Bordeaux INP
ENSTBB

Ecole Nationale Supérieure de Technologie des Biomolécules de Bordeaux

Rappel de Mathématiques

C. Nazaret

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions usuelles

I Introduction

Ces notes se veulent courtes (et donc non exhaustives). Les objectifs de ces rappels sont de connaître
- les représentations graphiques
- les principales propriétés

II Logarithme et exponentielle

II.1 Logarithme

Définition II.1. *la fonction logarithme népérien notée* $\ln$ *définie sur* $]0;+\infty[$ *est la fonction telle que sa dérivée est* $1/x$ *et* $\ln(1) = 0$

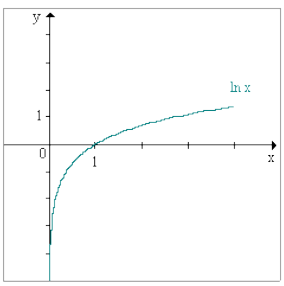
Proposition II.1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b) \quad \ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$

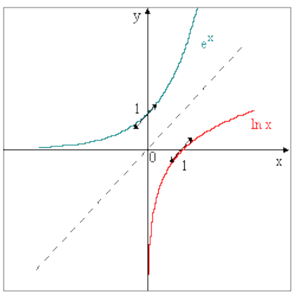
Il existe d'autres fonctions logarithme :
Logarithme de base $a > 0$ et $a \neq 1$ $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a) \qquad \log_a(a) = 1$
en particulier Logarithme décimal $\log_{10}(x) = \log(x) = \ln(x)/\ln(10) \qquad \log(10) = 1$

II.2 Exponentielle

Définition II.2. *la fonction exponentielle notée* $\exp$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *est la réciproque de logarithme népérien c'est-à-dire la fonction telle que* $y = \exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

Proposition II.2.
$$\begin{array}{ccc} \exp'(x) = \exp(x) & e^0 = 1 & e^1 = e \approx 2{,}718 \\ \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) & \exp(-a) = 1/exp(a) & \exp(ra) = (\exp(a))^r \end{array}$$





II.3 Quelques limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$$

On pourra retenir que "l'exponentielle l'emporte sur puissance qui l'emporte sur logarithme" en $+\infty$. De ces résultats découlent d'autres limites

$$\lim_{X\to 0^+} X\ln(X) = 0 \qquad \text{en posant } X = 1/x$$
$$\lim_{X\to -\infty} X\exp(X) = 0 \qquad \text{en posant } X = -x$$

De la notion de dérivée en un point $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$, on peut déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(x)-\exp(0)}{x} = e^0 = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)-\ln(1)}{x} = \frac{1}{1} = 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = -\sin(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1$$

III Puissances et polynômes

III.1 fonction carré, cube, puissance n, ...

Définition III.1. *La fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ est la fonction définie par $x^2 = x \times x$*

La fonction est paire, de dérivée $2x$. Elle n'est pas bijective mais en restreignant son ensemble de définition à $\mathbb{R}^+$ (continue strictement croissante donc bijective), on peut définir une réciproque, appelée racine carrée. On définit donc $\sqrt{}$ sur $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ comme réciproque de la fonction carré

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in \mathbb{R}^+ \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$$

On peut la noter $\sqrt{x}$ ou encore $x^{\frac{1}{2}}$ (ainsi $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$).

Définition III.2. *La fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction définie par $x^3 = x \times x \times x$*

La fonction est impaire, de dérivée $3x^2$,. Elle est bijective, on peut définir une réciproque, appelée racine cubique. On définit donc $\sqrt[3]{}$ sur $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme réciproque de la fonction cube

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ y = x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall y \in \mathbb{R} \\ x = \sqrt[3]{y} \end{cases}$$

On peut généraliser ce type de fonctions à tout n entier naturel. Pour n impair, x^n est bijective sur tout $\mathbb{R}$. Quand n est pair, il faut restreindre l'ensemble de définition pour définir une réciproque. Cette réciproque s'appelle racine nième. On peut la noter $\sqrt[n]{x}$ ou encore $x^{\frac{1}{n}}$ (ainsi $(x^{\frac{1}{n}})^n = x$).

On peut aussi généraliser la fonction x puissance aux entiers relatifs, aux rationnels à l'aide des relations

$$\forall (k,k') \in \mathbb{N} \qquad x^{-k} = \frac{1}{x^k}, \qquad x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}, \qquad x^{\frac{k'}{k}} = (\sqrt[k]{x})^{k'}$$

Exemple : $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad x \geq 0 \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$

puis finalement à tout réel de la manière suivante :

Définition III.3. *On définit x^a avec a réel, pour tout $x > 0$ par*

$$x^a = \exp(a\ln(x))$$

Proposition III.1. *Soient les réels a , b, $x > 0$ et $y > 0$*

$1^a = 1 \qquad x^{a+b} = x^a x^b \qquad (x^a)^b = x^{ab}$

$x^{-a} = \dfrac{1}{x^a} \qquad (xy)^a = x^a y^a$

Définition III.4. *On définit $u(x)^{v(x)}$ où $u(x) > 0$ par*

$$x^a = \exp(v(x)\ln(u(x)))$$

III.2 fonction polynôme

On appelle fonction polynôme les fonctions du type

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^n$$

où les a_i sont des réels. Le degré d'une fonction polynomiale f non nulle est le plus grand des entiers naturels k tels que a_k soit non nul (c'est donc n si le coefficient a_n n'est pas nul). Par convention, le degré de la fonction polynomiale nulle est $-\infty$.

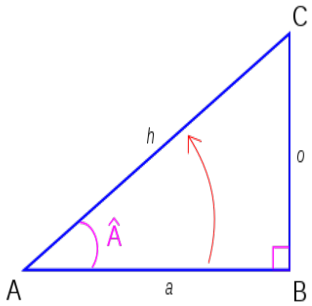
Chaque terme de la fonction polynôme de la forme $a_k x^k$ est appelé un monôme (de degré k).

Un aspect important en calcul numérique est la possibilité d'étudier les fonctions compliquées au moyen d'approximations par des polynômes.

IV Fonctions Trigonométriques

IV.1 cosinus,sinus, tangente

d'un angle aigu



$$\begin{aligned} \cos(\hat{A}) &= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \\ &= \frac{a}{h} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sin(\hat{A}) &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} \\ &= \frac{o}{h} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tan(\hat{A}) &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} \\ &= \frac{o}{a} \end{aligned}$$

pour tout angle réel

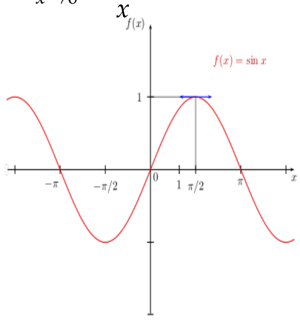
La fonction sinus est

définie $\mathbb{R} \to [-1, 1]$

$\sin(0) = 0$
périodique 2π
impaire

$\sin'(x) = \cos(x)$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$



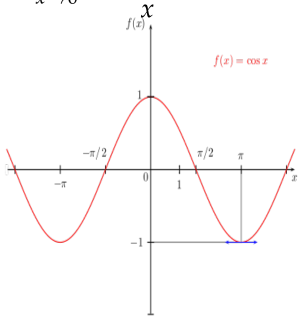
La fonction cosinus est

définie $\mathbb{R} \to [-1, 1]$

$\cos(0) = 1$
périodique 2π
paire

$\cos'(x) = -\sin(x)$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x} = 1$

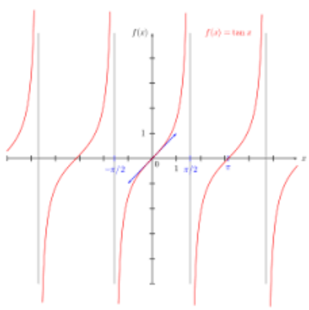


La fonction tangente est

définie $\forall x$ tel que $\cos(x) \neq 0$ dans $\mathbb{R}$ et $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\tan(0) = 0$
périodique π
impaire

$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$



Quelques formules importantes :

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a) \quad \cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) - \pm \sin(a)\sin(b)$

Formules d'Euler et de Moivre

$$\cos(a) = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \quad \sin(a) = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} \quad (e^{ix})^b = \cos(bx) + i\sin(bx)$$

IV.2 Réciproque de cosinus,sinus, tangente

Les fonctions cosinus,sinus, tangente n'admettent pas de réciproque (car elles sont périodiques) mais en restreignant leur ensemble de définition, on peut définir des réciproques.

la restriction de sinus à $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$ est une fonction (continue strictement croissante donc) bijective. On définit donc arcsin sur $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$ comme réciproque de sin

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [-1,1] \\ y = \arcsin(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall y \in [-\pi/2, \pi/2] \\ x = \sin(y) \end{array} \right.$$

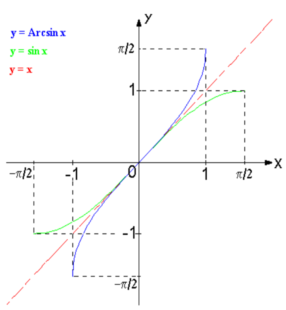
la restriction de cosinus à $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$ est une fonction (continue strictement croissante donc) bijective. On définit donc arcsin sur $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$ comme réciproque de cos

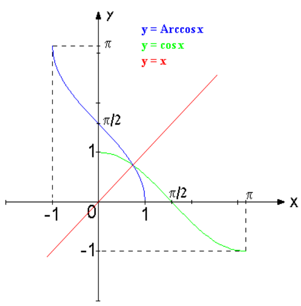
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [-1,1] \\ y = \arccos(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall y \in [0, \pi] \\ x = \cos(y) \end{array} \right.$$

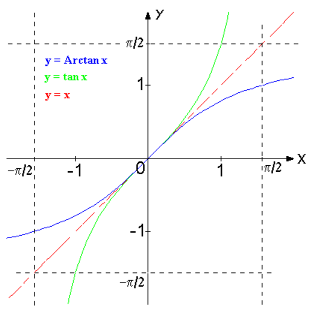
la restriction de tangente à $]-\pi/2, \pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction (continue strictement croissante donc) bijective. On définit donc arctan sur $\mathbb{R}$ dans $]-\pi/2, \pi/2[$ comme réciproque de tan

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R} \\ y = \arctan(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall y \in]-\pi/2, \pi/2[\\ x = \tan(y) \end{array} \right.$$

L'arc tangente d'un nombre réel est la mesure d'un angle orienté (appartenant à $]-\pi/2, \pi/2[$) dont la tangente vaut ce nombre.







V Dérivée et Règles de dérivation

V.1 Tableau de dérivées

fonction	dérivée
$Constante$	0
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-2}{x^3}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$
$\exp x$	$\exp x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

fonction	dérivée
$u^n(x)$	$nu^{n-1}u'$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\cot u$	$-u'(1 + \cot^2 u) = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\arcsin u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arctan u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\exp u$	$u' \exp u$
$x^\alpha = exp(\alpha \ln(x))$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln \lvert u \rvert$	$\frac{u'}{u}$
$\cosh u$	$u' \sinh u$
$\sinh u$	$u' \cosh u$
$\tanh u$	$u'(1 - \tanh^2 u) = \frac{u'}{\cosh^2 u}$

V.2 Règles de dérivation

f et g deux fonctions dérivables et α un réel.

fonction	dérivée
αf	$\alpha f'$
$f + g$	$f' + g'$
fg	$f'g + fg'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
$f \circ g$	$f' \circ g \times g'$
f^{-1}	$\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Chapitre 2

Nombres complexes : quelques rappels

I Introduction

Les objectifs de ces rappels sont de
- savoir utiliser les formes algébrique et trigonométrique
- passer de l'une à l'autre,
- résoudre des équations du second ordre à coefficients réels ou complexes.

C'est au XVIème siècle que commence l'histoire des nombres complexes représentant des racines carrées de réels négatifs. Ces nombres ont permis la résolution de toutes les équations du second et troisième degré. L'idée a été d'inventer i un nombre tel que $i^2 = -1$. Alors par exemple, $x^2 = -4$ a pour solution $2i$ et $-2i$.

Remarque I.1. *Les physiciens notent i par la lettre j pour ne pas confondre avec une intensité alors qu'en mathématique j représente le nombre complexe* $exp(2i\pi/3)$.

II L'ensemble des nombres complexes

II.1 Forme algébrique

On définit l'ensemble $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes de la façon suivante

Définition II.1. *On appelle nombre complexe, z, tout couple ordonné de réels*

$$z = (a, b).$$

Le nombre réel a est appelé partie réelle, notée $\mathfrak{Re}(z)$ *et le nombre réel b partie imaginaire, notée* $\mathfrak{Im}(z)$. *La notation* $a + ib$ *est appelée forme algébrique de z.*

Remarque II.1. ***Nombres particuliers :***
- *si* $b = 0$, *on a* $z = a$, *z est donc réel,*
- *si* $a = 0$, *on a* $z = ib$, *on dit que z est un imaginaire pur.*

II.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

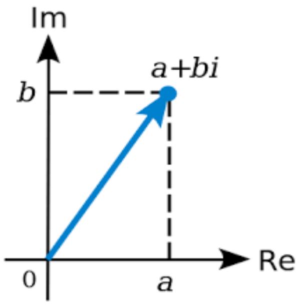
Proposition II.1. *On pose* $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ *et k un réel, on a :*
1. $z + z' = (a + a') + i(b + b')$,
2. $z - z' = (a - a') + i(b - b')$,
3. $kz = ka + ikb$,
4. $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Proposition II.2. *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :*

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad a + ib = a' + ib' \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \text{ et } b = b'.$$

II.3 Représentation graphique

Définition II.2. *On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Au point M de coordonnées $(a;b)$ on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$,*
On dit que $z = a + ib$ est l'affixe du point M.



II.4 Conjugué d'un complexe

Définition II.3. *On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre $\overline{z} = a - ib$.*

Proposition II.3. *Soit z et z′ deux nombres complexes, alors :*

- ♦ $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- ♦ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- ♦ $\overline{\overline{z}} = z$.
- ♦ $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
- ♦ $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.
- ♦ $\mathfrak{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$.
- ♦ $\mathfrak{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

II.5 Inverse d'un complexe

Soit $z = a + ib$, on a : $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$ qui est un nombre réel.
Ainsi, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Proposition II.4. *Soit z et z′ deux nombres complexes, alors :*

- ♦ $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.
- ♦ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

III Forme trigonométrique et exponentielle

III.1 Module d'un nombre complexe

Définition III.1. *Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.*

Ce n'est que le théorème de pythagore (dans triangle rectangle).

Remarque III.1. *Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{a\,a} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$.*
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Proposition III.1. ♦ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

- ♦ $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- ♦ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- ♦ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
- ♦ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

III.2 Argument d'un complexe non nul

Définition III.2. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z :*

- ➤ *On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})[\,2\pi]$,*
- ➤ *On note $\theta = \arg(z)$,*
- ➤ *θ vérifie :* $\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\theta &= \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$

Là aussi, on retrouve des résultats connus dans un triangle rectangle à savoir

1. $\cos\theta$ est égal à longueur du côté adjacent divisé par longueur de l'hypoténuse $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,
2. $\sin\theta$ est égal à longueur du côté opposé divisé par longueur de l'hypoténuse $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
3. $\tan\theta$ est égal à longueur du côté opposé divisé par longueur du côté adjacent $\dfrac{b}{a}$

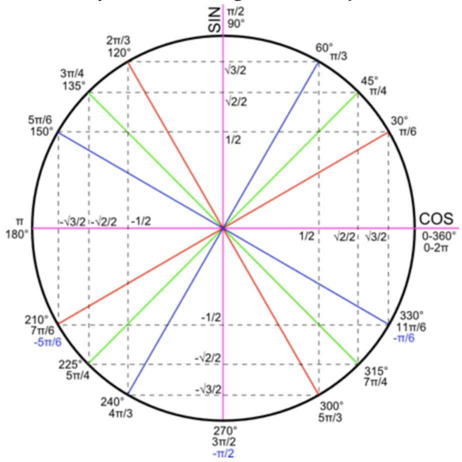
Remarque III.2. *Calcul de l'argument à partir de la tangente :*
Soit un complexe $z = a + ib$ non nul. Pour déterminer son argument principal θ

- *Si $a > 0$ ($\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$)*
  alors de $tan(\theta) = b/a$, avec la calculatrice ou le tableau des valeurs remarquables, on tire $\theta = arctan(b/a)$.
- *Si $a < 0$ ($\theta \notin]-\pi/2, \pi/2[$)*
  on a toujours $tan(\theta) = b/a$ mais $\theta \neq arctan(b/a)$, on a $\theta = arctan(b/a) + \pi$
  Mais si on souhaite l'argument principal de z (un angle compris entre $-\pi$ et π), selon le signe de b,

  - *Si $b > 0$*
    $\theta = arctan(b/a) + \pi$
  - *Si $b < 0$*
    $\theta = arctan(b/a) - \pi$

Remarque III.3. *Rappel des valeurs remarquables des fonctions trigonométriques*

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0



Proposition III.2. *Propriétés algébriques des arguments :*

- ♦ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.
- ♦ $\arg(\dfrac{1}{z}) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$.
- ♦ $\arg(\dfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$.

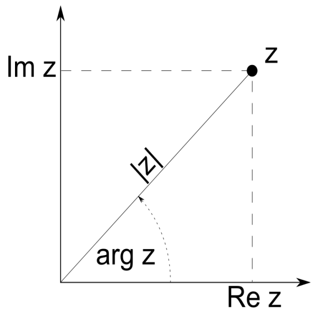
III.3 Ecriture trigonométrique

On se place dans un plan muni du repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Définition III.3. *Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme* $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ *avec :*

- ➤ $\arg(z) = \theta \in \mathbb{R}$ *est l'argument de z*
- ➤ $|z| = r \in \mathbb{R}_*^+$ *est le module de z*

cette écriture s'appelle la forme trigonométrique de z.



III.4 Forme exponentielle

Définition III.4. *Pour tout nombre réel θ, on pose :* $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Remarque III.4.
- *Il existe une fonction appelée fonction exponentielle* $x \longmapsto e^x$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*. Mais ici,* $i\theta$ *est un nombre complexe et la fonction* $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ *n'est pas au programme de terminale.*
- $e^1 = e$ *est un nombre qui a pour valeur approchée* $2,718$.

Définition III.5. *Soit* $z = a + ib$ *un nombre complexe non nul de module* $r = |z|$ *et dont un argument est* $\theta = arg(z)$.
On note ce nombre z sous la forme $z = r\, e^{i\theta}$.
Cette écriture est appelée notation exponentielle de z.

III.5 Formules d'EULER

Proposition III.3. *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *:* $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ *et* $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Exemple III.1. *Linéarisation de* $\sin^2 x$ *:*

➔ $\sin^2 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \dfrac{e^{2ix} - 2\,e^{ix}\,e^{-ix} + e^{-2ix}}{-4} = \dfrac{-2 + e^{2ix} + e^{-2ix}}{-4} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right),$

➔ *donc :* $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

Ce genre de transformation peut être utile par exemple pour calculer une primitive.

IV Equations du second degré

Proposition IV.1. *Soit* $az^2 + bz + c = 0$ *une équation du second degré où* $a; b; c \in \mathbb{C}$ *avec* $a \neq 0$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$*. Soit* δ *tel que* $\delta^2 = \Delta$.

- ♦ *Si* $\Delta = 0$*, l'équation du second degré admet une unique solution :*

$$z_0 = \frac{-b}{2a}.$$

- ♦ *Si* $\Delta < 0$*, l'équation du second degré admet deux solutions :*

$$z_1 = \frac{-b + i\delta}{2a} \quad et \quad z_2 = \frac{-b - i\delta}{2a}.$$

Chapitre 3

Calcul d'intégrales : rappels

Le but de ces pages n'est pas de faire un cours exhaustif sur le calcul intégral mais de rappeler quelques principes fondamentaux dont nous aurons besoin par la suite.

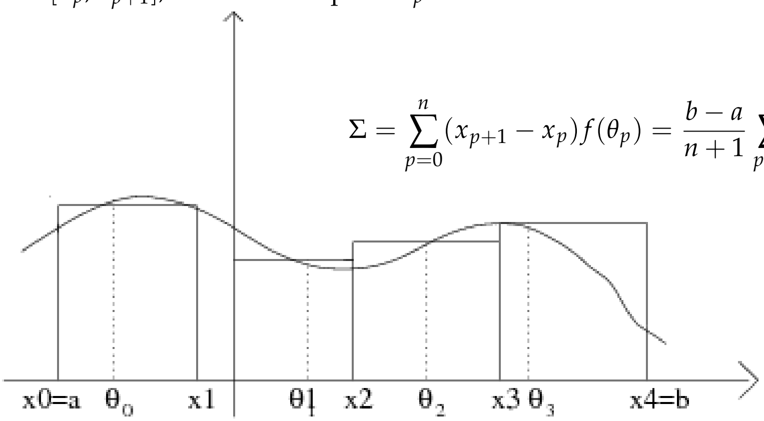
I Intégrales de Riemann

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $[a, b]$, avec $a < b$, et soit une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 \cdots < x_n < b = x_{n+1} \quad x_{p+1} - x_p = \frac{b-a}{n+1}.$$

Sur $[x_p, x_{p+1}]$, on choisit un point θ_p arbitraire et on forme :

$$\Sigma = \sum_{p=0}^{n} (x_{p+1} - x_p) f(\theta_p) = \frac{b-a}{n+1} \sum_{p=0}^{n} f(\theta_p).$$



Définition I.1. *On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si Σ tend vers une limite finie I, quelque soit le choix des θ_p lorsque le nombre des x_p tend vers ∞. Alors on note*

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Théorème I.1.
- *Si f est monotone bornée sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.*
- *Si f une fonction continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

Définition I.2. *Soient F et f deux fonctions définies sur une partie I de $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f si F est dérivable sur I et si $F' = f$.*

Proposition I.1. *Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si C est une constante alors $F + C$ est une primitive de f sur I. Réciproquement, toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F + C$ où C est une constante.*

II Procédés généraux d'intégration

II.1 Reconnaître une dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Si F est une primitive quelconque sur $[a, b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

Exemple :

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^t}{e^t + 1} dt = [\ln(e^t + 1)]_0^{\ln 2} = \ln \frac{3}{2}.$$

II.2 Intégrer par parties

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ et telles que $f'g$ et fg' soient continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exemple :

$$\int_1^2 \ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^2 - \int_1^2 dt = 2\ln(2) - 1.$$

II.3 Changer de variable

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ telle que $\varphi([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt.$$

ou si φ est bijective

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Exemples :

1. Pour calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$, on peut poser $t = \tan(u) = \varphi(u)$, φ étant de classe C^1 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$. On a alors $\varphi'(u) = 1 + \tan^2 u$, $f(t) = \dfrac{dt}{(1+t^2)^2}$. D'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2u}{2} du = [\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi+2}{8}$$

2. Pour calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin^2 t dt$, on peut faire le changement de variable $u = \sin t$ en écrivant

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t)\sin^2 t \cos t dt = \int_0^1 u^2(1-u^2)du = [\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}]_0^1 = \frac{2}{15}.$$

3. Si on fait le changement de variable $u = \varphi(t)$, alors l'élément différentiel du est transformé en $\varphi'(t)dt$ et il faut faire atttention aux changements de bornes.

II.4 Intégrer des fractions rationnelles

On veut intégrer la fraction

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont des polynômes. On décompose la fraction rationnelle en éléments simples. Une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ fait intervenir trois types d'éléments :

1er type : la partie entière C'est un polynôme dont on connait les primitives.

2ème type : les éléments simples de 1ère espèce Ce sont des fractions de la forme : $\frac{a}{(x-\alpha)^n}$. Or

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = \begin{cases} -\frac{1}{(n-1)}\frac{1}{(x-\alpha)^{n-1}} + C & \text{si } n \neq 1 \\ ln|x-\alpha| + C & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

3ème type : les éléments simples de seconde espèce Ce sont des fractions de la forme $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ avec $p^2 - 4q < 0$.

Exemple :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{(t+1)(t+2)} dt.$$

On décompose en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{1}{(t+1)} - \frac{1}{(t+2)}.$$

On intègre

$$I = [\ln|t+1| - \ln|t+2|]_1^2 = 2\ln 3 - 3\ln 2.$$

Chapitre 4

Calcul matriciel : rappels.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels. On désigne par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des vecteurs x formés de n composantes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ où $x_i \in \mathbb{R}$. On utilisera la notation vecteur colonne suivante :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

I Définition des matrices sur $\mathbb{R}$

Définition I.1. *On appelle matrice A à n lignes et p colonnes une famille de np éléments de $\mathbb{R}$.*
On la note : $A = (a_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}\times\{1,\cdots,p\}} = (a_{ij})$
On représente A sous forme de tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ . & & & & & . \\ . & & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les éléments a_{ij} sont appelés les coefficients de la matrice.

L'ensemble de toutes les matrices d'ordre (n,p) (n lignes et p colonnes) sur $\mathbb{R}$ se note $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$.

Cas particulier : si $n = p$, on dit que la matrice est carrée d'ordre n. On notera $M_{(n)}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Définition I.2. *matrice colonne - matrice ligne*
Une matrice d'ordre $(1, p)$ est dite matrice ligne.
Une matrice d'ordre $(n, 1)$ est dite matrice colonne (on appelle aussi souvent vecteur une matrice ligne ou colonne).

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

II Opération sur les matrices

- **Somme de deux matrices de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$**

Soient $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$

$$A + B = C \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$$

où $C = (c_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}\times\{1,\cdots,p\}}$ avec $\quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Attention, on ne peut additionner deux matrices que si elles sont de même ordre.

- **Produit d'une matrice de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ par un réel**
  Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$
  $$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$
- **Produit d'une matrice de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ par une matrice de $M_{(p,q)}(\mathbb{R})$**
  Soient $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{(p,q)}(\mathbb{R})$
  $$A \times B = AB = C \in M_{(n,q)}(\mathbb{R})$$
  où $C = (c_{ij})_{(i,j)\in\{1,\cdots,n\}\times\{1,\cdots,q\}}$ avec $\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$.

  Exemples :
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
  $$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 11 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

  Remarque II.1. *Le produit matriciel n'est pas commutatif (en général, $AB \neq BA$).*

III Matrices associées à une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{(n,p)}(\mathbb{R})$

- La **matrice tranposée** de A est la matrice notée ${}^tA = (b_{ij})$ de $M_{(p,n)}(\mathbb{R})$ telle que
  $$\forall (i,j) \;\; b_{ij} = a_{ji}.$$
  Exemple :
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$
- Une **sous-matrice** de A est une matrice obtenue à partir de A en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes.

IV Quelques matrices particulières de $M_{(n)}(\mathbb{R})$

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- Une matrice carrée A est **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.
  On appelle **matrice identité** notée I_n la matrice diagonale d'ordre n dont les termes diagonaux sont égaux à un. Exemple : $n = 3$
  $$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Une matrice A est **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$.
- Une matrice A est **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$.
- Une matrice A est **symétrique** si $A = {}^tA$ c'est-à-dire $\forall (i,j) \;\; a_{ij} = a_{ji}$.

Exemples :

triangulaire inférieure $\quad$ triangulaire supérieure $\quad$ symétrique

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

V Rang et noyau d'une matrice

Etant donnée une famille de vecteurs (matrices d'une seule ligne ou colonne), les vecteurs de la famille sont linéairement indépendants, ou forment une famille libre, si la seule combinaison linéaire de ces vecteurs qui soit égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls. Cela revient à dire qu'aucun des vecteurs de la famille n'est combinaison linéaire des autres. Dans le cas où des vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, on dit qu'ils sont linéairement dépendants, ou qu'ils forment une famille liée.

Définition V.1. *On dit que les p vecteurs (matrice-colonne) $v_i = ^t (v_{i1}, ..., v_{in})$, $i = 1..p$ sont linéairement indépendants si*

$$a_1v_1 + ... + a_pv_p = 0 \Leftrightarrow a_1 = ... = a_p = 0$$

($a_1v_1 + ... + a_pv_p$ s'appelle combinaison linéaire des p vecteurs). ce qui veut dire qu'on ne peut pas écrire un vecteur en fonction des autres.

Exemple V.1. *Les trois vecteurs $v_1 = (4, 2, 1, 3)$, $v_2 = (2, 0, 3, 0)$ et $v_3 = (6, 2, 4, -3)$ sont linéairement indépendants. Pour le vérifier, il suffit de résoudre $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ ce qui est équivalent au système*

$$\begin{cases} 4a_1 + 2a_2 + 6a_3 = 0 \\ 2a_1 + 0a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 + 3a_2 + 4a_3 = 0 \\ 3a_1 + 0a_2 - 3a_3 = 0 \end{cases}$$

dont la seule solution est $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Soit A une matrice d'ordre (n, p).

Définition V.2. *On appelle noyau de A, noté $Ker(A)$*

$$Ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^p / Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

Proposition V.1. *Le système $Ax = 0_{\mathbb{R}^n}$ admet toujours $x = 0_{\mathbb{R}^p}$ comme solution.*

Exemple V.2. *Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour déterminer son noyau, il suffit de résoudre*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} Ker(D) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / \quad x_2 = 0; \quad x_2 + x_3 = 0\} \\ & \{(u, 0, -u) \quad \forall u \in \mathbb{R}\} \\ & \{u(1, 0, -1) \quad \forall u \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Définition V.3. *On appelle dimension du noyau de A, noté $dim(Ker(A))$, le nombre de vecteurs linéairement indépendants nécessaire pour décrire tous les éléments de l'ensemble.*

Dans l'exemple précédent, tous les élements du noyau s'écrivent comme $u(1, 0, -1)$ (un seul vecteur est donc nécessaire pour décrire l'ensemble). La dimension du noyau est donc $dim(Ker(D)) = 1$

Soit A une matrice d'ordre (n, p).

Définition V.4. *On appelle rang de A, noté $rang(A)$ le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) de A linéairement indépendants.*

Exemple V.3.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le rang de S est 4. En effet les 4 vecteurs ligne $(1, -1, -1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, -1, 0)$, $(0, 0, 1, -1, 0)$ *et* $(0, 0, 0, 1, -1)$ *sont linéairement indépendants.*

Soit A une matrice d'ordre (n, p).

Théorème V.1. *Théorème du rang*

$$rang(A) + dim(Ker(A)) = p$$

VI Déterminant et rang d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.
Notons A_{ij} la sous matrice A_{ij} obtenue à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j.

Définition VI.1. *On appelle déterminant d'une matrice A de $M_{(n)}(\mathbb{R})$ un nombre noté* $\det A$ *ou encore* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ *que l'on calcule de la façon suivante :*

pour une matrice 1×1

$$\det A = a_{11}$$

pour une matrice 2×2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

pour une matrice d'ordre > 2*, on développe suivant une ligne ou une colonne : par exemple suivant la ligne i*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & & & & . \\ a_{i1} & & & & & a_{in} \\ . & & & & & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in} \det A_{in}$$

Remarque VI.1. *En dimension 3, on peut utiliser la règle de Sarrus (en n'oubliant pas qu'elle ne s'applique pas à un autre ordre).*

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd.$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

Théorème VI.1.

1. *Si une colonne (ou ligne) est nulle, alors* $\det A = 0$.
2. *Si deux colonnes (ou lignes) sont égales, alors* $\det A = 0$.
3. *Si on échange deux colonnes (ou lignes), on multiplie* $\det A$ *par -1.*

4. $$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & \cdot\ \cdot\ \cdot & c_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} c_1 & \cdot & c_i+\lambda c_j & \cdot & c_n \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1i}+\lambda a_{1j} & \cdot & a_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdot & a_{ni}+\lambda a_{nj} & \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall j \neq i$$

5. $\det(c_1, \cdots, b + \lambda c_i, \cdots, c_n) = \lambda \det(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_n) + \det(c_1, \cdots, b, \cdots, c_n)$.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -18$$

Théorème VI.2.

1. $\det I_n = 1$.
2. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments qui sont sur sa diagonale.*
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
4. $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$.
5. $\det({}^tA) = \det A$.

Définition VI.2. *Le rang de A est égal au plus grand ordre des sous-matrices carrées de A de déterminant non nul.*

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\det(A) = -18 \neq 0$, alors la matrice A est de rang 3.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Comme $\det(B) = 0$ (car la deuxième colonne est nulle), la matrice B est de rang strictement inférieur à 3. De plus, tous les sous déterminants d'ordre 2 étant nuls (il y en a 9)

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = 0,$$

le rang de B est égal à 1. En revanche, le rang de la matrice C ci dessous est 2.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

VII Inverse d'une matrice carrée

VII.1 Définitions et théorèmes

Définition VII.1. *Soit $A \in M_{(n)}(\mathbb{R})$. On dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in M_{(n)}(\mathbb{R})$ telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

On appelle B matrice inverse de A et on la note A^{-1}.

Théorème VII.1. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ *A est inversible.*
De plus si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Définition VII.2. *On appelle matrice des co-facteurs $com(A)$ la matrice de coefficients*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Théorème VII.2. *Si* $\det A \neq 0$ *alors* $A^{-1} = (\det A)^{-1}\ {}^t com(A)$.

VII.2 Méthodes de calcul de l'inverse

Méthode utilisant la matrice des co-facteurs :

Exemple : calcul de l'inverse de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det B = -2 \quad com(B) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^t com(B) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où $B^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode : inversion d'un système

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+2y+3z=b \\ y=c \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=a-c \\ y=c \\ x+3z=b-2c \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=a-c \\ y=c \\ 2z=b-2c-(a-c) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+2y+3z=b \\ y=c \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=a-c \\ y=c \\ 2z=b-a-c \end{cases} \iff \begin{cases} x+z=a-c \\ y=c \\ z=\dfrac{b-a-c}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+2y+3z=b \\ y=c \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{3}{2}a-\dfrac{1}{2}b-\dfrac{1}{2}c \\ y=c \\ z=\dfrac{b-a-c}{2} \end{cases}$$

On sait que si B est inversible alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'où $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Méthode du pivot de Gauss-Jordan :

On associe à la matrice A à inverser la matrice I_n. On transforme simultanément A et I_n par les mêmes applications élémentaires, seulement sur les lignes (ou seulement sur les colonnes). Le but est de transformer A en I_n, le transformé de I_n correspondant est l'inverse de A.

Exemple : calcul de l'inverse de B.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 = 1/2 L_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \text{d'où } B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Explications : les opérations élémentaires sur les lignes reviennent à multiplier à gauche la matrice par une matrice élémentaire. Par exemple la première opération (permutation des lignes 2 et 3) peut s'écrire par $P_1 B$ où P_1 est la matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les 7 opérations élémentaires successives sur B et I s'écrivent donc

$$P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 B \,|\, P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 I$$

Or comme $P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1 B = I$ et $B^{-1} B = I$, on en déduit que

$$B^{-1} = P_7 P_6 P_5 P_4 P_3 P_2 P_1$$

.

Chapitre 5

Equations différentielles : rappels

On rappelle ici quelques types classiques d'équations différentielles du premier ordre et du second ordre pour lesquelles on sait ramener le calcul des solutions à des calculs de primitives.

I Equations du premier ordre

I.1 Equations à variables séparées

a) Equations du type $y'(t) = f(t)$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est continue.
Les solutions sont données par $y(t) = F(t) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où F est une primitive de f sur I.

b) Equations du type $y'(t) = g(y)$ où $g : J \to \mathbb{R}$ est continue.
-Notons y_j les racines de $g(y) = 0$ dans l'intervalle J. Alors $y(t) = y_j$ est une solution évidente de l'équation.
-Dans $\{(t, y); g(y) \neq 0\}$, on a

$$y'(t) = g(y) \quad \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = dt.$$

Les solutions sont données par $G(y) = t + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et où G est une primitive de $1/g$ sur chaque ouvert $]y_j; y_{j+1}[$. Comme $G' = 1/g$ et que g est de signe constant sur $]y_j; y_{j+1}[$ (car g est continue et ne s'annule pas), on en déduit que G est une application continue strictement monotone sur $]y_j; y_{j+1}[$. Par conséquent G étant bijective sur cet intervalle, on peut exprimer y en fonction de t :

$$y(t) = G^{-1}(t + \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Cas général des équations à variables séparées $y'(t) = f(t)g(y)$ où f et g sont continues.
-Si $g(y_j) = 0$, alors la fonction constante $y(t) = y_j$ est une solution évidente de l'équation.
-Dans $\{(t, y); g(y) \neq 0\}$, on a

$$y'(t) = f(t)g(y) \quad \Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(t)dt.$$

Les solutions sont données par $G(y) = F(t) + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et F (resp. G) est une primitive de f (resp. $1/g$). Comme G est une application strictement monotone sur $]y_j; y_{j+1}[$, on obtient

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemple I.1. *Pour résoudre l'équation différentielle suivante*

$$ty'(t) + 2y(t) = 0 \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi} \quad t > 0$$

C'est une équation du type $y'(t) = f(t)g(y)$, avec $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(y) = -2y$, en effet, on peut aussi l'écrire

$$y'(t) = -\frac{2y(t)}{t} \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi} \quad t > 0$$

La fonction $y(t) = 0$ est solution. Supposons $y(t) \neq 0$ et réécrivons l'équation sous la forme

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -\frac{2}{t}.$$

En intégrant on obtient

$$\ln|y(t)| = -2\ln t + C.$$

En composant avec la fonction exponentielle (réciproque de ln*), on obtient que (toutes) les solutions de l'équation s'écrivent*

$$y(t) = \frac{\lambda}{t^2}.$$

(on peut enlever la valeur absolue car y ne change pas de signe : elle est soit toujours positive soit toujours négative, son signe est contenu dans $\lambda = \pm e^C$). De la condition initiale et de l'expression de y trouvée précédemment et évaluée en $t = \pi$, on tire $\lambda = \pi$. La solution du problème de départ est donc

$$y(t) = \frac{\pi}{t^2}$$

I.2 Equations linéaires

Ce sont les équations de la forme

$$(E) : y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.
Supposons que l'on connaisse une solution particulière y_1 de (E), alors par soustraction on obtient :

$$y'(t) - y_1'(t) = a(t)(y(t) - y_1(t))$$

c'est-à-dire que $z(t) = y(t) - y_1(t)$ vérifie l'équation sans second membre

$$(E0) : z'(t) = a(t)z(t).$$

Inversement, si z est solution de $(E0)$, alors $y = z + y_1$ est solution de (E).

Théorème I.1. *La solution générale de (E) s'écrit $y = y_1 + z$ où y_1 est une solution particulière de (E) et où z est la solution générale de $(E0)$.*

a) Solutions de $(E0)$
   Comme $f(t,z) = a(t)z$ est continue, de dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial z}(t,z) = a(t)$ continue, on sait que le problème de Cauchy admet une unique solution en tout point (t_0, z_0). Comme $z(t) = 0$ est solution de $(E0)$, aucune autre solution ne peut s'annuler en un point quelconque de I. On peut donc écrire

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = a(t) \quad \Leftrightarrow \ln|z(t)| = A(t) + C$$

   où A est une primitive a et $C \in \mathbb{R}$. On en déduit

$$|z(t)| = e^C \exp(A(t)).$$

   Comme z est continue et ne s'annule pas, son signe est constant. On a donc

$$z(t) = \lambda \exp(A(t)) \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

   Inversement, les fonctions définies par $z(t) = \lambda \exp(A(t))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sont solutions de $(E0)$.
   Théorème I.2. *Les solutions maximales de $(E0)$ sont de la forme $z(t) = \lambda \exp(A(t))$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$*

b) Recherche d'une solution particulière de (E)
   On peut utiliser la méthode dite de variation de la constante, c'est-à-dire que l'on cherche y_1 sous la forme

$$y_1(t) = \lambda(t)\exp(A(t)) \quad \text{où } \lambda \text{ est dérivable.}$$

En dérivant, on obtient

$$y_1'(t) = \lambda'(t)\exp(A(t)) + \lambda(t)a(t)\exp(A(t))$$

donc y_1 est solution de (E), si l'on prend

$$\lambda'(t)\exp(A(t)) = b(t)$$

soit

$$\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)\exp(-A(s))ds.$$

Exemple I.2. *Pour résoudre l'équation différentielle du 1er ordre à coefficients non constants suivante*

$$xy'(x) + 2y(x) = \sin(x) \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi} \quad x > 0$$

on commence par résoudre l'équation homogène (ou sans second membre) à savoir

- *Equation homogène :*

$$xy'(x) + 2y(x) = 0.$$

La fonction $y(x) = 0$ est solution. Supposons $y(x) \neq 0$ et réécrivons l'équation sous la forme

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{2}{x}.$$

En intégrant on obtient

$$\ln|y(x)| = -2\ln x + C.$$

En composant avec la fonction exponentielle (réciproque de $\ln$), on obtient que (toutes) les solutions de l'équation homogène s'écrivent

$$y_h(x) = \frac{\lambda}{x^2}.$$

(on peut enlever la valeur absolue car y_h ne change pas de signe : elle est soit toujours positive soit toujours négative, son signe est contenu dans $\lambda = \pm e^C$).

- *Equation complète :*

$$xy'(x) + 2y(x) = \sin(x)$$

on cherche maintenant une solution particulière de l'équation complète par la méthode dite de variation de la constante ie on cherche $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x^2}$ (ie la constante de y_h devient une fonction de x). On calcule la dérivée de y_p : $y_p'(x) = \frac{\lambda'(x)x^2 - 2x\lambda(x)}{x^4}$. On substitue dans l'équation :

$$xy_p'(x) + 2y_p(x) = x\frac{\lambda'(x)x^2 - 2x\lambda(x)}{x^4} + 2\frac{\lambda(x)}{x^2}.$$

Après simplification, on obtient

$$\lambda'(x) = x\sin(x).$$

On calcule une primitive de λ (en intégrant par parties ici)

$$\lambda(x) = \sin(x) - x\cos(x).$$

Par conséquent, on a

$$y_p(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}.$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2} + \frac{\lambda}{x^2}$$

- *Prise en compte de la condition initiale $y(\pi) = \frac{1}{\pi}$*

  De la condition initiale et de l'expression de y trouvée précédemment et évaluée en $x = \pi$, on tire $\lambda = 0$.

La solution du problème de départ est donc

$$y(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}$$

I.3 Equations se ramenant à des équations linéaires

a) Equations de Bernoulli
Ce sont les équations de la forme

$$(E) : y'(t) = p(t)y(t) + q(t)y^{\alpha}(t)$$

où $\alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ et $p, q : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.
On se place dans $\{(t,y); y > 0\}$, en multipliant par $y^{-\alpha}$, on obtient

$$(E) \quad \Leftrightarrow y^{-\alpha}\frac{dy}{dt} = p(t)y^{1-\alpha} + q(t).$$

Posons $z = y^{1-\alpha}$ alors $\frac{dz}{dt} = (1-\alpha)\frac{dy}{dt}y^{-\alpha}$, d'où

$$(E) \quad \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dt} = p(t)z + q(t).$$

On est donc ramené à une équation linéaire en z.

II Equations du second ordre à coefficients constants

Ce sont des équations de la forme :

$$(E) : \quad ay'' + by' + cy = f(t)$$

où a, b, c sont des constantes (a non nulle) et f une fonction continue.
Nous ne donnons ici que la méthode : comme pour les équations du 1er ordre, on résout l'équation sans second membre et on cherche ensuite une solution particulière de l'équation (E).

a) Solutions de l'équation sans second membre (ESSM) $(E0)$

$$(E0) : \quad ay'' + by' + cy = 0$$

On cherche les racines de l'équation caractéristique : $ar^2 + br + c = 0$. Soit Δ son discriminant.
• $\Delta > 0$: l'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2. La solution générale de $(E0)$ est :

$$y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

• $\Delta = 0$: l'équation caractéristique admet une racine doubles r_0. La solution générale de $(E0)$ est :

$$y(t) = (At + B)e^{r_0 t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

• $\Delta < 0$: l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. La solution générale de $(E0)$ est :

$$y(t) = (A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))e^{\alpha t} \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes.}$$

b) Recherche d'une solution particulière de (E)
On cherche une solution particulière d'après la forme du second membre ou par la méthode de variation de la constante.

La solution générale de (E) est la somme de cette solution particulière et de la solution de l'ESSM.

Chapitre 6

Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation.

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

I Valeurs propres, vecteurs propres

I.1 Définitions

Définition I.1. *On dit que λ est une* **valeur propre** *de A si $A - \lambda I$ est non inversible, ce qui est équivalent à* $\det(A - \lambda I) = 0$.
On appelle **vecteur propre** *associé à λ le vecteur x non nul appartenant à $\mathbb{R}^n$ tel que $Ax = \lambda x$.*

Définition I.2. *On appelle* **polynôme caractéristique** *de la matrice A le polynôme de degré n :*

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Les racines (ou les zéros) du polynôme caractéristique sont les valeurs propres de A.
Si λ est un zéro de P de multiplicité k, on dit que la valeur propre λ est de multiplicité k.

Remarque I.1. $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n+1} tr(A) \lambda^{n-1} + ... + \det(A)$ *où $tr(A)$ est la trace de A ie la somme des éléments diagonaux de A.*

I.2 Exemples

Exemple 1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = (\lambda - 1)(2 - \lambda)(\lambda - 3)$$

donc A admet 3 valeurs propres de multiplicité 1 :

$$\lambda_1 = 1; \;\; \lambda_2 = 2; \;\; \lambda_3 = 3.$$

Exemple 2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est :

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda - 4)^2$$

donc A admet 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ de multiplicité 1, $\lambda_2 = 4$ de multiplicité 2.

II Diagonalisation

II.1 Définitions et théorèmes

Définition II.1. *Dans le cas où il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale, on dit que la matrice A est diagonalisable. Une telle matrice P est appelée matrice de passage.*

$$P^{-1}AP = D.$$

Notons u_j la j^{eme} colonne de P et d_j l'élément diagonal de la j^{eme} ligne de D.
Alors $AP = PD$ est équivalente à $Au_j = d_j u_j$ pour $1 \leq i \leq n$.

Les d_j sont les valeurs propres de A et les u_j sont les vecteurs propres associés aux d_j.

Remarque II.1. *Une matrice diagonale a pour valeurs propres ses éléments diagonaux avec leur ordre de multiplicité.*

Théorème II.1. *Soit A une matrice carrée d'ordre n.*
A est diagonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique admet n racines λ_i (répétées suivant leur multiplicité k_i) et pour toute valeur propre λ_i de A :

$$n - rang(A - \lambda_i I) = k_i$$

Corollaire II.1. *Si toutes les valeurs propres de A sont distinctes alors A est diagonalisable.*

Théorème II.2. *Toute matrice symétrique est diagonalisable.*

II.2 Méthode pratique de diagonalisation

- Calculer le polynôme caractéristique en cherchant à le factoriser.
- Soit le polynôme n'admet pas que des racines réelles alors A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
- Soit le polynôme n'admet que des racines réelles
  - Si les racines sont toutes distinctes alors A est diagonalisable,
  - sinon A est diagonalisable si et seulement si pour chaque valeur propre λ_i de multiplicité $k_i \geq 2$: $n - rang(A - \lambda_i I) = k_i$
- Si A est diagonalisable
  chercher pour chaque valeur propre les vecteurs propres (qui constitueront les colonnes de la matrice de passage).

II.3 Application

Exemple 0

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$P(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 17)$$

$(\lambda^2 - 6\lambda + 17)$ n'admet pas de racines réelles, donc A_0 n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

On a vu que A_1 admettait 3 valeurs propres distinctes de multiplicité 1

$$\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = 2, \;\; \lambda_3 = 3$$

donc A_1 est diagonalisable.

Recherche des vecteurs propres

Remarque II.2. *Si u est vecteur propre associé à la valeur propre λ, alors $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, $A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha(\lambda u) = \lambda(\alpha u)$, αu est aussi vecteur propre.*

Pour chaque valeur propre, on résout un système linéaire

- vecteur propre ${}^t u_1 = (x, y, z)$ associé à λ_1
  $A_1 u_1 = \lambda_1 u_1$ soit encore $(A_1 - \lambda_1)u_1 = 0$ ce qui s'écrit

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 5y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y = 2z \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions est $E_{\lambda_1} = \{(x, 2x, x); \forall x \in \mathbb{R}\}$.
  On peut choisir par exemple : ${}^t u_1 = (1, 2, 1)$.
- vecteur propre ${}^t u_2 = (x, y, z)$ associé à λ_2
  $A_1 u_2 = \lambda_2 u_2$ soit encore $(A_1 - \lambda_2)u_2 = 0$ ce qui s'écrit

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 6y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions est $E_{\lambda_2} = \{(x, x, 0); \forall x \in \mathbb{R}\}$.
  On peut choisir par exemple : ${}^t u_2 = (1, 1, 0)$.
- vecteur propre ${}^t u_3 = (x, y, z)$ associé à λ_3
  ce qui s'écrit

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 7y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y = z \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions est $E_{\lambda_3} = \{(x, 2x, 2x); \forall x \in \mathbb{R}\}$.
  On peut choisir par exemple : ${}^t u_3 = (1, 2, 2)$.

Conclusion : $A_1 = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A_2 admet 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 2$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = 4$ de multiplicité 2.
Ce n'est pas λ_1 qui empêche la diagonalisation car c'est une racine simple.

Mais $rang(A_2 - \lambda_2 I) = 2$ car on peut trouver un déterminant 2×2 non nul, par exemple : $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 \neq 0$.

Par conséquent, $3 - rang(A_2 - \lambda_2 I) \neq 2$ et la matrice n'est donc pas diagonalisable. (Si on cherche les vecteurs propres associés à λ_2, on trouve un sous-espace propre E_{λ_2} de dimension 1 c'est-à-dire engendré par un seul vecteur propre).

Exemple 3

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & 10 \\ -5 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

A_3 admet 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 3$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = -2$ de multiplicité 2.
Comme $3 - rang(A_3 - \lambda_2 I) = 3 - 1 = 2$, A_3 est diagonalisable.

Conclusion : $A_3 = PDP^{-1}$ avec par exemple

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple 4

$$A_4 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

A_4 est symétrique, donc elle est diagonalisable. Elle admet 2 valeurs propres : $\lambda_1 = 3$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = -3$ de multiplicité 2.

Conclusion : $A_4 = PDP^{-1}$ avec par exemple

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$