$*. Cette fonction présente un maximum local en* $x = 0$*, point où elle est dérivable de dérivée nulle et un minima qui vaut* 0 *en deux points* $x = -1$ *et* $x = 1$*. En* -1 *et* 1*, elle n'est pas dérivable.*

De plus, en $x = 0$*, le maximum est local car* f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers l'infini. En plusieurs dimensions, les choses seront au moins aussi délicates...on se contentera de l'étude de fonctions dérivables.*

Exemple

On peut aussi s'interesser à l'optimum d'une fonction non partout dérivable.
Soit la fonction $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$*. Cette fonction présente un maximum local en* $x = 0$*, point où elle est dérivable de dérivée nulle et un minima qui vaut* 0 *en deux points* $x = -1$ *et* $x = 1$*.*
En -1 *et* 1*, elle n'est pas dérivable.*
De plus, en $x = 0$*, le maximum est local car* f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers l'infini. En plusieurs dimensions, les choses seront au moins aussi délicates...on se contentera de l'étude de fonctions dérivables.*

Exemple

On peut aussi s'interesser à l'optimum d'une fonction non partout dérivable.
Soit la fonction $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$. *Cette fonction présente un maximum local en* $x = 0$, *point où elle est dérivable de dérivée nulle et un minima qui vaut* 0 *en deux points* $x = -1$ *et* $x = 1$.
En -1 *et* 1, *elle n'est pas dérivable.*
De plus, en $x = 0$, *le maximum est local car* f *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers l'infini. En plusieurs dimensions, les choses seront au moins aussi délicates...on se contentera de l'étude de fonctions dérivables.*

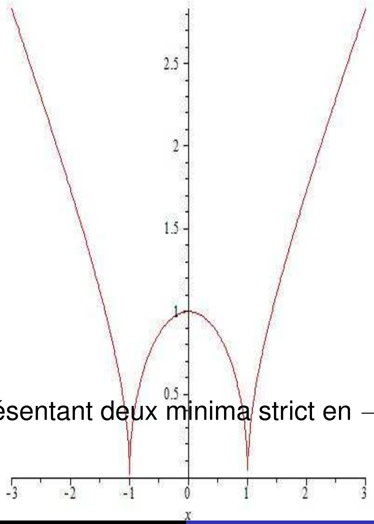

Figure: fonction présentant deux minima strict en -1 et en 1 sans être dérivable.

Plan

Bordeaux INP
ENSTBB

Condition d'optimalité du second ordre

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $x^* \in I$ un point critique de f. Alors :

- *Si $f''(x^*) > 0$, f présente en x^* un minimum local strict.*
- *Si $f''(x^*) < 0$, f présente en x^* un maximum local strict.*
- *Si $f''(x^*) = 0$, on ne peut rien dire.*

Bordeaux INP
ENSTBB

Plan

Plan

Bordeaux INP
ENSTBB

fonction convexe

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- *La fonction f est dite convexe sur I si*

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall \lambda \in [0; 1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

- *f est dite strictement convexe si l'inégalité stricte est toujours vérifiée pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0; 1[$.*
- *Elle est dite (resp. strictement) concave si $-f$ est (resp. strictement) convexe.*

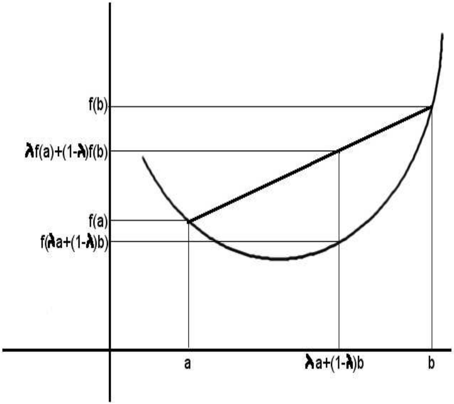

Figure: Fonction strictement convexe.

fonction convexe: interprétation graphique

Remarque

Si f est convexe sur un intervalle I alors pour tous points $A(x, f(x))$ et $B(y, f(y))$ de la courbe représentative de f, le segment $[AB]$ est au-dessus de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe de f.

Exemple

La fonctions $x \mapsto |x|$ est convexe, $x \mapsto x^2$ est strictement convexe.

ENSTBB

Convexité et dérivée seconde

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors :

- *f est convexe sur $I \iff \forall x \in I$ $f''(x) \geq 0$.*
- *f est concave sur $I \iff \forall x \in I$ $f''(x) \leq 0$.*
- *La fonction f est strictement convexe sur $I \iff \forall x \in I$ $f''(x) \geq 0$ et si l'ensemble $\{x \in I; \quad f''(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide. En particulier si $\forall x \in I$ $f''(x) > 0$ alors f est strictement convexe.*

Convexité et extremum

Théorème

Soit f une fonction convexe (resp. concave) sur intervalle ouvert I. Si x^* est un point critique pour f, alors f admet en x^* un minimum (resp. maximum) global sur I. Si la fonction est strictement convexe, le minimum est strict (et unique).

Bordeaux INP
ENSTBB