Etude des réseaux métaboliques à l'état stationnaire

1 Calcul matriciel

Définition 1.1 *Soit une matrice A d'ordre (n, p). Soit une matrice (colonne) b d'ordre $(n, 1)$. On appelle matrice augmentée $(A|b)$, la matrice d'ordre $(n, p+1)$, consituée de la matrice A à laquelle on ajoute en dernière colonne la matrice b.*

Théorème 1.1 (dit de Rouché Fontené) *Un système d'équations linéaires à n équations et p variables, de la forme $Ax = b$, possède une solution au moins si et seulement si le rang de A est égal à celui de la matrice augmentée $(A|b)$. S'il existe des solutions, elles forment alors un sous-espace de dimension $p - rang(A)$ ie il faut $p - rang(A)$ vecteurs linéairement indépendants pour décrire toutes les solutions. En particulier :*

- *si $p = rang(A)$, la solution est unique,*
- *sinon il existe une infinité de solutions.*

Exercice 1.1

1. *Définir la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
2. *Calculer son rang.*
3. *Déterminer le rang de* $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = (A|b)$ *où* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. *Soit le système linéaire suivant* $\begin{cases} -x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 1 \end{cases}$. *Admet-il aucune, une ou une infinité de solutions ? S'il y a des solutions, les déterminer.*
5. *Calculer A^{-1} puis $A^{-1}b$ (on retrouve la solution du système)*

Exercice 1.2

1. *Définir la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
2. *Calculer son rang.*
3. *Déterminer le rang de $(A|b)$ où* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. *Soit le système $Ax = b$. Admet-il aucune, une ou une infinité de solutions ? S'il y a des solutions, les déterminer.*
5. *Peut-on calculer A^{-1} puis $A^{-1}b$? si oui, le faire.*
6. *Déterminer le rang de $(A|b_2)$ où* $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
7. *Le système $Ax = b_2$ admet-il aucune, une ou une infinité de solutions ? S'il y a des solutions, les déterminer.*

Exercice 1.3 *mêmes questions avec* $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 Réseau métabolique et calcul matriciel

Exercice 2.1 *On considère le réseau métabolique 1*

1. *Ecrire sa matrice de stochimétrie S. Donner son rang. Quelle est la dimension du noyau de S?*

2. *Quel système vérifient le vecteur des vitesses $V = (v_i)_{i=1\cdots 5}$ du réseau à l'état stationnaire.*

3. *On note $v_m = (v_1, v_2, v_5)$ et $v_c = (v_3, v_4)$. On suppose que les vitesses (v_1, v_2, v_5) ont été mesurées. Montrer qu'à l'état stationaire $SV = 0$ peut s'écrire $S_c v_c = -S_m v_m$ (on précisera S_c et S_m).*

4. *Montrer à l'aide du théorème de Rouché-Fontené que le problème ci-dessous n'admet aucune solution*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   En déduire que l'on ne peut pas avoir $v_1 = v_2 = v_5 = 1$ dans le réseau à l'état stationnaire.

5. *Montrer qu'à l'état stationnaire, si on fixe $v_1 = v_2 = cte$ alors cela fixe de manière unique les autres vitesses du réseau.*

6. *Montrer qu'à l'état stationnaire, fixer seulement v_1 ne suffit pas à fixer les autres vitesses de manière unique.*

Exercice 2.2 *On considère le réseau métabolique 2.*
On note $v_m = (v_1, v_3, v_6)$ et $v_c = (v_2, v_4, v_5)$.

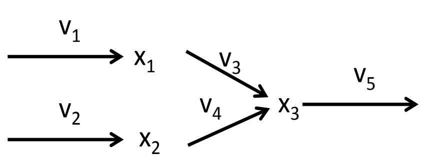
1. *Ecrire sa matrice de stoechiométrie S. Donner son rang.*

2. *Quelle est la dimension du noyau de S? Le déterminer.*

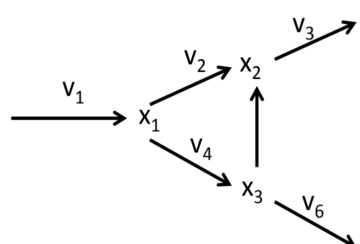
3. *Quelle critique peut-on faire sur les résultats (vecteur du noyau et thermodynamique) ?*

4. *On suppose que les vitesses de v_1, v_3 et v_6 ont été mesurées. Montrer qu'à l'état stationaire, on peut écrire $S_c v_c = -S_m v_m$ (on précisera S_c et S_m).*

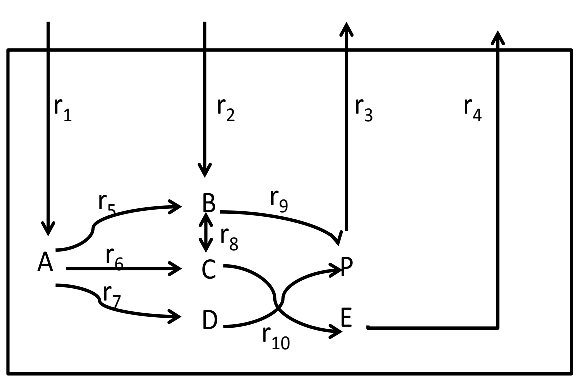
5. *Calculer le rang de S_c. Peut-on déduire v_c à partir de v_m de façon unique ?*



Réseau n°1



Réseau n°2



Réseau n°3

Exercice 2.3 *Reprendre le réseau métabolique suivant*

$$\begin{array}{llcl}
\mathrm{R1:} & \mathrm{A_{ext}} & \longrightarrow & \mathrm{A} \\
\mathrm{R2:} & \mathrm{B_{ext}} & \longleftrightarrow & \mathrm{B} \\
\mathrm{R3:} & \mathrm{P} & \longrightarrow & \mathrm{P_{ext}} \\
\mathrm{R4:} & \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{B} \\
\mathrm{R5:} & \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{C} \\
\mathrm{R6:} & \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{D} \\
\mathrm{R7:} & \mathrm{B} & \longleftrightarrow & \mathrm{C} \\
\mathrm{R8:} & \mathrm{2B} & \longrightarrow & \mathrm{P} \\
\mathrm{R9:} & \mathrm{C+D} & \longrightarrow & \mathrm{P}
\end{array}$$

On connaît son graphe, sa matrice de stochiométrie S. On sait que le rang de S est égal à 5 et donc que le noyau de S est de dimension 4. On a déterminé une base de ce noyau. On continue ici l'étude de ce réseau.

1. *On donne les vecteurs suivants*
$$\begin{array}{l}
u_1 =^t (1,-1,0,1,0,0,0,0,0) \\
u_2 =^t (1,-1,0,0,1,0,-1,0,0) \\
u_3 =^t (0,2,1,0,0,0,0,1,0) \\
u_4 =^t (1,1,1,0,0,1,1,0,1)
\end{array}$$
   (a) *Définir la matrice U formée des colonnes u_1, u_2, u_3 et u_4.*
   (b) *Déterminer le rang de U ?*
   (c) *Les vecteurs u_i pour $i = 1 \cdots 4$ sont-ils linéairement indépendants ?*
   (d) *Calculer SU (attention: produit matriciel). Que peut-on en déduire pour les vecteurs u_i pour $i = 1 \cdots 4$?*
   (e) *Quel est l'intérêt de ces vecteurs comparativement à d'autres vecteurs quelconques du noyau ?*

2. (a) *On suppose que les vitesses de v_1, v_2, et v_3 ont été mesurées. Peut-on en déduire les autres vitesses à l'état stationnaire de façon unique? (justifier)*
   (b) *On suppose maintenant que les vitesses v_1, v_3 ,v_4, et v_8 ont été mesurées. On note $v_m = (v_1, v_3, v_4, v_8)$ et $v_c = (v_2, v_5, v_6, v_7, v_9)$.*
      i. *Ecrire le système* **matriciel** *vérifié par v_c en fonction de v_m à l'état stationnaire:*
$$S_c v_c = -S_m v_m$$
      (donner les matrices S_c et S_m).
      ii. *Peut-on déduire v_c à partir de v_m ?*
      iii. *On donne $v_m = (6, 3, 1, 1)$. Déterminer si possible v_c.*
      iv. *On donne $v_m = (1, 3, 4, 3)$. Déterminer si possible v_c.*

Exercice 2.4 *On considère le réseau métabolique 3.*

1. *Ecrire sa matrice de stoechiométrie S.*

2. *On suppose que les vitesses de r_1 à r_4 ont été mesurées. On note $r_m = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ et $r_c = (r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10})$.*
   (a) *Ecrire le système (matriciellement) vérifié par v_c en fonction de v_m à l'état stationnaire.*
   (b) *Peut-on déduire v_c à partir de v_m ?*

3. *On suppose maintenant que les vitesses de r_1, r_2, r_3 et r_8 ont été mesurées. Peut-on en déduire les autres à l'état stationnaire.*