
Bordeaux INP
ENSTBB

# Ecole Nationale Supérieure de Technologie des Biomolécules de Bordeaux

# Mathématiques : remise à niveau

**C. Nazaret**

# Table des matières

# 1 Les logiciels de mathématiques

## 1.1 Formats de représentation numériques

Un ordinateur manipule des données très diverses : des entiers, des réels, des textes, des images, des sons. Néanmoins toutes ces données sont représentées par des suites finies de 0 et de 1 appelés bits. Chaque type de données (les entiers, les réels,...) utilisera un système de représentation qui lui est propre mais à chaque fois la donnée sera représentée par des suites finies de bits. On parle de représentation numérique de ces données.

## 1.2 Quelques mots sur la représentation numérique des nombres en machine

Tout le codage informatique se fait uniquement à l'aide de 0 et de 1 (c'est le système binaire : en base 2, le nombre 3 se note 11). De cette façon, on peut représenter tous les entiers. Cependant, la représentation binaire nécessitant l'usage de beaucoup de chiffres (même pour des nombres assez petits), on utilise la notation hexadécimale (base 16).

Puis pour représenter les réels, la notation en virgule flottante est une méthode d'écriture fréquemment utilisée dans les ordinateurs (équivalente à l'écriture en notation scientifique). Cette écriture permet de coder des nombres avec moins de chiffres qu'une simple écriture en binaire. Elle consiste à représenter un nombre par un signe s (égal à -1 ou 1), une mantisse m et un exposant e (entier relatif, généralement borné). Un tel triplet représente un réel $s.m.b^e$.

L'avantage de la représentation en virgule flottante par rapport à la virgule fixe ou à l'entier, est que la virgule flottante est capable, à nombre de bits égal, de gérer un intervalle de nombres réels plus important. En revanche, elle est moins précise.

## 1.3 Les logiciels de mathématiques

Il existe principalement deux types de logiciels de mathématiques : les logiciels de calcul numérique et les logiciels de calcul formel. Comme exemples d'opérations de calcul formel, on peut citer le calcul de dérivées ou de primitives, la simplification d'expressions,...

Lorsqu'on utilise un logiciel de calcul numérique tous les calculs sont approchés à l'aide de nombres en virgule flottante alors qu'en calcul formel, les résultats sont exacts. Cela peut paraître surprenant de calculer de façon approchée mais pour beaucoup de problèmes lorsqu'on ne sait pas calculer la solution de façon explicite, on se "contentera" d'un résultat approché (l'important étant alors d'être capable de quantifier l'erreur faite lors du calcul).

Le calcul numérique c'est un compromis entre la précision et le temps de calcul. Par exemple, si vous souhaitez pronostiquer la météo, et que vous avez une quantité gigantesque de données et de calculs à traiter, à l'heure actuelle les logiciels font un choix entre une météo très précise du lundi obtenue après le lundi ou une météo moins précise obtenue avant le lundi !

- Parmi les logiciels de calcul formel (ou symbolique), citons par exemple :
  — Maple
  — Mathematica
  — Xcas (libre)
  — ...
- Parmi les logiciels de calcul numérique, citons par exemple :
  — Matlab
  — GNU Octave (libre)
  — Scilab (libre)
  — R (dédié aux traitements statistiques des données)
  — ...

Par exemple, avec Xcas, quand on calcule la dérivée de sinus, on fait du calcul symbolique.

```
diff(sin(x),x);
cos(x)
```

Avec Scilab, on fait du calcul approché

```
x=0:1:5;diff(sin(x))
ans  =

    0.8414710    0.0678264  - 0.7681774  - 0.8979225  - 0.2021218
```

Avec R, il est possible de faire du calcul symbolique mais ce logiciel n'est pas fait pour cela.

```
> D(expression(sin(x)),"x")
cos(x)
```

Nous utiliserons les logiciels libres : Xcas et R.
Pour les télécharger

— Xcas :

  `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/install_fr`

— R :

  `http://www.r-project.org/`

— Scilab :

  `http://www.scilab.org/`

Pour être complet, ajoutons qu'il existe aussi des logiciels dédiés à la géométrie, aux statistiques, aux dessins et traitement de texte mathématique.

# 2 Exercices : Fonctions

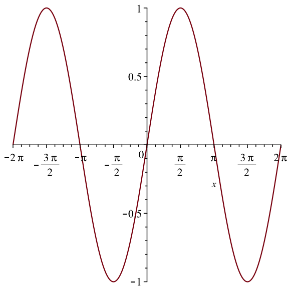
## 2.1 Fonctions usuelles et équations

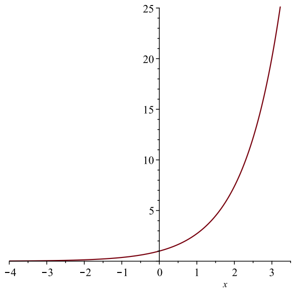
**Exercice 1.**

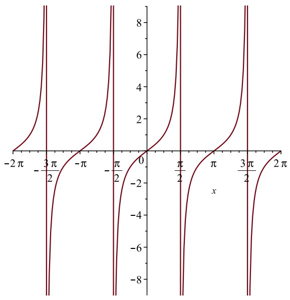
Associer les fonctions à leur graphe

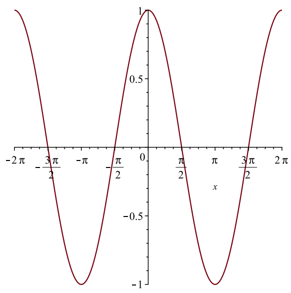
Rappeler pour chacune de ces fonctions : ensemble de définition, parité, périodicité, limites, propriétés.

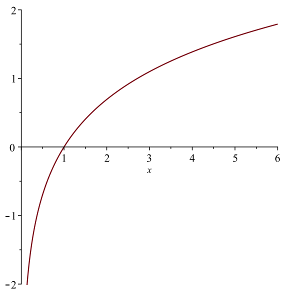
objectif : revoir les fonctions usuelles exp, ln, sin, cos, tan, $x^2$, $x^3$.

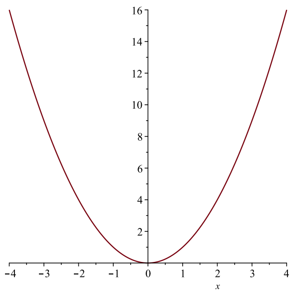


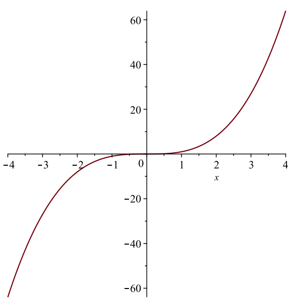












**Remarque 2.1.** *Vous pouvez tracer le graphe de sinus avec Xcas :*

```
plot(sin(x),x=-2..2,color=green,xstep=0.1)
```

*avec R*

```
x=seq(-2,2,by=0.1);plot(x,sin(x))
```

**Exercice 2.** Tracer à main levée l'allure de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^2-1$, et $x \mapsto (x-1)^2$ sur un même graphe.

**Remarque 2.2.** *Avec Xcas, vous pouvez définir une fonction et tracer son graphe*

```
f:=x->x^2-1;
plot(f(x),x=-2..2,xstep=0.1)
```

**Exercice 3.** Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} (x-1)(x+4)-2x(x-1)=0 & 2x^3-3x=0 & \sqrt{3x+6}=3 \\ \sqrt{3x+6}=-3 & \dfrac{-4}{x}=\dfrac{2}{x+3} & \dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}=0 \\ x^2+x-6=0 & (x+1)^2-(x-3)^2=0 & \end{array}$$

**Exercice 4.** Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \cos(2x)=\frac{\sqrt{3}}{2} & \cos(x)=-2 & \sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\cos(x)+1=0 & \cos(x)\sin(x)=\frac{1}{4} & 2\sin^2(x)+1=0 \end{array}$$

**Exercice 5.** Trouver l'ensemble de définition des fonctions suivantes

$$\begin{array}{ccc} f_1(x)=\dfrac{x}{4+x} & f_2(x)=\cos\dfrac{x^2}{x+4} & f_3(x)=\sqrt{x+4} \\ f_4(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+3x-4} & f_5(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{(x+1)(x+2)}} & f_6(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \\ f_7(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+3x-4}\right) & f_8(x)=\sqrt{(x^2+1)} & f_9(x)=|x^2-9| \end{array}$$

**Exercice 6.** Les fonctions suivantes sont-elles périodiques (si oui, donner leur période) ? : $\sin(x)$, $\tan(x)$, $\exp(x)$, $\cos(3x+2)$, $2\sin^2(x)-\sin(x)-1$. Sont-elles paires ?

**Exercice 7.** Déterminer les limites des fonctions suivantes au point $x_0$ :

$$\begin{array}{llll} g_1(x)=x^2+\frac{1}{x} & x_0=0;+\infty & g_2(x)=3\ln(x-1) & x_0=1;+\infty \\ g_3(x)=\frac{7}{x^2} & x_0=+\infty & g_4(x)=5e^x-2x & x_0=-\infty \end{array}$$

**Exercice 8.** Déterminer les limites des fonctions suivantes au point $x_0$ :

$$\begin{array}{llll} f_1(x)=\frac{x^2+x-6}{2x^2-14x+20} & x_0=2,5,\pm\infty & f_2(x)=\frac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2} & x_0=1,\pm\infty \\ f_3(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} & x_0=-1 & f_4(x)=\sqrt{x^2+3x+2}-3x & x_0=\pm\infty \\ f_5(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x-1}} & x_0=+\infty & f_6(x)=\frac{\ln x}{x^2+1} & x_0=+\infty \\ f_7(x)=(x^3-1)\exp(x) & x_0=-\infty & f_8(x)=\frac{\ln x+1}{\ln x-1} & x_0=1,+\infty \\ f_9(x)=\frac{\exp(x)}{x^2+1} & x_0=+\infty & f_{10}(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1) & x_0=1,+\infty \\ f_{11}(x)=\frac{x+\ln(1+x)}{x} & x_0=0 & f_{12}(x)=2x^5+8x^2+x-1 & x_0=\pm\infty \\ f_{13}(x)=\frac{-2x^3+x+1}{x^2+x-2} & x_0=\pm\infty,-2,1 & f_{14}(x)=\frac{2^x}{x^2+x-2} & x_0=\pm\infty \\ f_{15}(x)=\frac{\ln(x^2-2x)}{x^2+x-2} & x_0=\pm\infty & f_{16}(x)=\frac{5x}{e^x} & x_0=-\infty \end{array}$$

**Exercice 9.** La fonction $f$ est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ a - \dfrac{b}{x} & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

Déterminer les paramètres réels $a$ et $b$ pour que $f$ soit continue partout.

**Exercice 10.** Calculer les dérivées - objectif : connaître les dérivées des fonctions usuelles et savoir dériver une somme, un produit, une composée, une réciproque, ...

$$\begin{array}{llll} f_1(x) = 2x^5 + 4x & f_2(x) = \sqrt{x^2 - 1} & f_3(x) = \exp(2x+4) & f_4(x) = \sin(e^x + x) \\ f_5(x) = \frac{3x+5}{x+1} & f_6(x) = \tan(x) & f_7(x) = \cos(x)\ln(x^2) & f_8(x) = \ln(\sqrt{x^2-1}) \\ f_9(x) = |x-2| & f_{10}(x) = (2x+2)^4 & f_{11}(x) = \dfrac{1}{x^2} & f_{12}(x) = x^{1/x} \end{array}$$

**Remarque 2.3.** *Avec Xcas, vous pouvez définir une fonction et calculer sa dérivée :*

```
f:=x->2*x^5+4*x ;
diff(f(x),x)
```

**Exercice 11.**

1. Donner les valeurs de $\sin(0)$, $\sin(\frac{\pi}{4})$, $\sin(\frac{\pi}{3})$, $\sin(\frac{\pi}{2})$.
2. Donner les valeurs de $\arcsin(0)$, $\arcsin(2)$, $\arcsin(1)$, $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$,
3. Calculer $\sin(\arcsin(0))$, $\sin(\arcsin(1))$, $\sin(\arcsin(\frac{-1}{2}))$
4. Calculer $\arcsin(\sin(0))$, $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4}))$, $\arcsin(\sin(\pi))$

**Exercice 12.** Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(4x+1) + \ln(x+2) = 2\ln(3x)$,
2. $e^x + 4e^{-x} - 12 = 0$,
3. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} + 4^{x+3}$,
4. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

**Exercice 13.** Montrer que les équations suivantes ont au moins une solution $x$ dans l'ensemble donné

1. $e^{1/x} + x^2(\sqrt{e} - e) = 0$ dans $[1,2]$,
2. $\cos x = x$ dans $[0, \pi/2]$,
3. $x(\ln x)^2 = 1/(2e)$ dans $]0, 1/e]$
4. $x^5 - 3x = 1$ dans $\mathbb{R}$,
5. $P(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$, où $P$ est une fonction polynôme de degré impair,
6. $\tan x = x$ dans $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$, où $n \in \mathbb{N}$,
7. $f(x) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ dans $[a,b]$, où $f$ est continue sur $[a,b]$.

**Remarque 2.4.** *Avec Xcas, on obtient*

```
solve(exp(1/x)+x^2*(sqrt(e)-e)=0,x)
"Unable to isolate x in exp(1/x)+(sqrt(e)-e)*x^"
```

*Mais on peut obtenir une valeur approchée*

```
fsolve(exp(1/x)+x^2*(sqrt(e)-e)=0,x)
Solving by bisection with change of variable x=tan(t) and t=-1.57..1.57. Try fsolve(equa
[1.38671783277]
```

## 2.2 Etude de fonctions

**Exercice 14.** Population et environnement : Une population isolée disposant d'un territoire donné commence à se développer tout en détruisant de maniére irreversible son environnement par la pollution qu'elle engendre. Pour modéliser cette évolution en fonction du temps, on utilise la fonction $P$ définie sur l'intervallle $[0;+\infty[$ par :

$$P(t) = 1000e^{t-\frac{t^2}{10}},$$

1. Donner $P(0)$ puis déterminer la limite de $P$ quand $t$ tend vers $+\infty$.
2. Etudier les variations de $P$ et préciser son extremum (on donne $e^{5/2} = 12.182$ é $10^{-3}$).
3. Déterminer la valeur $t^*$ à laquelle la population retrouve son effectif initial (à $t = 0$).
4. La population s'éteint quand $P(t) < 1$. Déterminer la valeur $t_1$ à partir de laquelle cela se produit.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de $P$ (avec Xcas).

**Exercice 15.** Un médicament est injecté par voie intramusculaire. Il passe du muscle au sang puis est éliminé par les reins. On désigne par $f(t)$ la quantité de médicament (en millilitres) contenue dans le sang à l'instant $t$ (en heures). Une étude a permis de constater que pour tout $t$ de $[0;+\infty[$, on a :

$$f(t) = q(e^{-0.5t} - e^{-t})$$

où $t = 0$ est l'heure de l'injection et $q$ la quantité de médicament injecté.

1. Présence du médicament dans le sang.
   (a) Etudier les variations de la fonction $f$.
   (b) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et dresser le tableau des variations de $f$.
2. Contrôle des effets du médicament La quantite contenue dans le sang ne doit pas dépasser le seuil de toxicité $s_M = 2.6$ et le médicament est efficace si $s_m = 1.2$.
   (a) Déduire de la première partie, les valeurs que l'on peut donner à $q$ pour qu'à aucun moment la quantité présente dans le sang ne dépasse $s_M$.
   (b) On suppose que $q = 10$. Dans un repère orthogonal, tracer la courbe de la fonction $f$ et sa tangente au point d'abscisse 0.
   (c) Déterminer l'intervalle de temps pendant lequel le médicament est efficace. Vérifier graphiquement vos résultats.

**Exercice 16.** Soient $\rho, c > 0$. Soient les fonctions (de saturation)

$$f(x) = \rho\frac{x}{c+x} \quad g(x) = \rho\frac{x^3}{c^3+x^3} \quad x \in \mathcal{D} = [0,+\infty[.$$

1. Calculer $f(0)$ et $g(0)$. Pour quelle valeur de $\rho$ les limites en $+\infty$ de $f$ et de $g$ sont-elles égales à 3.
2. Etudier les points d'intersection des courbes représentatives de $f$ et $g$.
3. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$. Dresser les tableaux de variation de $f$ et $g$ en précisant la pente des tangentes en $x = 0$
4. Dessiner l'allure du graphe de $g$. Vérifier qu'il possède un point d'inflexion en un point $x_I \in \mathcal{D}$. Déterminer $c$ de telle sorte que $x_I = 2$.
5. Représenter les graphes de $f$ et $g$ sur le même dessin pour la valeur de $c$ calculée à la question précédente et $\rho$ calculé à la question (a). Y-a-t'il un point d'inflexion pour $f$ ?

## 2.3 Optimisation

"L'optimisation est une branche des mathématiques et de l'informatique en tant que disciplines, cherchant à modéliser, à analyser et à résoudre analytiquement ou numériquement les problèmes qui consistent à déterminer quelles sont la ou les solution(s) satisfaisant un objectif quantitatif tout en respectant d'éventuelles contraintes."

**Exercice 17.** On considère les fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$.

1. Sont-elles continues, dérivables ? Donner leur dérivée et tracer leur graphe.
2. Vérifier que $f'$ et $g'$ s'annulent en $x = 0$. Peut-on en conclure que 0 est un minimum de ces fonctions ?
3. Calculer $f''$ et $g''$. Conjecturer sur l'existence d'un minimum ou maximum pour une fonction d'une variable deux fois dérivable.
4. Déterminer le minimum et le maximum de $f$ sur $[-1; 1]$ (on parle de max. ou min. sous contrainte : être dans l'intervalle $[-1; 1]$).
5. Peut-on dire qu'une fonction admet un minimum ou maximum lorsque sa dérivée s'annule ?

(Rappel : fonction convexe et point d'inflexion)

**Exercice 18.** On considère la fonction $f(x) = \cos(x)\exp(-x/10)$.

1. Tracer son graphe sur $[0; 10]$ avec Xcas

   ```
   plot(cos(x)*exp(-x/10),x=0..10,xstep=0.25)
   ```

2. Déterminer sa dérivée et résoudre $f'(x) = 0$.
3. La fonction admet-elle un minimum global sur $\mathbb{R}$ ? $[0; 10]$ ? (on parlera de min/max local ou global).

**Exercice 19.** On considère la fonction $f(x) = \sqrt{|1 - x^2|}$.

1. Donner son ensemble de définition.
2. Tracer son graphe avec Xcas sur $[-3; 3]$

   ```
   plot(sqrt(abs(1-x^2)),x=-3..3,xstep=0.01)
   ```

   Admet-elle un maximum (local/global), un minimum ?
3. Est-elle continue ? dérivable ?
4. Peut-on dire qu'une fonction admet un minimum ou maximum lorsque sa dérivée s'annule ?

## 2.4 Développement de Taylor - Notions sur les séries

Si $f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ contenant $a$ et telle que $f^{(n)}(a)$ existe alors on peut approcher $f$ au voisinage du point $a$ par le polynéme ci-dessous

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R(x)$$

$R$ est un reste qui dépend de $x$. Sous certaines conditions sur $f$, on obtient un reste $R$ plus précis. **Exercice 20.** Donner le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de $a = 0$ des fonctions exp, cos et sin.

## 2.5 Fonctions de plusieurs variables (pour les 2A)

**Exercice 21.** Soit la fonction de plusieurs variables suivante :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & 2xy + y^2 - zy. \end{array}$$

Calculer ses dérivées partielles. Ecrire son vecteur gradient.

**Remarque 2.5.** *Avec Xcas, vous pouvez définir $f$, calculer ses dérivées partielles et son gradient*

```
f:=(x,y)->2*x*y+y^2-z*y;
diff(2*x*y+y^2-z*y,x);
grad(2*x*y+y^2-z*y,[x,y,z])
```

**Exercice 22.** Soit la fonction de plusieurs variables suivante :

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & (x^2+4xy, xy^2+2) \end{array}$$

Calculer ses dérivées partielles. Ecrire sa matrice jacobienne.

**Exercice 23.** Soit la fonction de plusieurs variables suivante :

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 2x^2y+2x^2+y^2. \end{array}$$

Calculer son gradient et sa hessienne. Chercher ses points critiques. En déduire ses éventuels extrema.

**Remarque 2.6.** *Avec Xcas, vous pouvez calculer le gradient, chercher les points critiques (qui annulent le gradient), calculer la hessienne et l'évaluer aux points critiques (par exemple ici en $x = 1$ et $y = -1$)*

```
f:=(x,y)->2x^2 *y+2*x^2+y^2;
grad(f(x,y),[x,y])
[2*2*x*y+2*2*x,2*x^2+2*y]
solve(grad(f(x,y),[x,y]),[x,y])
[x=0,y=0],[x=1,y=-1],[x=-1,y=-1]
hessian(f(x,y),[x,y])
[4*y+4,4*x]
[2*2*x, 2    ]
subst(hessian(f(x,y),[x,y]),[x=1,y=-1])
[0, 4]
[4, 2]
```

# 3 Exercices : Nombres complexes

## 3.1 Forme algébrique - conjugué

**Exercice 24.** Soit $z = 3 - 5i$ et $w = -2 + i$. Représenter dans un repére orthonormé les points M, N et M′ d'affixe $z$, $w$ et $\bar{z}$ respectivement. Calculer $z + \overline{w}$, $|z|$, $\bar{z}w$ et $\frac{z}{w}$.

**Remarque 3.1.** *Avec Xcas, vous pouvez calculer la partie réelle, imaginaire, le conjugué d'un complexe et simplifier des expressions :*

```
z:=3-5*I
conj(z)
re(z)
im(z)
simplifier(z+conj(-2+I))
```

**Exercice 25.** Trouver le nombre complexe $z$ qui vérifie :
1. $(2+i)z - (3-i) = 1 - 2i$ 2. $6z - 2i = 2 - 2iz + 8i$

**Remarque 3.2.** *Avec Xcas, vous pouvez résoudre une équation :*

```
csolve((2+I)*z-(3-I)=1-2*I,z)
```

**Exercice 26.** Simplifier (c'est-à-dire écrire sous forme algébrique a+bi) les nombres complexes suivants
1. $z_1 = i^7$ 2. $z_2 = \frac{9-2i}{2i}$ 3. $z_3 = \frac{2+5i}{8-3i}$ 4. $z_4 = (1+i)^7$ 5. $z_5 = \frac{1}{2-i}$

**Exercice 27.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1. $(2-i)(4+3i) - 2iz = 9z + i$ 2. $z^2 + z\bar{z} = 0$ 3. $z^2 = \bar{z}$

## 3.2 Forme trigonométrique (ou exponentielle)

**Exercice 28.** Représenter et écrire la forme trigonométrique des complexes suivants :

$$z_1 = 1+i, \quad z_2 = 1-i, \quad z_3 = \frac{1+i}{1-i}.$$

idem avec :

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3}, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}, \quad z_4 = \sqrt{3} + 3i.$$

**Remarque 3.3.** *Avec Xcas, vous pouvez calculer le module et l'argument d'un complexe :*

```
abs(z)
arg(z)
```

**Exercice 29.** Représenter et donner la forme algébrique (les parties réelles et imaginaires)

$$z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad z_3 = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

**Remarque 3.4.** *Avec Xcas, vous passez de la forme exponentielle à algébrique :*

```
z:=4*exp(-I*pi/4)
```

**Exercice 30.** Représenter et donner la forme exponentielle (le module et l'argument)

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i \quad z_2 = -2(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad z_3 = -4 + 4i$$

**Exercice 31.** Donner une valeur approchée du module et de l'argument en utilisant la calculatrice

$$z_1 = -1 + 4i \quad z_2 = -2 - 5i$$

**Exercice 32.** Donner la forme algébrique de $z = (1 + i\sqrt{3})^{245}$.

**Exercice 33.** Soient deux complexes $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$. Calculer $Z = \frac{z_1}{z_2}$. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.

**Exercice 34.** Soit la fonction dite de transfert définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $H(x) = \dfrac{1}{ix}$.

1. Calculer $G(x) = |H(x)|$ (cette fonction est appelée gain en théorie du signal).
2. Calculer l'argument de $H(x)$ (cette fonction est appelée phase en théorie du signal).
3. Calculer le gain en décibels défini par $G_{dB}(x) = 20log_{10}(|H(x)|)$. Calculer $\lim_{x\to+\infty} G_{dB}(x)$.
4. Tracé l'allure grossière des courbes.

En général ces courbes sont représentées en utilisant une échelle semi-logarithmique c'est-à-dire on trace $G_{dB}(x)$ en fonction de $log_{10}(x)$ (voir diagramme de Bode).

**Exercice 35.** Soit la fonction dite de transfert définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $H(x) = \dfrac{ix}{1+ix}$. Mêmes questions qu'à l'exercice précédent.

## 3.3 Résolution d'équations d'ordre $n \geq 2$

**Exercice 36.** Déterminer $z$ tel que $z^2 = z_i$ pour

$$z_1 = -2 + 4i \qquad z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

**Exercice 37.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{cc} z^2 = -5 & z^2 - 5z + 9 = 0 2z^2 - (20 + 9i)z + 50 = 0 \\ (z^2 + z + 1)^2 + 1 = 0 & 8z^2 - \bar{z} + 1 = 0 \end{array}$$

**Exercice 38.** Méme exercice :

$$\begin{array}{cc} x^2 - 3x + 2 = 0 & 5z^2 - 3z + 1 = 0 z^4 + z^2 + 1 = 0 \\ z^2 + (3-i)z + 2(1-i) = 0 & \end{array}$$

**Exercice 39.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \quad z^4 = i$$

**Exercice 40.** Linéariser (indic. utiliser les formules d'Euler)

1. $\cos^2(x)$
2. $\cos^2(x)\sin^4(x)$

**Exercice 41.** Soient $z \in \mathbb{C} - \{1\}$ et $Z = \frac{5z-2}{z-1}$. Comment faut-il choisir $z$ pour que $Z$ soit réel ?

# 4 Exercices : Calcul d'intégrales

**Exercice 42.** Calculer les intégrales

— ... où il faut reconnaitre une dérivée classique (Voir solutions)

$$F_1 = \int_0^1 (t^3 - \frac{1}{2})dt \qquad F_2 = \int_1^2 (\frac{1}{1+t})dt \qquad F_3 = \int_0^1 (\frac{4}{1+t^2})dt$$
$$F_4 = \int_0^1 (\frac{e^t}{e^t+1})dt \qquad F_5 = \int_0^1 (2te^{t^2+3})dt \qquad F_6 = \int_0^1 (\frac{t}{\sqrt{1+t^2}})dt.$$

— ... où il faut intégrer par parties (Voir solutions)

$$G_1 = \int_1^e \ln t dt \quad G_2 = \int_0^1 \arctan t dt \quad G_3 = \int_0^\pi t \sin t dt.$$

— ... où l'on peut faire le changement de variables indiqué (Voir solutions)

$$H_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{t^2+2t+5} dt \quad u = \frac{t+1}{2} \qquad H_2 = \int_0^2 \frac{t}{t^2+1} dt \qquad u = t^2$$
$$H_3 = \int_1^2 \frac{\ln t}{t} dt \qquad u = \ln t \quad H_4 = \int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2} dt \quad u = \arctan t$$

**Remarque 4.1.** *Avec Xcas, vous pouvez calculer une primitive ou une intégrale*

```
int(t^3-1/2,t)
t^4/4+t/-2
int(t^3-1/2,t=0..1)
(-1)/4
```

**Exercice 43.** Calculer les intégrales (Voir solutions)

$$J_0 = \int_1^2 (t^2+t)dt \qquad J_1 = \int_0^1 e^{-t} dt \qquad J_2 = \int_1^2 \frac{2t}{(t^2+1)} dt$$
$$J_3 = \int_{-1}^0 \frac{1}{(1-2t)} dt \qquad J_4 = \int_0^\pi t^2 \sin(t) dt \qquad J_5 = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$
$$J_6 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\sin(t)dt \quad J_7 = \int_0^{\pi/2} \cos^3(t)\sin^2(t)dt \qquad J_8 = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{t} dt$$

**Exercice 44.** Intégrales généralisées
Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$J_1 = \int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt \quad J_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt \quad J_3 = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 45.** Soit la variable aléatoire X de densité $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ pour $x$ positif et nulle sinon (où $\lambda > 0$ est un paramètre fixé.

1. Donner $F$ la fonction de répartition de $X$. Tracer son graphe.
2. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.
3. Calculer l'espérance de $X$ soit $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.
4. Quelle intégrale faut-il calculer pour obtenir la probabilité que $X$ soit comprise entre $a$ et $b$ ?

# 5 Exercices : Equations différentielles

**Exercice 46.** Classer les équations différentielles ci-dessous : 1 à variables séparables, 2 linéaire du 1er ordre avec second membre non nul à coefficients constants, 3 linéaire du 1er ordre avec second membre non nul à coefficients non constants (Voir solution)

$$\begin{array}{ccc}
x^2y(x) = \exp(-y(x)) & y'(x) + 2y(x) = \exp(x) & 3y'(x) - 5y(x) = 0 \\
y'(x) + 5xy(x) = \exp(x) & y'(x)y^2(x) = x & y'(x) + y(x) = \exp(x) + 1 \\
x(1+x)y'(x) = 2x + (x+2)y(x) & 2y'(x) + 5xy(x) = 0 & y'(x) = (1 + y^2(x))x \\
x^2y'(x) - 3y(x) = sin(x) & y'(x) = y(x)\ln(x) & y'(x) + y(x) = x
\end{array}$$

Résoudre les équations différentielles suivantes

**Exercice 47.** de tête (au moins une solution) (Voir solution)

1. $y'(x) = \sin(x)$
2. $y'(x) = 1 + \exp(x)$
3. $y'(x) = x$

**Exercice 48.** équations à variables séparables (Voir solution)

1. $y'(x) = y(x)$
2. $y'(x) = y(x)$ avec la condition initiale $y(0) = 4$
3. $y'(x) = 4y(x)$ avec la condition initiale $y(2) = 5$
4. $y'(x)y^2(x) = x^3$

**Remarque 5.1.** *Avec Xcas, vous pouvez résoudre une équation différentielle (sans ou avec condition initiale)*

```
desolve(diff(y(x),x)=y(x),y)
c_0*exp(x)
desolve([diff(y(x),x)=y(x),y(0)=4],y)
[4*exp(x)]
```

**Exercice 49.** équations linéaires du 1er ordre à coefficients constants (Voir solution)

1. $y'(x) = 2y(x) + 1$
2. $y'(x) = 2y(x) + e^{-2x}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$
3. $y'(x) = 2y(x) + e^{2x}$
4. $y'(x) = 2y(x) + xe^{-2x}$
5. $y'(x) = y(x) + \sin 2x$
6. $y'(x) = y(x) + x\cos x$
7. $y'(x) = 2y(x) + x + \cos x$

**Exercice 50.** équations linéaires du 1er ordre à coefficients non constants (Voir solution)

1. $xy'(x) = y(x) + x^2\sin(x) \quad x > 0$
2. $y'(x) = \frac{x+y(x)}{x} \quad x > 0$
3. $x^2y'(x) + y(x) = 1 \quad x > 0$

**Exercice 51.** quelques problèmes avec des conditions initiales (Voir solution)

1. $xy'(x) + 2y(x) = \sin(x) \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi} \quad x > 0$
2. $xy'(x) + 2y(x) = x^2 - x + 1 \quad y(1) = \frac{1}{2} \quad x > 0$
3. $(1 + x^2)y'(x) - y(x) = x^2e^x \quad y(1) = 0 \quad x > 0$ (On remarquera que $e^x$ est solution)

## 6 Exercices :système et calcul matriciel

**Exercice 52.** Résoudre les systèmes suivants. Sont-ils linéaires ? Si oui, les écrire sous forme matricielle ($Au = b$)

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ 2x + 2y = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y = 2 \\ xy + y = 0 \end{cases}$$

**Remarque 6.1.** *Avec Xcas, vous pouvez résoudre un système linéaire ou non*

```
linsolve([3*x-2*y=2,2*x+2*y=-3],[x,y])
[(-1)/5,(-13)/10]
solve([2*x+y=2,x*y+y=0],[x,y])
[x=1,y=0],[x=-1,y=4]
```

**Exercice 53.** Calculer les produits AB et BA quand cela est possible

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad {}^tB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

**Remarque 6.2.** *Avec Xcas, vous pouvez faire du calcul matriciel*

```
A:=matrix(3,2,[1,2,2,1,0,1]);
B:=matrix(2,3,[1,1,3,2,0,1]);
A*B
[5,1,5]
[4,2,7]
[2,0,1]
B*A
[3,6]
[2,5]
tran(A)
[1,2,0]
[2,1,1]
```

**Exercice 54.** Démontrer que le produit matriciel n'est pas commutatif (ie $AB \neq BA$ en général).

**Exercice 55.** Soit le sytème linéaire

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ 4x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

Soit $B$ la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & -3/5 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \\ -2 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire le système sous forme matricielle $Ax = b$.
2. Calculer $BA$ et $AB$.
3. Calculer $Bb$. Peut-on calculer $bB$ ?
4. De $Ax = b$ et des résultats précédents en déduire la solution $(x, y, z)$ du système linéaire.

**Exercice 56.**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer ${}^tA$, ${}^tAA$ et $A^tA$.
2. Vérifier, quand les opérations sont définies, que $\forall A, B$, on a

$$ {}^t({}^tA) = A, \quad {}^t(A+B) ={}^t A +{}^t B, \quad {}^t(AB) ={}^t B^tA. $$

3. Montrer que $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, ${}^tAA$ et $A^tA$ sont symétriques.
4. Soient $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ symétriques, à quelle condition $AB$ est-elle symétrique ?

**Exercice 57.** Calculer l'inverse des matrices suivantes (pour les 2A)

$$ A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

**Exercice 58.** Diagonaliser les matrices suivantes (pour les 2A)

$$ A = \begin{pmatrix} -7 & 9/2 \\ -12 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} $$

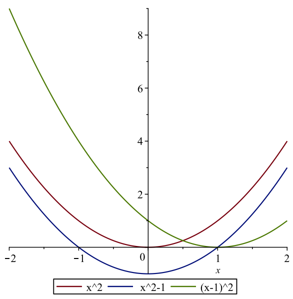
**Remarque 6.3.** *Avec Xcas, vous pouvez faire du calcul matriciel (CAS>Algèbre linéaire) : matrix (définir la matrice), tran (transposée), ker (noyau), image, det (déterminant), charpoly (polynôme caractéristique), egv (vecteurs propres), egvl (valeurs propres).*

# 7 Solutions ou indications

## 7.1 fonctions usuelles et équations

**Sol. ex. 1.** Voir polycopié Outils

**Sol. ex. 2.**




**Sol. ex. 3.**

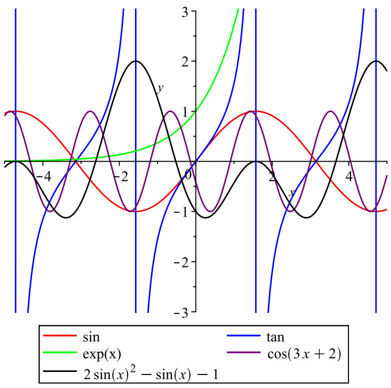
| | | |
|---|---|---|
| $1, 4$ | $0, (1/2)\sqrt{6}, -(1/2)\sqrt{6}$ | $1$ |
| aucune solution | $-2$ | $-3$ |
| $2, -3$ | $1$ | |

**Sol. ex. 4.**

| | | |
|---|---|---|
| $x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi$ | aucune sol. | $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ |
| $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ | $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ | aucune sol. |

**Sol. ex. 5.** Ensemble de définition des fonctions $D_{f_1} = \mathbb{R} - \{-4\}$, $D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-4\}$ , $D_{f_3} = [-4, +\infty[$, $D_{f_4} = \mathbb{R} - \{-4, 1\}$, $D_{f_5} = ]-2, -1[ \cup [1, +\infty[$, $D_{f_6} = \mathbb{R} - [-1, 1]$, $D_{f_7} = ]-\infty, -4[ \cup ]-2, -1[ \cup ]1, \infty[$, $D_{f_8} = \mathbb{R}$, $D_{f_9} = \mathbb{R}$.

**Sol. ex. 6.** $2\pi$, $\frac{\pi}{2}$, non périodique, $\frac{2\pi}{3}$, $2\pi$. impaire, impaire, les 3 autres : ni paires ni impaires.




**Sol. ex. 7.** $g_1$ en $0^+$ $+\infty$, en $0^-$ $-\infty$, en $+\infty$ $+\infty$, $g_2$ en $1$ $-\infty$, en $+\infty$ $+\infty$, $g_3$ en $+\infty$ $0$, $g_4$ en $-\infty$ $+\infty$.

**Sol. ex. 9.** $a = 2$ et $b = 4$.

**Sol. ex. 10.** Les dérivées rep :$f_1'(x) = 10x^4 + 4$, $f_2'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $f_3'(x) = 2\exp(2x+4)$, $f_4'(x) = (e^x + 1)\cos(e^x + x)$, $f_5'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}$, $f_6'(x) = 1 + \tan^2(x)$, $f_7'(x) = -\sin(x)\ln(x^2) + 2\dfrac{\cos(x)}{x}$, $f_8'(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$, $f_9'(x) = 1$ pour $x > 2$ ou $-1$ pour $x < 2$ pas derivable en 2, $f_{10}'(x) = 8(2x+2)^3$, $f_{11}'(x) = \frac{-2}{x^3}$,

$$f'_{12}(x) = \frac{(1-\ln(x))x^{1/x}}{x^2}.$$

**Sol. ex. 11.**

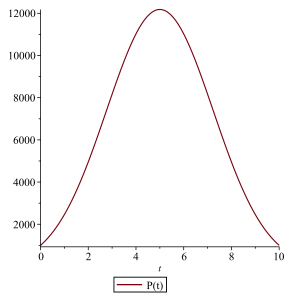
1. $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
2. $\arcsin(0) + 0$, $\arcsin(2)$ non défini, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$.
3. $\sin(\arcsin(0)) = 0$, $\sin(\arcsin(1)) = 1$, $\sin(\arcsin(\frac{-1}{2})) = \frac{-1}{2}$
4. $\arcsin(\sin(0)) = 0$, $\arcsin(\sin(\frac{3\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$, $\arcsin(\sin(\pi)) = 0$

**Sol. ex. 12.** $x = 2$; $(\ln(6-4\sqrt(2)), \ln(6+4\sqrt(2))$ ; $\frac{\ln(17/8)}{\ln(3/4)}$ ;1, 4

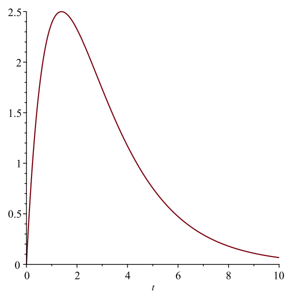
**Sol. ex. 13.** Il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

## 7.2 Etude de fonctions

**Sol. ex. 14.** $P(0) = 1000$, $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 0$, maximum $P'(t) = 0$ quand $t = 5$, $t^* = 10$, $t_1 \approx 14.700$.

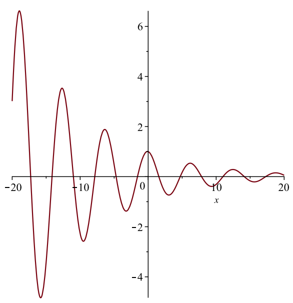



**Sol. ex. 15.** $f'(t) = 0$ en $t^* = 2\ln(2) \approx 1.386$. $f$ croissante sur $[0, t^*]$ puis décroissante. $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ $f(2\ln(2) = q/4$ d'où $q = 10$. Le médicament est efficace entre $[t_1 \approx 3.940, t_2 \approx .300]$.

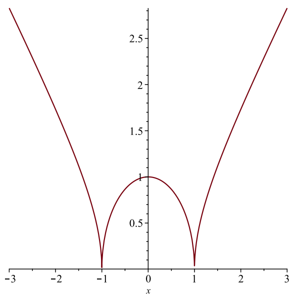



## 7.3 Optimisation

**Sol. ex. 18.** $f'(x) = -(1/10)\exp(-(1/10)x)(10\sin(x) + \cos(x))$




**Sol. ex. 19.**



## 7.4 Développement de Taylor - Notions sur les séries

## 7.5 Fonctions de plusieurs variables (pour les 2A)

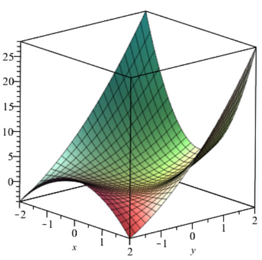
**Sol. ex. 21.** $\nabla f = (2y, 2x + 2y - z, -y)$

**Sol. ex. 22.** $J_f = \begin{pmatrix} 2x + 4y & 4x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}$

**Sol. ex. 23.** $\nabla f = (4xy + 4x, 2x^2 + 2y)$

$$H_f = \begin{pmatrix} 4y + 4 & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$$

3 points critiques (0,0) (1,-1) et (-1,-1). En (0,0), $f$ atteint son minimum (les autres points sont des points selle).



## 7.6 Nombres Complexes

1. **Forme algébrique - conjugué**
   **Sol. ex. 24.** $z + \overline{w} = 1 - 6i$, $|z| = \sqrt{34}$, $\bar{z}w = -11 - 7i$ et $\frac{z}{w} = -\frac{11}{5} + \frac{7}{5}i$.

   **Sol. ex. 25.** (a) $z_1 = 1 - 2i$ (b) $z_2 = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$

   **Sol. ex. 26.** (a) $z_1 = -i$ (b) $z_2 = z_2 = -1 - \frac{9}{2}i$ (c) $z_3 = \frac{1}{73} + \frac{46}{73}i$ (d) $z_4 = 8 - 8i$ (e) $z_5 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

   **Sol. ex. 27.** (a) $z_1 = \frac{101}{85} - \frac{13}{85}i$ (b) $z_2$ est imaginaire pur (c) $z_3 = \frac{1}{73} + \frac{46}{73}i$ (d) $S = \{0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

2. **Forme trigonométrique (ou exponentielle)**
   **Sol. ex. 28.** $z_1 = \sqrt{2}\exp(i\frac{\pi}{4})$ $\quad z_2 = \sqrt{2}\exp(-i\frac{\pi}{4})$ $\quad z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \exp(i\frac{\pi}{2})$

   Rép : (module, argument)=$(2, -\pi/3)$,$(2, \pi)$, $(2\sqrt{2}, -5\pi/6)$, $(2\sqrt{3}, \pi/3)$

   **Sol. ex. 29.** $z_1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ $\quad z_2 = 1 + i$ $\quad z_3 = -2\sqrt{3} + 2i$

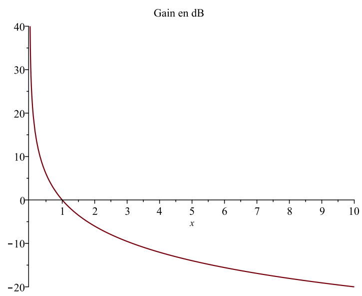
   **Sol. ex. 30.** $z_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ $\quad z_2 = 2e^{i(\alpha+\pi)}$ $\quad z_3 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

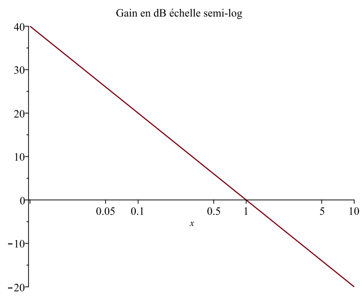
**Sol. ex. 31.** $\begin{array}{ll} |z_1| = \sqrt{17} \approx 4.123 & arg(z_1) = -\arctan(4) + \pi \approx 1.816 \\ |z_2| = \sqrt{29} \approx 5.385 & arg(z_2) = -\arctan(5/2) - pi \approx -1.951 \end{array}$

**Sol. ex. 32.** $z = 2^{244}(1 - i\sqrt{3})$.

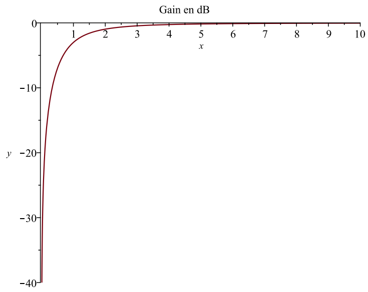
**Sol. ex. 33.** $Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2}$. La partie réelle donne le cosinus et la partie imaginaire le sinus.

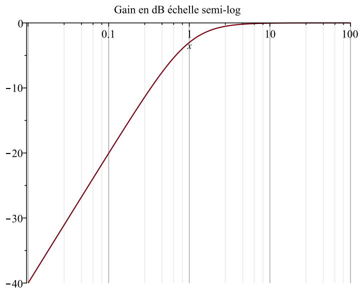
**Sol. ex. 34.** $G(x) = \frac{1}{x}$, $arg(H(x)) = -\dfrac{\pi}{2}$

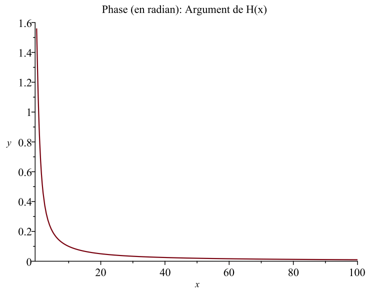


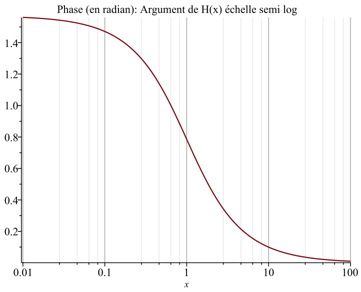



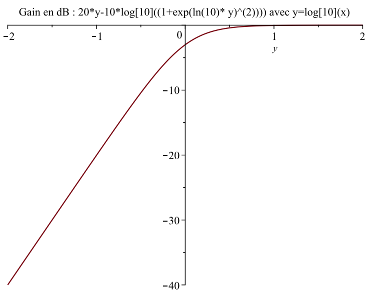

**Sol. ex. 35.** $G(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $arg(H(x)) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan(\dfrac{1}{x})$
Echelle semi-log : remplacer $x$ par $y = log_{10}(x)$ dans la fonction et pour faire varier $x$ de 0.01 à 100, faire $y$ de $-2$ à 2. Asymptotique : Si $x << 1$, alors $H(x) \approx ix$, $G(x) \approx x$ et $G_{dB}(x) \approx 20\log_{10}(x)$
Si $x >> 1$, alors $H(x) \approx 1$, et $G_{dB}(x) \approx 0$.




3. **Résolution d'équations d'ordre $n \geq 2$**
   **Sol. ex. 36.** Déterminer $z$ tel que $z^2 = z_i$ pour

$$z_{11} = \sqrt{(\sqrt{(5)}-1)} + i\sqrt{(1+\sqrt{(5)})} \quad z_{11} = -\sqrt{(\sqrt{(5)}-1)} - i\sqrt{(1+\sqrt{(5)})}$$
$$z_{21} = (1/2)\sqrt{(2\sqrt{(2)}i + 2\sqrt{(2)})} \quad z_{22} = -(1/2)\sqrt{(2\sqrt{(2)}i + 2\sqrt{(2)})}$$

**Sol. ex. 37.** (a) $z = \pm i\sqrt{5}$ (b) $z = \frac{5 \pm \sqrt{11}i}{2}$

**Sol. ex. 38.** (a) 1 et 2 (b) $z = \frac{3 \pm \sqrt{11}i}{10}$ (c) $z = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ (d) $S = \{-1+i, -2\}$.

**Sol. ex. 39.** (a) $S = \{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{16}}, \sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{16}}, \sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{16}}, \sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{16}}\}$ (b) $S = \{e^{i\frac{\pi}{8}}, e^{i\frac{5\pi}{8}}, e^{i\frac{9\pi}{8}}, e^{i\frac{13\pi}{8}}\}$.

**Sol. ex. 40.** (a) $\cos^2(x) = \frac{1+\cos 2x}{2})$ (b) $\cos^2(x)\sin^4(x) = \frac{1}{32}(\cos 6x - 2\cos 4x - \cos 2x + 2))$

**Sol. ex. 41.** $z \in \mathbb{R} - \{1\}$.

## 7.7 Calcul d'intégrales

**Sol. ex. 42.** Calculer les intégrales

— ... où il faut reconnaitre une dérivée classique (Retour énoncé). Indic : les primitives sont

$$F_1(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x}{2} + C \quad F_2(x) = \ln(1+x) + C \quad F_3(x) = 4\arctan(x) + C$$
$$F_4(x) = \ln(e^x + 1) + C \quad F_5(x) = e^{t^2+3} \quad F_6(x) = \sqrt{1+t^2} + C$$

— ... où il faut intégrer par parties (Retour énoncé). Indic : les primitives sont

$$G_1(x) = x\ln(x) - x + C \quad G_2(x) = x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C \quad G_3(x) = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

— ... où l'on peut faire le changement de variables indiqué (Retour énoncé). Indic : les primitives sont

$$H_1(x) = \arctan(\frac{x+1}{2})/2 + C \qquad H_2(x) = \ln(\sqrt{(}1+x^2)) + C$$
$$H_3(x) = (\ln(x))^2/2 + C \qquad H_4(x) = \arctan(x)/2 + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

**Sol. ex. 43.** Calculer les intégrales (Retour énoncé).

$$J_0 = 23/6 \quad J_1 = 1 - 1/e \quad J_2 = \ln(5/2)$$
$$J_3 = \ln(3)/2 \quad J_4 = \pi^2 - 4 \quad J_5 = 1/8(\pi+2)$$
$$J_6 = 1/2 \quad J_7 = 2/15 \quad J_8 = \ln(2)^2/2$$

## 7.8 Equations différentielles

**Sol. ex. 46.** Classer les équations différentielles ci-dessous : 1 à variables séparables, 2 linéaire du 1er ordre à coefficients constants avec second membre non nul, 3 linéaire du 1er ordre à coefficients non constants avec second membre non nul (Retour énoncé).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2y(x) = \exp(-y(x))$ | (1) | $y'(x) + 2y(x) = \exp(x)$ | (2) | $3y'(x) - 5y(x) = 0$ | (1) |
| $y'(x) + 5xy(x) = \exp(x)$ | (3) | $y'(x)y^2(x) = x$ | (1) | $y'(x) + y(x) = \exp(x) + 1$ | (2) |
| $x(1+x)y'(x) = 2x + (x+2)y(x)$ | (3) | $2y'(x) + 5xy(x) = 0$ | (1) | $y'(x) = (1+y^2(x))x$ | (1) |
| $x^2y'(x) - 3y(x) = sin(x)$ | (3) | $y'(x) = y(x)\ln(x)$ | (1) | $y'(x) + y(x) = x$ | (2) |

**Sol. ex. 47.** de tête (au moins une solution) (Retour Enoncé)

1. $y'(x) = \sin(x)$ (Rép. $y(x) = -x\cos(x) + C$)
2. $y'(x) = 1 + \exp(x)$ (Rép. $y(x) = x + e^x + C$)
3. $y'(x) = x$ (Rép. $y(x) = \frac{x^2}{2} + C$)

**Sol. ex. 48.** équations à variables séparables (Retour énoncé)

1. $y'(x) = y(x)$ (Rép. $y(x) = Ce^x$)
2. $y'(x) = y(x)$ avec la condition initiale $y(0) = 4$ (Rép. $y(x) = 4e^x$)
3. $y'(x) = 4y(x)$ avec la condition initiale $y(2) = 5$ (Rép. $y(x) = 5e^{4(x-2)}$)
4. $y'(x)y^2(x) = x^3$ (Rép. $y(x) = (\frac{3}{4}x^4 + C)^{\frac{1}{3}}$)

**Sol. ex. 49.** équations linéaires du 1er ordre à coefficients constants (Retour énoncé)

1. $y'(x) = 2y(x) + 1$ (Rép. $y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}$)
2. $y'(x) = 2y(x) + e^{-2x}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ (Rép. $y(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x})$)
3. $y'(x) = 2y(x) + e^{2x}$ (Rép. $y(x) = (C+x)e^{2x}$)
4. $y'(x) = 2y(x) + xe^{-2x}$ (Rép. $y(x) = Ce^{2x} - (\frac{x}{4} + \frac{1}{16})e^{-2x}$)
5. $y'(x) = y(x) + \sin 2x$ (Rép. $y(x) = Ce^x - \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{2}{5}\cos 2x$)
6. $y'(x) = y(x) + x\cos x$ (Rép. $y(x) = Ce^x - \frac{x}{2}\cos x + \frac{1}{2}(x+1)\sin x$)
7. $y'(x) = 2y(x) + x + \cos x$ (Rép. $y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}) - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$)

**Sol. ex. 50.** équations linéaires du 1er ordre à coefficients non constants (Retour énoncé)

1. $xy'(x) = y(x) + x^2 \sin(x) \quad x > 0$ (Rép. $y(x) = Cx - x \cos x$)
2. $y'(x) = \frac{x+y(x)}{x} \quad x > 0$(Rép. $y(x) = Cx + x \ln x$)
3. $x^2 y'(x) + y(x) = 1 \quad x > 0$(Rép. $y(x) = Ce^{1/x} + 1$)

**Sol. ex. 51.** quelques problèmes avec des conditions initiales (Retour énoncé)

1. $xy'(x) + 2y(x) = \sin(x) \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi} \quad x > 0$ (Rép. $y(x) = -\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2}$)
2. $xy'(x) + 2y(x) = x^2 - x + 1 \quad y(1) = \frac{1}{2} \quad x > 0$ (Rép. $y(x) = \frac{1}{12x^2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$)
3. $(1 + x^2)y'(x) - y(x) = x^2 e^x \quad y(1) = 0 \quad x > 0$ (On remarquera que $e^x$ est solution)
   (Rép. $y(x) = e^x - e^{1+\arctan x - \pi/4}$)