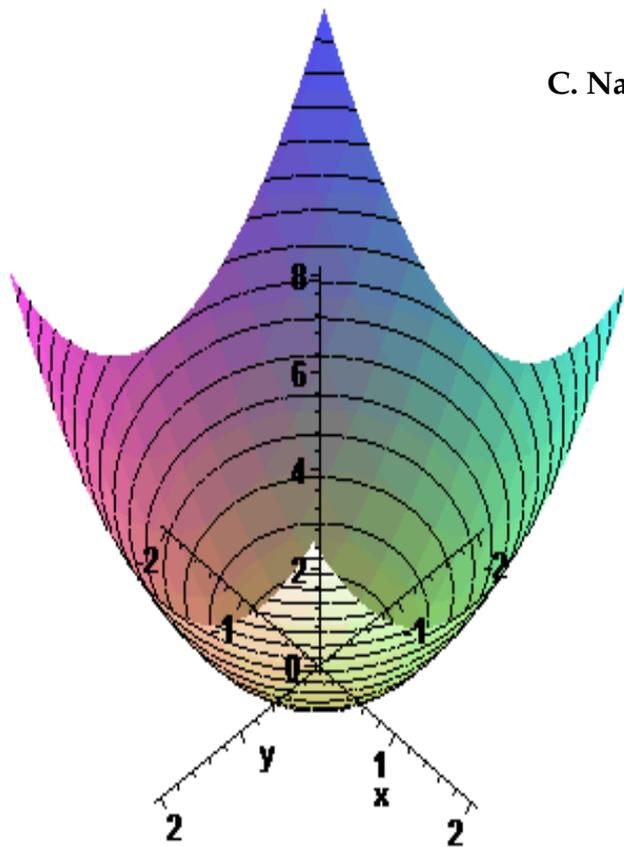




Mathématiques et Modélisation

Cours de 1ère année

C. Nazaret



Année Universitaire 2016/2017

Table des matières

1	Calcul d'intégrales : rappels	5
1.1	Intégrales de Riemann	5
1.2	Procédés généraux d'intégration	6
1.2.1	Reconnaître une dérivée	6
1.2.2	Intégrer par parties	6
1.2.3	Changer de variable	6
1.2.4	Intégrer des fractions rationnelles	7
2	Equations différentielles : rappels	9
2.1	Equations du premier ordre	9
2.1.1	Equations à variables séparées	9
2.1.2	Equations linéaires	9
2.1.3	Equations se ramenant à des équations linéaires	11
2.2	Equations du second ordre à coefficients constants	11
3	Calcul matriciel : rappels.	13
3.1	Définition des matrices sur \mathbb{R}	13
3.2	Opération sur les matrices	13
3.3	Matrices associées à une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$	14
3.4	Quelques matrices particulières de $M_{(n)}(\mathbb{R})$	14
3.5	Rang et noyau d'une matrice	15
3.6	Déterminant et rang d'une matrice carrée	16
3.7	Inverse d'une matrice carrée	17
3.7.1	Définitions et théorèmes	17
3.7.2	Méthodes de calcul de l'inverse	18
4	Fonctions de plusieurs variables	21
4.1	Introduction	21
4.2	Domaine de définition, représentation graphique	21
4.3	Normes	22
4.4	Continuité	22
4.5	Dérivabilité	24
4.5.1	Dérivée partielle	24
4.5.2	Dérivée	27
4.5.3	Application au calcul d'erreurs	29
4.5.4	Dérivées des fonctions composées : cas particuliers	29
4.5.5	Résolution d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP)	29
4.5.6	Dérivée seconde	30
4.6	Quelques opérateurs classiques	30
4.7	Fonctions implicites	31

5	Introduction à l'optimisation	33
5.1	Eléments de topologie et d'analyse convexe	33
5.1.1	Eléments de topologie : ouverts et fermés de \mathbb{R}^n	33
5.1.2	Eléments d'analyse convexe	33
5.2	Optimisation sans contrainte	34
5.2.1	Existence d'un minimum	34
5.2.2	Condition nécessaire d'optimalité locale	35
5.2.3	Conditions suffisantes d'optimalité locale	36
5.2.4	Cas des fonctions convexes : CNS d'optimalité globale	36
5.3	Optimisation avec contraintes	36
5.3.1	existence	36
5.3.2	Détermination du minimum : Multiplicateurs de Lagrange	37
6	Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation.	39
6.1	Valeurs propres, vecteurs propres	39
6.1.1	Définitions	39
6.1.2	Exemples	39
6.2	Diagonalisation	40
6.2.1	Définitions et théorèmes	40
6.2.2	Méthode pratique de diagonalisation	40
6.2.3	Application	40
7	Intégrale généralisée (extension de la notion d'intégrale) : rappels	43
7.1	Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$	43
7.2	Intégrale d'une fonction qui devient infinie pour une des bornes d'intégration	44
7.3	Propriétés	44
7.3.1	Relation de Chasles	45
7.3.2	Linéarité de l'intégrale	45
7.3.3	Etude de la convergence	45
7.4	Techniques de calcul	46
7.4.1	Intégrer par parties	46
7.4.2	Changer de variable	46
8	Transformation de Fourier	47
8.1	Introduction : décomposition en série de Fourier	47
8.2	Définitions et propriétés	48
8.3	Exemples de transformées de Fourier	50

Chapitre 1

Calcul d'intégrales : rappels

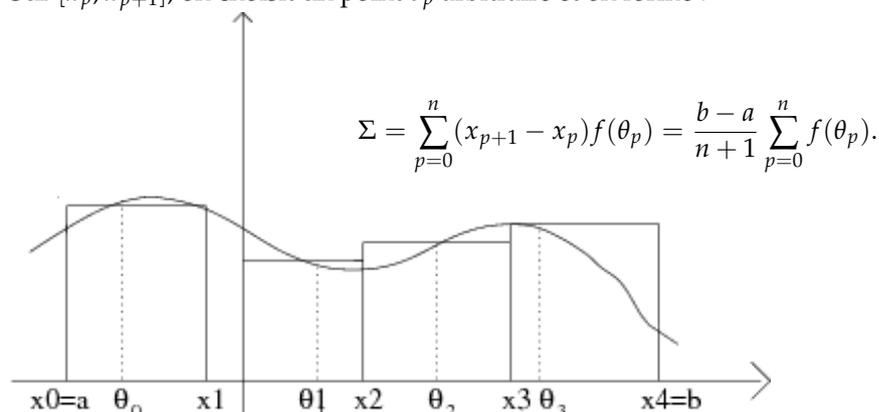
Le but de ces pages n'est pas de faire un cours exhaustif sur le calcul intégral mais de rappeler quelques principes fondamentaux dont nous aurons besoin par la suite.

1.1 Intégrales de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b]$, avec $a < b$, et soit une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n < b = x_{n+1} \quad x_{p+1} - x_p = \frac{b-a}{n+1}.$$

Sur $[x_p, x_{p+1}]$, on choisit un point θ_p arbitraire et on forme :



Définition 1.1.1. On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si Σ tend vers une limite finie I , quelque soit le choix des θ_p lorsque le nombre des x_p tend vers ∞ . Alors on note

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

Théorème 1.1.1.

- Si f est monotone bornée sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.
- Si f une fonction continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Définition 1.1.2. Soient F et f deux fonctions définies sur une partie I de \mathbb{R} . On dit que F est une primitive de f si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

Proposition 1.1.1. Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si C est une constante alors $F + C$ est une primitive de f sur I . Réciproquement, toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + C$ où C est une constante.

1.2 Procédés généraux d'intégration

1.2.1 Reconnaître une dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Si F est une primitive quelconque sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

Exemple :

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{e^t + 1} dt = \ln 3.$$

Tableau de primitives

fonction	dérivée
$u^n(x)$	$nu^{n-1}u'$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\cot u$	$-u'(1 + \cot^2 u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\exp u$	$u' \exp u$
$\ln u $	$\frac{u'}{u}$
$\cosh u$	$u' \sinh u$
$\sinh u$	$u' \cosh u$
$\tanh u$	$u'(1 - \tanh^2 u) = \frac{u'}{\cosh^2 u}$

1.2.2 Intégrer par parties

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ et telles que $f'g$ et fg' soient continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exemple :

$$\int_1^2 \ln(t)dt = [t \ln(t)]_1^2 - \int_1^2 dt = 2 \ln(2) - 1.$$

1.2.3 Changer de variable

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt.$$

ou si φ est bijective

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Exemples :

1. Pour calculer $I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$, on peut poser $t = \tan(u) = \varphi(u)$, φ étant de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$. On a alors $\varphi'(u) = 1 + \tan^2 u$, $f(t) = \frac{dt}{(1+t^2)^2}$. D'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \tan^2 u}{(1 + \tan^2 u)^2} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi + 2}{8}$$

2. Pour calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin^2 t dt$, on peut faire le changement de variable $u = \sin t$ en écrivant

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) \sin^2 t \cos t dt = \int_0^1 u^2(1 - u^2) du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15}.$$

3. Si on fait le changement de variable $u = \varphi(t)$, alors l'élément différentiel du est transformé en $\varphi'(t)dt$ et il faut faire attention aux changements de bornes.

1.2.4 Intégrer des fractions rationnelles

On veut intégrer la fraction

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples. Une décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} fait intervenir trois types d'éléments :

1er type : la partie entière C'est un polynôme dont on connaît les primitives.

2ème type : les éléments simples de 1ère espèce Ce sont des fractions de la forme : $\frac{a}{(x - \alpha)^n}$. Or

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n} = \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)} \frac{1}{(x - \alpha)^{n-1}} + C & \text{si } n \neq 1 \\ \ln|x - \alpha| + C & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

3ème type : les éléments simples de seconde espèce Ce sont des fractions de la forme $\frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n}$ avec $p^2 - 4q < 0$.

Exemple :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt.$$

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}.$$

On intègre

$$I = [\ln|t+1| - \ln|t+2|]_1^2 = 2 \ln 3 - 3 \ln 2.$$

Chapitre 2

Equations différentielles : rappels

On rappelle ici quelques types classiques d'équations différentielles du premier ordre et du second ordre pour lesquelles on sait ramener le calcul des solutions à des calculs de primitives.

2.1 Equations du premier ordre

2.1.1 Equations à variables séparées

a) Equations du type $y'(t) = f(t)$ où $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Les solutions sont données par $y(t) = F(t) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où F est une primitive de f sur I .

b) Equations du type $y'(t) = g(y)$ où $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

-Notons y_j les racines de $g(y) = 0$ dans l'intervalle J . Alors $y(t) = y_j$ est une solution évidente de l'équation.

-Dans $\{(t, y); g(y) \neq 0\}$, on a

$$y'(t) = g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = dt.$$

Les solutions sont données par $G(y) = t + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où G est une primitive de $1/g$ sur chaque ouvert $]y_j; y_{j+1}[$. Comme $G' = 1/g$ et que g est de signe constant sur $]y_j; y_{j+1}[$ (car g est continue et ne s'annule pas), on en déduit que G est une application continue strictement monotone sur $]y_j; y_{j+1}[$. Par conséquent G étant bijective sur cet intervalle, on peut exprimer y en fonction de t :

$$y(t) = G^{-1}(t + \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Cas général des équations à variables séparées $y'(t) = f(t)g(y)$ où f et g sont continues.

-Si $g(y_j) = 0$, alors la fonction constante $y(t) = y_j$ est une solution évidente de l'équation.

-Dans $\{(t, y); g(y) \neq 0\}$, on a

$$y'(t) = f(t)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(t)dt.$$

Les solutions sont données par $G(y) = F(t) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et F (resp. G) est une primitive de f (resp. $1/g$). Comme G est une application strictement monotone sur $]y_j; y_{j+1}[$, on obtient

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2.1.2 Equations linéaires

Ce sont les équations de la forme

$$(E) : y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

où $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière y_1 de (E), alors par soustraction on obtient :

$$y'(t) - y_1'(t) = a(t)(y(t) - y_1(t))$$

c'est-à-dire que $z(t) = y(t) - y_1(t)$ vérifie l'équation sans second membre

$$(E0) : z'(t) = a(t)z(t).$$

Inversement, si z est solution de $(E0)$, alors $y = z + y_1$ est solution de (E) .

Théorème 2.1.1. *La solution générale de (E) s'écrit $y = y_1 + z$ où y_1 est une solution particulière de (E) et où z est la solution générale de $(E0)$.*

a) Solutions de $(E0)$

Comme $f(t, z) = a(t)z$ est continue, de dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial z}(t, z) = a(t)$ continue, on sait que le problème de Cauchy admet une unique solution en tout point (t_0, z_0) . Comme $z(t) = 0$ est solution de $(E0)$, aucune autre solution ne peut s'annuler en un point quelconque de I . On peut donc écrire

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = a(t) \Leftrightarrow \ln |z(t)| = A(t) + C$$

où A est une primitive a et $C \in \mathbb{R}$. On en déduit

$$|z(t)| = e^C \exp(A(t)).$$

Comme z est continue et ne s'annule pas, son signe est constant. On a donc

$$z(t) = \lambda \exp(A(t)) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Inversement, les fonctions définies par $z(t) = \lambda \exp(A(t))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sont solutions de $(E0)$.

Théorème 2.1.2. *Les solutions maximales de $(E0)$ sont de la forme $z(t) = \lambda \exp(A(t))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$*

b) Recherche d'une solution particulière de (E)

On peut utiliser la méthode dite de variation de la constante, c'est-à-dire que l'on cherche y_1 sous la forme

$$y_1(t) = \lambda(t) \exp(A(t)) \quad \text{où } \lambda \text{ est dérivable.}$$

En dérivant, on obtient

$$y_1'(t) = \lambda'(t) \exp(A(t)) + \lambda(t)a(t) \exp(A(t))$$

donc y_1 est solution de (E) , si l'on prend

$$\lambda'(t) \exp(A(t)) = b(t)$$

soit

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^t b(s) \exp(-A(s)) ds.$$

Exemple 2.1.1. *Pour résoudre l'équation différentielle du 1er ordre à coefficients non constants suivante*

$$xy'(x) + 2y(x) = \sin(x) \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi} \quad x > 0$$

on commence par résoudre l'équation homogène (ou sans second membre) à savoir

— Equation homogène :

$$xy'(x) + 2y(x) = 0.$$

La fonction $y(x) = 0$ est solution. Supposons $y(x) \neq 0$ et réécrivons l'équation sous la forme

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x}.$$

En intégrant on obtient

$$\ln |y(x)| = -2 \ln x + C.$$

En composant avec la fonction exponentielle (réciproque de \ln), on obtient que (toutes) les solutions de l'équation homogène s'écrivent

$$y_h(x) = \frac{\lambda}{x^2}.$$

(on peut enlever la valeur absolue car y_h ne change pas de signe : elle est soit toujours positive soit toujours négative, son signe est contenu dans $\lambda = \pm e^C$).

— Equation complète :

$$xy'(x) + 2y(x) = \sin(x)$$

on cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète par la méthode dite de variation de la constante ie on cherche $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x^2}$ (ie la constante de y_h devient une fonction de x). On calcule la dérivée de y_p : $y'_p(x) = \frac{\lambda'(x)x^2 - 2x\lambda(x)}{x^4}$. On substitue dans l'équation :

$$xy'_p(x) + 2y_p(x) = x \frac{\lambda'(x)x^2 - 2x\lambda(x)}{x^4} + 2 \frac{\lambda(x)}{x^2}.$$

Après simplification, on obtient

$$\lambda'(x) = x \sin(x).$$

On calcule une primitive de λ (en intégrant par parties ici)

$$\lambda(x) = \sin(x) - x \cos(x).$$

Par conséquent, on a

$$y_p(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^2}.$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^2} + \frac{\lambda}{x^2}$$

— Prise en compte de la condition initiale $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

De la condition initiale et de l'expression de y trouvée précédemment et évaluée en $x = \pi$, on tire $\lambda = 0$.

La solution du problème de départ est donc

$$y(x) = \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^2}$$

2.1.3 Equations se ramenant à des équations linéaires

a) Equations de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme

$$(E) : y'(t) = p(t)y(t) + q(t)y^\alpha(t)$$

où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ et $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

On se place dans $\{(t, y); y > 0\}$, en multipliant par $y^{-\alpha}$, on obtient

$$(E) \Leftrightarrow y^{-\alpha} \frac{dy}{dt} = p(t)y^{1-\alpha} + q(t).$$

Posons $z = y^{1-\alpha}$ alors $\frac{dz}{dt} = (1-\alpha) \frac{dy}{dt} y^{-\alpha}$, d'où

$$(E) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha} \frac{dz}{dt} = p(t)z + q(t).$$

On est donc ramené à une équation linéaire en z .

2.2 Equations du second ordre à coefficients constants

Ce sont des équations de la forme :

$$(E) : ay'' + by' + cy = f(t)$$

où a, b, c sont des constantes (a non nulle) et f une fonction continue.

Nous ne donnons ici que la méthode : comme pour les équations du 1er ordre, on résout l'équation sans second membre et on cherche ensuite une solution particulière de l'équation (E).

a) Solutions de l'équation sans second membre (ESSM) (E0)

$$(E0) : ay'' + by' + cy = 0$$

On cherche les racines de l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$. Soit Δ son discriminant.

• $\Delta > 0$: l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2 . La solution générale de (E0) est :

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

• $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine double r_0 . La solution générale de (E0) est :

$$y(t) = (At + B)e^{r_0 t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

• $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. La solution générale de (E0) est :

$$y(t) = (A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t))e^{\alpha t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

b) Recherche d'une solution particulière de (E)

On cherche une solution particulière d'après la forme du second membre ou par la méthode de variation de la constante.

La solution générale de (E) est la somme de cette solution particulière et de la solution de l'ESSM.

Chapitre 3

Calcul matriciel : rappels.

\mathbb{R} est l'ensemble des réels. On désigne par \mathbb{R}^n l'ensemble des vecteurs x formés de n composantes x_1, x_2, \dots, x_n où $x_i \in \mathbb{R}$. On utilisera la notation vecteur colonne suivante :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

3.1 Définition des matrices sur \mathbb{R}

Définition 3.1.1. On appelle matrice A à n lignes et p colonnes une famille de np éléments de \mathbb{R} .

On la note : $A = (a_{ij})_{(i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}} = (a_{ij})$

On représente A sous forme de tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les éléments a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice.

L'ensemble de toutes les matrices d'ordre (n, p) (n lignes et p colonnes) sur \mathbb{R} se note $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$.

Cas particulier : si $n = p$, on dit que la matrice est carrée d'ordre n . On notera $M_{(n)}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Définition 3.1.2. matrice colonne - matrice ligne

Une matrice d'ordre $(1, p)$ est dite matrice ligne.

Une matrice d'ordre $(n, 1)$ est dite matrice colonne (on appelle aussi souvent vecteur une matrice ligne ou colonne).

Exemples :

$$A = (1 \ 2 \ 3) \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.2 Opération sur les matrices

— Somme de deux matrices de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$

Soient $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$

$$A + B = C \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$$

où $C = (c_{ij})_{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\}}$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Attention, on ne peut additionner deux matrices que si elles sont de même ordre.

— **Produit d'une matrice de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ par un réel**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

— **Produit d'une matrice de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ par une matrice de $M_{(p,q)}(\mathbb{R})$**

Soient $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{(p,q)}(\mathbb{R})$

$$A \times B = AB = C \in M_{(n,q)}(\mathbb{R})$$

où $C = (c_{ij})_{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,q\}}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}$.

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 11 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.2.1. Le produit matriciel n'est pas commutatif (en général, $AB \neq BA$).

3.3 Matrices associées à une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$

— La **matrice transposée** de A est la matrice notée ${}^tA = (b_{ij})$ de $M_{(p,n)}(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i, j) \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

— Une **sous-matrice** de A est une matrice obtenue à partir de A en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes.

3.4 Quelques matrices particulières de $M_{(n)}(\mathbb{R})$

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

— Une matrice carrée A est **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

On appelle **matrice identité** notée I_n la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux sont égaux à un. Exemple : $n = 3$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— Une matrice A est **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.

— Une matrice A est **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.

— Une matrice A est **symétrique** si $A = {}^tA$ c'est-à-dire $\forall (i, j) \quad a_{ij} = a_{ji}$.

Exemples :

$$\begin{array}{ccc} \text{triangulaire inférieure} & \text{triangulaire supérieure} & \text{symétrique} \\ B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix} & C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.5 Rang et noyau d'une matrice

Etant donnée une famille de vecteurs (matrices d'une seule ligne ou colonne), les vecteurs de la famille sont linéairement indépendants, ou forment une famille libre, si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls. Cela revient à dire qu'aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres. Dans le cas où des vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, on dit qu'ils sont linéairement dépendants, ou qu'ils forment une famille liée.

Définition 3.5.1. On dit que les p vecteurs (matrice-colonne) $v_i = {}^t(v_{i1}, \dots, v_{in})$, $i = 1..p$ sont linéairement indépendants si

$$a_1v_1 + \dots + a_pv_p = 0 \Leftrightarrow a_1 = \dots = a_p = 0$$

($a_1v_1 + \dots + a_pv_p$ s'appelle combinaison linéaire des p vecteurs). ce qui veut dire qu'on ne peut pas écrire un vecteur en fonction des autres.

Exemple 3.5.1. Les trois vecteurs $v_1 = (4, 2, 1, 3)$, $v_2 = (2, 0, 3, 0)$ et $v_3 = (6, 2, 4, -3)$ sont linéairement indépendants. Pour le vérifier, il suffit de résoudre $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} 4a_1 + 2a_2 + 6a_3 = 0 \\ 2a_1 + 0a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ 3a_1 + 0a_2 - 3a_3 = 0 \end{cases}$$

dont la seule solution est $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Soit A une matrice d'ordre (n, p) .

Définition 3.5.2. On appelle noyau de A , noté $\text{Ker}(A)$

$$\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^p / Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

Proposition 3.5.1. Le système $Ax = 0_{\mathbb{R}^n}$ admet toujours $x = 0_{\mathbb{R}^p}$ comme solution.

Exemple 3.5.2. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour déterminer son noyau, il suffit de résoudre

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \text{Ker}(D) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_2 = 0; x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \{(u, 0, -u) \quad \forall u \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u(1, 0, -1) \quad \forall u \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Définition 3.5.3. On appelle dimension du noyau de A , noté $\dim(\text{Ker}(A))$, le nombre de vecteurs linéairement indépendants nécessaire pour décrire tous les éléments de l'ensemble.

Dans l'exemple précédent, tous les éléments du noyau s'écrivent comme $u(1, 0, -1)$ (un seul vecteur est donc nécessaire pour décrire l'ensemble). La dimension du noyau est donc $\dim(\text{Ker}(D)) = 1$

Soit A une matrice d'ordre (n, p) .

Définition 3.5.4. On appelle rang de A , noté $\text{rang}(A)$ le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) de A linéairement indépendants.

Exemple 3.5.3.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le rang de S est 4. En effet les 4 vecteurs ligne $(1, -1, -1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, -1, 0)$, $(0, 0, 1, -1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1, -1)$ sont linéairement indépendants.

Soit A une matrice d'ordre (n, p) .

Théorème 3.5.1. *Théorème du rang*

$$\text{rang}(A) + \dim(\text{Ker}(A)) = p$$

3.6 Déterminant et rang d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n .

Notons A_{ij} la sous matrice A_{ij} obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j .

Définition 3.6.1. On appelle déterminant d'une matrice A de $M_{(n)}(\mathbb{R})$ un nombre noté $\det A$ ou encore

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{que l'on calcule de la façon suivante :}$$

pour une matrice 1×1

$$\det A = a_{11}$$

pour une matrice 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

pour une matrice d'ordre > 2 , on développe suivant une ligne ou une colonne : par exemple suivant la ligne i

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{i1} & & & & & a_{in} \\ \cdot & & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in} \det A_{in}$$

Remarque 3.6.1. En dimension 3, on peut utiliser la règle de Sarrus (en n'oubliant pas qu'elle ne s'applique pas à un autre ordre).

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

Théorème 3.6.1.

1. Si une colonne (ou ligne) est nulle, alors $\det A = 0$.
2. Si deux colonnes (ou lignes) sont égales, alors $\det A = 0$.
3. Si on échange deux colonnes (ou lignes), on multiplie $\det A$ par -1 .

$$4. \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_i + \lambda c_j & \dots & c_n \\ a_{11} & \dots & a_{1i} + \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall j \neq i$$

$$5. \det(c_1, \dots, b + \lambda c_i, \dots, c_n) = \lambda \det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) + \det(c_1, \dots, b, \dots, c_n).$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -18$$

Théorème 3.6.2.

1. $\det I_n = 1$.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments qui sont sur sa diagonale.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
4. $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$.
5. $\det({}^t A) = \det A$.

Définition 3.6.2. Le rang de A est égal au plus grand ordre des sous-matrices carrées de A de déterminant non nul.

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A) = -18 \neq 0$, alors la matrice A est de rang 3.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme $\det(B) = 0$ (car la deuxième colonne est nulle), la matrice B est de rang strictement inférieur à 3. De plus, tous les sous-déterminants d'ordre 2 étant nuls (il y en a 9)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \dots = 0,$$

le rang de B est égal à 1. En revanche, le rang de la matrice C ci dessous est 2.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.7 Inverse d'une matrice carrée

3.7.1 Définitions et théorèmes

Définition 3.7.1. Soit $A \in M_{(n)}(\mathbb{R})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in M_{(n)}(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

On appelle B matrice inverse de A et on la note A^{-1} .

Théorème 3.7.1. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible.

De plus si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Définition 3.7.2. On appelle matrice des co-facteurs $\text{com}(A)$ la matrice de coefficients

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Théorème 3.7.2. Si $\det A \neq 0$ alors $A^{-1} = (\det A)^{-1} {}^t \text{com}(A)$.

3.7.2 Méthodes de calcul de l'inverse

Méthode utilisant la matrice des co-facteurs :

Exemple : calcul de l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det B = -2 \quad \text{com}(B) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^t\text{com}(B) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où } B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode : inversion d'un système

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + 3z = b \\ y = c \end{cases} &\iff \begin{cases} x + z = a - c \\ y = c \\ x + 3z = b - 2c \end{cases} &\iff \begin{cases} x + z = a - c \\ y = c \\ 2z = b - 2c - (a - c) \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + 3z = b \\ y = c \end{cases} &\iff \begin{cases} x + z = a - c \\ y = c \\ 2z = b - a - c \end{cases} &\iff \begin{cases} x + z = a - c \\ y = c \\ z = \frac{b - a - c}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + 3z = b \\ y = c \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ y = c \\ z = \frac{b - a - c}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

On sait que si B est inversible alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'où $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Méthode du pivot de Gauss-Jordan :

On associe à la matrice A à inverser la matrice I_n . On transforme simultanément A et I_n par les mêmes applications élémentaires, seulement sur les lignes (ou seulement sur les colonnes). Le but est de transformer A en I_n , le transformé de I_n correspondant est l'inverse de A .

Exemple : calcul de l'inverse de B .

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_3 = 1/2 L_3} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) &\xrightarrow{L_1 = L_1 - L_3} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) &\xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) &&\text{d'où } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Explications : les opérations élémentaires sur les lignes reviennent à multiplier à gauche la matrice par une matrice élémentaire. Par exemple la première opération (permutation des lignes 2 et 3) peut s'écrire par $P_1 B$ où P_1 est la matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les 7 opérations élémentaires successives sur B et I s'écrivent donc

$$P_7P_6P_5P_4P_3P_2P_1B \mid P_7P_6P_5P_4P_3P_2P_1I$$

Or comme $P_7P_6P_5P_4P_3P_2P_1B = I$ et $B^{-1}B = I$, on en déduit que

$$B^{-1} = P_7P_6P_5P_4P_3P_2P_1$$

.

Chapitre 4

Fonctions de plusieurs variables

4.1 Introduction

On peut définir des fonctions d'un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} . A chaque point $x = (x_1, \dots, x_n)$ de D , on associe au plus un point de \mathbb{R} . Ces fonctions s'appellent fonctions réelles.

C'est par exemple le cas lorsque l'on construit une carte des pressions, des altitudes, ou des températures sur un domaine à deux ou trois dimensions.

On peut définir les applications de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , il suffit de se donner p fonctions réelles f_1, \dots, f_p de n variables réelles (x_1, \dots, x_n) .

4.2 Domaine de définition, représentation graphique

Comme dans \mathbb{R} , l'ensemble des points qui ont une image par la fonction f s'appelle le domaine de définition de la fonction \mathcal{D}_f .

Exemple 4.2.1.

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

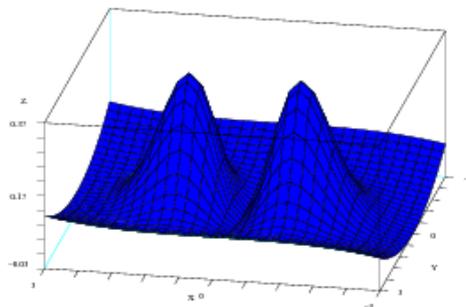
Nous pouvons représenter les fonctions de 2 variables en donnant la représentation graphique du graphe :

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x, y) = z\}$$

Ceci nous donne un graphique dans \mathbb{R}^3

Exemple 4.2.2. maple¹

```
f := (x, y) -> x^2 * exp(-(x^2 + y^2)) + y^2 / 100 + x^3 / 1000;  
plot3d(f(x, y), x = -3..3,
```



1. maple est un logiciel de mathématiques de calcul formel

4.3 Normes

On considèrera dans ce paragraphe :

$$E = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), \forall i \in \{1, \dots, n\} x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Définition 4.3.1. On appelle norme sur E toute application de E dans \mathbb{R}^+ , $x \mapsto \|x\|$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1.

$$\|x\| = 0 \implies x = 0$$

2.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

3.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Le premier axiome est appelé axiome de non-dégénérescence et le troisième, inégalité triangulaire.

Remarque 4.3.1. Si $x = 0$ alors $\|x\| = \|0x\| = 0\|x\| = 0$, dont on déduit $\|x\| = 0$.

On peut prendre un espace vectoriel sur \mathbb{C} , dans ce cas la valeur absolue utilisée dans le deuxième axiome est remplacée par le module.

$(E, \|\cdot\|)$ s'appelle un espace vectoriel normé.

Les trois normes les plus usitées sur \mathbb{R}^n sont les suivantes :

1.

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

2.

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

3.

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

Ces normes sont des cas particuliers de la famille générale suivante :

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

Définition 4.3.2. On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes c et c' supérieures à 0 telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad cN_1(x) \leq N_2(x) \leq c'N_1(x).$$

Théorème 4.3.1. Toutes les normes sur \mathbb{R}^n (ou sur un espace vectoriel de dimension finie) sont équivalentes.

4.4 Continuité

Dans ce qui suit, nous noterons f une fonction définie de $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} . On peut définir comme dans \mathbb{R} la notion de limite en un point. Pour ce faire, il faut que l'on puisse quantifier la proximité des points de $D \subset \mathbb{R}^n$. On utilise les normes. Nous pouvons alors calquer la définition de \mathbb{R} :

Définition 4.4.1. On dit que f admet une limite l au point $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in D \quad \|x - a\| \leq \eta \implies |f(x) - l| \leq \epsilon$$

On peut alors définir la continuité en un point d'une fonction de plusieurs variables en transposant la définition réelle qui dit qu'une fonction est continue en un point si la limite au point est égale à la valeur au point.

Définition 4.4.2. On dit que f est continue au point $a \in D \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in D \quad \|x - a\| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$

Remarque 4.4.1. Toutes les normes étant équivalence dans E , cette définition est donc indépendante de la norme.

Exemple 4.4.1. Continuité en $(0,0)$:

1.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

On choisit la norme euclidienne pour majorer $|f(x) - f(0)|$.

$$|f(x) - f(0)| = |x_1^2 + x_2^2 - 0| = \|x - 0\|_2^2.$$

Donc $\forall \epsilon > 0$ en prenant $\eta = \sqrt{\epsilon}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \|x - 0\|_2 \leq \eta \implies |f(x) - f(0)| \leq \epsilon.$$

2.

$$f(x_1, x_2) = x_1.$$

On choisit la norme 1 pour majorer $|f(x) - f(0)|$.

$$|f(x) - f(0)| = |x_1 - 0| \leq |x_1| + |x_2| \leq \|x - 0\|_1.$$

Donc $\forall \epsilon > 0$ en prenant $\eta = \epsilon$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \|x - 0\|_2 \leq \eta \implies |f(x) - f(0)| \leq \epsilon.$$

3.

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2.$$

$(x_1 - x_2)^2 \geq 0$ donc $x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1 x_2$,

$$|f(x) - f(0)| = |x_1 x_2 - 0| \leq \frac{1}{2} |(x_1^2 + x_2^2) - 0| \leq \frac{1}{2} \|x - 0\|_2^2.$$

Donc $\forall \epsilon > 0$ en prenant $\eta = \sqrt{2\epsilon}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \|x - 0\|_2 \leq \eta \implies |f(x) - f(0)| \leq \epsilon.$$

Proposition 4.4.1. Règles de continuité

Soient $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et f et g deux applications réelles sur D . Soit $a \in D$ alors si f et g sont continues en a :

- $f + g$ est continue en a .
- fg est continue en a .
- $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$.

On fit que f est continue sur D si et seulement si f est continue en tout point a de D .

Si f et g sont continues sur D :

- $f + g$ est continue sur D
- fg est continue sur D
- $\frac{f}{g}$ est continue en tout point de $\tilde{D} = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$.

On ne peut pas généraliser la notion de limite droite et gauche (respectivement continuité à droite et à gauche) car il y a *a priori* **une infinité de directions possibles**.

Mais on peut généraliser la propriété suivante connue pour les fonctions d'une variable

Proposition 4.4.2. f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (constituée d'éléments appartenant à \mathcal{D}_f) qui converge vers x_0 , la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$.

Exemple 4.4.2.

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) / x^2 + y^2 = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on regarde ce qui se passe en $(0, 0)$. Les deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (0, \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $(0, 0)$. Et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(0, \frac{1}{n}) = 0$. Mais $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$. Par conséquent $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tendent pas vers une même valeur. Donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Exemple 4.4.3.

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^4 + y^2}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on regarde ce qui se passe en $(0, 0)$. On remarque que $f(0, \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}, 0) = 0$, donc si la limite existe, elle vaut 0.

Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1$ donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Exemple 4.4.4.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on regarde ce qui se passe en $(0, 0)$.

On remarque $\lim_{n \rightarrow \infty} f(0, \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 0$, donc si la limite existe, elle vaut 0. Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$ donc f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Exemple 4.4.5.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

On suppose que la valeur en $(0, 0)$ est donnée et vaut 0.

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on regarde si la limite en $(0, 0)$ est égale à la valeur en $(0, 0)$.

On commence par construire $|f(x, y) - f(0, 0)|$, puis on cherche à majorer ce terme en faisant apparaître $\|(x, y) - (0, 0)\|$.

On sait que :

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \text{ et que } y^2 \leq x^2 + y^2,$$

donc le numérateur est majoré par $\|(x, y) - (0, 0)\|^4$, donc le tout est majoré par $\|(x, y) - (0, 0)\|^2$. Il suffit alors de choisir dans la définition $\eta = \sqrt{\epsilon}$ pour démontrer la continuité en 0.

4.5 Dérivabilité

4.5.1 Dérivée partielle

Soit f une fonction définie de $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} . On considère un point x dans le domaine D .

Définition 4.5.1. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x_i en $x = (x_1, \dots, x_n)$ si et seulement si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{h}$$

On note cette quantité :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

Exemple 4.5.1. Calculer les dérivées partielles en $(1, 1)$ de la fonction :

$$f(x, y) = x^2 + xy$$

$$\frac{(1+h)^2 + (1+h) - 1^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 3h}{h}$$

La limite donne 3.

Pratiquement cela revient à regarder uniquement la fonction en la variable x_i et à considérer les autres variables comme des constantes. Si on calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ on trouve : $2x + y$, et on retrouve la valeur 3 en prenant $(x, y) = (1, 1)$.

Définition 4.5.2. Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} admettant des dérivées partielles en $a = (a_1, \dots, a_n)$. On appelle gradient de f en a et on note $\nabla f(a)$ le vecteur ligne des dérivées partielles :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Définition 4.5.3. Si f est une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p , le gradient est remplacé par la matrice jacobienne :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

On range donc, dans une matrice, les gradients des p fonctions qui définissent f . On peut aussi regarder la fonction de plusieurs variables définie par :

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

et étudier les propriétés de continuité d'une telle application. On peut faire des dérivées successives, cela revient à dériver les fonctions :

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_n)$$

ainsi :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

est la jème dérivée partielle en x de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ qui est la ième dérivée partielle de f . On a une dérivée partielle d'ordre 2.

Théorème 4.5.1. de Schwartz

Soit f une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} et soit $a \in A$. Soient j et k deux indices de $\{1, \dots, n\}$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ existe dans un voisinage de a et est continue en a , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ existe et on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a)$$

Exemple 4.5.2. Pour $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + xy$, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3$. L'ordre de dérivation n'importe pas, les dérivées partielles croisées étant continues.

Exemple 4.5.3.

$$f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2} \text{ si } y \neq 0$$

$$f(x, 0) = x$$

en dehors du point $(0, 0)$ les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2 \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 \frac{xy^2(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \frac{x^2 y (x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2 \frac{x^3 (x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

On regarde en $(0, 0)$ la valeur est 0, dans un premier temps on calcule :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{y} = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} = \infty.$$

Les dérivées partielles existent mais ne sont pas continues. Dans ce cas, on n'a pas $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$.

Instructions Maple :

```
simplify(diff(x^3/(x^2+y^2), y$2));
simplify(diff(x^3/(x^2+y^2), x, y));
```

On range les dérivées partielles d'ordre 2 dans une matrice nommée matrice hessienne :

Définition 4.5.4. Soit f une fonction de $D \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} . Si f admet des dérivées d'ordre 2 continues en a , on appelle matrice hessienne de f au point a la matrice suivante :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

On remarque que la matrice hessienne est symétrique. On peut utiliser Maple pour faire les calculs :

```
with(linalg);
A:= vector( [1/(x*y)] );
jacobian(A, [x, y]);
hessian(A[1], [x, y]);
```

Exemple 4.5.4. calcul du gradient et du hessien :

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 - 3x$$

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + y - 3 & x + 4y \end{pmatrix}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{xy}$$

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2 y} & -\frac{1}{xy^2} \end{pmatrix}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{x^3 y} & \frac{1}{x^2 y^2} \\ \frac{1}{x^2 y^2} & 2\frac{1}{xy^3} \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = \frac{1 - xy}{x + y}$$

$$J_f(x, y) = \left(-\frac{y}{x+y} - \frac{1-xy}{(x+y)^2} \quad -\frac{x}{x+y} - \frac{1-xy}{(x+y)^2} \right)$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\frac{y}{(x+y)^2} + 2\frac{1-xy}{(x+y)^3} & -(x+y)^{-1} + \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{y}{(x+y)^2} + 2\frac{1-xy}{(x+y)^3} \\ -(x+y)^{-1} + \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{y}{(x+y)^2} + 2\frac{1-xy}{(x+y)^3} & 2\frac{x}{(x+y)^2} + 2\frac{1-xy}{(x+y)^3} \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = x + y - (xy)^{\frac{1}{4}}$$

$$J_f(x, y) = \left(1 - 1/4 \frac{y}{(xy)^{3/4}} \quad 1 - 1/4 \frac{x}{(xy)^{3/4}} \right)$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3/16 \frac{y}{x(xy)^{3/4}} & -1/16 (xy)^{-3/4} \\ -1/16 (xy)^{-3/4} & 3/16 \frac{x}{y(xy)^{3/4}} \end{pmatrix}$$

D'une manière générale, on peut construire pour une fonction de n variables une dérivée d'ordre k :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \text{ avec } \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$$

4.5.2 Dérivée

Remarque 4.5.1. Soit une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On appelle dérivée en a , notée $f'(a)$, la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Cette définition n'est pas extensible aux fonctions de plusieurs variables, on ne divise pas par un vecteur.

Définition 4.5.5. Soit f une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^p , soit $a \in \Omega$. On dit que f est dérivable (ou différentiable) en a si et seulement si

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \|h\|\epsilon(h)$$

où $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^p}$ et $f'(a)$ est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p (matrice à p lignes et n colonnes), appelée dérivée (ou différentielle) de f en a .

Remarque 4.5.2. Avec une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ équivaut à

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \|h\|\epsilon(h)$$

où $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

Exemple 4.5.5. Soit $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 + x_2 \\ 2x_1 - x_2^2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(x_1+h_1, x_2+h_2) - f(x_1, x_2) \\ &= \begin{pmatrix} 8x_1h_1 + h_2 + 4h_1^2 \\ 2h_1 - 2x_2h_2 - h_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4h_1^2 \\ -2h_2^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons $\epsilon(h) = \frac{1}{\|h\|} \begin{pmatrix} 4h_1^2 \\ -2h_2^2 \end{pmatrix}$. En choisissant la norme euclidienne $\|h\|_2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, on montre que $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^2}$. On a donc

$$f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Théorème 4.5.2. Soit f une fonction définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R}^p , soit $a \in \Omega$. On suppose que f admet des dérivées partielles continues en a , alors f est dérivable (ou différentiable) en a et

$$f'(a) = J_f(a).$$

Exemple 4.5.6. Soit $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^2 + x_2 \\ 2x_1 - x_2^2 \end{pmatrix}$. Ses dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 8x_1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2.$$

Ces fonctions étant continues sur \mathbb{R}^2 , on a donc

$$f'(x_1, x_2) = J_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 8x_1 & 1 \\ 2 & -2x_2 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.5.3. — La réciproque du théorème est fautive.

— L'existence des dérivées partielles en a n'entraîne pas la dérivabilité (ou différentiabilité) de f en a .

Remarque 4.5.4. Si f est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} dont les dérivées partielles sont continues en a alors :

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a)h + \|h\|\epsilon(h)$$

avec

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$$

c'est-à-dire que $f'(a) = \nabla f(a)$.

Exemple 4.5.7. Soit $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2^2$. Ses dérivées partielles sont : $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$. Ces fonctions étant continues sur \mathbb{R}^2 , on a donc

$$f'(x) = \nabla f(x) = (x_2, x_1 + 2x_2)$$

Théorème 4.5.3. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dérivable en a , alors f est continue en a , $f'(a)$ est unique et f admet des dérivées partielles en a .

Proposition 4.5.1. — Soit f et g deux applications de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p dérivables en a et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors : $f + g$ et λf sont dérivables en a et :

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$$

— Soit f une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p et soit g une application de A dans \mathbb{R} . Si f et g sont dérivables en a alors gf est dérivable en a et :

$$(gf)'(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$$

— Soit f une application de $A \subset \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p dérivable en a et soit g une application définie sur un voisinage de $f(a) = b$ à valeurs dans \mathbb{R}^m et dérivable en $f(a) = b$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et :

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

(multiplication de matrices)

Définition 4.5.6. Soit $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in A$ et $v \in \mathbb{R}^n$ on appelle dérivée de f suivant le vecteur v au point a la quantité si elle existe :

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}.$$

$D_v f(a) \in \mathbb{R}^p$. On définit l'application dérivée suivant v :

$$x \rightarrow D_v f(x)$$

qui va de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p .

Théorème 4.5.4. Si f est dérivable en a alors :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, D_v f(a) = f'(a)v.$$

4.5.3 Application au calcul d'erreurs

En physique, la différentielle est utilisée pour estimer la variation de f au voisinage d'un point en fonction des variations Δx_i des variables :

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ \Delta f &\approx \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n.\end{aligned}$$

Exemple 4.5.8. La température, la pression et le volume d'un gaz parfait sont liés par une relation du type

$$P = f(T, V) = k \frac{T}{V}.$$

Si l'incertitude relative de mesure sur T est de 0,5% et celle sur V est de 0,2%, on peut majorer l'incertitude relative sur P . En effet, par hypothèse, on a

$$\left| \frac{\Delta T}{T} \right| \leq 0.005 \quad \left| \frac{\Delta V}{V} \right| \leq 0.002$$

L'erreur sur P est alors

$$\begin{aligned}\Delta P &= f(T + \Delta T, V + \Delta V) - f(T, V) \\ \Delta P &\approx \frac{\partial f}{\partial T} \Delta T + \frac{\partial f}{\partial V} \Delta V \\ \Delta P &\approx \frac{k}{V} \Delta T - \frac{kT}{V^2} \Delta V\end{aligned}$$

d'où l'erreur relative sur P

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta T}{T} - \frac{\Delta V}{V}$$

d'où la majoration de l'erreur relative sur P

$$\left| \frac{\Delta P}{P} \right| \leq \left| \frac{\Delta T}{T} \right| + \left| \frac{\Delta V}{V} \right| = 0.007$$

4.5.4 Dérivées des fonctions composées : cas particuliers

- Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} admettant des dérivées partielles premières. Soient x et y deux fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} alors la fonction g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $g(t) = f(x(t), y(t))$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (x(t), y(t)) & \mapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t).$$

- Soit f une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et x et y sont deux fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Soit g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (u, v) & \mapsto & (x(u, v), y(u, v)) & \mapsto & f(x(u, v), y(u, v)). \end{array}$$

Lorsque toutes les dérivées partielles qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).\end{aligned}$$

4.5.5 Résolution d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP)

Une EDP est une équation où apparaissent une ou plusieurs dérivées partielles d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Lorsque $n = 1$, les dérivées partielles sont les dérivées, on parle alors d'équation différentielle.

Dans ce qui suit t désigne le temps et $x = (x_1, \dots, x_n)$ désigne l'espace. On note $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ le laplacien.

1. Equation de Laplace $\Delta f(x) = u(x)$.

Cette équation modélise les petits déplacements $f(x)$ d'un point x d'un fil ($n = 1$) ou d'une membrane ($n = 2$) soumis à une force transversale u .

2. Equation de la chaleur $\Delta f(t, x) - \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = u(t, x)$.

Cette équation modélise les variations au cours du temps de la température $f(t, x)$ du point x d'une barre ($n = 1$) ou d'une plaque ($n = 2$) soumise à source de chaleur u .

3. Equation des ondes $\Delta f(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, x)$.

Cette équation modélise la propagation au cours du temps t des déformations $f(t, x)$ d'un point x d'une corde élastique ($n = 1$).

On sait seulement résoudre certaines de ces EDP classiques. En effet si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, en intégrant par rapport à x , on obtient $\frac{\partial f}{\partial y} = h(y)$. Et par conséquent, on a

$$f(x, y) = H(y) + k(x).$$

Il est aussi parfois possible de résoudre une EDP, en faisant un changement de variable.

Exemple 4.5.9. On veut trouver f vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. On fait le changement de variables suivant : $\begin{cases} s = x + y \\ t = x - y \end{cases}$. On introduit la fonction $g(s, t) = f(x, y)$ et on exprime les dérivées partielles de f en fonction de celles de g

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \end{cases}$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ devient $\frac{\partial g}{\partial s} = 0$. Donc $g(s, t) = h(t)$ avec h une fonction arbitraire de classe C^1 , d'où $f(x, y) = h(x - y)$.

4.5.6 Dérivée seconde

Définition 4.5.7. $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable si f est dérivable et si $x \mapsto \nabla f(x)h$ est dérivable $\forall h \in \mathbb{R}^n$. On a $(f''(x)h)k = {}^t k H_f(x)h$.

Théorème 4.5.5. Formule de Taylor à l'ordre 2

Si f est deux fois dérivable en a , pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, h dans un voisinage de 0, on a :

$$f(a + h) - f(a) = \nabla f(a)h + \frac{1}{2} {}^t h H_f(a)h + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

Exemple 4.5.10. Soit $f(x) = f(x_1, x_2) = 4x_1^3 + x_1x_2^2$. Appliquons la formule de Taylor au voisinage de x :

$$f(x + h) - f(x) = (12x_1^2 + x_2^2)h_1 + 2x_1x_2h_2 + 24x_1h_1^2 + 4h_1h_2x_2 + 2x_1h_2^2 + \|h\|^2 \epsilon(h).$$

4.6 Quelques opérateurs classiques

Dans ce qui suit, on note $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Définition 4.6.1. Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n admettant des dérivées partielles. On appelle divergence de f en $x = (x_1, \dots, x_n)$ le scalaire :

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_i(x).$$

Définition 4.6.2. Soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p admettant des dérivées partielles secondes. On appelle laplacien de f en $x = (x_1, \dots, x_n)$ le vecteur colonne

$$\Delta f(x) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f_1(x) \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f_p(x) \end{pmatrix}$$

En particulier pour f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} admettant des dérivées partielles secondes

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 f(x).$$

Définition 4.6.3. Soit f une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 admettant des dérivées partielles. On appelle rotationnel de f en $x = (x_1, x_2, x_3)$ le vecteur colonne :

$$\operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} (x)$$

On définit aussi le rotationnel d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 admettant des dérivées partielles en $x = (x_1, x_2)$ par le scalaire :

$$\operatorname{rot} f = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1.$$

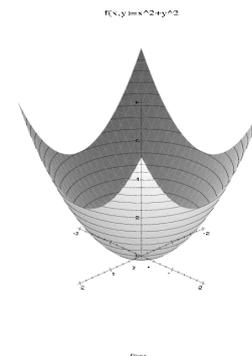
Soient u définie de \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R} et f définie de \mathbb{R}^3 à valeurs dans \mathbb{R}^3 admettant des dérivées d'ordre 2 continues.

Proposition 4.6.1. Les opérateurs vérifient les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} \Delta u &= \operatorname{div}(\nabla u) & \operatorname{div}(\operatorname{rot} f) &= 0 & \operatorname{rot}(\nabla u) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) &= -\Delta f + \nabla(\operatorname{div} f) \end{aligned}$$

4.7 Fonctions implicites

Soit la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. On peut s'intéresser à la courbe de niveau $f(x, y) = 1$. C'est l'équation du cercle unité $x^2 + y^2 = 1$. On sait alors expliciter la variable y en fonction x par $y = \sqrt{1 - x^2}$ tout en sachant que cette relation n'est pas équivalente à l'équation de départ. Mais si on restreint les intervalles de x et de y , les deux écritures peuvent être équivalentes.



Le théorème dit des fonctions implicites donne des conditions suffisantes pour que dans une équation du type $f(x, y) = k$ on puisse expliciter une variable en fonction de l'autre.

Théorème 4.7.1. *Théorème des fonctions implicites (cas des fonctions de 2 variables)*

Soit f une fonction de classe C^m ($m \geq 1$) dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et C_k la courbe de niveau $f(x, y) = k$. A tout point $(x_0, y_0) \in C_k$ tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, on peut associer un intervalle ouvert I contenant x_0 et une fonction φ de I dans \mathbb{R} telle que

$$\forall x \in I \quad y = \varphi(x) \equiv f(x, y) = k.$$

De plus φ est de classe C^m sur I et sa dérivée est donnée par

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

On dit que la relation $f(x, y) = k$ définit implicitement y en fonction de x . On peut échanger les rôles de x et y et obtenir x implicitement en fonction de y . Le théorème s'adapte aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Chapitre 5

Introduction à l'optimisation

On s'intéresse ici à la recherche de minimum ou maximum d'une fonction réelle de plusieurs variables f . Lorsque l'on cherche un vecteur x vérifiant

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{sous la contrainte} \\ x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{cases}$$

on dit que l'on a un problème d'optimisation sous contraintes. La fonction f est souvent appelée fonction objectif. L'ensemble S est appelé ensemble des contraintes. En général, on a des contraintes d'égalités et d'inégalités ie

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0 \quad g(x) \leq 0\}$$

où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont continues. Dans ce qui suit, nous n'étudierons que la recherche de minimum mais remarquons que la recherche du maximum de f se ramène au problème de minimisation de $-f$.

On parle d'optimisation linéaire lorsque les fonctions f, h et g sont linéaires. L'objectif est d'énoncer des résultats théoriques et de calculer explicitement des minimas de quelques fonctions (sans et avec contraintes). En seconde année, nous étudierons quelques algorithmes permettant de résoudre ces problèmes de minimisation lorsqu'ils deviennent trop complexes pour être résolus explicitement. Nous les appliquerons à des problèmes issus de la biologie.

5.1 Eléments de topologie et d'analyse convexe

5.1.1 Eléments de topologie : ouverts et fermés de \mathbb{R}^n

On munit \mathbb{R}^n de la norme euclidienne $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. On rappelle que la boule de centre x_0 et de rayon r , $B(x_0, r)$, est l'ensemble des points x vérifiant $\|x_0 - x\| < r$. Soit S un sous-ensemble de \mathbb{R}^n .

Définition 5.1.1. S est un ouvert de \mathbb{R}^n si pour tout x de S , il existe $r > 0$ telle que la boule de centre x et de rayon r soit contenue dans S .

Définition 5.1.2. S est un fermé de \mathbb{R}^n si son complémentaire dans \mathbb{R}^n est un ouvert.

Définition 5.1.3. S est un ensemble compact de \mathbb{R}^n s'il est fermé borné (contenu dans une boule de rayon $M < +\infty$).

5.1.2 Eléments d'analyse convexe

Dans les problèmes d'optimisation, la notion dite de convexité joue un rôle fondamental. La plupart des résultats ne seront vrais qu'avec des hypothèses de convexité.

Définition 5.1.4. Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si et seulement si

$$\begin{cases} \forall x \in S \\ \forall y \in S \\ \forall \lambda \in [0;1] \end{cases} \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$

On peut dire que S est convexe si et seulement pour deux points quelconques x et y de S , le segment $[x, y]$ tout entier est contenu dans S .

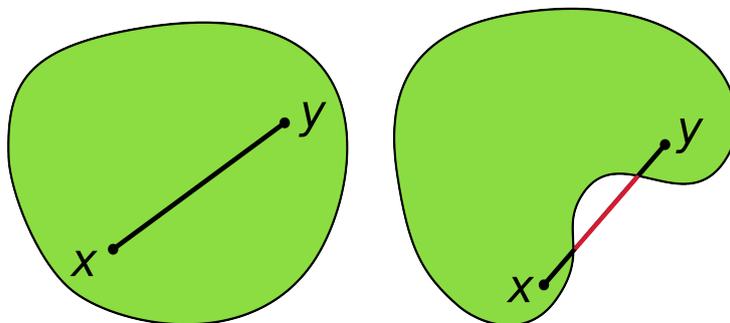


FIGURE 5.1 – Ensembles convexe et non convexe

Définition 5.1.5. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur S convexe est convexe si elle vérifie

$$\begin{cases} \forall x \in S \\ \forall y \in S \\ \forall \lambda \in [0;1] \end{cases} \Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

f est dite strictement convexe si l'inégalité stricte est toujours vérifiée pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0;1[$.

5.2 Optimisation sans contrainte

On cherche à résoudre

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Définition 5.2.1. On dit que f admet un minimum global au point $x^* \in \mathbb{R}^n$, si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x^*) \leq f(x).$$

Lorsque l'inégalité est stricte pour tout $x \neq x^*$, le minimum global est unique.

5.2.1 Existence d'un minimum

Toute fonction n'admet pas un minimum local ou global (par exemple $x \mapsto x^3$). Le résultat suivant nous assure de l'existence d'un minimum global.

Théorème 5.2.1. Si f est une fonction réelle continue sur \mathbb{R}^n , K vérifiant la condition $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$ (on dit que f est coercive) alors le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

a une solution optimale x^* .

Souvent, les méthodes d'optimisation ne permettent pas la détermination d'un minimum global, il faut se contenter de résultats plus locaux.

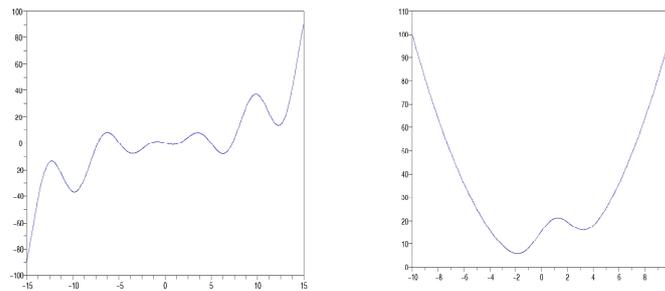


FIGURE 5.2 – fonctions non coercive (à gauche) et coercive (à droite)

Définition 5.2.2. On dit que f admet un minimum local (ou relatif) au point $a \in \mathbb{R}^n$, s'il existe une boule $B(a, r)$ tel que $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in B(a, r)$.

On dit que f admet un minimum local strict au point a , si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq a$.

On a une définition analogue pour la notion de maximum local.

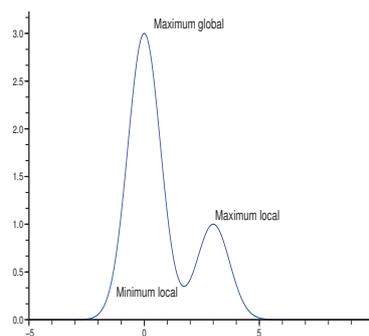


FIGURE 5.3 – fonction présentant des mximums locaux et globaux et un minimum local (0 min global)

5.2.2 Condition nécessaire d'optimalité locale

On suppose ici que f est continue et a des dérivées partielles premières et secondes continues pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition 5.2.3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

On dit que A est semi-définie positive si $\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^t x A x \geq 0$.

On dit que A est définie positive si $\forall x \neq 0, x \in \mathbb{R}^n, {}^t x A x > 0$.

Théorème 5.2.2. Des conditions nécessaires pour que a soit un minimum (local ou global) de f sont $f'(a) = 0$ et $f''(a) = H_f(a)$ est semi-définie positive.

Remarque 5.2.1. La condition n'est pas suffisante il suffit de prendre :

$$f(x, y, z) = xyz.$$

Les dérivées partielles sont nulles en $(0,0,0)$ cependant :

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) > f(0,0,0) \quad f\left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) < f(0,0,0).$$

Mais si x^* est un point stationnaire tel que $H_f(x^*)$ n'est pas semi-définie positive, alors x^* n'est pas un minimum local.

Définition 5.2.4. Un point a où les dérivées de f s'annulent simultanément est un point critique.

5.2.3 Conditions suffisantes d'optimalité locale

On suppose ici que f est continue et a des dérivées partielles premières et secondes continues pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 5.2.3. Les conditions suffisantes pour que a soit un minimum local strict de f sont

- * $f'(a) = 0$,
- * $f''(a) = H_f(a)$ est définie positive.

Le critère d'extremum est local, on ne peut en général rien dire de global.

Remarque 5.2.2. La condition $f'(a) = 0$ et $H_f(a)$ positive n'entraîne pas nécessairement que f admette un minimum relatif en a . D'un point de vue géométrique, la condition sur la hessienne, revient à dire que la fonction f est localement convexe en a .

Exemple 5.2.1.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 + y^3 - xy \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3y^2 - x = 0 \end{aligned}$$

il y a 2 points critiques $(0,0)$ et $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. La hessienne de f est

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}$$

d'où aux points critiques

$$H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La hessienne H_f en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est définie positive car

$${}^t h H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) h = (h_1 - h_2)^2 + h_1^2 + h_2^2 > 0 \quad \forall h \neq (0,0).$$

Par conséquent $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est un minimum local strict. En revanche $(0,0)$ n'est pas un minimum ni un maximum (c'est un col).

5.2.4 Cas des fonctions convexes : CNS d'optimalité globale

Théorème 5.2.4. Si f est une fonction convexe continue et dérivable, une condition nécessaire et suffisante pour que x^* soit un optimum global de f sur \mathbb{R}^n est que $f'(x^*) = 0$. Si f est strictement convexe, alors x^* est unique.

5.3 Optimisation avec contraintes

5.3.1 existence

Théorème 5.3.1 (de Weierstrass). Si f est une fonction réelle continue sur $K \subset \mathbb{R}^n$, K compact alors le problème d'optimisation

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in K \end{cases}$$

a une solution optimale $x^* \in K$.

Théorème 5.3.2. Si dans le problème ci-dessous, la fonction f est convexe et si S est convexe alors tout optimum local est global.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{sous la contrainte} \\ x \in S \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

5.3.2 Détermination du minimum : Multiplicateurs de Lagrange

On veut résoudre explicitement le problème suivant

$$(P_E) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \\ x \in S \end{array} \right.$$

dans le cas où les contraintes sont des contraintes d'égalité c'est-à-dire

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n; h(x) = 0\}$$

où $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (avec $m < n$ ie moins de contraintes qu'inconnues) et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 . $h(x) = 0$ représente $h_j(x) = 0 \quad j = 1..m$.

Définition 5.3.1. On appelle lagrangien du problème (P_E) , la fonction $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définie en $(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ par

$$\ell(x, \lambda) := f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(x).$$

Le vecteur λ porte le nom de multiplicateur de Lagrange (ou variable duale).

Le résultat suivant donne des conditions nécessaires d'optimalité du 1er ordre.

Théorème 5.3.3. Si la restriction de f à S admet un extremum local en a et si les dérivées de h sont des formes linéaires indépendantes, alors il existe λ tel que (a, λ) soit un point critique de ℓ

Ce théorème permet de calculer un point critique de ℓ qui n'est pas nécessairement un minimum. Si f et S sont convexes, on a le résultat suivant (conditions suffisantes)

Théorème 5.3.4. Supposons que le problème (P_E) soit convexe, que f soit dérivable en $x^* \in \mathbb{R}^n$ et qu'il existe un multiplicateur $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ tel que (x^*, λ^*) vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_x \ell(x^*, \lambda^*) = 0 \\ h(x^*) = 0. \end{array} \right.$$

Alors x^* est un minimum global de (P_E) .

Si la fonction n'est pas convexe mais que l'ensemble S est compact, on pourra parfois conclure (cf exemple) sinon ce sont les conditions du second ordre (que nous n'aborderons pas ici) qui permettront de sélectionner les minima locaux parmi les points critiques calculés.

Exemple 5.3.1. Trouver le minimum de $f(x, y, z) = x^2 + yz$, contenu dans

$$E = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

L'ensemble E étant compact, ce maximum est atteint sur E , soit à l'intérieur de E (et c'est un point critique) soit au bord de E . Si ce maximum est atteint à l'intérieur de E , alors en ce point f' s'annule, ie toutes les dérivées partielles sont nulles. Le seul point critique est $(0, 0, 0)$ et $f(0, 0, 0) = 0$ n'est pas le maximum. Il faut donc chercher au bord de E . On écrit donc les équations de Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2\lambda x = 0 \\ z + 2\lambda y = 0 \\ y + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right.$$

si $x \neq 0$, on a $\lambda = -1$, donc $z = 2y = 4z$, d'où $z = y = 0$, ce qui donne les points $(1, 0, 0)$ et $(-1, 0, 0)$ où f prend la valeur 1. Sinon $x = 0$, $z = 4\lambda^2 z$, $y = 4\lambda^2 y$, $y^2 + z^2 = 1$. Si $4\lambda^2 \neq 1$, on aurait $z = y = 0$ ce qui est impossible. D'où ou bien $\lambda = 1/2$ ce qui donne $y = z$ ou bien $\lambda = -1/2$ ce qui donne $y = -z$. Les seules possibilités sont $(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ et $(0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ où f prend la valeur $-1/2$.

Chapitre 6

Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation.

Soit A une matrice carrée d'ordre n .

6.1 Valeurs propres, vecteurs propres

6.1.1 Définitions

Définition 6.1.1. On dit que λ est une **valeur propre** de A si $A - \lambda I$ est non inversible, ce qui est équivalent à $\det(A - \lambda I) = 0$.

On appelle **vecteur propre** associé à λ le vecteur x non nul appartenant à \mathbb{R}^n tel que $Ax = \lambda x$.

Définition 6.1.2. On appelle **polynôme caractéristique** de la matrice A le polynôme de degré n :

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Les racines (ou les zéros) du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de A . Si λ est un zéro de P de multiplicité k , on dit que la valeur propre λ est de multiplicité k .

Remarque 6.1.1. $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1} \text{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det(A)$ où $\text{tr}(A)$ est la trace de A ie la somme des éléments diagonaux de A .

6.1.2 Exemples

Exemple 1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = (\lambda - 1)(2 - \lambda)(\lambda - 3)$$

donc A admet 3 valeurs propres de multiplicité 1 :

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 3.$$

Exemple 2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda - 4)^2$$

donc A admet 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ de multiplicité 1, $\lambda_2 = 4$ de multiplicité 2.

6.2 Diagonalisation

6.2.1 Définitions et théorèmes

Définition 6.2.1. Dans le cas où il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale, on dit que la matrice A est diagonalisable. Une telle matrice P est appelée matrice de passage.

$$P^{-1}AP = D.$$

Notons u_j la $j^{\text{ème}}$ colonne de P et d_j l'élément diagonal de la $j^{\text{ème}}$ ligne de D .

Alors $AP = PD$ est équivalente à $Au_j = d_j u_j$ pour $1 \leq i \leq n$.

Les d_j sont les valeurs propres de A et les u_j sont les vecteurs propres associés aux d_j .

Remarque 6.2.1. Une matrice diagonale a pour valeurs propres ses éléments diagonaux avec leur ordre de multiplicité.

Théorème 6.2.1. Soit A une matrice carrée d'ordre n .

A est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique admet n racines λ_i (répétées suivant leur multiplicité k_i) et pour toute valeur propre λ_i de A :

$$n - \text{rang}(A - \lambda_i I) = k_i$$

Corollaire 6.2.1. Si toutes les valeurs propres de A sont distinctes alors A est diagonalisable.

Théorème 6.2.2. Toute matrice symétrique est diagonalisable.

6.2.2 Méthode pratique de diagonalisation

- Calculer le polynôme caractéristique en cherchant à le factoriser.
- Soit le polynôme n'admet pas que des racines réelles alors A n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .
- Soit le polynôme n'admet que des racines réelles
 - Si les racines sont toutes distinctes alors A est diagonalisable,
 - sinon A est diagonalisable si et seulement si pour chaque valeur propre λ_i de multiplicité $k_i \geq 2$: $n - \text{rang}(A - \lambda_i I) = k_i$
- Si A est diagonalisable chercher pour chaque valeur propre les vecteurs propres (qui constitueront les colonnes de la matrice de passage).

6.2.3 Application

Exemple 0

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 17)$$

$(\lambda^2 - 6\lambda + 17)$ n'admet pas de racines réelles, donc A_0 n'est pas diagonalisable dans \mathbb{R} .

Exemple 1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

On a vu que A_1 admettait 3 valeurs propres distinctes de multiplicité 1

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

donc A_1 est diagonalisable.

Recherche des vecteurs propres

Remarque 6.2.2. Si u est vecteur propre associé à la valeur propre λ , alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$, αu est aussi vecteur propre.

Pour chaque valeur propre, on résout un système linéaire

— vecteur propre ${}^t u_1 = (x, y, z)$ associé à λ_1

$A_1 u_1 = \lambda_1 u_1$ soit encore $(A_1 - \lambda_1)u_1 = 0$ ce qui s'écrit

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 5y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y = 2z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $E_{\lambda_1} = \{(x, 2x, x); \forall x \in \mathbb{R}\}$.

On peut choisir par exemple : ${}^t u_1 = (1, 2, 1)$.

— vecteur propre ${}^t u_2 = (x, y, z)$ associé à λ_2

$A_1 u_2 = \lambda_2 u_2$ soit encore $(A_1 - \lambda_2)u_2 = 0$ ce qui s'écrit

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 6y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $E_{\lambda_2} = \{(x, x, 0); \forall x \in \mathbb{R}\}$.

On peut choisir par exemple : ${}^t u_2 = (1, 1, 0)$.

— vecteur propre ${}^t u_3 = (x, y, z)$ associé à λ_3

ce qui s'écrit

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 7y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y = z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $E_{\lambda_3} = \{(x, 2x, 2x); \forall x \in \mathbb{R}\}$.

On peut choisir par exemple : ${}^t u_3 = (1, 2, 2)$.

Conclusion : $A_1 = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A_2 admet 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = 4$ de multiplicité 2.

Ce n'est pas λ_1 qui empêche la diagonalisation car c'est une racine simple.

Mais $\text{rang}(A_2 - \lambda_2 I) = 2$ car on peut trouver un déterminant 2×2 non nul, par exemple :

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 \neq 0.$$

Par conséquent, $3 - \text{rang}(A_2 - \lambda_2 I) \neq 2$ et la matrice n'est donc pas diagonalisable. (Si on cherche les vecteurs propres associés à λ_2 , on trouve un sous-espace propre E_{λ_2} de dimension 1 c'est-à-dire engendré par un seul vecteur propre).

Exemple 3

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & 10 \\ -5 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

A_3 admet 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 3$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = -2$ de multiplicité 2.

Comme $3 - \text{rang}(A_3 - \lambda_2 I) = 3 - 1 = 2$, A_3 est diagonalisable.

Conclusion : $A_3 = PDP^{-1}$ avec par exemple

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 4

$$A_4 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

A_4 est symétrique, donc elle est diagonalisable. Elle admet 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 3$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = -3$ de multiplicité 2.

Conclusion : $A_4 = PDP^{-1}$ avec par exemple

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Chapitre 7

Intégrale généralisée (extension de la notion d'intégrale) : rappels

Il s'agit ici d'étendre la notion d'intégrale aux cas où f est continue sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, $] - \infty, b]$, $[a, b[$ ou $]a, b]$ (avec f non définie en a ou en b). On écrira les énoncés avec $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$. Pour les autres cas, il suffit d'adapter les énoncés.

7.1 Intégrale d'une fonction sur un intervalle $[a, +\infty[$ ou $] - \infty, b]$

Définition 7.1.1. f étant une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ est finie alors on note

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

On dit que l'intégrale est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Une première méthode pour étudier la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ consiste à calculer $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ quand c'est possible puis à chercher si $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x)$ existe et est finie.

Exemple 7.1.1. L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente car

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$$

et donc

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1.$$

En revanche, l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} \cos t dt$ est divergente car

$$\int_0^x \cos t dt = \sin x$$

et comme la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, J est divergente.

L'intégrale $K = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ converge car

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^x = \arctan x$$

et donc

$$K = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque 7.1.1. Pour $\int_{-\infty}^b f(t)dt$, la définition s'adapte de façon évidente.

7.2 Intégrale d'une fonction qui devient infinie pour une des bornes d'intégration

Définition 7.2.1. f étant une fonction continue sur $[a, b[$ et si $\lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt$ est finie alors

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

On dit que l'intégrale est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Exemple 7.2.1. L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge car

$$\int_\epsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_\epsilon^1 = 2(1 - \sqrt{\epsilon})$$

et donc

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2.$$

En revanche, l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge car

$$\int_\epsilon^1 \frac{dt}{t} = -\ln \epsilon$$

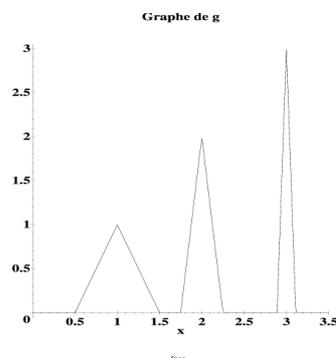
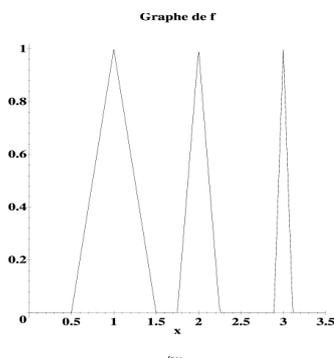
et comme $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\ln \epsilon = +\infty$, J est divergente.

Remarque 7.2.1. Pour que $\int^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente, si f a une limite L en ∞ , alors il faut que $L = 0$. Mais ce n'est pas une condition suffisante.

Exemple 7.2.2. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est divergente bien que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} = 0$

Remarque 7.2.2. Il se peut que $\int^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente sans que f n'ait de limite en ∞ , ni que f ne soit bornée.

Exemple 7.2.3. La fonction $f(t) = -2^k |t - k| + 1$ sur $[k - \frac{1}{2^k}, k + \frac{1}{2^k}]$ (dont le graphe est ci-dessous à gauche) n'a pas de limite en ∞ mais $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$
La fonction $g(t) = k(-2^k |t - k| + 1)$ sur $[k - \frac{1}{2^k}, k + \frac{1}{2^k}]$ (graphe ci-dessous à droite) n'est pas bornée mais $\int_0^{+\infty} g(t) dt = 2$



7.3 Propriétés

Dans ce qui suit on notera : I un intervalle d'extrémités a et b ($a < b$) avec a et b éventuellement ∞ .

7.3.1 Relation de Chasles

Remarque 7.3.1. S'il y a un problème des deux côtés des bornes d'intégration ($\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ ou $\int_a^b f(t)dt$ avec f non définie en a et en b) ou bien un problème en "cours de route" ($\int_a^b f(t)dt$ avec f non définie en $c \in]a, b[$), on sépare les problèmes à l'aide de la relation de Chasles.

Proposition 7.3.1. Si f est définie sur I . On dit que f admet une intégrale généralisée sur I si et seulement si f admet une intégrale généralisée sur les deux intervalles $\{x \in I, x \leq c\}$ et $\{x \in I, x \geq c\}$ où c est un réel quelconque tel que $a < c < b$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Exemple 7.3.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente. Car on a

$$\int_c^x \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(x) - \arctan(c)$$

$$d'où \int_c^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) - \arctan(c) = \frac{\pi}{2} - \arctan(c).$$

De même $\int_{-\infty}^c \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(c) + \frac{\pi}{2}$ et donc on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \pi$$

En revanche, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tdt$ est divergente car $\int_c^x tdt = \frac{x^2 - c^2}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Proposition 7.3.2. Si f est définie sur I sauf en c . On dit que f admet une intégrale généralisée sur I si et seulement si f admet une intégrale généralisée sur les deux intervalles $\{x \in I, x < c\}$ et $\{x \in I, x > c\}$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Exemple 7.3.2. $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{t}dt$ est divergente. Le problème est en zéro. $\int_{\epsilon}^{+1} \frac{1}{t}dt = -\ln(\epsilon) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} +\infty$

7.3.2 Linéarité de l'intégrale

Théorème 7.3.1. Soient f et g dont les intégrales convergent sur I . Alors $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ a une intégrale convergente sur I et

$$\int_I (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_I f(t)dt + \beta \int_I g(t)dt.$$

Attention $\int_I (\alpha f + \beta g)(t)dt$ peut exister sans que $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ existent.

7.3.3 Etude de la convergence

Les critères qui suivent s'appliquent à des fonctions positives. Si les fonctions sont négatives, il suffit d'appliquer le critère à $-f$ et $-g$. Si les fonctions changent de signe, on étudiera éventuellement la convergence en valeur absolue.

Proposition 7.3.3. Critère de comparaison

Soient f et g définies sur I telles que $\forall t \in I, 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

Si $\int_I g(t)dt$ est convergente alors $\int_I f(t)dt$ aussi.

Si $\int_I f(t)dt$ est divergente alors $\int_I g(t)dt$ aussi.

Exemple 7.3.3. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt$ est convergente. Comme $0 \leq \sin^2(t) \leq 1$, on a $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ est convergente, l'intégrale est donc convergente.

Définition 7.3.1. *Convergence absolue*

On dit que $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_I |f(t)|dt$ est convergente.

Théorème 7.3.2. Si $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente, elle est convergente et de plus on a :

$$\left| \int_I f(t)dt \right| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

Attention, la réciproque n'est pas vraie.

Exemple 7.3.4. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ est convergente car absolument convergente. Comme $0 \leq |\cos(t)| \leq 1$, on a $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^2} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

Les propositions et techniques qui suivent sont données pour $J = [a, b[$ avec b éventuellement infini mais s'adaptent pour $J =]a, b]$ avec a éventuellement infini.

Proposition 7.3.4. *Critère d'équivalence*

Soient f et g définies sur $J = [a, b[$. Supposons f positive au voisinage (à gauche) de b et $f(x) \sim_b g(x)$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Exemple 7.3.5. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2 - 1} dt$ sont de même nature

7.4 Techniques de calcul

7.4.1 Intégrer par parties

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $J = [a, b[$ telles que $f'g$ et $g'f$ soient continues sur J . Supposons de plus que fg ait une limite à gauche en b alors $\int_a^b g'(t)f(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature et si elles convergent, on a :

$$\int_a^b g'(t)f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} [fg]_a^x - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Exemple 7.4.1. On intègre par parties $\int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$. Comme la limite à gauche de $b = +\infty$ de fg est nulle ($\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$), on en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$ (qui est convergente).

7.4.2 Changer de variable

Soit f continue sur I et soit φ une fonction de classe C^1 sur $J = [a, b[$ telle $\varphi(J) \in I$. Posons $L = \lim_{x \rightarrow b} \varphi(x)$. $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ et $\int_{\varphi(a)}^L f(u)du$ sont de même nature et égales si convergentes.

Exemple 7.4.2. On montre que $\int_0^{+\infty} \sin(e^t)dt$ est de même nature que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ en faisant le changement de variable $u = e^t$.

Remarque 7.4.1. Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en une intégrale généralisée et vice-versa.

Exemple 7.4.3. On montre que $\int_0^1 \frac{\cos(u)}{\sqrt{(u)}} du = 2 \int_0^1 \cos(t^2)dt$ (en faisant le changement de variable $t = \sqrt{u}$) et donc converge.

Chapitre 8

Transformation de Fourier

8.1 Introduction : décomposition en série de Fourier

La transformation de Fourier est l'opération mathématique par laquelle on extrait d'un signal en fonction d'une variable (temps, distance ...) les composantes de ce signal en fonction de la variable de dimension inverse (*temps*⁻¹ = fréquence, *distance*⁻¹...). A titre d'exemple, un son provenant d'un instrument (signal en fonction du temps) est analysé pour connaître le poids relatifs des différentes fréquences qui le constituent.

Soit f une fonction T-périodique. Sous certaines conditions sur f (par exemple si f est C^1 par morceaux), il est possible de décomposer cette fonction comme somme infinie de signaux sinusoïdaux :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

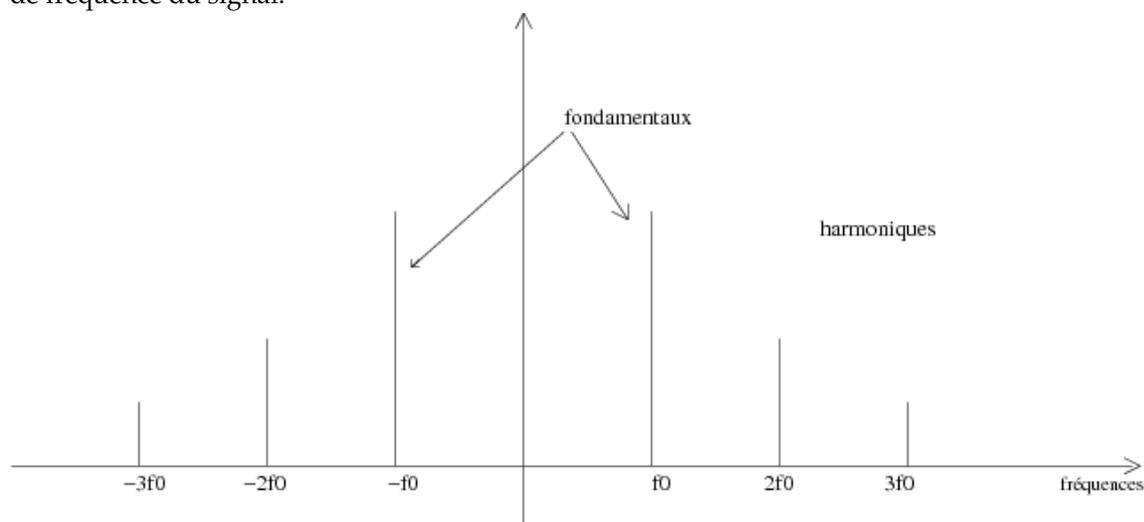
avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Les termes sinusoïdaux sont appelés harmoniques. L'harmonique de rang n est :

$$u_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$u_n(t) = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)$$

avec $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\tan(\varphi_n) = \frac{b_n}{a_n}$. A_n représente l'amplitude, $\frac{2\pi}{n\omega} = \frac{T}{n}$ la période, φ_n la phase et $\frac{n\omega}{2\pi}$ la fréquence. On peut représenter l'amplitude A_n des différentes harmoniques en fonction de leurs fréquences $\frac{n}{T} = nf_0$ (n variant de $-\infty$ à $+\infty$). On obtient alors un diagramme en bâtons appelé spectre de fréquence du signal.



Ce spectre permet de mettre en évidence l'importance du "fondamental" et des harmoniques (décroissance plus ou moins rapide). Il peut servir à déterminer le nombre d'harmoniques nécessaires pour transmettre la quasi totalité de l'énergie du signal (bande passante).

Revenons à la décomposition de f . On peut à l'aide des formules d'Euler écrire

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(\frac{2i\pi nt}{T}\right) \quad (8.1)$$

où les coefficients c_n sont complexes. On montre que

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right) dx \quad (8.2)$$

Pour une fonction non périodique, on ne peut pas utiliser la relation (8.1). Mais on peut considérer que c'est une fonction dont la période est infinie. Si T est "très grand" l'ensemble des fréquences $s = \frac{n}{T}$ est un ensemble qui couvre presque toutes les fréquences possibles. On passe d'une somme discrète (sur n) à une somme continue, c'est-à-dire à une intégrale en s . La relation (8.1) devient alors

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_n \exp(2i\pi st) T ds \quad (8.3)$$

En faisant tendre T vers l'infini dans (8.2), on obtient

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi sx) dx \right) \exp(2i\pi st) ds \quad (8.4)$$

La transformation de Fourier est ainsi un passage à l'espace des fréquences. Ceci motive la définition du paragraphe suivant

8.2 Définitions et propriétés

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, de la variable réelle x .

Définition 8.2.1. On dit qu'une fonction f est absolument intégrable si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ existe.

On suppose f absolument intégrable.

Définition 8.2.2. On appelle transformée de Fourier de $f(x)$, la fonction complexe de la variable réelle v :

$$\hat{f}(v) = \mathcal{F}[f(x)](v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi vx) dx.$$

Remarque 8.2.1. L'intervalle d'intégration n'étant pas borné, l'intégrale n'a pas nécessairement un sens, la transformée de Fourier n'existe pas toujours pour une fonction quelconque (non absolument intégrable). Cependant, on peut élargir la définition à des ensembles de fonctions plus grands que l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarque 8.2.2. Il existe d'autres définitions possibles de la transformation de Fourier

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(2i\pi vx) dx,$$

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ivx) dx,$$

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(ivx) dx.$$

(Les résultats qui vont suivre demeurent vrais à un coefficient près avec ces différentes définitions.)

Définition 8.2.3. On définit le produit de convolution de deux fonctions absolument intégrables f et g , de la façon suivante :

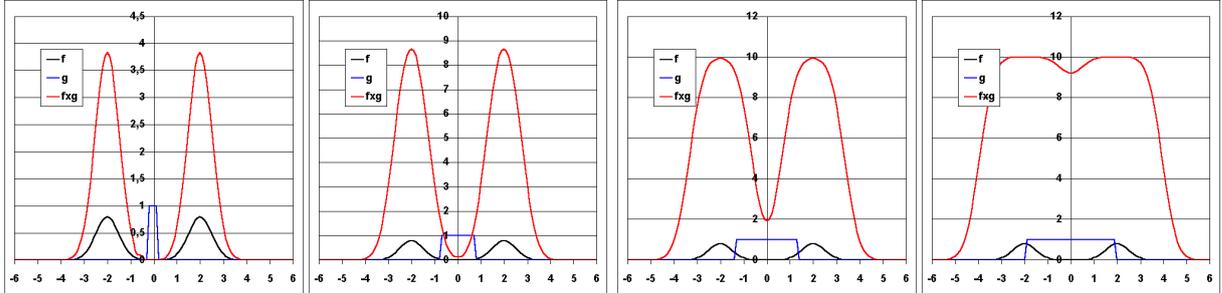
$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt.$$

Remarque 8.2.3. On montre aisément que

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(x-t) dt = g * f(x).$$

Cette transformation est particulièrement pratique pour représenter l'observation physique (spectroscopique par exemple) d'un phénomène obtenu à l'aide d'un instrument de mesure donné. Un cas expérimental est l'observation d'un spectre d'absorption (UV, visible, IR ...) par un spectrophotomètre possédant une fente de sortie.

Les figures ci-dessous montrent que si on élargit la fente (g en bleu), la mesure expérimentale (le produit de convolution, $f * g$, en rouge) du spectre théorique composée de 2 raies (f en noir) apparaît sous une forme plus grande mais de moins en moins résolue (à mesure que la fente s'élargit, on ne distingue pratiquement plus les deux pics).



Proposition 8.2.1. Soit f est absolument intégrable telle que $\hat{f}(v)$ soit absolument intégrable, alors on peut obtenir $f(x)$ à partir de $\hat{f}(v)$ par la transformation dite inverse

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(v) \exp(2i\pi vx) dv.$$

Dans ce qui suit f et g sont deux fonctions suffisamment régulières. Soient λ et μ deux réels ou complexes.

Proposition 8.2.2. 1. F est un opérateur linéaire.

$$\mathcal{F}[\lambda f(x) + \mu g(x)](v) = \lambda \mathcal{F}[f(x)](v) + \mu \mathcal{F}[g(x)](v).$$

2.

$$\mathcal{F}[f(-x)](v) = \hat{f}(-v).$$

3.

$$\mathcal{F}[\bar{f}(x)](v) = \overline{\hat{f}(-v)}.$$

Proposition 8.2.3. 1. changement d'échelle

$$\mathcal{F}[f(ax)](v) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{v}{a}\right).$$

2. formule du retard

$$\mathcal{F}[f(x - a)](v) = \exp(-2i\pi va) \hat{f}(v).$$

3. translation

$$\mathcal{F}[\exp(2i\pi v_0 x) f(x)](v) = \hat{f}(v - v_0).$$

4. transformée d'une dérivée

$$\mathcal{F}[f'(x)](v) = 2i\pi v \hat{f}(v).$$

Plus généralement, on a

$$\mathcal{F}[f^{(m)}(x)](v) = (2i\pi v)^m \hat{f}(v).$$

5. dérivée d'une transformée

$$\mathcal{F}[x f(x)](v) = \frac{1}{-2i\pi} \frac{d}{dv} \hat{f}(v).$$

Plus généralement, on a

$$\mathcal{F}[(-2i\pi x)^m f(x)](v) = \hat{f}^{(m)}(v).$$

6. produit de convolution

$$\mathcal{F}[f * g(x)] = \hat{f}(v) \hat{g}(v).$$

7. formule d'inversion

$$\mathcal{F}[\hat{f}(v)](x) = f(-x).$$

8.3 Exemples de transformées de Fourier

On appelle fonction "porte" la fonction définie par

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transformée de Fourier de Π est

$$\mathcal{F}[\Pi(x)](v) = \frac{\sin(\pi v)}{\pi v}.$$

Cette fonction s'appelle sinus cardinal. On remarque qu'elle est prolongeable par continuité en 0.

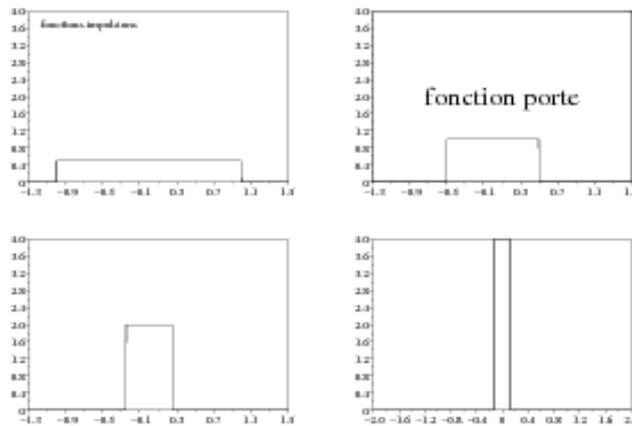


FIGURE 8.1 – Fonctions impulsions

On définit aussi les fonctions impulsions par

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La transformée de Fourier de Π_T est

$$\mathcal{F}[\Pi_T(x)](v) = \frac{\sin(\pi T v)}{\pi T v}.$$

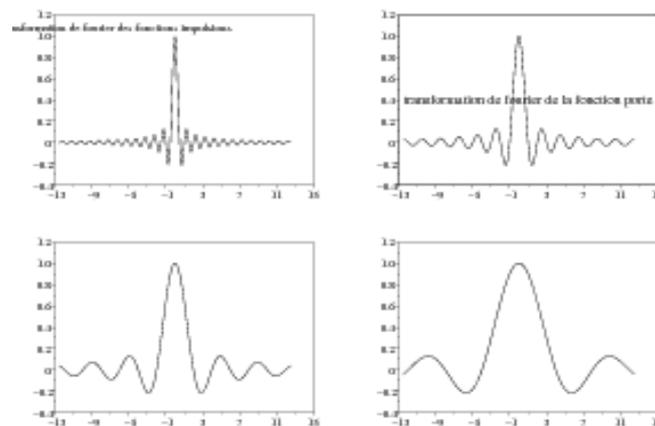


FIGURE 8.2 – Transformées de Fourier des fonctions impulsions