Nombres décimaux, développement décimal d'un rationnel

Renaud Coulangeon

30 septembre 2009

1 Développement décimal des rationnels.

Théorème 1.1. *Soit* $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. *Il existe une unique suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant :*

1. $a_0 \in \mathbb{Z}$.
2. $a_n \in \{0, \cdots, 9\}$ *pour* $n \geq 1$.
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}. \tag{1}$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée le développement décimal de x. On écrit* $x = a_0, a_1 a_2 \cdots$.

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer dans toute la démonstration que b **est strictement positif** (on peut même rajouter cette hypothèse dans l'énoncé...). On construit récursivement deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : a_0 et r_0 sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b, autrement dit

$$a = ba_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b$$

puis pour tout $n \geq 1$, a_n et r_n sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $10r_{n-1}$ par b, autrement dit

$$10r_{n-1} = ba_n + r_n, \quad 0 \leq r_n < b$$

On vérifie (récurrence), que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier r_n est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b, et que le quotient de cette division est l'entier $q_n := \sum_{i=0}^{n} a_i 10^{n-i}$. Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$10^n a = b\left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{n-i}\right) + r_n, \quad 0 \leq r_n < b$$

autrement dit

$$0 \leq r_n = 10^n a - b \left(\sum_{i=0}^{n} a_i 10^{n-i} \right) < b$$

soit, en divisant par $10^n b$

$$0 \leq \frac{a}{b} - \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \right) < \frac{1}{10^n}$$

ce qui équivaut à (1). Clairement, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite vérifie donc (1), (2) et (3).

L'unicité du développement décimal se justifie de la façon suivante : si $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une deuxième suite vérifiant (1), (2) et (3), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $q'_n := \sum_{i=0}^{n} a'_i 10^{n-i}$ est le quotient de la division euclidienne de $10^n a$ par b, ce qui permet (unicité du quotient de la division euclidienne) de conclure récursivement que $a'_n = a_n$ pour tout n. $\square$

Le développement décimal d'un rationnel jouit de la propriété remarquable suivante :

Proposition 1.1. *Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, avec $b > 0$, de développement décimal $x = a_0, a_1 a_2 \cdots$. Alors, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ultimement périodique, ce qui signifie qu'il existe $N \geq 1$ et $T \geq 1$ tel que*

$$\forall n \geq N, a_{n+T} = a_n.$$

De plus, les nombres décimaux sont caractérisés par le fait que leur développement décimal est fini, i.e. *$\exists N \in \mathbb{N} \mid n \geq N \Rightarrow a_n = 0$.*

Preuve. En reprenant les notations de la démonstration précédente, et en constatant qu'il y a b restes possibles pour la division euclidienne d'un entier par b, on conclut qu'il existe deux entiers distincts s et t, mettons $s > t$, tels que $r_s = r_t$. Par définition même de la suite r_n, il suit que $r_{s+k} = r_{t+k}$ pour tout $k \geq 0$, puis que $a_{s+k} = a_{t+k}$ pour tout $k \geq 0$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc périodique à partir du rang t, et sa période est au plus égale à b.

La caractérisation des décimaux par la finitude de leur développement décimal se démontre de la façon suivante : tout d'abord, si $x = \frac{a}{b}$ est décimal, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $10^n \frac{a}{b}$ soit entier pour tout $n \geq N$. Par conséquent, r_n est nul pour $n \geq N$, puisque c'est le reste de la division euclidienne de $10^n a$ par b, et a_n également, pour $n \geq N+1$. Inversement, si le développement décimal d'un rationnel x vérifie le propriété qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que a_n soit nul pour tout $n \geq N$, alors on conclut grâce à la relation (1) que

$$0 \leq x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_N}{10^N} \right) < \frac{1}{10^n}$$

pour tout $n \geq N$. Ceci n'est possible que si $x - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_N}{10^N} \right) = 0$, car le membre de droite de l'inégalité ci-dessus peut être rendu arbitrairement petit pour n arbitrairement grand (en toute rigueur, on a besoin du fait que $\mathbb{Q}$ est *archimédien* pour conclure, ce qui se montre facilement avec la définition de la relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$...). Ainsi $x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_N}{10^N}$ est décimal. $\square$

On peut préciser la proposition précédente en déterminant explicitement les entiers N et T de la façon suivante :

Proposition 1.2. *Soit $x = \frac{p}{q}$ un rationnel **non décimal** avec p et q étrangers. On pose $q = 2^\alpha 5^\beta q_1$, avec q_1 étranger à 10, et l'on note $\gamma := max(\alpha, \beta)$ et $\nu :=$ l'ordre de 10 dans le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z})^\times$, i.e. le plus petit entier naturel non nul tel que $10^\nu \equiv 1 \mod q_1$. On a alors :*

$$x = a_0, a_1 \cdots a_\gamma \overline{a_{\gamma+1} \cdots a_{\gamma+\nu}},$$

la notation $\cdots a_\gamma \overline{a_{\gamma+1} \cdots a_{\gamma+\nu}}$ signifiant que le motif $\overline{a_{\gamma+1} \cdots a_{\gamma+\nu}}$ se répète à l'infini. Qui plus est, ν est le plus petit entier vérifiant cette propriété, i.e. tout entier m tel que le développement de x se termine par un motif récurrent de longueur m est un multiple de ν.

*Si x est **décimal**, son développement est fini d'après la proposition précédente.*

Preuve. Il revient au même de montrer que le développement de x ou de $10^\gamma x$ est ultimement périodique (la multiplication par 10^γ consiste à "décaler" la virgule de γ positions vers la droite). On se ramène ainsi sans difficulté au cas où q est étranger à 10, *i.e.* $\gamma = 0$. Dans ce cas, 10 est inversible modulo q, et l'on note ν son ordre dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$. On doit alors montrer que

$$x = a_0, \overline{a_1 \cdots a_\nu}.$$

On écrit

$$x = a_0, a_1 \cdots a_\nu \cdots \tag{2}$$

$$10^\nu x = a_0 a_1 \cdots a_\nu, a_{\nu+1} \cdots \tag{3}$$

La condition $10^\nu \equiv 1 \mod q$ implique que $10^\nu x - x = kq\frac{p}{q} = kp$ appartient à $\mathbb{Z}$, ce qui, vu les équations (2) et (3) ci-dessus, implique que $a_1 = a_{\nu+1}, a_2 = a_{\nu+2}$, etc. Inversement, il est clair, en "retournant" le raisonnement précédent, que si $x = a_0, \overline{a_1 \cdots a_m}$, on doit avoir $10^m - 1 \equiv 0 \mod q$, donc ν divise m. $\square$

Exemple : 10 est d'ordre 6 dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$, ce qui permet d'affirmer *a priori* que le développement décimal d'un rationnel de la forme $\frac{a}{7}$, a étranger à 7, est périodique de période 6. Par exemple :

$$\frac{22}{7} = 3,142857142857 \cdots \ , \ \frac{3}{7} = 0,428571428571 \cdots \ , \text{ etc.}$$

Pour plus de détails sur ces questions, voir par exemple [1], chapitre IX.

2 Est-ce que 0.9999... = 1 ?

La seule réponse valable, eu égard au paragraphe précédent, est : "0.9999... **n'est pas** le développement décimal d'un rationnel ! ". En effet, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, avec $b > 0$, de développement décimal $x = a_0, a_1 a_2 \cdots$. Alors, les termes de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peuvent pas être tous égaux à 9 à partir d'un certain rang, autrement dit*

$$\forall N \geq 1, \exists n \geq N \mid a_n \neq 9. \tag{4}$$

Preuve. Par l'absurde : on suppose qu'il existe N tel que $\forall n \geq N, a_n = 9$. Pour tout $n \geq N$, les inégalites (1) s'écrivent :

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i 10^{-i} + 9 \sum_{i=N}^{n} 10^{-i} \leq x < \sum_{i=0}^{N-1} a_i 10^{-i} + 9 \sum_{i=N}^{n} 10^{-i} + 10^{-n}$$

ce qui, après calcul, peut se réécrire

$$1 - 10^{-n+N-1} \leq 10^{1-N}(x - \sum_{i=0}^{N-1} a_i 10^{-i}) < 1$$

ou bien encore

$$0 < 1 - 10^{1-N}(x - \sum_{i=0}^{N-1} a_i 10^{-i}) \leq 10^{-n+N-1}$$

ce qui est absurde : il n'existe pas de nombre rationnel *strictement* positif qui soit inférieur à 10^{-n+N-1} pour tout $n \geq N$ puisque pour n arbitrairement grand 10^{-n+N-1} est arbitrairement petit (pour être tout à fait rigoureux, il faut utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est *archimédien* , voir plus haut). $\square$

Attention cependant, certains auteurs autorisent les développements décimaux du type 0.9999... (c'est le cas notamment dans [2]). Ces auteurs énoncent en général une proposition un peu plus faible que notre Proposition 1.1. précisément, le développement décimal $a_0, a_1 a_2 \cdots$ d'un rationnel x est seulement assujetti aux inégalités

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq x \leq a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}. \tag{5}$$

ce qui est évidemment plus faible que (1) (inégalité large à droite). Dans ces conditions, on n'a plus **unicité** du développement décimal. Certains rationnels ont deux développements décimaux : ce sont précisément les nombres décimaux, qui ont un développement *propre* (qui vérifie (1)) et un développement *impropre*.

Exemple : $x = \frac{1}{4}$ est un décimal de développement propre $0,25$ et de développement impropre $0,2499999....$

Une dernière remarque : on peut montrer (exercice...) que toute suite $(a_n)_{\in \mathbb{N}}$ ultimement périodique vérifiant les propriétés (1) et (2) de la Proposition (1.1) est le développement décimal (éventuellement impropre) d'un rationnel, et même le développement décimal *propre* d'un rationnel si l'on suppose en outre que la suite $(a_n)_{\in \mathbb{N}}$ vérifie la condition (4). Si l'on oublie la propriété de périodicité, on obtient une construction possible du corps des réels, mais c'est une autre histoire...

Références

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers.* Fifth edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[2] D. Perrin, *Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie*, Cassini, Paris, 2005.