Exercice 1 On considère l'espace $E = c_0$ de suites réels convergeants à zero muni de la métrique

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n - y_y| \qquad \text{où } x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ et } y = (y_n)_{n=1}^{\infty}.$$

On definit l'opérateur $T : E \to E$ par $Tx = (1, x_1, x_2, x_3, \ldots)$. 1- Démontrer que T est une contraction stricte sur E qui ne possède pas de point fixe.
2- Est-ce que E est un espace complèt?

Exercice 2 Soient (X,d) et (Y,e) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.
1- Démontrer que l'image directe d'une suite de Cauchy $(x_n) \subseteq X$ est une suite de Cauchy en Y si f est equicontinue.
2- On suppose f equicontinue et bijectiv. Démontrer que si f^{-1} est continue et si Y est complet, alors X est complet.

Rappel: une fonction est dite equicontinue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $d(x,y) < \delta$ entraîne $e(f(x), f(y)) < \epsilon$; le δ ne dépend donc que de ϵ et pas de x ou y.

Exercice 3 Soient $p, q \in (1,\infty)$ et p', q' les exponenets duals tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Soit $(a_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum |a_{kl}|^{p'} \right]^{\frac{q}{p'}} = M < \infty.$$

Démontrer que $T : \ell^p \to \ell^q$ definie par $(Tx)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l$ est un opérateur borné.

ALTERNATIVE:

Exercice 4 Soit $(a_{kl})_{k,l\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que

$$\sup_{k\geq 1} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| < \infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} a_{kl} = 0 \quad \text{pour tout } l \geq 1.$$

Pour $x \in c_0$ on pose $(Tx)_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l$.

1- Montrer que $T : c_0 \to l_\infty$ est un opérateur borné.
2- Montrer que $T(c_{00}) \subset c_0$.
3- Conclure que $T \in \mathcal{L}(c_0)$ et calculer la norme.

Soit $S \in \mathcal{L}(c_0)$ donnée. Pour la base standard $e_n = (\delta_{nk})_{k=1}^{\infty}$ où δ signifie le symbole de Kronecker on pose $a_{kl} = (S(e_l))_k$.

4- Montrer que $\lim_{k\to\infty} a_{kl} = 0$ pour tout $l \geq 1$.

5- Montrer que $\varphi_k : c_0 \to \mathbb{C}$, $\varphi_k(x) = (Sx)_k$ est un fonctionnel linéaire, uniformément borné en $k \geq 1$. Conclure que $\sup_{k\geq 1} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| < \infty$.