Calcul matriciel: les bases

1ère année

ENSTBB
Bordeaux INP

Année Universitaire 2015-16

Plan

Définition

On appelle A matrice à n lignes et p colonnes : np éléments réels (ou éventuellement complexes).

On peut la noter :

$A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}\times\{1,\cdots,p\}} = (a_{ij})$.

Les éléments a_{ij} sont appelés les **coefficients** *de la matrice.*

Le premier indice est celui de la **ligne** *et le second celui de la* **colonne**.

Les éléments a_{ii} sont appelés les **coefficients diagonaux**.

Définition

On appelle A matrice à n lignes et p colonnes : np éléments réels (ou éventuellement complexes).

On peut la noter :

$A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}\times\{1,\cdots,p\}} = (a_{ij})$.

Les éléments a_{ij} sont appelés les **coefficients** *de la matrice.*

Le premier indice est celui de la **ligne** *et le second celui de la* **colonne**.

Les éléments a_{ii} sont appelés les **coefficients diagonaux**.

Définition

On appelle A matrice à n lignes et p colonnes : np éléments réels (ou éventuellement complexes).

On peut la noter :

$A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}\times\{1,\cdots,p\}} = (a_{ij})$.

Les éléments a_{ij} sont appelés les **coefficients** *de la matrice.*

Le premier indice est celui de la **ligne** *et le second celui de la* **colonne**.

Les éléments a_{ii} sont appelés les **coefficients diagonaux**.

On représente A sous forme de tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Exemple

Les objets suivants sont des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -4 & 1 \\ -4.1 & 0 & e \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} cos(x) & 1 \\ sin(x) & 2 \\ e^x & x^2 \end{pmatrix}$$

Notation: L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lorsque $n = p$.

Définition

- *Une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes $n = p$ est dite* **carrée** *(on dit aussi d'ordre n).*
- *Une matrice à une ligne $n = 1$ s'appelle une matrice-ligne.*
- *Une matrice à une colonne $p = 1$ s'appelle matrice colonne.*

Bordeaux INP
ENSTBB

Notation: L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lorsque $n = p$.

Définition

- *Une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes $n = p$ est dite* **carrée** *(on dit aussi d'ordre n).*
- *Une matrice à une ligne $n = 1$ s'appelle une matrice-ligne.*
- *Une matrice à une colonne $p = 1$ s'appelle matrice colonne.*

Bordeaux INP
ENSTBB

Notation: L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lorsque $n = p$.

Définition

- *Une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes $n = p$ est dite* **carrée** *(on dit aussi d'ordre n).*
- *Une matrice à une ligne $n = 1$ s'appelle une matrice-ligne.*
- *Une matrice à une colonne $p = 1$ s'appelle matrice colonne.*

Bordeaux INP
ENSTBB

Notation: L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lorsque $n = p$.

Définition

- *Une matrice qui a le même nombre de lignes et de colonnes $n = p$ est dite* **carrée** *(on dit aussi d'ordre n).*
- *Une matrice à une ligne $n = 1$ s'appelle une matrice-ligne.*
- *Une matrice à une colonne $p = 1$ s'appelle matrice colonne.*

Définition

Une matrice A est dite **diagonale** *si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.*

Exemple

Matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

Une matrice A est dite **diagonale** *si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.*

Exemple

Matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

On appelle **matrice identité** *notée I_n la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux sont égaux à un.*

Exemple

Matrice Identité d'ordre 3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

On appelle **matrice identité** *notée I_n la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux sont égaux à un.*

Exemple

Matrice Identité d'ordre 3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

On appelle **matrice identité** *notée I_n la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux sont égaux à un.*

Exemple

Matrice Identité d'ordre 3

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

Une matrice A est **triangulaire inférieure** *si* $a_{ij} = 0$ *pour* $i < j$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

Une matrice A est **triangulaire inférieure** *si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.*

Exemple

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

Une matrice A est **triangulaire supérieure** *si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.*

Exemple

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

Une matrice A est **triangulaire supérieure** *si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.*

Exemple

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition

On appelle transposée de A, la matrice $B = {}^t A$ définie par

$$\forall (i,j) \;\; b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

On appelle transposée de A, la matrice $B = {}^t A$ définie par

$$\forall (i,j) \;\; b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

Définition

Une matrice A est **symétrique** *si $A = {}^t A$ c'est-à-dire* $\forall (i,j) \;\; a_{ij} = a_{ji}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Définition

Une matrice A est **symétrique** *si $A = {}^t A$ c'est-à-dire*
$\forall (i,j) \;\; a_{ij} = a_{ji}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Plan

Définition (Somme de deux matrices)

Si A et B sont de **mêmes** *dimensions alors $C = A + B$*

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & \cdots & a_{ij}+b_{ij} & \cdots & a_{ip}+b_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}$$

L'addition est commutative $A + B = B + A$

Plan

Bordeaux INP ENSTBB

Définition (Produit d'une matrice A par un réel λ)

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2j} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij} & \cdots & \lambda a_{ip} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP ENSTBB

Plan

Définition (Produit d'une matrice-ligne à n colonnes par une matrice-colonne à n lignes: produit scalaire)

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i b_i$$

Plan

Définition (Produit d'une matrice A n lignes et p colonnes par une matrice B p lignes et q colonnes)

$$A \times B = AB = C$$

où C est une matrice n lignes et q colonnes avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Remarque

$$AB \neq BA$$

Définition (Produit d'une matrice A n lignes et p colonnes par une matrice B p lignes et q colonnes)

$$A \times B = AB = C$$

où C est une matrice n lignes et q colonnes avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Remarque

$$AB \neq BA$$

Définition (Produit d'une matrice A n lignes et p colonnes par une matrice B p lignes et q colonnes)

$$A \times B = AB = C$$

où C est une matrice n lignes et q colonnes avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Remarque

$$AB \neq BA$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 11 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas égal à

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 11 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas égal à

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP ENSTBB

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 11 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas égal à

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\ 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas égal à

$$BA = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\ 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas égal à

$$BA = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\ 0 \end{pmatrix} \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui n’est pas égal à

$$BA = \begin{pmatrix} 7 \end{pmatrix}$$

Proposition

Le produit matriciel est :

- *associatif :* $ABC = (AB)C = A(BC)$
- *distributif par rapport à l'addition :* $A(B + C) = AB + AC$
- *non commutatif : AB n'est pas égal à BA en général.*
- *La matrice Identité vérifie : si la matrice A est de dimensions (n, m) alors* $AI_m = I_nA = A$

Proposition

Le produit matriciel est :

- *associatif :* $ABC = (AB)C = A(BC)$
- *distributif par rapport à l'addition :* $A(B + C) = AB + AC$
- *non commutatif :* AB *n'est pas égal à* BA *en général.*
- *La matrice Identité vérifie : si la matrice* A *est de dimensions (n, m) alors* $AI_m = I_nA = A$

Proposition

Le produit matriciel est :

- *associatif :* $ABC = (AB)C = A(BC)$
- *distributif par rapport à l'addition :* $A(B + C) = AB + AC$
- *non commutatif : AB n'est pas égal à BA en général.*
- *La matrice Identité vérifie : si la matrice A est de dimensions (n, m) alors* $AI_m = I_nA = A$

Proposition

Le produit matriciel est :

- *associatif :* $ABC = (AB)C = A(BC)$
- *distributif par rapport à l'addition :* $A(B + C) = AB + AC$
- *non commutatif :* AB *n'est pas égal à* BA *en général.*
- *La matrice Identité vérifie : si la matrice* A *est de dimensions* (n, m) *alors* $AI_m = I_nA = A$

Bordeaux INP
ENSTBB

Proposition

Le produit matriciel est :

- *associatif :* $ABC = (AB)C = A(BC)$
- *distributif par rapport à l'addition :* $A(B + C) = AB + AC$
- *non commutatif : AB n'est pas égal à BA en général.*
- *La matrice Identité vérifie : si la matrice A est de dimensions (n, m) alors* $AI_m = I_nA = A$

Définition

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{\backslash}(\mathbb{R})$, on pose $A^0 = I_n$
et si $k \in N$, on note $A^k = A \times A^{k-1} = A^{k-1} \times A$.

Proposition

- $$^t(^tA) = A \qquad ^t(\lambda A) = \lambda\, ^tA$$

- $$^t(A+B) =^t A +^t B \qquad ^t(AC) =^t C\, ^tA$$

Définition

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_\backslash(\mathbb{R})$, on pose $A^0 = I_n$ et si $k \in N$, on note $A^k = A \times A^{k-1} = A^{k-1} \times A$.

Proposition

- $$^t(^tA) = A \qquad ^t(\lambda A) = \lambda\, ^tA$$
- $$^t(A+B) = ^t A + ^t B \qquad ^t(AC) = ^t C\, ^tA$$

Définition

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_\backslash(\mathbb{R})$*, on pose* $A^0 = I_n$
et si $k \in N$*, on note* $A^k = A \times A^{k-1} = A^{k-1} \times A$*.*

Proposition

- $$^t(^tA) = A \qquad ^t(\lambda A) = \lambda\, ^tA$$
- $$^t(A+B) = ^t A + ^t B \qquad ^t(AC) = ^t C\, ^tA$$

A quoi sert une matrice ? à représenter un systéme linéaire

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle $Au = b$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

A quoi sert une matrice ? à représenter un systéme linéaire

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

peut s'écrire sous forme matricielle $Au = b$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bordeaux INP
ENSTBB

A quoi sert une matrice ? à représenter un systéme linéaire

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \end{array}\right.$$

peut s'écrire sous forme matricielle $Au = b$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lorsque nous étudierons les fonctions de plusieurs variables nous définirons les matrice Jacobienne et matrice Hessienne de fonctions.
D'autre part, en mathématiques appliquées (calcul numérique), les matrices jouent un grand rôle.
Pour résumer: beaucoup de problèmes en sciences (en physique, en biologie, en économie,...) sont tout d'abord modélisés à l'aide d'opérateurs par exemple $\Delta f(x,t) + \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = \alpha(x,t)$. Bien souvent on ne sait pas résoudre (de façon explicite) les équations obtenues. On ne peut pas trouver une fonction $f(x,t) = \ldots$.

Bordeaux INP
ENSTBB

On passe alors par une étape de discrétisation qui consiste à transformer le problème initial (continue comme une fonction f) en un problème plus simple (discret comme une suite u_n) souvent linéaire donc qui s'écrit à l'aide de matrices:

$$Au = b$$

On ne résout pas le problème par un calcul de l'inverse comme on le ferait à la main. Les matrices peuvent être très grandes et les calculs doivent être suffisamment rapides. Le calcul numérique consiste à développer des méthodes pour résoudre rapidement ces problèmes approchés (en contrôlant l'erreur commise par rapport au problème initial).

Bordeaux INP
ENSTBB